บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ในการประมาณค่าแบบช่วงคุณลักษณะของช่วงความเชื่อมั่นที่ผู้วิจัยพึงประสงค์มีสองประการคือ ประการแรกต้องการให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ประมาณได้ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณด้วยความเชื่อมั่นในระดับที่ผู้วิจัยกำหนดกล่าวคือต้องเป็นช่วงความเชื่อมั่นที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นตามค่าที่กำหนด ประการที่สองต้องการให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ประมาณได้เป็นช่วงที่แคบ เพื่อที่จะนำไปอธิบายขอบเขตของค่าพารามิเตอร์ได้ดี ดังนั้นการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 3 วิธีสำหรับค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติในการวิจัยครั้งนี้จึงพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากวิธีการประมาณแต่ละวิธีเป็นเกณฑ์ในการตัดสินว่าวิธีการประมาณใดเป็นวิธีการประมาณซึ่งเหมาะสมที่สุด สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง การหาช่วงความเชื่อมั่นโดยวิธีตัวสถิติทดสอบผกผัน (invert test statistic method)[1] และรายละเอียดของวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติทั้ง 3 วิธี ที่นำมาศึกษาเปรียบเทียบกันคือ วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยค่าสัมบูรณ์ที่มากสุดของตัวสถิติสติวเดนท์ที(Mt) วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติสติวเดนท์ที(Ct) และวิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟ(CF) นอกจากนี้จะกล่าวถึงเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมีรายละเอียดต่างๆดังนี้

2.1 **การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง** (interval estimation)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และ ให้ $L(X_1,\ldots,X_n)$, $U(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวสถิติโดยที่ $L<U$ สำหรับค่า θ ใด ๆ และ

$$P\left(L\left(X_1,\ldots,X_n\right)<\tau(\theta)<U\left(X_1,\ldots,X_n\right)\right)=1-\alpha$$

โดยที่ α ไม่ขึ้นกับ θ เราเรียกช่วงสุ่มที่เกี่ยวข้องคือ (L,U) ว่า<u>ช่วงความเชื่อมั่น</u>[*] $100(1-\alpha)$ เปอร์-เซ็นต์ของ $\tau(\theta)$ $\left(100(1-\alpha)\right.$ % confidence interval for $\left.\tau(\theta)\right)$

---

[1] Casell,George and Roger L. Berger, <u>Statistical inference</u> (Watsworth and Books, 1990), p. 406-413

[*] ช่วงตัวอย่างที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างชุดใดๆ ซึ่งใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

และเรียก $(1-\alpha)$ ว่า <u>สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น</u>* (confidence coefficient) หรือระดับความเชื่อมั่น (confidence level) โดยเรียก L ว่า ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น (lower confidence limit) และเรียก U ว่า ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น (upper confidence limit)

2.2 การหาช่วงความเชื่อมั่นโดยวิธีตัวสถิติทดสอบผกผัน

วิธีตัวสถิติทดสอบผกผันเป็นวิธีการหาช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐาน ซึ่งแสดงรูปแบบความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วยตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $X_1,...,X_n$ มีการแจกแจง $N(\mu,\sigma^2)$ และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน เราต้องการหาช่วงความเชื่อมั่นของ μ เมื่อพิจารณาการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ซึ่งมีขนาดการทดสอบเท่ากับ α

จากการทดสอบไม่เอนเอียงซึ่งมีอานุภาพสูงสุดสม่ำเสมอ (uniformly most powerful test) เราทราบว่าบริเวณวิกฤตคือ

$$C(\mu_0) = \left\{\ x \ \middle|\ |\bar{x}-\mu_0| > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right\}$$

และบริเวณที่ยอมรับได้คือ

$$A(\mu_0) = \left\{\ x \ \middle|\ |\bar{x}-\mu_0| \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right\}$$

ดังนั้นสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ จะยอมรับได้ ถ้าค่า μ_0 ที่กำหนดโดยสมมติฐานสอดคล้องกับ

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $z_{\alpha/2}$ เป็น $100(1-\frac{\alpha}{2})$ เปอร์เซ็นต์ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

เนื่องจากใช้การทดสอบขนาดเท่ากับ α จึงได้ว่า

P(ความผิดพลาดแบบที่ 1) = α

และ

P(ยอมรับ H_0 | H_0 เป็นจริง) = $1-\alpha$

กล่าวคือ

$$\mathrm{P}\left\{ (\overline{\mathrm{X}} - \mathrm{z}_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq \mu_0 \leq \overline{\mathrm{X}} + \mathrm{z}_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}) \ \middle|\ \mu = \mu_0 \right\} = 1-\alpha$$

---

* ความน่าจะเป็นที่ช่วงสุ่มจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ของประชากร

โดยที่ความน่าจะเป็นของการยอมรับ H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ μ_0 ดังนั้น

$$P_\mu\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างการประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐาน ภายใต้สมมติฐานว่างโดยใช้การทดสอบขนาดเท่ากับ α คือ

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$ □

จากตัวอย่างเราสามารถศึกษาหารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างการทดสมมติฐานและการประมาณแบบช่วง โดยกำหนดให้บริเวณที่ยอมรับได้ของการทดสอบสมมติฐานหรือเซตของตัวอย่างซึ่งยอมรับสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ ในปริภูมิตัวอย่าง คือ

$$A(\mu_0) = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \;\middle|\; \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

และ ช่วงความเชื่อมั่นของ μ หรือเซตในปริภูมิพารามิเตอร์

$$C(x_1,\ldots x_n) = \left\{ \mu \;\middle|\; \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

ดังนั้นรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างการทดสอบสมมติฐานและการประมาณแบบช่วง คือ

$$(x_1,\ldots,x_n) \in A(\mu_0) \Leftrightarrow \mu_0 \in C(x_1,\ldots,x_n)$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1

ให้ $A(\theta_0)$ สำหรับแต่ละค่า $\theta_0 \in \Theta$ เป็นบริเวณที่ยอมรับได้ภายใต้การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งใช้การทดสอบขนาดเท่ากับ α และกำหนดเซต $C(X)$ สำหรับแต่ละค่า $x \in X$ ในปริภูมิพารามิเตอร์ โดย

$$C(x) = \{ \theta_0 \mid x \in A(\theta_0) \}$$

ดังนั้น เซตสุ่ม $C(X)$ เป็น $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ θ

ในทางกลับกัน ให้ $C(X)$ เป็น $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ θ และกำหนด $A(\theta_0)$ สำหรับค่า $\theta_0 \in \Theta$ ใด ๆ โดย

$$A(\theta_0) = \{ x \mid \theta_0 \in C(x) \}$$

ดังนั้น $A(\theta_0)$ เป็นบริเวณที่ยอมรับได้ ภายใต้การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งใช้การทดสอบขนาดเท่ากับ α

2.3 วิธีการประมาณค่าแบบช่วงที่ใช้ในการวิจัย

รายละเอียดที่จะนำเสนอต่อไปเป็นวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของหลายกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่มีความแปรปรวนไม่เท่ากัน

2.3.1 วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยค่าสัมบูรณ์ที่มากสุดของตัวสถิติสติวเดนท์ที (Mt)

วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยค่าสัมบูรณ์ที่มากสุดของตัวสถิติสติวเดนท์ทีนี้เป็นวิธีหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ โดยใช้รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างการประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานของค่าเฉลี่ยสำหรับสองประชากรที่มีการแจกแจงปกติ เมื่อมีความแปรปรวนไม่เท่ากัน ในการทดสอบสมมติฐานนี้ โคเฮนและแซคโรวิซ (Cohen and Sackroitz(1984)) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ (M_t) ซึ่งจอร์แดน และคริสนามรตี้ ((Jardan and Krishnamoorthy(1996)) ได้นำมาใช้หาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ โดยมีรายละเอียดต่างๆของการหาช่วงความเชื่อมั่นดังนี้

กำหนดให้ $\mathrm{T}_i = \dfrac{\overline{X}_i - \mu}{S_i/\sqrt{n}}$; i =1,..., k เป็นอิสระซึ่งกันและกัน

และ $M_t = \max\limits_i(\left|\mathrm{T}_i\right|)$

เราสามารถหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ จากอสมการ $M_t \le c$

เมื่อ c เท่ากับ $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์ของ M_t

กล่าวคือ $P(M_t \le c) = (1-\alpha)$

จากอสมการ $M_t \le c = \max\limits_i(\left|\mathrm{T}_i\right|) \le c$

จะได้ว่าอสมการ

$$\max_i(\mathrm{T}_i) \le c \text{ และ } \min_i(\mathrm{T}_i) \ge -c$$

เมื่อ $\max\limits_i(\mathrm{T}_i) \le c = \max\limits_i(\overline{\mathrm{X}}_i - c\dfrac{S_i}{\sqrt{n}}) \le \mu$

และ $\min\limits_i(\mathrm{T}_i) \ge -c = \mu \le \min\limits_i(\overline{\mathrm{X}}_i + c\dfrac{S_i}{\sqrt{n}})$

นั่นคือ

$$P\left\{\max_i(\overline{\mathrm{X}}_i - c\frac{S_i}{\sqrt{n}} \le \mu \le \min_i(\overline{\mathrm{X}}_i + c\frac{S_i}{\sqrt{n}})\right\} = 1-\alpha$$

และช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ คือ

$$\left(\max_i(\overline{\mathrm{X}}_i - c\frac{S_i}{\sqrt{n}}) , \min_i(\overline{\mathrm{X}}_i + c\frac{S_i}{\sqrt{n}}) \right)$$

เนื่องจาก $T_1,...,T_k$ เป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยมี $m_1,...,m_k$ เป็นระดับความเป็นเสรี ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้เป็นผลตัด (intersection) ของทุกช่วงความเชื่อมั่นของ

$$\left((\overline{X}_i - c\frac{S_i}{\sqrt{n}}), (\overline{X}_i + c\frac{S_i}{\sqrt{n}}) \right) \qquad ; i = 1,...,k$$

ซึ่งหาค่า c ได้จาก

$$\prod_i P(-c \le T_i \le c) = 1-\alpha$$

และ
$$1-\alpha = \prod_i (1-\alpha_i)^{1/k} = \prod_i (1-\alpha^*)$$

สามารถใช้ c_i แทน c โดยที่ค่า c_i เป็นค่าที่ทำให้ $P(\ |T_i| \le c) = (1-\alpha)^{1/k}$

$\therefore$ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ โดยวิธีการประมาณแบบช่วงด้วยค่าสัมบูรณ์ที่มากสุดของตัวสถิติสติวเดนท์ที มีรูปแบบเป็น

$$\left(\max_i(\overline{X}_i - c_i\frac{S_i}{\sqrt{n}}),\ \min_i(\overline{X}_i + c_i\frac{S_i}{\sqrt{n}}) \right)$$

เมื่อ $\overline{X}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากประชากรที่ i

S_i เป็นความแปรปรวนตัวอย่างจากประชากรที่ i

n_i เป็นขนาดตัวอย่างจากประชากรที่ i

i เป็นกลุ่มประชากรที่ i =1,..., k

c_i เป็นเปอร์เซ็นไทล์ของการแจกแจงที ที่ $100(1-\frac{\alpha^*}{2})$

และ α = 1 - $(1-\alpha^*)^k$

2.3.2 <u>วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติสติวเดนท์ที (Ct)</u>

คุณลักษณะของช่วงความเชื่อมั่นที่ดีประการหนึ่งคือ ช่วงความเชื่อมั่นที่ประมาณได้ต้องเป็นช่วงที่แคบ ซึ่งความแคบหรือกว้างของช่วงความเชื่อมั่นนั้นขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนของตัวประมาณและการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ วิธีนี้จึงพิจารณาค่าความแปรปรวนของตัวสถิติทดสอบ (T_i) โดยใช้ค่าผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติ T_i (W_i) ที่มีส่วนกลับของความแปรปรวนของตัวสถิติ T_i เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก มาคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ที่ให้ความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ตามค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้

วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติสติวเดนท์ทีซึ่งเสนอโดยแฟรเวทเทอร์ (Fairweather) ในปี ค.ศ. 1972 มีรายละเอียดต่างๆของการหาช่วงความเชื่อมั่นดังนี้

กำหนดให้ $T_i = \dfrac{\overline{X}_i - \mu}{S_i/\sqrt{n}}$ และ $u_i = \dfrac{(Var(T_i))^{-1}}{\sum_i (Var(T_i))^{-1}}$ $\qquad ; i = 1,...,k$

โดยที่ $Var(\mathrm{T}_i) = \dfrac{n_i - 1}{(n_i - 3)}$ และ $\sum_i u_i = 1 \qquad ; i = 1,\ldots,k$

ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติ T_i คือ

$$W_t = \sum_i u_i \mathrm{T}_i$$

และเราสามารถหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ได้จากอสมการ

$$|W_t| = \left|\sum_i u_i \mathrm{T}_i\right| \le b$$

เมื่อ b เท่ากับ $100(1-\dfrac{\alpha}{2})$ เปอร์เซ็นต์ของ W_t

กล่าวคือ

$$P(\left|\sum_i u_i \mathrm{T}_i\right| \le b) = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ โดยวิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติสติวเดนท์ที มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\sum_i^k u_i \bar{X}_i / (S_i / \sqrt{n_i})}{\sum_i^k u_i / (S_i / \sqrt{n_i})} \pm \frac{b}{\sum_i^k u_i / (S_i / \sqrt{n_i})}$$

เมื่อ u_i เป็นน้ำหนักที่ให้กับตัวสถิติ T_i ซึ่งใช้ทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรที่ i

$\bar{X}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากประชากรที่ i

S_i เป็นความแปรปรวนตัวอย่างจากประชากรที่ i

n_i เป็นขนาดตัวอย่างจากประชากรที่ i

i เป็นกลุ่มประชากรที่ $i = 1,\ldots,k$

และ b เป็นเปอร์เซ็นไทล์ของ W_t ที่ $100(1-\dfrac{\alpha}{2})$ ซึ่งประมาณด้วยค่า $c\mathrm{t}_v$

โดยที่ t_v เป็นเปอร์เซ็นไทล์ของการแจกแจงที ที่ $100(1-\alpha/2)$ ณ ระดับความเป็นเสรี v

$$v = 4 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \{u_i^2 / (n_i - 5)\}} \qquad ; n_i > 5$$

และ $$c = \sqrt{\frac{(v-2)/v}{\sum_i (Var(T_i))^{-1}}} \qquad ; n_i > 3$$

2.3.3 วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟ (CF)

ในการหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ของวิธีการประมาณนี้พิจารณาค่าความแปรปรวนตัวอย่างและค่าความแปรปรวนของตัวสถิติทดสอบ(F_i) โดยใช้ค่าผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติ F_i (W_f) ที่มีส่วนกลับของความแปรปรวนของตัวสถิติ F_i เป็นตัวถ่วงน้ำหนักมาคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ที่ให้ความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ตามค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้ และในการหาช่วงความเชื่อมั่นได้ใช้ตัวประมาณที่ได้จากการรวมตัวประมาณไม่เอนเอียงในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วยส่วนกลับของความแปรปรวนตัวอย่างเป็นตัวประมาณของ μ ซึ่งตัวประมาณค่าเฉลี่ยนี้ทำให้ค่าผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติ F_i (W_f) มีค่าน้อยที่สุด จึงทำให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้มีช่วงแคบกว่าการใช้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่ได้จากการรวมค่าเฉลี่ยของแต่ละประชากร

วิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟซึ่งเสนอโดย จอร์แดน และคริสนามรตี้ (Jardan and Krishnamoorthy) ในปี ค.ศ. 1996 มีรายละเอียดต่างๆของการหาช่วงความเชื่อมั่นดังนี้

กำหนดให้ $F_i = \dfrac{n_i(\bar{X}_i - \mu)^2}{S_i^2}$ และ $w_i = \dfrac{(Var(F_i))^{-1}}{\sum_i (Var(F_i))^{-1}}$

เมื่อ $Var(F_i) = \dfrac{2(n_i - 1)^2 (n_i - 2)}{(n_i - 3)^2 (n_i - 5)}$; $(n_i > 5)$

และ $\sum_i w_i = 1$; $i = 1, \ldots, k$

ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติ F_i คือ

$$W_f = \sum_i w_i F_i$$

และตัวประมาณค่าเฉลี่ยซึ่งทำให้ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟ (W_f) มีค่าน้อยที่สุด คือ

$$\hat{\mu} = \sum_i p_i \bar{X}_i$$

เมื่อ $p_i = \dfrac{(w_i n_i / S_i^2)}{\sum_i (w_i n_i / S_i^2)}$

เราสามารถหาช่วงความเชื่อมั่นได้โดยใช้ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟที่มีค่าที่น้อยที่สุด เมื่อใช้ $\hat{\mu}$ เป็นตัวประมาณได้จากอสมการ

$$W_f = \sum_i w_i F_i \le a$$

เมื่อ a เท่ากับ $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์ของ W_f

กล่าวคือ $P(W_f \le a) = (1-\alpha)$

$\therefore$ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ โดยวิธีการประมาณแบบช่วงด้วยผลรวมเชิงเส้นของตัว-สถิติเอฟ มีรูปแบบเป็น

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i \pm \sqrt{a \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k} w_i n_i / S_i^2 \right) - \left[\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i \right)^2 \right]}$$

เมื่อ w_i เป็นน้ำหนักที่ให้กับตัวสถิติ F_i ซึ่งใช้ทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรที่ i

p_i เป็นน้ำหนักที่ให้กับค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากประชากรที่ i

$\overline{X}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากประชากรที่ i

S_i เป็นความแปรปรวนตัวอย่างจากประชากรที่ i

n_i เป็นขนาดตัวอย่างจากประชากรที่ i

i เป็นกลุ่มประชากรที่ $i = 1, \ldots, k$

และ a เป็นเปอร์เซ็นไทล์ของ W_f ที่ $100(1-\alpha)$ ซึ่งประมาณด้วยค่า $dF_{k,v}$

โดยที่ $F_{k,v}$ เป็นเปอร์เซ็นไทล์ของการแจกแจงเอฟ ที่ $100(1-\alpha)$ ณ ระดับความเป็นเสรี (k, v)

$$v = \frac{4kM_2 - 2(k+2)M_1^2}{kM_2 - (k+2)M_1^2}$$

$$d = (v-2)M_1 / v$$

$$M_1 = E(W_f) = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i(n_i - 1)}{(n_i - 3)}$$

และ

$$M_2 = E(W_f)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{3w_i^2(n_i - 1)}{(n_i - 3)(n_i - 5)} + 2\sum_{i>j}^{k} \frac{w_i w_j (n_i - 1)(n_j - 1)}{(n_i - 3)(n_j - 3)}$$

2.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วง

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยที่มีความแปรปรวนไม่เท่ากัน เราต้องตรวจสอบก่อนว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการคำนวณทั้ง 3 วิธีนั้น ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือไม่ แล้วจึงนำค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจากวิธีการประมาณดังกล่าวมาเปรียบเทียบกัน โดยมีเกณฑ์ในการพิจารณาคือวิธีการประมาณใดมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดจะเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมที่สุด

2.4.1 การตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

เกณฑ์ในการตรวจสอบว่าช่วงความเชื่อมั่นจากวิธีการประมาณแบบช่วงวิธีการใดมีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือไม่นั้น ผู้วิจัยจึงอาศัยการทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติ Z ตรวจสอบ มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งทั้งหมดที่ช่วงความเชื่อมั่นคลุมค่าพารามิเตอร์ μ ในการทดลองแบบ $Ber(p)$ จำนวน n ครั้งซึ่งเป็นอิสระกัน เมื่อจำนวนครั้งการทดลอง(n)มีค่ามาก X มีการแจกแจกโดยประมาณเป็น $N(np, npq)$ และกำหนดให้ $\hat{P} = X / n$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลอง โดยที่ $\hat{P}$ มีการแจกแจกโดยประมาณเป็น $N(p, \frac{pq}{n})$ และ $(0 \leq p \leq 1)$

ดังนั้นการตรวจสอบว่าวิธีการประมาณแบบช่วงวิธีการใดมีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือไม่นั้น จึงใช้ตัวสถิติ Z ทดสอบสมมติฐาน เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.95 สมมติฐานที่ใช้ทดสอบคือ

$$H_0 : p = 0.95$$

$$H_1 : p < 0.95$$

เราจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < Z_{\alpha/2}$

$$\hat{P} < p - 1.96\sqrt{p(1-p)/n}$$

$$\hat{P} < 0.95 - 1.96\sqrt{(0.95 \times 0.05)/2000}$$

$$\hat{P} < 0.9404$$

เพราะฉะนั้น ถ้าวิธีการประมาณวิธีการใดมีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่า 0.9404 แสดงว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นตามค่าที่กำหนด

2.4.2 การหาค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

การคำนวณหาค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ทำได้โดยเมื่อคำนวณช่วงความเชื่อมั่นจากแต่ละวิธีการประมาณและตรวจสอบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์แล้ว จึงหาผลต่างระหว่างขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน(U)และขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง(L) ผลต่างที่ได้จะบวกสะสมเอาไว้แล้วจึงหาค่าเฉลี่ยเมื่อทำการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นครบ 2000 ครั้ง ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้ใช้ในการเปรียบเทียบระหว่างวิธีการประมาณต่อไป มีรูปแบบการคำนวณเป็น

$$\text{ความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น} = \frac{\sum_{i}^{2000}(U_i - L_i)}{2000}$$

2.5 คุณสมบัติและลักษณะการแจกแจงของประชากรที่ศึกษา[2]

การแจกแจงปกติ(Normal Distribution)

การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงต่อเนื่องที่มีความสำคัญอย่างมากในการอนุมานสถิติและเป็นการแจกแจงที่ใช้อธิบายข้อมูลที่เกิดขึ้นโดยทั่วไปทางธรรมชาติ การแจกแจงปกติค้นพบโดย อับราฮัม เดอมูลร์ (Abrahom De Movire : 1667-1754) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ต่อมาลาปลาซ (laplace : 1749 -1827) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ได้นำมาประยุกต์ใช้ในทางด้านสังคมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ และต่อมานักคณิตศาสตร์เยอรมัน เกาส์ (Gauss :1776 -1855) ได้นำไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (error) โดยการวัดซ้ำ ๆ ในกลุ่มที่มีขนาดคงเดิมและพบว่าการแจกแจงได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ซึ่งการแจกแจงปกติอาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Gaussian Distribution มีฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf) ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right\} \quad ; -\infty < x < \infty \text{ , } \sigma^2 > 0$$

เมื่อ σ^2 = ความแปรปรวนของประชากร

และ μ = ค่าเฉลี่ยของประชากร

การแจกแจงปกติมีคุณสมบัติดังนี้

1. ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำ (bell shaped)

2.เส้นแบ่งครึ่งโค้งอยู่ที่จุดซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล และเส้นนี้แบ่งพื้นที่ทั้งสองข้างสมมาตรกัน (Symmetry)

3. มีค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมเป็นจุดเดียวกันคือเท่ากับ μ

4. มีความโด่ง (Kurtosis) ของเส้นโค้งเท่ากับ 3 ซึ่งเรียกว่าเมโซเคอร์ติค (Mesokurtic) และจุดเปลี่ยนเว้าทั้งสองข้างอยู่ ณ ตำแหน่ง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

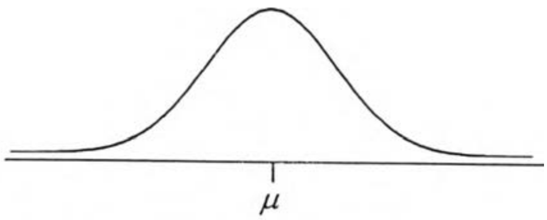
5. ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับศูนย์

6. ปลายของเส้นโค้งจะเข้าใกล้แกน (x) เมื่อ x มีค่าห่างจาก μ ออกไปแต่จะไม่ติดกับแกนทั้งสองข้าง

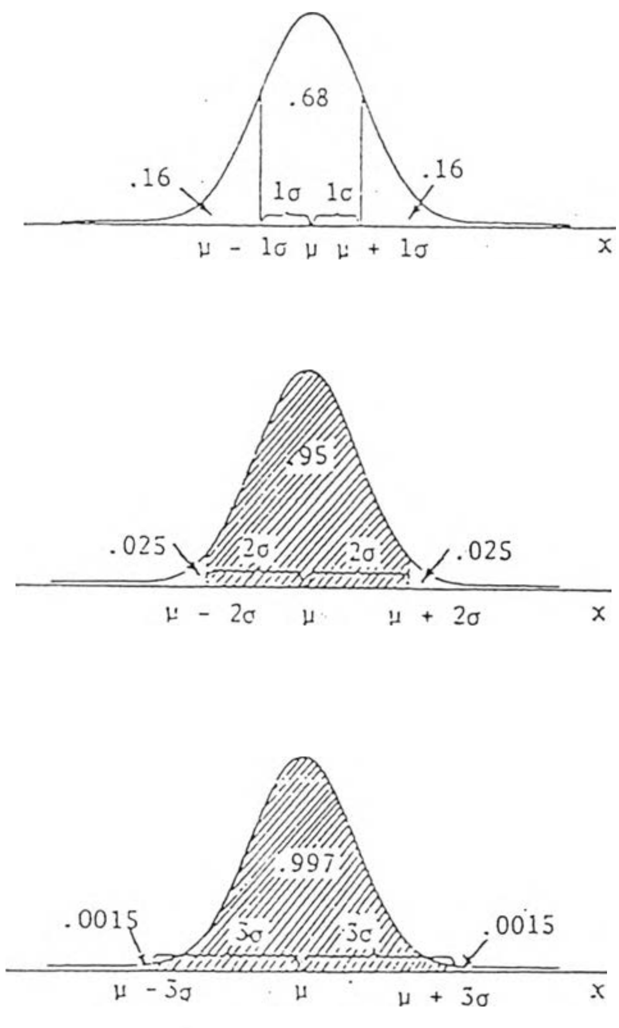
7. ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากแกน x ไปยังเส้นโค้ง โดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากค่าเฉลี่ย ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาด้วยระยะหนึ่งเท่า สองเท่าและสามเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแล้ว พื้นที่ที่ปิดกั้นเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68.2%, 95.4% และ99.7% ของพื้นที่ทั้งหมด ตามลำดับ ดูภาพที่ 2.1,2.2,2.3 และ 2.4 ประกอบ

---

[2]นันทวัน บำรุงสวัสดิ์,"การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ย เมื่อความแปรปรวนประชากรไม่เท่ากัน" . วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิตสาขาวิชาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,2533 หน้า 13-14



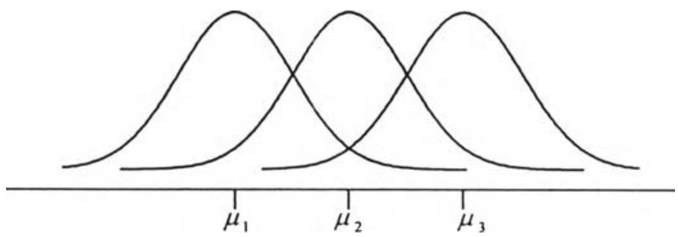
ภาพที่ 2.5.1 แสดงเส้นโค้งการแจกแจงปกติ



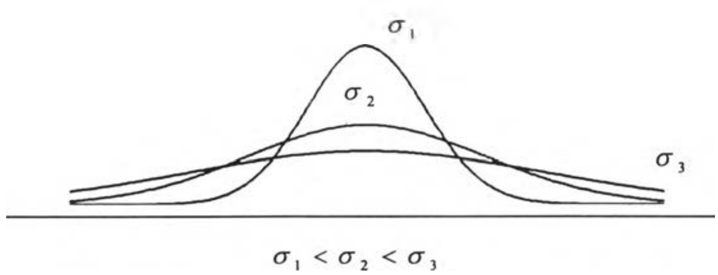
ภาพที่ 2.5.2[3] แสดงพื้นที่ 68% 95% และ99.7% ของเส้นโค้งปกติ

---

[3]นันทวัน บำรุงสวัสดิ์ "การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ย เมื่อความแปรปรวนประชากรไม่เท่ากัน", วิทยา-นิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิตสาขาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,2533 หน้า 16



ภาพที่ 2.5.3 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีมีค่าเฉลี่ยต่างๆกัน แต่มีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน



ภาพที่ 2.5.4 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างๆกันแต่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน

2.6 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ของสองกลุ่มประชากร เมื่อไม่ทราบความแปรปรวน โดยที่ความแปรปรวนไม่เท่ากันนั้น มีแนวความคิดมาจากการหาตัวประมาณไม่เอนเอียงสำหรับ μ ของสองกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติและมีความแปรปรวนไม่เท่ากัน ซึ่งตัวประมาณนี้ได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของตัวประมาณไม่เอนเอียงที่แต่ละค่าใช้ประมาณค่า μ โดยในปี ค.ศ.1959 เกรยบิล และดีล (Graybill and Deal) ได้ให้นิยามของตัวประมาณที่ได้จากผลรวมเชิงเส้นของตัวประมาณที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วยน้ำหนักแบบสุ่ม และตัวประมาณที่ได้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงดีกว่าอย่างสม่ำเสมอ (uniformly better unbiased estimator) กล่าวคือตัวประมาณนี้มีความแปรปรวนน้อยกว่าความแปรปรวนของตัวประมาณไม่เอนเอียงทั้งสองค่า นอกจากนี้ เกรยบิล และดีล ได้ศึกษาหาตัวประมาณค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงปกติ โดยตัวประมาณที่ได้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงดีกว่าสม่ำเสมอเมื่อใช้ขนาดตัวอย่างที่ได้จากทั้งสองประชากรมากกว่า 9 หรือเมื่อขนาดตัวอย่างจากประชากรใดประชากรหนึ่งเท่ากับ 9 และขนาดตัวอย่างจากอีกประชากรหนึ่งมากกว่า 17 สำหรับความแปรปรวนของตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่มีการถ่วงน้ำหนักนั้น ได้มีการศึกษาที่เกี่ยวข้องคือ ในปี ค.ศ. 1953 ไมเออร์ (Meier) หาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่มีการถ่วงน้ำหนักโดยถ่วงน้ำหนักด้วยอัตราส่วนของส่วนกลับของความแปรปรวนกับผลรวมของส่วนกลับความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนของตัวประมาณที่ได้เป็นค่าโดยประมาณ และไมเออร์เสนอแนวทางหาช่วงความเชื่อมั่นโดยประมาณ โดยใช้ค่าเปอร์เซ็นไทล์ของการแจกแจงที ณ ระดับความเป็นเสรีที่ได้จากการคำนวณคูณกับความแปรปรวนโดยประมาณใช้เป็นความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น นอกจากตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบ เกรยบิล และดีล (μ_{GD}) มีการศึกษาพัฒนาหาตัวประมาณค่าเฉลี่ยของสองหรือมากกว่าสองประชากร ซึ่งพิจารณาหลักเกณฑ์การคัดเลือกตัวประมาณประกอบเพิ่มเติมด้วย โดยในปี ค.ศ.1974 โคเฮน (Cohen) และแซคโรวิซ (Sackrowitz) ศึกษาหาตัวประมาณค่าเฉลี่ยของสองประชากรที่มีการแจกแจงปกติและเสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ย ในกรณีที่ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากันและใช้ฟังก์ชันความสูญเสียเป็นเกณฑ์คัดเลือกตัวประมาณ ตัวประมาณที่ได้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงและเป็นตัวประมาณมินิแมกซ์ เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างมากกว่าหรือเท่ากับ 5 สำหรับช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย โคเฮน และแซคโรวิซ ได้ปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่น จากช่วงความเชื่อมั่นที่ทราบความแปรปรวนของประชากรใดประชากรหนึ่ง ซึ่งมีรูปแบบของช่วงความเชื่อมั่นเป็นค่าเฉลี่ยของประชากรที่ทราบความแปรปรวนบวกหรือลบด้วยค่าคงที่ $(\bar{x} \pm h)$ และมีความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 (α) เท่ากับ $[\Phi(n^{1/2}h) - \Phi(-n^{1/2}h)]$ โดยที่ Φ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน และ h เป็นค่าคงที่ของความแปรปรวนที่ทราบค่า โดย

การปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นนั้นทำในส่วนการหาตัวประมาณแบบจุดใหม่ จากผลงานวิจัยที่กล่าวมานั้นเป็นวิธีหาช่วงความเชื่อมั่นโดยวิธีการปกติคือต้องทราบค่าประมาณแบบจุดของค่าเฉลี่ยร่วม (common mean) และความแปรปรวนของตัวประมาณหรือการแจกแจงของตัวประมาณนั้น สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่ได้จากผลรวมเชิงเส้นของค่าเฉลี่ยแล้ว การหาช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง เป็นเรื่องที่ยากที่จะหารูปแบบการแจกแจงหรือความแปรปรวนที่แท้จริง จึงได้มีการศึกษาหาช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้การรวมช่วงความเชื่อมั่นที่มีตัวประมาณแบบจุดที่เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจากแต่ละประชากร ซึ่งเป็นช่วงความเชื่อมั่นที่เป็นอิสระกัน โดยช่วงความเชื่อมั่นที่ได้ต้องมีความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ตามที่กำหนดไว้ ในปี ค.ศ.1972 แฟรเวฑเทอร์ (Fairweather) หาช่วงความเชื่อมั่น จากการใช้ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติที (t_i) ที่เป็นอิสระกันและเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นไทล์ของผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติทีสำหรับสองประชากรในหลายแบบของขนาดตัวอย่างระหว่างค่าจริงกับค่าโดยประมาณ ผลการเปรียบเทียบค่าประมาณมีความแตกต่างจากค่าจริงน้อยมากและความแตกต่างเพิ่มขึ้นตามค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น นอกจากช่วงความเชื่อมั่นจากการใช้ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติที (t_i) แล้วตัวสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบสมมติฐานของค่าเฉลี่ยสำหรับสองประชากรที่มีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน ซึ่งศึกษาโดย โคเฮน และแซคโรวิซ ในปี ค.ศ. 1984 สามารถนำมาหาช่วงความเชื่อมั่นของ μ ได้เช่นกัน ตัวสถิติทดสอบที่ โคเฮน และแซคโรวิซ เสนอนั้น ใน ค.ศ. 1996 จอร์แดน และคริสนามรตี้ (Jordan and Krishnamoorthy) ได้นำตัวสถิติทดสอบซึ่งเป็นค่าสัมบรูณ์ที่มากสุดของตัวสถิติทีมาหาช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการทดสอบสมมติฐานและการประมาณแบบช่วง นอกจากนี้จอร์แดนและคริสนามรตี้เสนอช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการใช้ผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟและเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นไทล์ของผลรวมเชิงเส้นของตัวสถิติเอฟ สำหรับสองประชากรที่มีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระกัน โดยใช้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็กระหว่างค่าจริงกับค่าโดยประมาณ ผลการเปรียบเทียบค่าประมาณใช้ประมาณค่าจริงได้ดี ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างของประชากรใดประชากรหนึ่งมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับขนาดตัวอย่างอีกประชากรหนึ่ง และผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าค่าประมาณให้ค่าเปอร์เซ็นไทล์มากกว่าค่าจริงเสมอ