# บทที่ 1

# บทนำ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.1 ความนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นวิธีการหนึ่งในหลายวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยประมาณ ที่มีประสิทธิภาพสูง โดยมีหลักการเบื้องต้นคือโครงสร้างจริงจะถูกจำลองด้วยชิ้นส่วนเล็กๆ จากนั้นหาสติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน แล้วทำการรวมกันเข้าโดยตรงเป็นสติฟเนสของทั้งโครงสร้าง วิธีการนี้สามารถวิเคราะห์ด้วยคอมพิวเตอร์ ทั้งนี้ความแม่นของคำตอบ จะขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของชิ้นส่วน และจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ในการจำลองโครงสร้าง

ในการหาสติฟเนสของชิ้นส่วนนั้น เราสามารถแบ่งเป็นวิธีการต่างๆได้คือ[4] ระเบียบวิธีการกระจัด (displacement method) หรือแบบจำลองสอดคล้อง (compatible model) ซึ่งอาศัยพื้นฐานของหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด (minimum potential energy) และการสมมุติสนามการกระจัด (displacement field) เพื่อสร้างสติฟเนสเมตริกซ์ แบบจำลองการกระจัดจะให้ความเครียดที่สอดคล้อง (strain compatible) ที่ขอบของชิ้นส่วน และการกระจัดที่แม่นยำ แต่ความเค้นที่ได้จะไม่มีความสมดุล รวมทั้งจะทำให้โครงสร้างแข็งกว่าความเป็นจริง ส่งผลให้การกระจัดที่ได้น้อยกว่าความจริง ระเบียบวิธีทางแรง (force method) หรือแบบจำลองสมดุล (equilibrium model) อาศัยพื้นฐานของพลังงานศักย์เติมเต็มต่ำสุด (minimum complementary potential energy) และการสมมุติสนามความเค้น ทำให้ความเค้นที่ได้มีความสมดุล ความเครียดที่ได้จะสอดคล้องภายในชิ้นส่วน แต่แบบจำลองนี้โครงสร้างจะอ่อนเกินไป วิธีการที่สามพัฒนาจากพื้นฐานของพลังงานเติมเต็มต่ำสุดที่ดัดแปรแล้ว (modified complementary energy) หรือหลักการแปรเปลี่ยนของไรส์เนอร์ (Reissner's variational principle) โดยการสมมุติสนามการกระจัดและสนามความเค้นที่มีความสมดุลภายในชิ้นส่วน กรณีนี้ทั้งสนามการกระจัดและสนามความเค้นจะสมมุติเป็นอิสระจากกัน เรียกวิธีการนี้ว่า ระเบียบวิธีพันธุ์ทาง (hybrid method) วิธีการสุดท้ายคือระเบียบวิธีผสม (mixed method) โดยอาศัยหลักการแปรผันของวู-วาชิสุ (Hu - Washisu variational principle) โดยสามารถที่จะเลือกสมมุติสนามการกระจัด สนามความเค้น และสนามความเครียด หรือบางส่วนของสนามใดสนามหนึ่ง

โดยปกติชิ้นส่วนที่ดีควรจะประกอบด้วยคุณสมบัติดังต่อไปนี้[17]

1. ปราศจากรูปแบบไร้พลังงานหรือการกระจัดที่ไร้พลังงาน (zero energy or kinematic deformation modes)
2. มีความยืนยง (invariance) คือ ไม่ขึ้นกับพิกัดอ้างอิง
3. มีประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์
4. ไม่แข็งเกินไปหรือการกระจัดมีความแม่นตรง
5. ความเค้นที่ได้แม่นยำ

ซึ่งระเบียบวิธีพันธุ์ทางสามารถตอบสนองคุณสมบัติทั้งหมดหรือเกือบทั้งหมด ในขณะที่วิธีการที่ได้จากการสมมุติสนามการกระจัดสามารถตอบสนองได้เพียงสามข้อแรกเท่านั้น

แต่ปัญหาที่เกิดขึ้นกับระเบียบวิธีพันธุ์ทางคือ ในช่วงแรกของการพัฒนาไม่มีหลักการที่มีประสิทธิภาพเพียงพอในการเลือกสนามของการกระจัดและสนามของความเค้น[50] เพราะความถูกต้องของการวิเคราะห์จะขึ้นอยู่กับการสมมุติ สนามการกระจัด และ สนามความเค้นที่ให้ประสิทธิภาพทั้งในแง่ของความแม่นในการวิเคราะห์และการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

ในงานวิจัยนี้จะได้พัฒนาหา สนามการกระจัด และ สนามความเค้นที่มีประสิทธิภาพที่สุดตามแนวทางของระเบียบวิธีพันธุ์ทาง ในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

การแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการทางไฟไนต์เอเลเมนต์นั้น ในระยะแรกการแก้ปัญหาส่วนใหญ่จะเริ่มด้วยการสมมุติ ฟังก์ชันการกระจัด (displacement function ) ในแต่ละชิ้นส่วนให้สมบูรณ์และสอดคล้อง(complete and compatible) ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้อาศัยพื้นฐานของหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด และอีกวิธีการหนึ่งคือการสมมุติสนามความเค้นขึ้น โดยอาศัยพื้นฐานของพลังงานศักย์เติมเต็มต่ำสุด เรียกว่าระเบียบวิธีทางแรง

ปี 1964 Jones [4),(5] ได้เสนอแบบจำลองการกระจัดพันธุ์ทาง (hybrid displacement) และมีการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นโดย Yamamoto [4),(5] และในปี 1967 Pian [9] ได้เสนอแบบจำลองความเค้นพันธุ์ทาง (hybrid stress) ขึ้นในการสอนครั้งแรกของเขา ซึ่งมีองค์ประกอบคือฟังก์ชันการกระจัดที่สอดคล้อง(compatible displacement function) ตามขอบรอยต่อและสนามความเค้นที่สมดุล (equilibrium stress field) ในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะครอบคลุมแบบจำลองการกระจัดพันธุ์ทางด้วย ในยุคแรกของการประยุกต์ระเบียบวิธีพันธุ์ทางนั้น จะสามารถแยกออกเป็นระเบียบวิธีความเค้นพันธุ์ทางโดยอาศัยหลักการของพลังงานเติมเต็มต่ำสุดที่ดัดแปรแล้วและระเบียบวิธีผสมที่อาศัยหลักการแปรผันของไรส์เนอร์[4] แต่ในปัจจุบันคำว่าระเบียบวิธีพันธุ์ทางอาจหมายถึงวิธีการใดๆก็ตามที่อยู่บนพื้นฐานของหลักการแปรผันที่ปรับปรุงแล้วรวมทั้งความอิสระของสนามตัวแปรทั้งภายในชิ้นส่วนและขอบชิ้นส่วน[9]

ครั้งแรกนั้นวิธีการที่ Pian [1] นำเสนอในการหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนพันธุ์ทางอาศัยหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด โดยสมมุติความเค้นแทนที่จะสมมุติการกระจัดตามระเบียบวิธีการกระจัด ซึ่งเป็นผลให้การลู่เข้าสู่คำตอบของสมการดี และทำให้โครงสร้างที่ได้อ่อนกว่าระเบียบวิธีการกระจัดแต่จะแข็งกว่าระเบียบวิธีทางแรง[2] และ Tong[3] ก็ได้พัฒนาวิธีการดังกล่าวให้สามารถใช้ได้กับวัสดุที่ไม่หดตัวหรือเกือบจะไม่หดตัวเมื่อถูกอัด (incompressible material) โดยการพิจารณาความเค้นแยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่คงที่และส่วนที่ต้องสมมุติเพิ่มขึ้นมา.

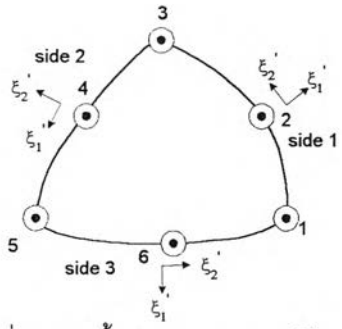
การพัฒนาระเบียบวิธีพันธุ์ทางในระยะต่อมามีการนำเสนอวิธีการในการหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนพันธุ์ทางขึ้นมาอีกหลายวิธี[16],[35] อันได้แก่ วิธีการที่ดัดแปรแล้วของหลักการพลังงานเติมเต็ม (modified complementary principle) วิธีการไรส์เนอร์หรือ เฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (Hellinger –Reissner ) (ซึ่งสองวิธีการดังกล่าวมีความใกล้เคียงกันมากจนสามารถจัดเป็นวิธีการเดียวกันได้) วิธีการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ ที่ดัดแปรแล้ว วิธีการ วู-วาชิสุ (Hu-Washizu) และวิธีการ วู-วาชิสุ ที่ดัดแปรแล้ว (modified Hu-Washisu) ซึ่งข้อดีของวิธีการต่างๆที่ปรับปรุงขึ้นมาเหล่านี้ ก็เพื่อความง่ายในการสมมุติสนามตัวแปรนั่นเอง [16] เช่นวิธีการของ เฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ ที่เสนอโดย Pian[17] ได้พัฒนาจากการสมมุติการกระจัดแยกออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่สอดคล้องและส่วนที่เพิ่มเข้าไปซึ่งเรียกว่า ตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multiplier) ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะมีความง่ายในการสมมุติความเค้นเพราะไม่ต้องคำนึงถึงสมดุล เนื่องจากสมดุลจะเกิดขึ้นจากการที่สมมุติตัวคูณลากรองจ์ หรือสมดุลเกิดขึ้นในแง่ของการแปรผัน

ในระยะหลังของการพัฒนามีการประยุกต์ระเบียบวิธีพันธุ์ทางในรูปแบบใหม่ๆ เช่น ระเบียบวิธีกึ่งพันธุ์ทาง (partial hybrid)[38],[41],[47] ที่เสนอขึ้นมาบนพื้นฐานของหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ โดยการแยกความเค้นเป็นสองส่วน คือส่วนของการดัดและแรงเฉือนตั้งฉาก ทำให้ตัวแปรที่เหลือในการสมมุติคือ การกระจัดและแรงเฉือนตั้งฉากอีกสองตัวที่ไม่ต้องคำนึงถึงสมดุล (แทนที่จะเป็นหกตัวแบบเดิม) เพราะในที่สุดจะได้สมดุลกับแรงภายนอกในหลักการแปรผัน ทำให้ไม่ต้องสมมุติตัวคูณลากรองจ์ ซึ่งเป็นข้อดีของวิธีการนี้เพราะการหาค่าสติฟเนสจะใช้เวลาน้อยลง วิธีการนี้พัฒนาขึ้นมาเพื่อวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาโดยเฉพาะ อีกวิธีหนึ่งคือระเบียบวิธีเทรฟซ์พันธุ์ทาง (hybrid-Trefftz) [28],[32],[34],[44],[49] เป็นการนำวิธีการพันธุ์ทางรวมกับวิธีผลเฉลยขอบ (boundary solution procedure) โดยพื้นฐานหลักคือ การหาฟังก์ชันการทดสอบ (trial function or Trefftz function) ที่มีประสิทธิภาพทำให้ชิ้นส่วนมีความเค้นสมดุลและต่อเนื่อง

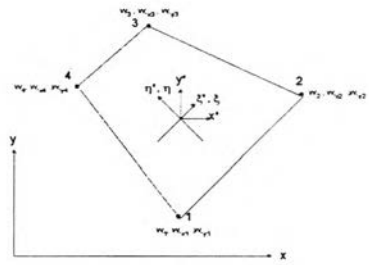
ด้วยวิธีการที่กล่าวดังข้างต้นมีนักวิจัยหลายท่านเสนอชิ้นส่วนขึ้นมาเพื่อการใช้งานเป็นต้นว่า Wolf[8] โดยอาศัยวิธีการที่เสนอโดย Pian ทำการสมมุติความเค้นที่ไม่สมดุลภายในชิ้นส่วนแต่จะสมดุลด้วยการกระจัดที่สมมุติเพิ่มเข้าไป Pian และ Sumihara [19] เสนอชิ้นส่วนที่ทำการปรับปรุงผลงานวิจัยที่ผ่านมา โดยใช้การสมมุติความเค้นในพิกัดธรรมชาติแทนพิกัดคาร์ทีเซียนแบบเดิมทำให้ชิ้นส่วนมีประสิทธิภาพดีขึ้นโดยมีความยืนยง และสามารถป้องกันการรูปแบบการกระจัดที่ไร้พลังงานได้ด้วย Pian และ Chen [18] เสนอวิธีการในการเลือกสนามความเค้นให้ปราศจากรูปแบบไร้พลังงาน โดยการเลือกค่าคงที่แต่ละตัวให้ปรากฏอยู่ในรูปแบบของความเค้นเพียงรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งเท่านั้น Bouzeghoub และ Gunn [50] เสนอชิ้นส่วนโดยอาศัยวิธีการของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ โดยการสมมุติความเค้นในรูปโค้ง (curvilinear stress ) แล้วทำการแปลงกลับมาในพิกัดคาร์ทีเซียน Huang และคณะ [57] สรุปว่าการเลือกรูปแบบของความเค้นมาให้ครบตาม รูปแบบธรรมชาติของความเค้น (natural stress mode) จะทำให้การสมมุติความเค้นนั้นถูกต้องและค่าที่ได้จะสมบูรณ์. Comnarozzi[30] , Cheung และ Chen [40] , Sze และ Ghali [44] และ Pian และคณะ[58] ได้แสดงวิธีการนำระเบียบวิธีพันธุ์ทางไปใช้ในการวิเคราะห์ของแข็งใน 3 มิติ

ในส่วนของการประยุกต์ระเบียบวิธีพันธุ์ทางกับการวิเคราะห์แผ่นพื้นนั้นมีการวิจัยมากมายเช่น ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นเคอร์ซอฟฟ์ด้วยระเบียบวิธีพันธุ์ทาง Morley[20] เสนอการสมมุติสนามความเค้นสำหรับชิ้นส่วนพันธุ์ทางสำหรับชิ้นส่วนสามเหลี่ยมโค้ง (curvilinear triangular element) โดยพัฒนามาจากหลักการแปรผันของ Pian ซึ่ง

วิธีการที่เสนอนี้จะสามารถนำไปประยุกต์กับแผ่นเปลือก (shell) ได้ การสมมุติสนามการกระจัด ทั้งการเคลื่อนที่ การหมุน จะเหมือนกับในกรณีของเส้นตรงปกติ แต่ขั้ว (node)จะประกอบด้วย 6 ขั้ว [ รูปที่ 1.2.1 ] ในขณะที่การกระจัดที่ต่อเนื่องจะมีแค่ 12 ตัว คือ การเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉาก 6 ตัวและการหมุน 6 ตัว ซึ่งจากวิธีการหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนตามที่ Pian เคยเสนอเอาไว้ก็จะสามารถหาค่าสติฟเนส ออกมาได้ แต่ชิ้นส่วนที่ได้ไม่มีการเปรียบเทียบว่ามีประสิทธิภาพในแง่ต่างๆอย่างไรบ้าง เพียงแต่มีการทดสอบแบบหย่อม (patch test) ผ่านในกรณีของการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body motion)




รูปที่ 1.2.1 ชิ้นส่วนของ Morley[20]




รูปที่ 1.2.2 ชิ้นส่วนของ Sze และ Chow [42]

Sze และ Chow [42] เสนอวิธีการแก้ปัญหาของแผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์ [ รูปที่ 1.2.2 ] เพราะการแก้ปัญหาโดยตรงนั้นจะทำได้ยากมากเนื่องจากเป็นไปไม่ได้เลยที่เราจะสร้างฟังก์ชันพหุนามที่มีความต่อเนื่องจนถึงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ($C^1$ polynomial interpolation) ทำให้สามารถประยุกต์การแก้ปัญหาได้สองวิธีคือ ทฤษฎีของแผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์เต็มหน่วย (discrete Kirchhoff plate theory: DKT) ซึ่งอาศัยการสร้างการหมุนของขั้วเสมือนกึ่งกลางด้าน (fictitious mid-side node) และการใช้ฟังก์ชันพหุนามของความโค้ง (curvature) ส่วนอีกวิธีการหนึ่งคือ ระเบียบวิธีพันธุ์ทาง ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของพลังงานศักย์เติมเต็ม และการสมมุติโมเมนต์ดัดพร้อมกับการกระจัดที่ขอบ ชิ้นส่วนที่เสนอขึ้นมาอาศัยหลักการที่พัฒนามาจาก Tong โดยการเพิ่มตัวคูณลากรองจ์เข้าไป แล้วใช้วิธีการหาสติฟเนสของชิ้นส่วนตามวิธีการพื้นฐานที่เคยกล่าวมาแล้ว แต่ไม่ต้องสร้างฟังก์ชันพหุนามของการกระจัดที่มีความต่อเนื่องถึงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งตลอดทั้งชิ้นส่วนขึ้นมา ยกเว้นที่รอยต่อเท่านั้น ประสิทธิภาพของชิ้นส่วนที่เสนอมีข้อดีคือ ประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์จะดี มีความยืนยง แต่จะเกิดความเค้นปรสิต (parasitic stresses) ขึ้นมา ทำให้ผลการคำนวณมีความแม่นยำน้อยลง และทำให้สมดุลของแรงเสียไป

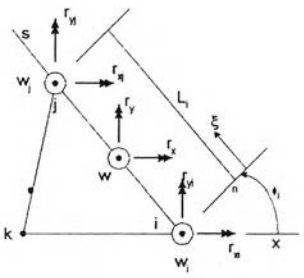
แผ่นพื้นมินด์ลิน-ไรส์เนอร์ (Mindlin-Reissner) พัฒนาขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือน (shear locking) เพราะปัญหาดังกล่าวไม่สามารถแก้ได้ในแผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์ โดยเฉพาะชิ้นส่วนพันธุ์ทางจะสามารถแก้ปัญหาได้ดีที่สุด[54] แผ่นพื้นมินด์ลินเป็นชิ้นส่วนที่ต้องการความต่อเนื่องเฉพาะการกระจัดที่ขอบเท่านั้น ($C^0$ continuity) ทำให้ความยุ่งยากของการวิเคราะห์แผ่นพื้นน้อยลง ในการใช้ระเบียบวิธีพันธุ์ทางนั้นฟังก์ชันการกระจัดไม่จำเป็นต้องสมบูรณ์และสอดคล้องกับความเครียดเฉือน[57].

Cook[4],[5] เสนอชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมในการวิเคราะห์แผ่นพื้นโดยเสนอชิ้นส่วนรูปแบบความเค้นสามัญ 9 ตัวและ 5 ตัว ซึ่งพัฒนาจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมพันธุ์ทาง[รูปที่ 1.2.3] โดยใช้วิธีการของ Pian และ Tong ในการหาสติฟเนส

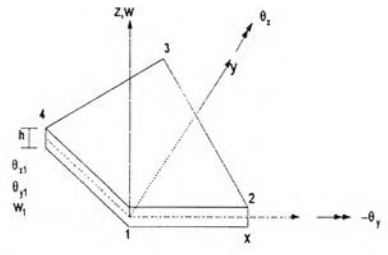
หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ของชิ้นส่วน ชิ้นส่วนที่เสนอมีความแม่นยำสูง มีประสิทธิภาพดีทางคอมพิวเตอร์ รวมทั้งคิดผลของแรงเฉือนด้วย Spilker และ Jakobs[27] ได้แสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีพันธุ์ทางนี้มีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผลดีอย่างไร ในกรณีของแผ่นพื้นบางหลายชั้น โดยอาศัยพื้นฐานของการวิเคราะห์คือ การสมมุติให้แต่ละชั้นเป็นอิสระจากกันทั้งในแง่ของการหมุนและสนามความเค้นสามารถเป็นจริงได้ โดยทั้งนี้สนามความเค้นของแต่ละชั้นสามารถเลือกบนพื้นฐานของความต่อเนื่องของแต่ละชั้น ชิ้นส่วนพันธุ์ทางเป็นชิ้นที่เสนอโดยพัฒนาจากแผ่นพื้นมินด์ลินที่มีความหนาปานกลาง ประสิทธิภาพจะขึ้นอยู่กับชิ้นส่วนพันธุ์ทางที่นำมาพัฒนา



รูปที่ 1.2.3 ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมพื้นฐานของ Cook[4],[5]



รูปที่ 1.2.4 ชิ้นส่วนของ Cheung และ Wanji [39]

Cheung และ Wanji [39] ได้เสนอชิ้นส่วนขึ้นมาสองชนิด [รูปที่ 1.2.4] โดยการเพิ่มตัวคูณลากรองจ์เข้าไปในชิ้นส่วน 6 ตัว และ 4 ตัว เรียกว่า $Q_{PL6}$ และ $Q_{PL4}$ ตามลำดับ แล้วอาศัยการสมมุติความเค้น ความเครียด การกระจัดที่เป็นอิสระต่อกัน สามารถหาสติฟเนสของชิ้นส่วนตามฟังก์ชันที่เคยเสนอมาแล้ว ซึ่งตัวคูณลากรองจ์ที่เพิ่มเข้าไปจะทำให้ข้อจำกัดของความเครียดเฉือนหมดไป ชิ้นส่วนที่เสนอนั้นสามารถป้องกันการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือนได้ดี และมีคุณสมบัติที่ดีในหลายด้าน เช่น ความยืนยง ไม่มีรูปแบบการกระจัดที่ไร้พลังงาน ความแม่นยำทางความเค้นสูง และสามารถใช้กับช่วงของความหนาต่อความยาวที่กว้าง และใช้ได้ดีกับแผ่นพื้นที่บางและหนาปานกลาง จุดที่น่าจะเป็นข้อด้อยของทั้งสองชิ้นส่วนคือการที่ตัวแปรมากเกินไปทำให้การคำนวณทางคอมพิวเตอร์ต้องใช้เวลามากขึ้น ถึงแม้อัตราการลู่เข้าสู่คำตอบจะเร็วใกล้เคียงกับผลงานของนักวิจัยท่านอื่นๆ

Dong และ Freitas [51] พัฒนาชิ้นส่วนขึ้นมาโดยการเพิ่มส่วนของการกระจัดที่ไม่สอดคล้องเข้าไปในสมการพลังงาน ทั้งนี้การกระจัดที่ไม่สอดคล้องที่เพิ่มเข้าไปคือการกระจัดภายใน ซึ่งจะอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ สติฟเนสของชิ้นส่วนสามารถหาได้จากการกำจัดตัวแปรในขั้นของชิ้นส่วน ชิ้นส่วนที่เสนอเป็นชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมใดๆ การป้องกันการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือนได้ดี และไม่เกิดรูปแบบการกระจัดที่ไร้พลังงาน ชิ้นส่วนใช้ได้ดีกับแผ่นพื้นบางและหนาปานกลาง ผลการวิเคราะห์แม่นยำสูง และลู่เข้าสู่คำตอบเร็ว แต่ส่วนที่เป็นปัญหาคือตัวแปรที่เพิ่มขึ้นจะมีผลต่อประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์ซึ่งไม่มีรายงานการตรวจสอบ

ชิ้นส่วน $C^0$ เป็นชิ้นส่วนที่ง่ายที่สุดเพราะการกระจัดในแนวดิ่งและการหมุนเป็นอิสระจากกัน การศึกษาที่ผ่านมาแสดงให้เห็นแล้วว่าการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำหนดฟังก์ชันสันฐาน (shape function) ที่มีกำลังสูงนั้นไม่ใช่เหตุผลเดียวที่ทำให้ความแม่นยำสูงขึ้นตามไปด้วย[54] แต่จะป้องกันการเกิดปัญหาการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือนได้ Shi และ Tong [54] ได้แสดงให้เห็นในตัวอย่างของชิ้นส่วนที่เสนอขึ้นมา โดยเลือกฟังก์ชันการกระจัดที่มีกำลังสูงพอจะขจัด

ปัญหาการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือนเท่านั้น และยังเสนอวิธีการในการเลือกสนามความเค้นที่สามารถมั่นใจได้ว่าค่าลำดับชั้น (Rank) ของสติฟเนสเพียงพอ ชิ้นส่วนที่เสนอพัฒนามาจากชิ้นส่วนสามขั้ว ซึ่งมีประสิทธิภาพดีในทั้งแง่ของการป้องกันการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือน สติฟเนสของชิ้นส่วนจะไม่เกิดรูปแบบปลอมของการกระจัด (spurious kinematic deformation mode) และประหยัดเวลาในการคำนวณ

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เปรียบเทียบประสิทธิภาพของชิ้นส่วนที่เคยเสนอมาโดยนักวิจัยอื่นๆ
2. เพื่อพัฒนาการสนามตัวแปรที่มีประสิทธิภาพในทางการคำนวณทางคอมพิวเตอร์มากที่สุดโดยใช้ระเบียบวิธีพันธุ์ทาง

1.4 ขอบข่ายของงานวิจัย

1. ความหนาของแผ่นพื้น (t) มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวของแผ่นพื้น (L) ประมาณ1/10
2. การโก่งตัว (deflection) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา
3. ไม่คิดผลของแรงดึงหรือแรงอัดภายในชิ้นส่วน (membrane force)
4. เป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic material)
5. พิจารณาการวิเคราะห์ในสภาวะสถิต (static)
6. วัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (elastic)