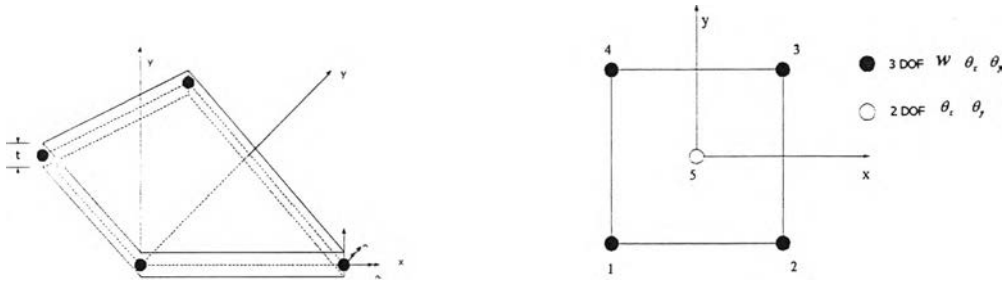
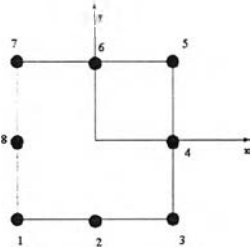


ชิ้นส่วนแผ่นพื้นพันธุ์ทาง

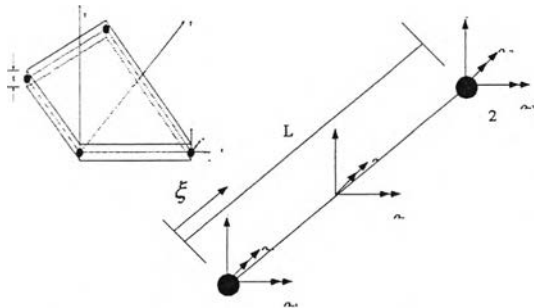
ในงานวิจัยจะทำการแบ่งกลุ่มชิ้นส่วนแผ่นพื้นพันธุ์ทางออกเป็น 6 กลุ่มด้วยกัน โดยจำแนกตามรูปร่าง จำนวนข้อ และชนิดของสนามการกระจัดที่ทำการสมมุติ กลุ่มแรกคือ กลุ่มชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมสี่ข้อ และการกระจัดที่ทำการสมมุติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน (internal displacement) ซึ่งในกลุ่มนี้จะมีทั้งหมด 12 ชิ้น กลุ่มต่อมาคือ ชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมห้าข้อ ซึ่งข้อที่ห้าจะอยู่ตรงกลางของชิ้นส่วน และการกระจัดที่ทำการสมมุติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน ในกลุ่มนี้จะมีเพียงแคชิ้นเดียว กลุ่มที่สามคือชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมแปดข้อ และการกระจัดที่สมมุติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน ชิ้นส่วนในกลุ่มนี้มีทั้งหมด 5 ชิ้นส่วน และชิ้นส่วนกลุ่มที่สี่คือ ชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมเก้าข้อและมีการสมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน ชิ้นส่วนในกลุ่มนี้มีอยู่ด้วยกันสองชิ้นส่วน และชิ้นส่วนกลุ่มที่ห้าคือชิ้นส่วนสี่ข้อที่มีการสมมุติการกระจัดที่ขอบ (edge displacement) ของชิ้นส่วน ซึ่งในกลุ่มนี้มีชิ้นส่วนทั้งหมด 7 ชิ้น และกลุ่มสุดท้ายคือ ชิ้นส่วนที่ไม่สามารถจัดอยู่ในกลุ่มดังกล่าวมาข้างต้นได้ อันได้แก่ ชิ้นส่วนสามเหลี่ยม และชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมที่มีการสมมุติจำนวนข้อไม่เข้าตามกลุ่มดังกล่าวข้างต้น



กลุ่มที่ 1 สี่เหลี่ยมสี่ข้อ การกระจัดภายใน

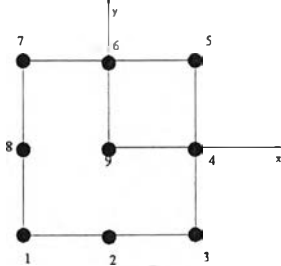


กลุ่มที่ 3 สี่เหลี่ยมแปดข้อ การกระจัดภายใน

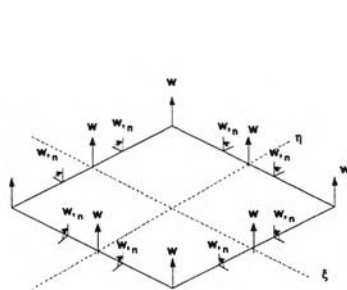


กลุ่มที่ 5 สี่เหลี่ยมสี่ข้อ การกระจัดที่ขอบ

กลุ่มที่ 2 สี่เหลี่ยมห้าข้อ การกระจัดภายใน



กลุ่มที่ 4 สี่เหลี่ยมเก้าข้อ การกระจัดภายใน

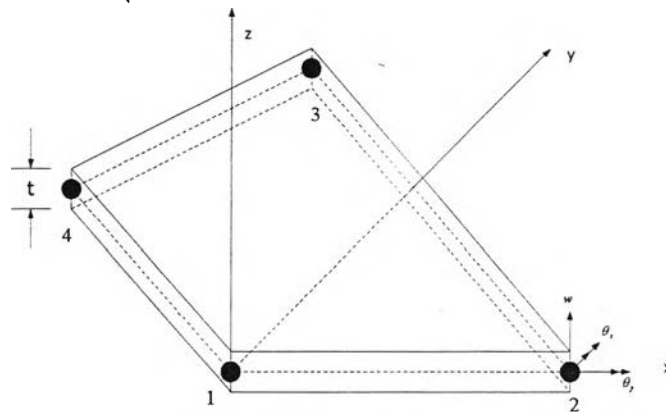


กลุ่มที่ 6 อื่นๆ

รูปที่ 3.1 กลุ่มของชิ้นส่วนแผ่นพื้น

ในอันดับต่อไปจะกล่าวถึงรายละเอียดของแต่ละกลุ่ม

### 3.1 กลุ่มชิ้นส่วน 4 ขั้วและมีการสมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน



รูปที่ 3.1.1 ชิ้นส่วน 4 ขั้วและสมมุติการกระจัดภายใน

ชิ้นส่วน 4 ขั้ว ซึ่งแต่ละขั้วมีระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) เท่ากับ 3 ค่าได้แก่ การกระจัดในแนวตั้งฉาก (translation)  $w$  การหมุน (rotation) ที่กระทำในทิศทาง  $x$  เท่ากับ  $w_{,x}$  และการหมุนในทิศทาง  $y$  เท่ากับ  $w_{,y}$  สำหรับกรณีเป็นแผ่นพื้นเคอร์ซอพฟ์ และ การกระจัดในแนวตั้งฉาก (translation)  $w$  การหมุน (rotation) ในทิศทาง  $x$  เท่ากับ  $\theta_x$  และการหมุนในทิศทาง  $y$  เท่ากับ  $\theta_y$  ในกรณีของแผ่นพื้นมินดลินด์ เพราะฉะนั้นชิ้นส่วนในกลุ่มนี้จะมีระดับขั้นความเสรีรวมเท่ากับ 12 สนามการกระจัดจะถูกสมมุติขึ้นภายในชิ้นส่วนโดยจะมีความต่อเนื่องกับชิ้นส่วนประชิด และจำนวนของการกระจัดสามัญที่สมมุติจะเท่ากับระดับขั้นความเสรี และชิ้นส่วนทั้งหมดจะใช้ฟังก์ชันฐานแบบไอโซพารามेटริก (รายละเอียดของแต่ละชิ้นส่วนอยู่ในภาคผนวก ก ) ในส่วนของตัวคุณลักษณะจำแนก จะมีเฉพาะชิ้นส่วน HSC1 HSC2 และ QHMID เท่านั้น ที่มีการสมมุติเพิ่มเข้าไป

การสมมุติสนามความเค้นนั้น มีความแตกต่างกันในรายละเอียดของแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งจำนวนความเค้นสามัญต่ำสุดที่ทำการสมมุติเท่ากับ 9 ตัวและจำนวนที่มากที่สุด คือชิ้นส่วน LH4\_B ซึ่งจะมีการสมมุติถึง 18 ตัว

ในกลุ่มนี้จะมีชิ้นส่วนอยู่ทั้งสิ้น 12 ชิ้นซึ่งเป็นชิ้นส่วนแผ่นพื้นมินดลินทั้งหมด อันได้แก่ LH3 LH4 LH4\_B LH5 LH11 ซึ่งเสนอโดย Spilker โดย LH3 จะมีการสมมุติสนามความเค้นโดยใช้จำนวนความเค้นสามัญ  $\beta$  เท่ากับ 9 ตัว และมีการสมมุติสนามการกระจัดโดยใช้ฟังก์ชันฐานแบบไอโซพารามेटริก และไม่ได้ใช้ตัวคุณลักษณะจำแนก ในชิ้นส่วน LH4 นั้นในส่วนของสมมุติสนามการกระจัด จะเหมือนกันกับในกรณีของชิ้นส่วน LH3 คือใช้ฟังก์ชันฐานแบบไอโซพารามेटริก และไม่ใช้ตัวคุณลักษณะจำแนก จะแตกต่างกันแค่เพียงจำนวนความเค้นสามัญ  $\beta$  ที่ใช้ในการสมมุติสนามความเค้น ในกรณีของ LH4 จะใช้จำนวนของความเค้นสามัญทั้งสิ้น 9 ตัว และในทำนองเดียวกัน ในชิ้นส่วน LH4\_B ก็ยังคงสมมุติสนามการกระจัดแบบเดิม จะเปลี่ยนเพียงแค่การสมมุติสนามความเค้นเท่านั้น โดย LH4\_B จะใช้จำนวนความเค้นสามัญเท่ากับ 18 ตัว ส่วนชิ้นส่วน LH5 และ

LH11 ก็ทำนองเดียวกับชั้นส่วนอื่น ที่ยังคงใช้สนามการกระจัดเหมือนเดิม จะเปลี่ยนก็เพียงแค่จำนวนความเค้นสามัญที่ให้ในการสมมุติสนามความเค้น ซึ่งทั้งสองชั้นส่วนนี้ใช้เท่ากับ 12 ตัว แต่พหุนามที่ใช้ในการสมมุติต่างกัน ชั้นส่วน QHMID ซึ่งเสนอโดย Dong ในการสมมุติสนามการกระจัดนั้นมีการสมมุติทั้งสนามการกระจัดที่สอดคล้อง  $\{u_q\}$  และตัวคูณลากรองจ์  $\{u_\lambda\}$  ในส่วนของการกระจัดที่สอดคล้องนั้นใช้ฟังก์ชันพื้นฐานเหมือนกับกรณีชั้นส่วนที่ Spilker ได้เสนอไว้ และตัวคูณลากรองจ์นั้น จะทำการสมมุติ 4 ตัว ที่สอดคล้องกับการหมุนเท่านั้น จะไม่สมมุติเพิ่มในส่วนของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งจาก  $w$  ในส่วนของการสนามความเค้นนั้นจะใช้จำนวนความเค้นสามัญ  $\beta$  เท่ากับ 13 ตัว อันดับต่อมาได้แก่ชั้นส่วน QRDH ซึ่งเสนอโดย Henshell ในส่วนของฟังก์ชันพื้นฐานก็จะใช้ฟังก์ชันพื้นฐานแบบไอโซพารามेटริก และไม่ใช้ตัวคูณลากรองจ์ และสนามความเค้นนั้นจะใช้จำนวนความเค้นสามัญเท่ากับ 11 ตัว

ชั้นส่วน LH-OP HSC1 HSC2 QHMID-OP และ QRHD-OP เป็นชั้นส่วนที่เสนอโดยผู้วิจัย โดยจะทำการปรับปรุงจากชั้นส่วนเดิมที่ได้ทำการเสนอโดยนักวิจัยท่านอื่นๆ (สังเกตได้จากชื่อต้นนั้นจะเรียกชื่อตามชั้นส่วนเดิม โดยการเติม -OP ) ซึ่งวิธีการปรับปรุงนั้นจะได้กล่าวรายละเอียดในอันดับต่อไป

ชั้นส่วน LH-OP ทำการปรับปรุงชั้นส่วนที่เสนอโดย Spilker ในส่วนของสนามการกระจัดนั้นจะยังคงใช้ฟังก์ชันกำหนดรูปร่างแบบไอโซพารามेटริกแบบเดิม และจะไม่เพิ่มตัวคูณลากรองจ์เข้ามา ส่วนสนามความเค้นนั้นจะใช้จำนวนความเค้นสามัญ  $\beta$  เพียงแค่ 9 ตัวเท่านั้น โดยจะมีการเลือกพหุนามใหม่ด้วย ชั้นส่วน HSC1 ในส่วนของสนามความเค้นนั้นใช้สนามความเค้นแบบเดียวกันกับชั้นส่วน LH แต่ในสนามการกระจัดนั้นทำการสมมุติสนามการกระจัดทั้งสองส่วน โดยในส่วนของสนามการกระจัดที่สอดคล้องก็จะใช้สนามการกระจัดแบบเดียวกันกับชั้นส่วน LH-OP ส่วนตัวคูณลากรองจ์นั้นจะนำมาจากชั้นส่วน HSC1 ที่เสนอโดย Cheung และในทำนองเดียวกัน กรณีของชั้นส่วน HSC2 สมมุติสนามความเค้น และสนามการกระจัดที่สอดคล้อง แบบเดียวกันกับชั้นส่วน HSC1 แต่เปลี่ยนตัวคูณลากรองจ์โดยนำตัวคูณลากรองจ์ของชั้นส่วน QHMID มาใช้

ชั้นส่วน QHMID-OP ปรับปรุงจากชั้นส่วน QHMID ที่เสนอโดย Dong โดยการลดสนามการกระจัดเหลือเพียงส่วนของสนามการกระจัดที่สอดคล้องเท่านั้น จะไม่ใช้ตัวคูณลากรองจ์ และจะลดจำนวนความเค้นสามัญที่สมมุติสำหรับสนามความเค้นเหลือเพียง 9 ตัว ชั้นส่วน QRDH-OP ปรับปรุงจากชั้นส่วน QRDH ที่เสนอโดย Henshell โดยการลดสนามจำนวนความเค้นสามัญที่ใช้ในการสมมุติสนามความเค้นเหลือเพียง 9 ตัว

ขั้นตอนของการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชั้นส่วนในกลุ่มนี้ ใช้หลักการของเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์ ซึ่งขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสจะไม่มี ความซับซ้อน เมื่อเทียบกับกรณีชั้นส่วน 4 ขั้ว ที่สมมุติการกระจัดที่ขอบของชั้นส่วน ซึ่งจะกล่าวถัดไป โดยเฉพาะในกรณีที่ไม่มีการใช้ตัวคูณลากรองจ์ ความสะดวกในการหาเมตริกซ์สติฟเนสก็จะเพิ่มขึ้นอีก ด้วยเหตุผลที่กล่าวมา ทำให้ขั้นตอนของการโปรแกรมชั้นส่วนกลุ่มนี้ง่ายขึ้น

ตารางที่ 3.1.1 กลุ่มชั้นส่วน 4 ชั้นและมีการสมมุติการกระจายภายในชั้นส่วน

ชั้นส่วน	สนามความเค้น [P]	สนามการกระจัด $u_x + u_z$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามมิติ ( $\beta$ )	จำนวนการกระจัดสามมิติ ( $q$ )	จำนวนตัวคูณลากรองจ์ ( $\lambda$ )	
LH3	9	12	-	Spilker เสนอ
LH4	11	12	-	Spilker เสนอ
LH4_B	18	12	-	Spilker เสนอ
LH5	12	12	-	Spilker เสนอ
LH11	12	12	-	Spilker เสนอ
LH-OP	9	12	-	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย
HSC1-OP	9	12	6	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย
HSC2-OP	9	12	4	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย
QH MID	13	12	4	Dong เสนอ
QH MID-OP	9	12	-	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย
QRDH	11	12	-	Henshell เสนอ
QRDH-OP	9	12	-	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย

ในที่นี้จะยกตัวอย่างรายละเอียดของชั้นส่วน LH3 ที่เสนอโดย Spilker

จากสมการความเค้นหลักที่เกิดขึ้นในแนวนอน

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x &= z\sigma_x(x, y) \\
 \bar{\sigma}_y &= z\sigma_y(x, y) \\
 \bar{\sigma}_{xy} &= z\sigma_{xy}(x, y) \\
 \bar{\sigma}_{xz} &= \left(\frac{h^2 - z^2}{2}\right)\sigma_{xz}(x, y) \\
 \bar{\sigma}_{yz} &= \left(\frac{h^2 - z^2}{2}\right)\sigma_{yz}(x, y) \\
 \bar{\sigma}_z &= \frac{1}{2}(z^3 - 3h^2z - 2h^3)\sigma_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.1.1}$$

สามารถสมมุติความเค้นให้สอดคล้องกับสมการความเค้นหลัก ในรูปของความเค้นสามมิติ

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y + \beta_{10}xy + \frac{1}{2}\beta_{13}x^2 \\
 \sigma_y &= \beta_4 + \beta_5x + \beta_6y + \beta_{11}xy - \frac{1}{2}\beta_{13}y^2 \\
 \sigma_{xy} &= \beta_7 + \beta_8x + \beta_9y + \beta_{12}xy \\
 \sigma_{xz} &= (\beta_2 + \beta_9) + (\beta_{12} + \beta_{13})x + \beta_{10}y \\
 \sigma_{yz} &= (\beta_6 + \beta_8) + \beta_{11}x + (\beta_{12} - \beta_{13})y \\
 \sigma_z &= 2\beta_{12}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

ในกรณีชั้นส่วน LH3 จะทำการสมมติความเค้นสามัญเพียง 9 ตัวเท่านั้น โดยจะกำหนดให้

$$\beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0 \tag{.....3.1.3}$$

เมื่อนำเงื่อนไขในสมการที่ 3.1.3 แทนค่าลงในสมการ 3.1.2 สามารถเขียนสมการของสนามความเค้นได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = [P]_{6 \times 9} \{\beta\}_{9 \times 1} \tag{.....3.1.4}$$

โดย

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \tag{.....3.1.5ก}$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \tag{.....3.1.5ข}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{.....3.1.6}$$

ซึ่งก็คือ ฟังก์ชันพื้นฐานของชั้นส่วนนั่นเอง และ  $(x_1, y_1) \dots \dots \dots (x_4, y_4)$  คือพิกัดของข้อที่ 1 ถึงข้อที่ 4

ในส่วนของสนามการกระจัดที่สมมุติ นั้น จะเป็นการกระจัดภายในชั้นส่วน

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_i \tag{.....3.1.7ก}$$

$$\theta_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{x_i} \tag{.....3.1.7ข}$$

$$\theta_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{y_i} \tag{.....3.1.7ค}$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{u\} = [N]_{3 \times 12} \{r\}_{12 \times 1} \tag{.....3.1.8ก}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}_{3 \times 12} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix}_{12 \times 1}$$

.....3.1.8ข

ทำการหาความเครียดที่สัมพันธ์กับการกระจัดในสมการ 3.1.8ก ได้เป็น

$$\{\varepsilon\} = [d]\{u\} \tag{.....3.1.9}$$

เมื่อ

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

.....3.1.10

และจากความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

.....3.1.11

โดย  $J$  คือ จาคอบีเยน (Jacobian) และมีค่าเท่ากับ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

.....3.1.12

นั่นคือสามารถเขียนสมการของความเครียดในสมการ 3.1.9 ได้ใหม่เป็น

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & |J| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & |J| & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 8} \begin{Bmatrix} \partial\theta_x/\partial\xi \\ \partial\theta_x/\partial\eta \\ \partial\theta_y/\partial\xi \\ \partial\theta_y/\partial\eta \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_{8 \times 1}$$

.....3.1.13ก

หรือเขียนสมการที่ 3.1.13ก ได้ใหม่เป็น

$$\{\varepsilon\} = [A]_{6 \times 8} [M]_{8 \times 1}$$

.....3.1.13ข

เมื่อ

$$[A] = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & |J| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & |J| & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 8}$$

ในการทำงานเดียวกันสามารถเขียนความสัมพันธ์ของเมตริกซ์  $[M]_{8 \times 1}$  ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \partial\theta_x/\partial\xi \\ \partial\theta_x/\partial\eta \\ \partial\theta_y/\partial\xi \\ \partial\theta_y/\partial\eta \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 12} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

.....3.1.14ค

หรือสามารถที่จะเขียนสมการที่ 3.1.14ค ได้ใหม่เป็น

$$[M] = [E]_{8 \times 12} \{r\}_{12 \times 1}$$

.....3.1.14ง

เมื่อ

$$[E] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 12}$$

และ:

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ N_{2,\xi} &= +\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ N_{3,\xi} &= +\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{3,\eta} &= +\frac{1}{4}(1+\xi) \\ N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{4,\eta} &= +\frac{1}{4}(1-\xi) \end{aligned} \quad \dots\dots 3.1.15$$

จากสมการ 3.1.13ข และ 3.1.14ข จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \{\mathcal{E}\} &= [A]_{6 \times 8} [M]_{8 \times 1} \\ &= [A]_{6 \times 8} [E]_{8 \times 12} [q]_{12 \times 1} \\ &= [B]_{6 \times 12} [q]_{12 \times 1} \end{aligned} \quad \dots\dots 3.1.16ก$$

เมื่อ

$$[B] = [A]_{6 \times 8} [E]_{8 \times 12} \quad \dots\dots 3.1.16ข$$

เมื่อนำค่าสมมติไว้ทั้งหมดแทนค่าลงในสมการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ จะได้ว่า

$$[H]_{9 \times 9} = \frac{2h^3}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots 3.1.17$$

$$[G]_{9 \times 12} = \frac{2h^3}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^T B |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots 3.1.18$$

เมื่อ  $h = \frac{t}{2}$  คือระยะทางจากระนาบกลางถึงขอบนอกสุดของแผ่นพื้น และด้วยวิธีการแปรผันสามารถหาสถิติไฟเนสของชิ้นส่วนออกมาได้เป็น

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad \dots\dots 3.1.19$$

โดยมีแรงกระทำเป็น

$$\{Q\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T p(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots 3.1.20$$



เมื่อ

$$[\bar{S}]_{6 \times 6} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \nu \frac{2h^2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & \nu \frac{2h^2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{2h^2}{5} & \nu \frac{2h^2}{5} & \frac{52}{105} \frac{h^4}{I^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4h^2}{5}(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4h^2}{5}(1+\nu) \end{bmatrix} \dots\dots 3.1.21$$

$p(\xi, \eta)$  คือ เวกเตอร์แรง

และจากความสัมพันธ์(เงื่อนไขที่กล่าวว่าความเครียดจากการกระจัดต้องเท่ากับความเครียดจากความเค้น)

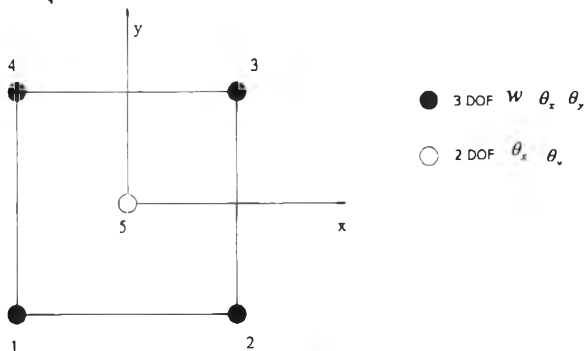
$$\{\beta\} = [H]^{-1} [G]\{r\} \dots\dots 3.1.22$$

เมื่อทราบค่าการกระจัดที่ข้อ  $\{r\}$  ก็จะทำให้หาค่าความเค้นสามัญ  $\{\beta\}$  นำกลับไปหาความเค้นออกมาได้

### 3.2 กลุ่มชิ้นส่วน 5 ข้อและมีการสมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน

ชิ้นส่วน 5 ข้อดังที่แสดงในรูปที่ 3.2.1 นั้น ข้อที่ 5 จะอยู่ตรงกลางของชิ้นส่วน และมีระดับชั้นความเร็วเฉพาะการหมุน 2 ตัวเท่านั้น จะไม่มีการกระจัดในขณะที่ข้อ 1-4 จะมีระดับชั้นความเร็วครบทั้งสามตัว ดังนั้นชิ้นส่วนนี้จะมีระดับชั้นความเร็วทั้งหมดเท่ากับ 14 เท่านั้น

การสมมุติสนามการกระจัดจะเป็นสนามการกระจัดภายในชิ้นส่วน โดยฟังก์ชันกำหนดรูปร่าง  $N_1 - N_4$  จะเป็นฟังก์ชันพื้นฐานของกรณีไอโซพารามेटริกธรรมดา แต่ฟังก์ชันกำหนดรูปร่าง  $N_5$  จะเป็นฟังก์ชันพองสบู่ คือ  $N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$  ซึ่งจะเป็นศูนย์ที่ขอบตามนิยามของฟังก์ชันพองสบู่ตัวเอง และ  $N_5$  นี้จะถูกใช้ในการสมมุติการหมุนเท่านั้น



รูปที่ 3.2.1 ชิ้นส่วน 5 ข้อ

การสมมุติสนามความเค้นจะสมมุติความเค้นสามัญเพียงแค่ 9 ตัวเท่านั้น ในการสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสจะใช้หลักการของเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์ ความยุ่งยากของชิ้นส่วนนี้ จะมีในขั้นตอนของการโปรแกรมเพราะว่าข้อที่

5 ที่เพิ่มขึ้นมานั้น จะมีความยุ่งยากในการกำหนดระดับชั้นความเร็ว ซึ่งโปรแกรมต้องทำการตรวจสอบว่าข้อใด เป็นข้อที่ 5 แล้วจึงทำการนับระดับชั้นความเร็ว ทั้งยังส่งผลถึงการรวมเมตริกซ์สตีเฟนของทั้งแผ่นพื้นอีกต่อหนึ่ง

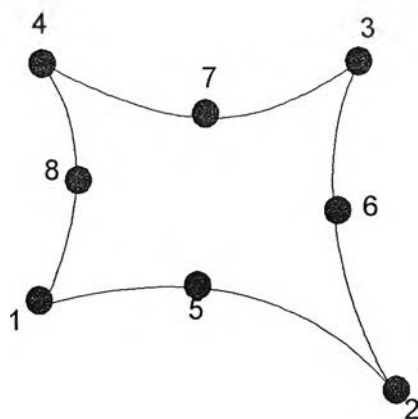
ตารางที่ 3.2.1 ชั้นส่วน 5 ชั้นและมีการสมมติการกระจัดภายในชั้นส่วน

ชั้นส่วน	สนามความเค้น $[P]$	สนามการกระจัด $u_0 + u_1$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามมิติ $(\beta)$	จำนวนการกระจัดสามมิติ $(q)$	จำนวนตัวคูณลากรางจ์ $(\lambda)$	
Q4BS	9	14	-	Taylor เสนอ

### 3.3 กลุ่มชั้นส่วน 8 ชั้นและมีการสมมติการกระจัดภายในชั้นส่วน

จากรูปที่ 3.3.1 จะเห็นได้ว่าขอบของชั้นส่วน 8 ชั้น จะมีข้ออยู่ด้านละ 3 ข้อ ทำให้ความต่อเนื่องระหว่าง ชั้นส่วนมีมากขึ้นกว่าในกรณี 4 ชั้น โดยในการทำงานเดียวกันกับกรณีชั้นส่วน 4 ชั้นที่แต่ละชั้นมีระดับชั้นความเร็วเท่ากับ 3 ยังผลให้ระดับชั้นความเร็วทั้งหมดของชั้นส่วนกลุ่มนี้เท่ากับ 24 และมีผลทำให้ขนาดของเมตริกซ์สตีเฟนสูงตามขึ้นไปด้วย

ชั้นส่วนในกลุ่มนี้ประกอบไปด้วย QH4 QH3 QH2 QH1 ซึ่งเสนอโดย Spilker และ QH-OP ซึ่งเสนอ โดยผู้วิจัย ในการสมมุติสนามการกระจัดทั้ง 5 ชั้นส่วนจะสมมุติเป็นการกระจัดภายในชั้นส่วน โดยฟังก์ชันพื้นฐานสร้างได้โดยง่ายด้วยวิธีการดังที่แสดงไว้ในสมการที่ 2.3.1.3-2.3.1.7 (ซึ่งฟังก์ชันพื้นฐานของชั้นส่วนอยู่ในภาคผนวก ก ) ในส่วนของการสมมุติสนามความเค้นนั้นทั้ง 5 ชั้นส่วนมีการสมมุติต่างกัน เช่น QH4 มีการสมมุติจำนวนความเค้นสามมิติสูงถึง 30 ตัว QH3 มีการใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 28 QH2 มีการใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 25 ตัว QH1 มีการใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 22 ตัว ในขณะที่ QH-OP มีการสมมุติเพียง 21 ตัวเท่านั้น



รูปที่ 3.3.1 ชั้นส่วน 8 ชั้น

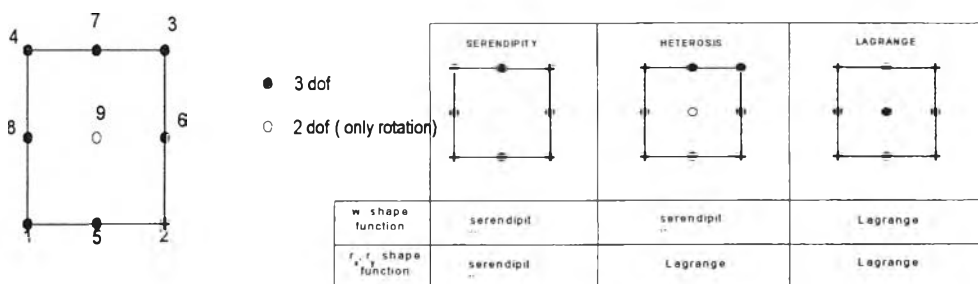
ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสนั้นใช้สมการของเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์ แต่ขั้นตอนของการโปรแกรมจะมีความซับซ้อนกว่ากรณีชิ้นส่วน 4 ขั้วในหลายๆด้าน เช่น การอินทิเกรต ก็จำเป็นต้องใช้จุดอินทิเกรตของเกาส์ 3 จุด ในแต่ละด้าน นั่นคือจุดอินทิเกรตทั้งหมดจะเท่ากับ 9 จุด ในขณะที่กรณีชิ้นส่วน 4 ขั้วจะต้องการจุดอินทิเกรตของเกาส์เพียงแค่ 2 จุดในแต่ละด้าน หรือเพียงแค่ 4 จุด เท่านั้น

ตารางที่ 3.3.1 กลุ่มชิ้นส่วน 8 ขั้วและมีการสมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน

ชิ้นส่วน	สนามความเค้น [P]	สนามการกระจัด $u_i + u_r$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามัญที่สมมติ ( $\beta$ )	จำนวนการกระจัดสามัญ ( $q$ )	จำนวนตัวคูณลากรางจ์ ( $\lambda$ )	
QH4	30	24	-	Spilker เลข๒
QH3	28	24	-	Spilker เลข๒
QH2	25	24	-	Spilker เลข๒
QH1	22	24	-	Spilker เลข๒
QH-OP	21	24	-	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย

3.4 กลุ่มชิ้นส่วน 9 ขั้วและมีการสมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน

ในการทำงานเดียวกันกับชิ้นส่วน 8 ขั้ว ชิ้นส่วน 9 ขั้ว จะมีขั้วตรงกลางเพิ่มขึ้นมาอีกหนึ่งขั้ว [ ดังรูปที่ 3.4.1] โดยที่ขั้วที่ 9 จะมีระดับชั้นความเสรีเท่ากับ 3 ในกรณี LQH4 และเท่ากับ 2 ในกรณี HQH4 ดังนั้นจำนวนระดับชั้นความเสรีทั้งหมดของชิ้นส่วนเท่ากับ 27 ในกรณี LQH4 และเท่ากับ 26 ในกรณี HQH4 โดยในการทำงานเดียวกันกับกรณีชิ้นส่วน 5 ขั้ว ฟังก์ชันพื้นฐาน  $N_9$  จะเลือกใช้ฟังก์ชันพองสบู่ ส่วนในการสมมุติสนามความเค้นจะสมมุติความเค้นสามัญเพียงแค่ 21 ตัวเท่านั้น



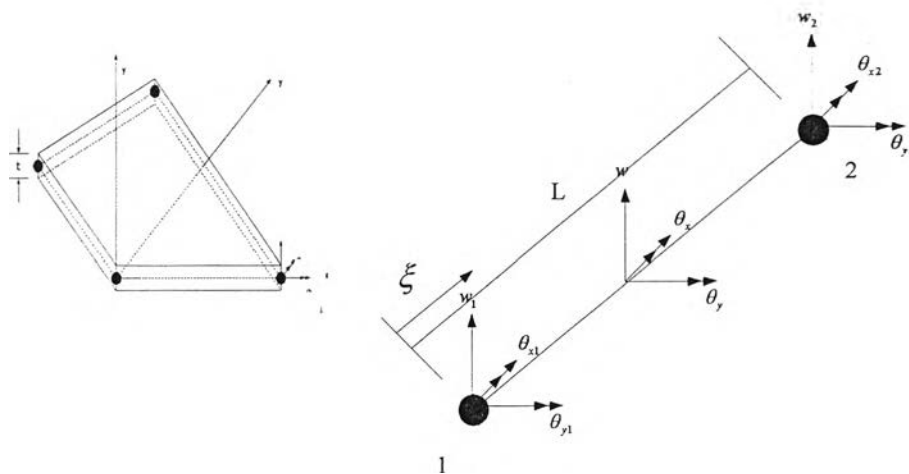
รูปที่ 3.4.1 ชิ้นส่วน 9 ขั้ว

ในการสร้างสติฟเนสเมตริกซ์จะให้สมการของโรสเนอร์ ความยุ่งยากของการโปรแกรมมัน จะเกิดขึ้นกับกรณีชั้นส่วน HQH4 ในทำนองเดียวกันกับ Q4BS (ชั้นส่วน 5 ชั้น) ในขณะที่ชั้นส่วน LQH4 จะไม่เกิดปัญหานี้

ตารางที่ 3.4.1 ชั้นส่วน 9 ชั้นและมีการสมมุติการกระจัดภายในชั้นส่วน

ชั้นส่วน	สนามความเค้น $[P]$	สนามการกระจัด $u_q + u_r$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามมิติที่สมมติ ( $\beta$ )	จำนวนการกระจัดสามมิติ ( $q$ )	จำนวนตัวคูณลากรองจ์ ( $\lambda$ )	
LQH4	21	27	-	ไม่ปรากฏโดยผู้วิจัย
HQH4	21	26	-	ไม่ปรากฏโดยผู้วิจัย

3.5 กลุ่มชั้นส่วน 4 ชั้นและมีการสมมุติการกระจัดที่ขอบของชั้นส่วน



รูปที่ 3.5.1 ชั้นส่วน 4 ชั้น การกระจัดที่ขอบของชั้นส่วน

ในชั้นส่วนกลุ่มนี้จะแตกต่างกับในกลุ่มชั้นส่วนที่ผ่านมา ถึงแม้ว่าในแต่ละชั้นจะมีระดับชั้นความเร็วเท่ากับ 3 เช่นกัน แต่สนามการกระจัดที่สมมุติจะแตกต่างกัน ในชั้นส่วนกลุ่มนี้สมมุติสนามการกระจัดในรูปของการกระจัดที่ขอบของชั้นส่วนแทนที่จะสมมุติภายในชั้นส่วนแบบที่ผ่านมา และสมมุติในรูปของระยะทางแทนที่จะสมมุติในระบบพิกัดตามแบบเดิม ทำให้จำเป็นต้องเขียนสนามการกระจัดให้สอดคล้องกับการกระจัดในแต่ละด้านของแผ่นพื้นในรูปเมตริกซ์  $[L]$

การสมมุติสนามความเค้นก็ทำการสมมุติในรูปของสนามความเค้นสามมิติเช่นกัน แต่ต่างกับกรณีที่ผ่านมาคือ จะต้องเขียนเมตริกซ์ของสนามความเค้นออกมาในรูปของความเค้นลัพธ์(stress resultants) ที่ขอบของชั้นส่วน หรือเรียกว่าเมตริกซ์  $[R]$

การหาสติฟเนสของชั้นส่วนจะให้หลักการของพลังงานศักย์เต็มเต็มต่ำสุด เนื่องจากพิกัดที่ทำการสมมุติ นั้นจะอยู่ในรูปของระยะทางที่ขอบของชั้นส่วน ทำให้ขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็น  $0 \rightarrow a$  และ  $0 \rightarrow b$

เมื่อ  $a$  และ  $b$  คือความยาวของด้าน แทนที่จะเป็น  $-1$  ถึง  $1$  เหมือนในกรณีที่ผ่านมา ทำให้ต้องเปลี่ยนขอบเขตของการอินทิเกรตให้เป็น  $-1$  ถึง  $1$  เพื่อที่จะใช้การอินทิเกรตของเกาส์ จากความสัมพันธ์

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 g(u) du \quad \dots\dots 3.5.1$$

เมื่อ

$$x = \frac{(b-a)u}{2} + \frac{b+a}{2} \quad \dots\dots 3.5.2$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} du \quad \dots\dots 3.5.3$$

ตารางที่ 3.5.1 ชั้นส่วน 4 ขั้วและมีการสมมุติการกระจัดที่ขอบของชั้นส่วน

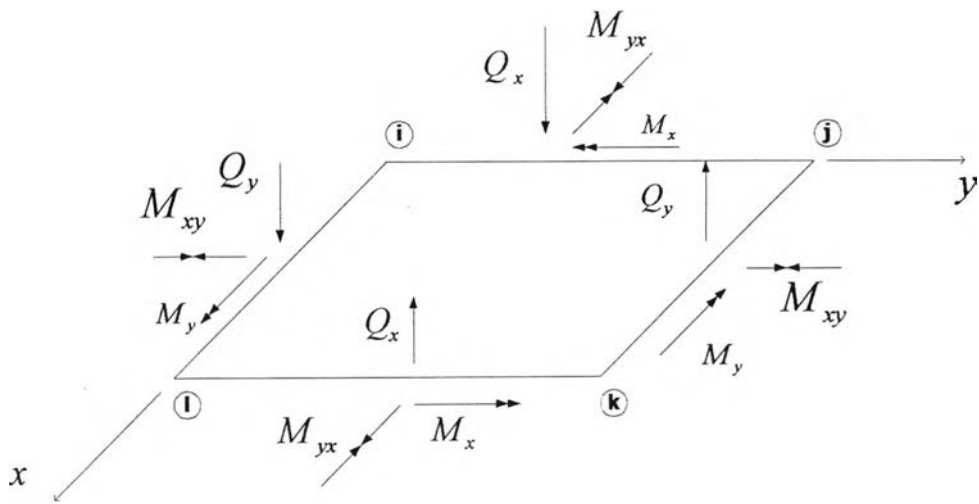
ชั้นส่วน	สนามความเค้น $[P]$	สนามการกระจัด $u_q + u_r$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามมิติ $(\beta)$	จำนวนการกระจัดสามมิติ $(q)$	จำนวนตัวคูณลากรองจ์ $(\lambda)$	
HQL5	5	การกระจัดที่ขอบ	-	Cook เสนอ
HQL9	9	การกระจัดที่ขอบ	-	Cook เสนอ
HQQ9	9	การกระจัดที่ขอบ	-	Cook เสนอ
HQC9	9	การกระจัดที่ขอบ	-	Cook เสนอ
SCP	13	การกระจัดที่ขอบ	-	Size เสนอ
SCP3	9	การกระจัดที่ขอบ	-	ปรับปรุงโดยผู้วิจัย
HSQK1	12	การกระจัดที่ขอบ	-	Size เสนอ

ชั้นส่วนในกลุ่มนี้ประกอบด้วย 7 ชั้นด้วยกันคือ HQL5 HQL9 HQQ9 HQC9 ซึ่ง Cook เสนอแนวคิดเอาไว้ ชั้นส่วน HQL5 จะใช้จำนวนความเค้นสามมิติ 5 ตัว และการกระจัดที่ขอบจะสมมุติในรูปของความสัมพันธ์เชิงเส้น HQL9 จะใช้จำนวนความเค้นสามมิติ 9 ตัว และการกระจัดที่ขอบจะสมมุติในรูปของความสัมพันธ์เชิงเส้น HQQ9 จะใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 9 ตัว และการกระจัดที่ขอบจะสมมุติในรูปของความสัมพันธ์กำลังสอง และ HQC9 จะใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 9 ตัว และการกระจัดที่ขอบจะสมมุติในรูปของความสัมพันธ์กำลังสาม ชั้นส่วน SCP ซึ่งเสนอโดย Size จะมีการใช้จำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 13 ตัว ชั้นส่วน SCP3 ก็จะเป็นการปรับปรุงจากชั้นส่วน SCP โดยการลดจำนวนการสมมุติการกระจัดสามมิติให้เหลือเท่า 9 ตัว และชั้นส่วน HSQK1 ซึ่งเสนอโดย Size มีการสมมุติจำนวนความเค้นสามมิติเท่ากับ 12 ตัว

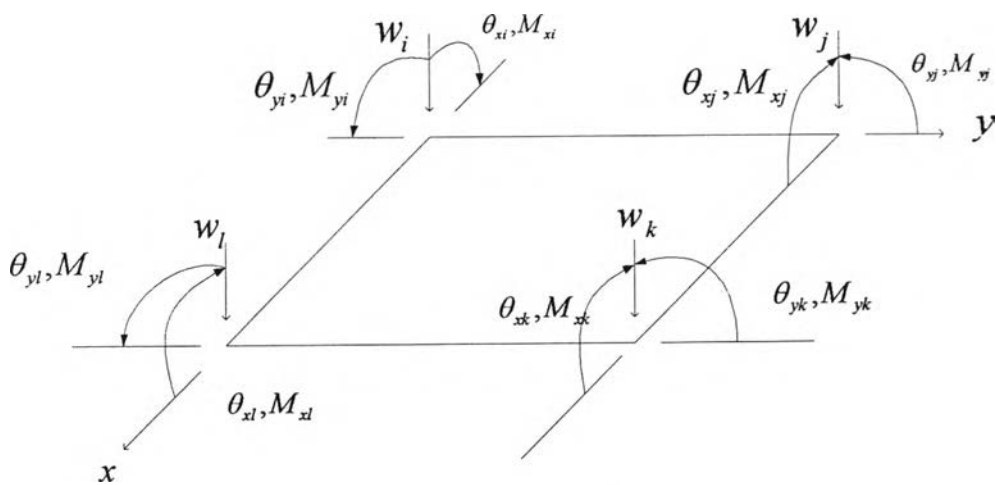
ในบทนี้จะยกตัวอย่างชิ้นส่วน HQL9 มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

การสมมุติความเค้นสามารถเขียนได้ในรูปของระยะทางในแต่ละด้านดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ : \\ : \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = [P]_{5 \times 9} \{\beta\} \quad \dots\dots 3.5.4$$



รูปที่ 3.5.2 ความเค้นในชิ้นส่วน



รูปที่ 3.5.3 แรงและการกระจัดที่ขั้ว

จากสมการที่ 3.5.4 เราจำเป็นที่จะต้องเขียนสนามความเค้นให้สอดคล้องกับแรงในรูปที่ 3.5.2 โดยมีทิศทางสอดคล้องกับการกระจัดในรูปที่ 3.5.3 โดยสนามความเค้นที่เขียนนั้นจะสามารถแสดงในรูปของระยะทางในแต่ละด้านดังรูปที่ 3.5.1 ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} (M_y)_{ij} \\ -(M_{xy})_{ij} \\ -(Q_y)_{ij} \\ (M_{xy})_{jk} \\ -(M_y)_{jk} \\ -(Q_x)_{jk} \\ -(M_x)_{kl} \\ (M_{xy})_{kl} \\ (Q_y)_{kl} \\ -(M_{xy})_{li} \\ (M_y)_{li} \\ (Q_x)_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix}$$

.....3.5.5

หรือสามารถเขียนสมการผลเฉลยของแรงที่ขอบในสมการที่ 3.5.5 ได้ว่า

$$\{S\} = [R]_{12 \times 9} \{\beta\}_{9 \times 1}$$

.....3.5.6

ณ ที่นี้  $x$  และ  $y$  ในสมการที่ 3.5.5 จะหมายถึงระยะทาง  $\xi$  ดังแสดงในรูปที่ 3.5.1 การสมมุติการกระจัดที่ขอบในแต่ละด้านสามารถเขียนได้ดังนี้

$$w = (1 - \xi_{ij})w_i + \xi_{ij}w_j$$

.....3.5.7

$$\theta_x = (1 - \xi_{ij})\theta_{xi} + \xi_{ij}\theta_{xj}$$

.....3.5.8

$$\theta_y = (1 - \xi_{ij})\theta_{yi} + \xi_{ij}\theta_{yj}$$

หรือสามารถเขียนสนามการกระจัดในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและการกระจัดที่ขั้วในรูปของเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{Bmatrix} = [L]_i \{r\}_i \quad \dots\dots 3.5.9$$

นั่นคือเราสามารถเขียนสนามการกระจัดในรูปของระยะทางในแต่ละด้านซึ่งสอดคล้องกับทิศทางในรูปที่ 3.5.3

$$\begin{Bmatrix} (\theta_x)_{ij} \\ (\theta_y)_{ij} \\ (w)_{ij} \\ (\theta_x)_{jk} \\ (\theta_y)_{jk} \\ (w)_{jk} \\ (\theta_x)_{kl} \\ (\theta_y)_{kl} \\ (w)_{kl} \\ (\theta_x)_{li} \\ (\theta_y)_{li} \\ (w)_{li} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} \begin{array}{l} 1-x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1-x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1-x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{array} & \begin{array}{l} x \\ 0 \\ 0 \\ 1-y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 1-y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 1-y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 1-x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1-y \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-y \\ 1-y \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \\ w_k \\ \theta_{xl} \\ \theta_{yl} \\ w_l \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 3.5.10$$

เมื่อนำสนามการกระจัดและสนามความเค้นไปแทนในสมการพลังงานศักย์เดิมเต็มๆจะได้ว่า

$$[H]_{9 \times 9} = t \int_0^b \int_0^a [P]^T [S] [P] dx dy \quad \dots\dots 3.5.11$$

$$[G]_{9 \times 6} = t \int_0^b \int_0^a [R]^T [L] dx dy \quad \dots\dots 3.5.12$$

$$[K]_{12 \times 12} = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad \dots\dots 3.5.13$$

ท้ายที่สุดสามารถเขียนได้ว่า

$$[Q] = [K] \{r\} \quad \dots\dots 3.5.14$$

เมื่อสามารถหาค่าการกระจัดที่ข้อ  $\{r\}$  นำกลับไปหาค่าความเค้นสามมิติที่ทำการสมมุติได้ดังสมการ

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [G] \{r\} \quad \dots\dots 3.5.15$$

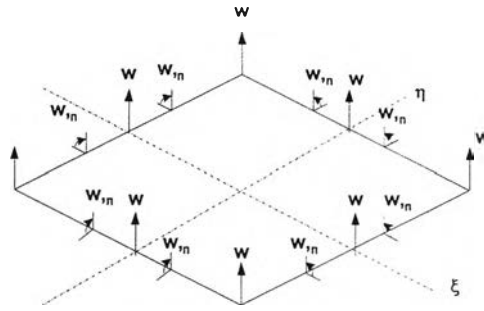
ดังนั้นเราจะสามารถหาค่าความเค้นจากสนามความเค้นได้ดังสมการ

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad \dots\dots 3.5.16$$

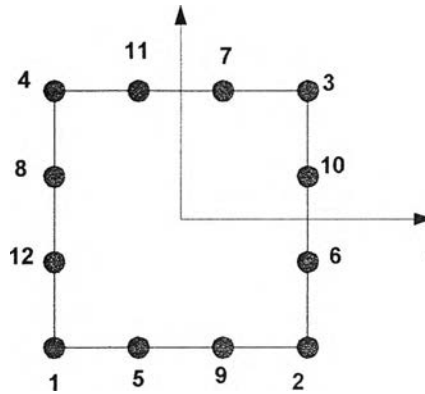


3.6 กลุ่มชิ้นส่วนอื่นๆ

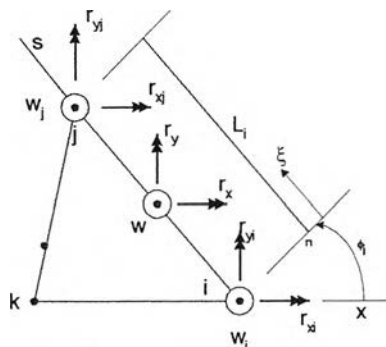
ชิ้นส่วนกลุ่มนี้จะประกอบไปด้วยชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยม และชิ้นส่วนที่ไม่สามารถจัดเข้ากลุ่มที่ผ่านมาได้ ในรายละเอียดของแต่ละชิ้นส่วนจะแตกต่างกันออกไป ซึ่งสามารถดูได้จากภาคผนวก ก



ก) ชิ้นส่วน 16-DOF



ข) ชิ้นส่วน CH1



ค) ชิ้นส่วน HTL9

รูปที่ 3.5.1 ชิ้นส่วนในกลุ่มอื่นๆ

ชิ้นส่วนในกลุ่มนี้มีทั้งสิ้น 8 ชิ้น ได้แก่ HTL5 HTL9 HTQ9 HTT9 ซึ่งเสนอโดย Cook ซึ่งเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยม สนามการกระจัดและสนามความเค้นจะเหมือนกับกรณีของ HQL5 HQL9 HQQ9 HQT9 ตามลำดับ ชิ้นส่วน 16-DOF เป็นชิ้นส่วนที่เสนอโดย Shou ซึ่งเป็นชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม มีการสมมุติสนามความ

เค้นโดยใช้จำนวนความเค้นสามัญเท่ากับ 30 ตัว และ ชิ้นส่วน CH1 นั้นจะปรับปรุงมาจากที่ Spilker เสนอเอาไว้ เป็นชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม มีการสมมุติสนามความเค้นโดยใช้จำนวนความเค้นสามัญ 36 ตัว ชิ้นส่วน HM16-14 เสนอโดย Shou ก็เป็นชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมเช่นเดียวกัน มีการสมมุติจำนวนความเค้นสามัญเท่ากับ 28 ตัว และ ท้ายที่สุดชิ้นส่วน HSM เสนอโดย Bathe ซึ่งเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยม จะมีการสมมุติความเค้นสามัญทั้งหมดเท่ากับ 9 ตัว

ตารางที่ 3.6.1 ชิ้นส่วนอื่นๆ

ชิ้นส่วน	สนามความเค้น $[P]$	สนามการกระจัด $u_0 + u_1$		หมายเหตุ
	จำนวนความเค้นสามัญที่สมมติ ( $\beta$ )	จำนวนการกระจัดสามัญ ( $q$ )	จำนวนดีกรีของลากรองจ์ ( $\lambda$ )	
HTL5	5		-	Cook เสนอ
HTL9	9	การกระจัดที่ขอบกำลังเบี่ยง	-	Cook เสนอ
HTQ9	9	การกระจัดที่ขอบกำลังสอง	-	Cook เสนอ
HTT9	9	การกระจัดที่ขอบกำลังสาม	-	Cook เสนอ
16-DOF	30	16	5	Shou เสนอ
CH1	36	12	-	ปรับปรุงชิ้นส่วนของ Spilker
HM16-14	28	18	-	Shou เสนอ
HSM	9	การกระจัดที่ขอบ	-	Bathe เสนอ