รายการอ้างอิง

1 Pian, T. H. H. Derivative of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution **AIAA. J.** Vol 2. 1964. : 1333-1336.

2 Tong, P; and Pian, T. H. H. A Variational Principle and The Convergence of a Finite Element Method Based on Assumed Stress Distribution **Int. J. Solids and Structures** Vol 5. 1969. : 463 – 472

3 Tong, P. An Assumed Stress Hybrid Finite Element Method of An Incompressible and near Incompressible Material **Int. J. Solids and Structures** Vol 5. 1969. : 455-461.

4 Tong , P. ; and Pian, T. H. H. Basis of Finite Element Methods for Solid Continua **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 1. 1969. : 3 – 28.

5 Cook, R. D. Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates **Int. J. Numer Meth Engng**. Vol 5. 1972. : 277 – 288.

6 Cook, R. D. ; and Ladkany, S. G. Observations Regarding Assumed Stress Hybrid Plate Elements **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 8. 1974. : 513 – 519.

7 Buchanan, G. R. The Stress Hybrid Finite Element **ASCE**. Vol 101. No ST7. JULY. 1975

8 Wolf, J. P. Alternate Hybrid Stress Finite Element Models **Int. J. Numer Meth Engng**. Vol 9. 1975. : 601 – 615.

9 Pian, T. H. H. A Historical Note about Hybrid Elements **Int. J. Numer Meth Engng**. Vol 11.1977. : 1-2.

10 Hughes, T. J. R. ; and Cohen, M. The Heterosis Finite Element for Plate Bending **Computers & Structures** Vol 9.1978. : 445-450.

11 Spilker, R. L.; and Munir, N. I. The Hybrid – Stress Model for Thin Plates **Int. J. Numer Meth Engng**. Vol 15.1980 : 1239-1260.

12 Spilker, R. L.; and Munir, N. I. A Serendipity Cubic – Displacement Hybrid – Stress Element for Thin and Moderately Thick Plates **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 15.1980.: 1261-1278.

13 Batoz, J. L. ; Bathe, J. K. ; and Ho, L. W. A Study of Three – Node Triangular Plate Bending Elements **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 15.1980. : 1771-1812.

14 Hughes, T. J. R. ; and Tezduyar , T. E. Finite Element based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four – Node Bilinear Isoparametric Element **J. of Applied Mechanics** Vol 48.1981. : 587-596.

15 Spilker, R. L. Invariant 8 – Node Hybrid-Stress Elements for Thin and Moderately Thick Plates **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 18.1982. : 1153-1178.

16 Pian, T. H. H. ; and Chen , D. P. Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements **Int. J. Numer Meth Engng** Vol 18. 1982. : 1679-1654.

17 Pian, T. H. H.; Chen, D. P. ;and Kang, D. A New Formulation of Hybrid/Mixed Finite Element **Computers&Structures** Vol 16. No 1-4 1983. : 81-87.

18 Pian, T. H. H. ; and Chen , D. P. On the Suppression of Zero Energy Deformation Modes **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 19. 1983. : 1741-1752.

19 Pian, T. H. H. ; and Sumihara, K. Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 20. 1984. : 1685-1695.

20 Morley, L. S. D. An Assumed Stress Hybrid Curvilinear Triangular Finite Element for Plate Bending **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 20. 1984. : 529 – 548

21 Morley, L. S. D Helliger-Reissner Principles for Plate and Shell Finite Elements **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 20. 1984. : 773-779.

22 Hrabok, M. M. ; and Hridey , T. M. A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements **Computers&Structures** Vol 19. No 1.1984. : 479-495.

23 Shimodaira, H. Equivalence between Mixed Models and Displacement Model Using Reduced Integrate **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 21. 1985. : 89 – 104 .

24 Lee, S. W. ; and Zhang , J. C. A Six – Node Finite Element for Plate Bending **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 21. 1985. : 131 – 143 .

25 Bathe, K. J. ; and Dvorkin, E. N. A Four - Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and A Mixed Interpolation **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 21. 1985. : 367 – 383 .

26 Pian, T. H. H. Finite Element Based on Consistently Assumed Stress and Displacement **Finite Element in analysis and Design** Vol 1. 1985. : 131 –140.

27 Spilker, R. L. ; and Jakobs, D. M. Hybrid Stress Reduced-Mindlin Elements for Thin Multilayer Plates **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 23. 1986. : 555 – 578.

28 Jirousek, J ; and Guex, L. The Hybrid-Trefftz Finite Element Model and Its Application to Plate Bending **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 23. 1986. : 651 – 693.

29 Barlow, J A Different View of The Assumed Stress Hybrid **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 22. 1986. : 11 – 16 .

30 Comnarozzi, M. A Hybrid Model for Prismatic Solids **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 24. 1987 : 663-677.

31 Zielinski, A. P. ; and Herrera, J. Trefftz Method Fitting Boundary Conditions **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 24. 1987. : 871 – 891 .

32 Jirousek, J. Hybrid-Trefftz Plate Bending Element With p – Method Capacity **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 24. 1987 : 1367 – 1393.

33 Chen, W. ; and Cheung , Y. K. A New Approach for The Hybrid Element Method **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 24. 1987. : 1697 – 1709.

34 Cook, R. D. A Plane Hybrid Element with Rotational D.O.F. and Adjustable Stiffness **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 26. 1988. :423 – 435.

35 Chieslar, J. D. ; and Ghali, A. Computational of Hybrid Element Matrices by Eliminated Technique **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 26. 1988. : 423 – 435.

36 Saleeb, A. F. , Chang, Y. K. ; and Yingyeunyong, S. A Mixed Formulation of C^0 – Linear Triangular Plate/Shell Element – The Role of Edge Shear Constraints **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 26. 1988. : 1101 – 1128.

37 Cook , R. D. On Improved Hybrid Finite Elements with Rotational Degree of Freedom **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 28.1989. : 785 – 800 .

38 Jing, H. S. ; and Liao, M. L. Partial Hybrid Stress Element for The Analysis of Thick Laminated Composite Plate **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 28. 1989. : 2813 - 2827 .

39 Cheung, Y. K. ; and Wanji, C. Hybrid Quadrilateral Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory **Computers&Structures** Vol 32. No 2. 1989. : 327-339.

40 Cheung, Y. K. ; and Chen, W. Generalized Hybrid Degenerated Elements for Plates and Shells **Computers&Structures** Vol 36. No 2. 1990. : 279-290.

41 Jing, H. S. On The Limitation Principles for Partial Hybrid Stress Model **Computers&Structures** Vol 38. No 1. 1991. : 113-117.

42 Sze, K. Y. ; and Chow, C. L. An Efficient Hybrid Quadrilateral Kirchhoff Plate Bending Element **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 32 1991. : 149-169.

43 Di, S; and Cheung, Y. K. On The Hybrid/Mixed Finite Element Method with Energy Constraints **Computers&Structures** Vol 41. No 3. 1991. : 461-474.

44 Piltner, R. A Quadrilateral Hybrid-Trefftz Plate Bending Element for The Inclusion of Warping Based on a Three- Dimensional Plate Formula **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 33 1992. : 387-408.

45 Zienkiewicz, O. C.; and et al. Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Element: PART I – A Simple Quadrilateral **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 36. 1993. : 3043-3056.

46 Taylor, R. L.; and Auricchio, F. Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Element: PART II – A Simple Triangular **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 36. 1993. : 3057-3066.

47 Han, J. ; and Hoa, J. V. A Three - Dimensional Multilayer Composite Finite Element for Stress Analysis of Composite Laminates **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 30. 1993. : 3903-3914.

48 Sze, K. Y. ; and Ghali, A. Hybrid Hexahedral Element for Solids, Plate, Shell and Beam by Selective Scaling **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 36 1993. : 1519-1540.

49 Jin, W. G. ; Cheung, Y. K. ; and Zienkiewicz, O. C. Trefftz Method for Kirchhoff Plate Bending Problems **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 36 1993. : 765-781.

50 Bouzeghoub, M. C.; and Gunn, M. J. On Stress Interpolation for Hybrid Models **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 37. 1994. : 895-904.

51 Dong, Y. F.; and Fretas, J. A. T. D. A Quadrilateral Hybrid Stress Element for Mindlin Plate Based on Incompatible Displacement **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 37. 1994. : 279 – 296.

52 Wu, C. C. ; and Cheung, Y. K. On Optimization Approach of Hybrid Stress Elements **Finite Element Analysis and Design** Vol 21. 1995. : 111-128.

53 Liu, I. W. A Conforming Quadrilateral Plate Bending Element Revisited **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 38. 1995. : 2449-2463.

54 Shi, G. ; and Tong, P. Assume Stress C^0 Quadrilateral/Triangular Plate Elements by Interrelated Displacement **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 39. 1996. : 1041 – 1051.

55 Wanji, C. ;and Cheung, Y. K. The Nonconforming Element Method and Refined Hybrid Element Method for Axisymmetric Solid **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 39. 1996. : 2501 – 2529.

56 Sze, K. Y. ; Shu, D. ; and Chen, D. P. Quadrilateral Triangular C^0 Plate Bending Element **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 40. 1997. : 937 – 951.

57 Feng, W. ; Hoa , S. V. ; and Huang, Q. Classification of Stress Modes in Assumed Stress Field of Hybrid Finite Element **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 40.1997. :4313 – 4339.

58 Pian, T. H. H. ; et al Studies of Stress Concentration by Using Special Hybrid Stress Element **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 40. 1997. : 1399 – 1411.

59 Zhou, B. ; et al An Efficient Six-node Plate Bending Hybrid/Mixed Element base on Mindlin/Reissner Plate Theory **Structural Engineering and Mechanics** Vol 5. No 1. 1997. : 61 – 83.

60 Ayad, R ;and Hobbs , R. E. A New Hybrid-Mixed Variational Approach for Reissner-Mindlin Plates The MiSP Model **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 42. 1998. : 1149 – 1179.

61 Lee, C. K ;and Hobbs, R. E. Closed From Stiffness Matrix Solutions for some Commonly use Hybrid Finite Element **Computers&Structures** Vol 67. 1998. : 463-482.

62 Oktad, K. M. ; Kvamsdal , R. ; and Mathisen , R. M. Superconvergent Patch Recovery for Plate Preblems using Statically Admissible Stress Resultant Fields **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 44. 1999. : 697 – 727.

63 Auricchio, F. ;and Sacco , E. A Mixed-Enhanced Finite-Element for the Analysis of Laminated Composite Plates **Int. J. Numer Meth Engng.** Vol 44. 1999. : 1481 – 1504.

64 Mau, S. T. A Simple Method of Stiffness Matrix Formulation based on Single Element Test **Structural Engineering and Mechanics** Vol 7 No. 2 1999. : 203 – 216.

65 Zienkiewicz, O. C. ;and Taylor, R. L. **The Finite Element Method** Vol 1 , Fourth Edition, McGraw-Hill , New York ,1989.

66 Bathe, S. P. ;and Wionowsky-Kriger, S. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis,** Prentice-Hall , New Jersey ,1982.

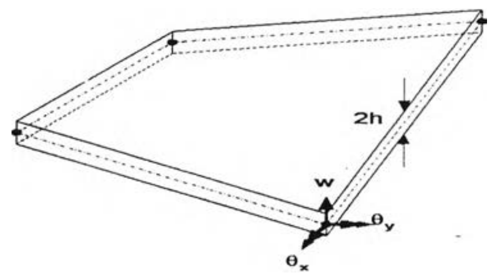
67 Timoshenko ; K. J. and Wionowsky-Kriger, S. **Theory of Plates and Shells** , Second Edition, McGraw-Hill , New Jersey ,1959.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดชิ้นส่วนพันธุ์ทาง

ก1 ชิ้นส่วน LH3 (11),(12),(15)



รูปที่ ก1.1 ชิ้นส่วน LH3,LH4,LH5,LH11,LH4_B

จากสมการความเค้นหลัก

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= z\sigma_x(x,y)\\
\bar{\sigma}_y &= z\sigma_y(x,y)\\
\bar{\sigma}_{xy} &= z\sigma_{xy}(x,y)\\
\bar{\sigma}_{xz} &= \left(\frac{h^2-z^2}{2}\right)\sigma_{xz}(x,y)\\
\bar{\sigma}_{yz} &= \left(\frac{h^2-z^2}{2}\right)\sigma_{yz}(x,y)\\
\bar{\sigma}_z &= \frac{1}{2}\left(z^3-3h^2z-2h^3\right)\sigma_z(x,y)
\end{aligned} \qquad \text{......ก1.1}$$

ซึ่งสามารถทำการสมมุติความเค้น

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_{10}xy+\tfrac{1}{2}\beta_{13}x^2\\
\sigma_y &= \beta_4+\beta_5x+\beta_6y+\beta_{11}xy-\tfrac{1}{2}\beta_{13}y^2\\
\sigma_{xy} &= \beta_7+\beta_8x+\beta_9y+\beta_{12}xy\\
\sigma_{xz} &= (\beta_2+\beta_9)+(\beta_{12}+\beta_{13})x+\beta_{10}y\\
\sigma_{yz} &= (\beta_6+\beta_8)+\beta_{11}x+(\beta_{12}-\beta_{13})y\\
\sigma_z &= 2\beta_{12}
\end{aligned} \qquad \text{......ก1.2}$$

ในกรณีชิ้นส่วน LH3 จะกำหนดให้

$$\beta_{10}=\beta_{11}=\beta_{12}=\beta_{13}=0 \qquad \text{......ก1.3}$$

แทนค่าลงในสมการ ก1.2 ทำให้สามารถเขียนสมการการสมมุติความเค้นได้เป็น

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&y&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&x&y&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&x&y\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_9\end{Bmatrix}=[P]_{6\times9}\{\beta\}_{9\times1} \qquad \text{......ก1.4}$$

โดย

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i \qquad \text{......ก1.5ก}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i \qquad \text{......ก1.5ข}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \qquad \text{......ก1.6}$$

การกระจัดที่ทำการสมมุติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน

$$w(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) w_i \qquad \text{......ก1.7ก}$$

$$r_x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) r_{x_i} \qquad \text{......ก1.7ข}$$

$$r_y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) r_{y_i} \qquad \text{......ก1.7ค}$$

หรือ

$$\{u\} = [L]_{3\times12}\{q\}_{12\times1} \qquad \text{......ก1.8ก}$$

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ w \end{Bmatrix}_{3\times1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array}\right]_{3\times12} \begin{Bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{x4} \\ r_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix}_{12\times1} \qquad \text{......ก1.8ข}$$

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \qquad \text{......ก1.9}$$

เมื่อ

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 1 & -\partial/\partial y \\ 1 & 0 & -\partial/\partial x \end{bmatrix}_{6\times3} \qquad \text{......ก1.10}$$

จากความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \text{......ก1.11}$$

โดย

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix} \qquad ......ก1.12$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{\varepsilon\}=\frac{1}{\det J}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & |J|\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & |J| & 0\end{bmatrix}_{6\times 8}\begin{Bmatrix}\partial r_x/\partial\xi\\ \partial r_x/\partial\eta\\ \partial r_y/\partial\xi\\ \partial r_y/\partial\eta\\ \partial w/\partial\xi\\ \partial w/\partial\eta\\ r_x\\ r_y\end{Bmatrix}_{8\times 1} \qquad ......ก1.13ก$$

$$\{\varepsilon\}=[A]_{6\times 8}[M]_{8\times 1} \qquad ......ก1.13ข$$

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้

$$\begin{Bmatrix}\partial r_x/\partial\xi\\ \partial r_x/\partial\eta\\ \partial r_y/\partial\xi\\ \partial r_y/\partial\eta\\ \partial w/\partial\xi\\ \partial w/\partial\eta\\ r_x\\ r_y\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 & 0\\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 & 0\\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0\\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0\\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi}\\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta}\\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0\end{array}\right]_{8\times 12}\begin{Bmatrix}r_{x1}\\ r_{y1}\\ w_1\\ \vdots\\ \vdots\\ r_{x4}\\ r_{y4}\\ w_4\end{Bmatrix}$$

......ก1.14ก

$$[M]=[E]_{8\times 12}[q]_{12\times 1} \qquad ......ก1.14ข$$

โดย

$$\begin{aligned}N_{1,\xi}&=-\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{1,\eta}&=-\frac{1}{4}(1-\xi)\\ N_{2,\xi}&=+\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{2,\eta}&=-\frac{1}{4}(1-\xi)\\ N_{3,\xi}&=+\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{3,\eta}&=+\frac{1}{4}(1+\xi)\\ N_{4,\xi}&=-\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{4,\eta}&=+\frac{1}{4}(1-\xi)\end{aligned} \qquad ......ก1.15$$

จากสมการ ก1.13ข และ ก1.14ข จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\}&=[A]_{6\times 8}[M]_{8\times 1}\\ &=[A]_{6\times 8}[E]_{8\times 12}[q]_{12\times 1}\\ &=[B]_{6\times 12}[q]_{12\times 1}\end{aligned} \qquad ......ก1.16$$

แทนค่าสมการที่ 2.2.3 ด้วยสมการที่ ก1.4 และ ก1.16 แล้วทำการอินทิเกรต จะได้

$$[H]_{9\times 9}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T\bar{S}P|J|d\xi d\eta \qquad ......ก1.17$$

$$[T]_{9\times12} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B|J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก1.18}$$

และจะได้

$$K = T^T H^{-1} T \qquad \text{......ก1.19}$$

โดยมีแรงกระทำเป็น

$$Q = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L^T p(\xi,\eta)|J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก1.20}$$

เมื่อ

$$\bar{S}_{6\times6} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & \upsilon\frac{2h^2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon & 1 & \upsilon\frac{2h^2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon\frac{2h^2}{5} & \upsilon\frac{2h^2}{5} & \frac{52}{105}h^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4h^2}{5}(1+\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4h^2}{5}(1+\upsilon) \end{bmatrix} \qquad \text{......ก1.21}$$

$p(\xi,\eta)$ คือ เวกเตอร์แรง

และจากความสัมพันธ์

$$\beta = H^{-1}Gq \qquad \text{......ก1.22}$$

เมื่อทราบค่า q ก็จะทำให้ทราบ β นำกลับไปแทนในสมการ ก1.4 หาค่าความเค้นออกมาได้

ก 2 ชิ้นส่วน LH4 (11),(12),(15)

จากสมการ ก1.2 จะทำการสมมุติความเค้นโดยให้ $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$ ดังนั้นจะได้

$$[P]_{6\times11} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \qquad \text{......ก2.1}$$

ดังนั้นจะได้

$$[H]_{11\times11} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P|J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก2.2}$$

$$[T]_{11\times12} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B|J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก2.3}$$

และจะได้

$$K = T^T H^{-1} T$$

ก3 ชิ้นส่วน LH5 [(11),(12),(15)]

จากสมการ 3.1.2 สมมุติให้ $\beta_{13} = 0$ จะได้

$$[P]_{6\times12} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & xy \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & y \end{bmatrix} \quad \text{......ก3.1}$$

และจะได้

$$[H]_{12\times12} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \quad \text{......ก3.2}$$

$$[T]_{12\times12} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta \quad \text{......ก3.3}$$

ก 4 ชิ้นส่วน LH11 [(11),(12),(15)]

จากสมการ ก1.2 กำหนดให้ $\beta_{12} = 0$ ซึ่งจะได้

$$[P]_{6\times12} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 & \frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & -\frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & -y \end{bmatrix} \quad \text{......ก4.1}$$

และจะได้สติฟเนสเช่นเดียวกับชิ้นส่วนอื่นๆ

ก 5 ชิ้นส่วน LH4_B [(11),(12),(15)]

จะทำการสมมุติความเค้นเป็น

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \beta_6 y^2 \\ \sigma_y &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} xy + \beta_{11} x^2 + \beta_{12} y^2 \\ \sigma_{xy} &= \beta_{13} + \beta_{14} x + \beta_{15} y + \beta_{16} xy + \beta_{17} x^2 + \beta_{18} y^2 \\ \sigma_{xz} &= (\beta_2 + \beta_{15}) + (2\beta_5 + \beta_{16})x + (\beta_4 + 2\beta_{18})y \\ \sigma_{yz} &= (\beta_9 + \beta_{14}) + (\beta_{10} + 2\beta_{17})x + (2\beta_{12} + \beta_{16})y \\ \sigma_z &= 2(\beta_5 + \beta_{12} + \beta_{16}) \end{aligned} \quad \text{......ก5.1}$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$[P]_{6\times18}=\left[\begin{array}{cccccc:cccccc:cccccc} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 \\ 0 & 1 & 0 & y & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 2y & 0 & 1 & 0 & y & 2x & 0 \end{array}\right] \qquad \text{......ก5.2}$$

จะได้

$$[H]_{18\times18}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T\bar{S}P|J|d\xi d\eta \qquad \text{......ก5.3}$$

$$[T]_{18\times12}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T B|J|d\xi d\eta \qquad \text{......ก5.4}$$

โดยแทนค่า $[P]$จากสมการ 3.5.2 และ $[B]$ จากสมการ ก1.16

ก6 ชิ้นส่วน LH_OP

เป็นชิ้นส่วนที่เสนอขึ้นโดยการปรับปรุง สนามความเค้นที่เสนอโดย spilker โดยวิธีการโหมดการกระจัดธรรมชาติตามที่มีรายละเอียดในบทที่ 5 ซึ่งด้วยวิธีการดังกล่าวสามารถสมมุติสนามความเค้นได้เป็น

$$[P]_{6\times9}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & -\frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & -y \end{bmatrix} \qquad \text{......ก6.1}$$

ส่วนสนามการกระจัดก็จะทำการสมมุติเหมือนกันกับชิ้นส่วนที่ทางผู้วิจัยเคยเสนอไว้ดังสมการที่ ก1.7

ก 7 ชิ้นส่วน HSC1 [43]

เป็นการปรับปรุงชิ้นส่วนจากงานวิจัยที่ผ่านมา ทำการสมมุติความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & xy & x^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 2x \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix}=[P]_{6\times9}\{\beta\}_{9\times1} \qquad \text{......ก7.1}$$

และทำการสมมุติการกระจัดแยกออกเป็นสองส่วนคือ

$$\{u\}_q = [L]_{3\times12}\{q\}_{12\times1}$$ ก7.2

ดังนั้นได้

$$[A]_{5\times8} = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & |J| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & |J| & 0 \end{bmatrix}_{5\times8}$$

......ก7.3ก

$$[B]_{5\times12} = [A]_{5\times8}[E]_{8\times12}$$ ก73ข

โดยแทนค่า $[E]$ จากสมการ ก1.14ข

นอกจากนี้ยังสมมุติการตัวคูณลากรองจ์เพิ่มเข้าไปเพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพ

$$\{u\}_\lambda = [L_\lambda][\lambda]$$ ก7.4

โดย

$$[L_\lambda] = \begin{bmatrix} \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2 \end{bmatrix}$$ ก7.5

จากสมการ 2.2.9ข จะได้

$$[\overline{E}]_{3\times9} = [\partial]^T[P]$$ ก7.6

$$[R]_{9\times6} = \int_V [\overline{E}]^T [L_\lambda] dV$$ ก7.7

จะได้

$$[H]_{9\times9} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T SPd\xi d\eta$$ ก7.8

$$[T]_{9\times9} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B_q d\xi d\eta$$ ก7.9

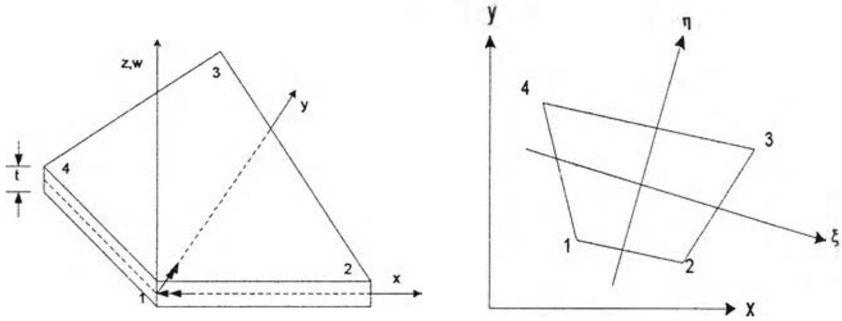
$$K = T^T H^{-1}T - T^T H^{-1}R\left(R^T H^{-1}R\right)^{-1} RH^{-1}T$$ ก7.10

ก 8 ชิ้นส่วน HSC2

ในทำนองเดียวกันกับชิ้นส่วน HSC1 เปลี่ยนสมการ ก7.5 เป็น

$$[L_\lambda]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2\end{bmatrix}$$ ก8.1

ก 9 ชิ้นส่วน QHMID [51]



รูปที่ ก 9.1 ชิ้นส่วน QHMID

สมมุติความเค้น

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\\ Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccccccc|cccc}1 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_1\eta & a_3\xi\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1\eta & b_3\xi\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_9\\ \vdots\\ \beta_{13}\end{Bmatrix}$$ ก9.1

โดย

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ ก9.2

นอกจากนี้ยังสมมุติ

$$\{u\}_\lambda=[L_\lambda][\lambda]$$ ก9.3

โดย

$$[L_\lambda]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ \xi^2&\eta^2&0&0\\ 0&0&\xi^2&\eta^2\end{bmatrix} \qquad \text{......ก9.4}$$

จากสมการ 2.2.9ข จะได้

$$[\overline{E}]_{3\times 13}=[\partial]^T[P] \qquad \text{......ก9.5}$$

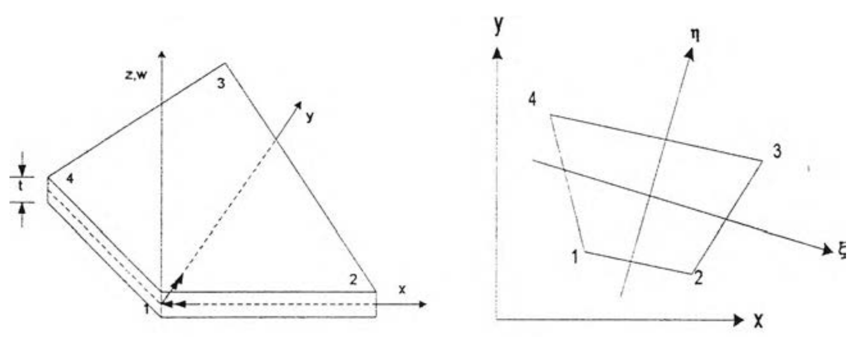
$$[R]_{13\times 6}=\int_V[\overline{E}]^T[L_\lambda]dV \qquad \text{......ก9.6}$$

จะได้

$$[H]_{13\times 13}=t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T SP d\xi d\eta \qquad \text{......ก9.7}$$

$$[T]_{13\times 12}=t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T B_q d\xi d\eta \qquad \text{......ก9.8}$$

ก 10 ชิ้นส่วน QHMID_OP



รูปที่ ก 10.1 ชิ้นส่วน QHMID_OP

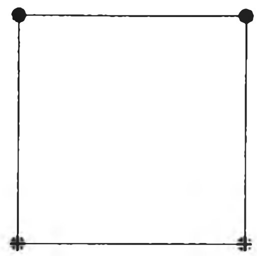
ในทำนองเดียวกันกับชิ้นส่วน LH-OP เราสามารถเสนอชิ้นส่วน QHMID_OF ได้โดยที่สมมุติสนามความเค้น

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\\ Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccccccc}1&0&0&\xi&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&\xi&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&\eta\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&a_1\eta&a_3\xi\\ 0&0&0&0&0&0&1&b_1\eta&b_3\xi\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_3\\ \vdots\\ \beta_9\end{Bmatrix} \qquad \text{......ก10.1}$$

โดย

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\ y_1&y_2&y_3&y_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\ 1&-1&-1\\ 1&1&1\\ -1&-1&1\end{bmatrix} \qquad \text{......ก9.2}$$

ก11 ชิ้นส่วน QRDH[55]



รูปที่ ก11.1 **ชิ้นส่วน** QHRMID

มีการสมมุติสนามความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccccccc:cc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & x \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{11} \end{Bmatrix} \qquad \text{......ก11.1}$$

โดยสนามการกระจัดจะทำการสมมุติเช่นเดียวกับสมการที่ ก1 .7

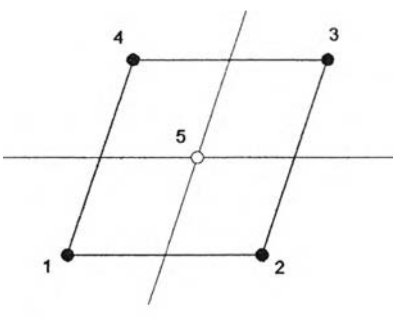
ก12 ชิ้นส่วน QRDH_OP

เป็นการปรับปรุงสนามความเค้นของชิ้นส่วน QRDH โดยมีสมมุติสนามความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix} \qquad \text{......ก12.1}$$

โดยสนามการกระจัดจะทำการสมมุติเช่นเดียวกับสมการที่ ก1 .7

ก13 ชิ้นส่วน Q4BS[45],[46]



รูปที่ ก13.1 **ชิ้นส่วน** Q4BS

หากสมมุติความเค้นเหมือนสมการ ก1.4 และทำการสมมุติการกระจัดเป็น

$$w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)w_i \qquad \text{......ก13.1ก}$$

$$r_x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{5}N_i(\xi,\eta)r_{x_i} \qquad \text{......ก13.1ข}$$

$$r_y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{5}N_i(\xi,\eta)r_{y_i} \qquad \text{......ก13.1ค}$$

และในทำนองเดียวกัน $[E]$ ในสมการที่ 3.1.14ข เปลี่ยนเป็น

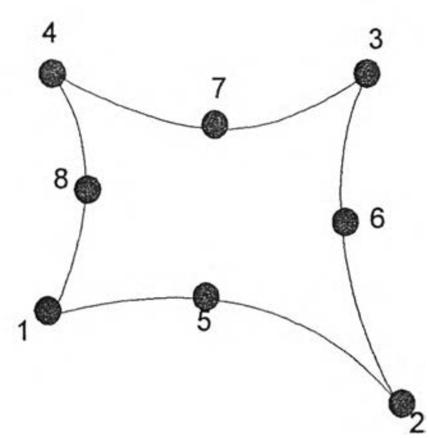
$$[E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|cc}
N_{1},_{\xi} & 0 & 0 & N_{2},_{\xi} & 0 & 0 & N_{3},_{\xi} & 0 & 0 & N_{4},_{\xi} & 0 & 0 & N_{5},_{\xi} & 0 \\
N_{1},_{\eta} & 0 & 0 & N_{2},_{\eta} & 0 & 0 & N_{3},_{\eta} & 0 & 0 & N_{4},_{\eta} & 0 & 0 & N_{5},_{\eta} & 0 \\
0 & N_{1},_{\xi} & 0 & 0 & N_{2},_{\xi} & 0 & 0 & N_{3},_{\xi} & 0 & 0 & N_{4},_{\xi} & 0 & 0 & N_{5},_{\xi} \\
0 & N_{1},_{\eta} & 0 & 0 & N_{2},_{\eta} & 0 & 0 & N_{3},_{\eta} & 0 & 0 & N_{4},_{\eta} & 0 & 0 & N_{5},_{\eta} \\
0 & 0 & N_{1},_{\xi} & 0 & 0 & N_{2},_{\xi} & 0 & 0 & N_{3},_{\xi} & 0 & 0 & N_{4},_{\xi} & 0 & 0 \\
0 & 0 & N_{1},_{\eta} & 0 & 0 & N_{2},_{\eta} & 0 & 0 & N_{3},_{\eta} & 0 & 0 & N_{4},_{\eta} & 0 & 0 \\
N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 \\
0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5
\end{array}\right]_{8\times 14}$$

......ก13.2

โดย

$$\begin{aligned}
N_5 &= \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \\
N_5,_{\xi} &= -2\xi\left(1-\eta^2\right) \\
N_5,_{\eta} &= -2\left(1-\xi^2\right)\eta
\end{aligned} \qquad \text{......ก13.3}$$

ก14. ชิ้นส่วน QH4 [15]



รูปที่ ก 14.1 ชิ้นส่วน QH4, QH3 ,QH2 ,QH1

จากสมการความเค้นหลัก ก1.1 สามารถสมมุติความเค้นได้เป็น

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3$$
$$\sigma_x = \beta_{11} + \beta_{12} x + \beta_{13} y + \beta_{14} x^2 + \beta_{15} xy + \beta_{16} y^2 + \beta_{17} x^3 + \beta_{18} x^2 y + \beta_{19} xy^2 + \beta_{20} y^3$$
$$\sigma_{xy} = \beta_{21} + \beta_{22} x + \beta_{23} y + \beta_{24} x^2 + \beta_{25} xy + \beta_{26} y^2 + \beta_{27} x^3 + \beta_{28} x^2 y + \beta_{29} xy^2 + \beta_{30} y^3$$
$$\sigma_{yz} = (\beta_{13} + \beta_{22}) + (\beta_{15} + 2\beta_{24})x + (2\beta_{16} + \beta_{25})y + (\beta_{18} + 3\beta_{27})x^2 + (2\beta_{19} + 2\beta_{28})xy$$
$$(3\beta_{20} + \beta_{29})y^2$$
$$\sigma_{xz} = (\beta_2 + \beta_{23}) + (2\beta_4 + \beta_{25})x + (\beta_5 + 2\beta_{26})y + (3\beta_7 + \beta_{28})x^2 + (2\beta_8 + 2\beta_{29})xy$$
$$(\beta_9 + \beta_{30})y^2$$
$$\sigma_z = 2(\beta_4 + \beta_{16} + \beta_{25}) + 2(3\beta_2 + \beta_{19} + 2\beta_{28})x + 2(\beta_8 + 3\beta_{20} + 2\beta_{29})y$$

……ก14.1

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$[\sigma] = [P]_{6\times 30}\{\beta\}_{30\times 1}$$

……ก14.2

เมื่อ

$$[P]_{6\times 30} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:ccc}
1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\
0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2 & x^2y & xy^2 & y^3 \\
2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2x & 2xy & y^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & y^2
\end{array}\right]$$

……ก14.3

โดย

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i$$
$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i$$

……ก14.4

เมื่อ

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_8 + N_5) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$$
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$
$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

……ก14.5

การกระจัดที่สมมุติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน

$$w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)w_i \qquad \text{......ก14.6ก}$$

$$r_x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)r_{xi} \qquad \text{......ก14.6ข}$$

$$r_y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)r_{y_i} \qquad \text{......ก14.6ค}$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ 3.1.14ก ม3.1.14ข จะได้

$$
\begin{aligned}
N_{1,\xi}&=-\frac{1}{4}(1-\eta)-\frac{1}{2}\left(N_{8,\xi}+N_{5,\xi}\right) & N_{1,\eta}&=-\frac{1}{4}(1-\xi)-\frac{1}{2}\left(N_{8,\eta}+N_{5,\eta}\right)\\
N_{2,\xi}&=+\frac{1}{4}(1-\eta)-\frac{1}{2}\left(N_{5,\xi}+N_{6,\xi}\right) & N_{2,\eta}&=-\frac{1}{4}(1-\xi)-\frac{1}{2}\left(N_{5,\eta}+N_{6,\eta}\right)\\
N_{3,\xi}&=+\frac{1}{4}(1+\eta)-\frac{1}{2}\left(N_{6,\xi}+N_{7,\xi}\right) & N_{3,\eta}&=+\frac{1}{4}(1+\xi)-\frac{1}{2}\left(N_{6,\eta}+N_{7,\eta}\right)\\
N_{4,\xi}&=-\frac{1}{4}(1+\eta)-\frac{1}{2}\left(N_{7,\xi}+N_{8,\xi}\right) & N_{4,\eta}&=+\frac{1}{4}(1-\xi)-\frac{1}{2}\left(N_{7,\eta}+N_{8,\eta}\right)\\
N_{5,\xi}&=\frac{1}{2}(-2\xi)(1-\eta) & N_{5,\eta}&=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(-1)\\
N_{6,\xi}&=\frac{1}{2}(1)\left(1-\eta^2\right) & N_{6,\eta}&=\frac{1}{2}(1+\xi)(-2\eta)\\
N_{7,\xi}&=\frac{1}{2}(-2\xi)(1+\eta) & N_{7,\eta}&=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1)\\
N_{8,\xi}&=\frac{1}{2}(-1)\left(1-\eta^2\right) & N_{8,\eta}&=\frac{1}{2}(1-\xi)(-2\eta)
\end{aligned}
$$

......ก14.7

และจะได้

$$[B]_{6\times 24}=[A]_{6\times 8}[E]_{8\times 24} \qquad \text{......ก14.8}$$

โดยแทน $[A]$ จากสมการ 3.1.13ก และ $[E]$ ในทำนองเดียวกันกับสมการ ก1.14ก จะได้ว่า

$$[H]_{30\times 30}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T\bar{S}P|J|d\xi d\eta \qquad \text{......ก14.9}$$

$$[T]_{30\times 24}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T B|J|d\xi d\eta \qquad \text{......ก14.10}$$

ก15. ชิ้นส่วน QH3 [15]

ในทำนองเดียวกันกับชิ้นส่วน QH4 โดยทำการสมมุติให้

$$\beta_{28} = -\tfrac{1}{2}\left(3\beta_7 + \beta_{19}\right)$$ ก15.1

$$\beta_{29} = -\tfrac{1}{2}\left(\beta_8 + 3\beta_{20}\right)$$ ก15.2

ทำให้สมการ 3.6.3 เปลี่ยนเป็น

$$[P]_{6\times 28} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:ccc}
1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}x^2y & -\frac{1}{2}xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3xy & -\frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\
0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & \frac{3}{2}x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2 & y^3 \\
2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & y^2
\end{array}\right]$$

......ก15.3

จาก สมการ ก15.3 , ก14.7, ก1.21 จะได้

$$[H]_{28\times 28} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta$$ ก15.4

$$[T]_{28\times 24} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta$$ ก15.5

ก16 ชิ้นส่วน QH2 [15]

ทำการลดความเค้นในชิ้นส่วน QH3 ด้วยเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
2\beta_4 + \beta_6 + \beta_{14} + 2\beta_{16} + \beta_{25} &= 0 \\
6\beta_7 + \beta_9 + 3\beta_{17} + 2\beta_{19} + \beta_{28} &= 0 \\
2\beta_8 + 3\beta_{10} + \beta_{18} + 6\beta_{20} + 2\beta_{29} &= 0
\end{aligned}$$ ก16.1

หากเราเลือกกำจัด $\beta_{10}, \beta_6, \beta_{17}$ ทำให้สมการ ก15.3 เปลี่ยนเป็น

$$[P]_{6\times 25} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & x & y & x^2-2y^2 & xy & x^3 & x^2y-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}x^3 & 0 & -\frac{1}{2}x^3 & 1 & x & y & x^2 & xy \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}x^2y & -\frac{1}{2}xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3xy & -\frac{y^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & \frac{3}{2}x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} -2y^2 & -\frac{1}{3}y^3 & 0 & -2y^3-y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & x^2y & xy^2-\frac{1}{3}x^3 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}x^2y & -\frac{3}{2}xy^2 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & y^3 \\ 2y & x^2 & xy & \frac{3}{2}y^2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} & -3xy & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & y^2 \end{array}\right]$$

......ก16.2

และจากสมการ ก16.2 , ก14.7 , ก1.21 จะได้

$$[H]_{25\times 25} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก16.3}$$

$$[T]_{25\times 24} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก16.4}$$

ก17 ชิ้นส่วน QH1 [15]

จากสมการ ก14.1 กำหนดให้

$$\beta_7 = \beta_{10} = \beta_{17} = \beta_{20} = \beta_{27} = \beta_{28} = \beta_{29} = \beta_{30} = 0 \qquad \text{......ก17.1}$$

ทำให้สมการ ก14.3 เปลี่ยนเป็น

$$[P]_{6\times 22} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ 2y & x^2 & 2xy & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \end{array}\right]$$

......ก17.2

จากสมการ ก17.2 , ก14.7 , ก1.21 จะได้

$$[H]_{22\times 22} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก17.3}$$

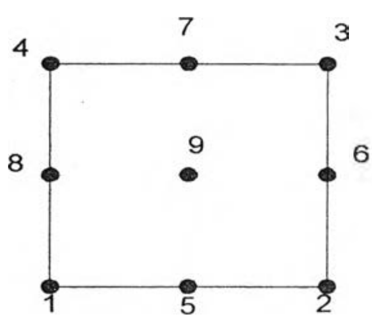
$$[T]_{22\times 24} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B d\xi d\eta \qquad \text{......ก17.4}$$

ก18 ชิ้นส่วน QH_OP

เป็นชิ้นส่วนที่ทำการปรับปรุงจากชิ้นส่วนขึ้นมาจากที่เสนอขึ้นมาแล้วโดยวิธีโหมดการกระจัดธรรมชาติ

$$[P]_{6\times 21} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x^3 & xy^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6x & 2y & 2x \\
0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2x & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 2y & 3x^2 & 2xy & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 2y & 2x & y & 0 & 0 & 0 & 2xy
\end{array}\right] \qquad \text{......ก18.1}$$

ก19 ชิ้นส่วน LQH4



รูปที่ ก19.1 ชิ้นส่วน LQH4

จะทำการสมมุติความเค้นเหมือน QH_OP ทุกประการ แต่จะทำการปรับปรุงสนามการกระจัดใหม่ด้วยชิ้นส่วนลากรองจ์ [(10)] โดย

$$w(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i(\xi,\eta) w_i \qquad \text{......ก19.1ก}$$

$$r_x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i(\xi,\eta) r_{x_i}$$ ก19.1ข

$$r_y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i(\xi,\eta) r_{y_i}$$ ก19.1ค

เมื่อ

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_8 + N_5 + \frac{1}{2}N_9\right)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_5 + N_6 + \frac{1}{2}N_9\right)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_6 + N_7 + \frac{1}{2}N_9\right)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_7 + N_8 + \frac{1}{2}N_9\right)$$ ก19.2ก

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_9$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_9$$ ก19.2ข

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_9$$
$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_9$$ ก19.2ค

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$ ก19.2ง

และในทำนองเดียวกันกับสมการ ก1.14ก , ก1.14ข ม จะได้

$$N_{1,\xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{8,\xi} + N_{5,\xi} + \frac{1}{2}N_{9,\xi}\right)$$
$$N_{2,\xi} = +\frac{1}{4}(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{5,\xi} + N_{6,\xi} + \frac{1}{2}N_{9,\xi}\right)$$
$$N_{3,\xi} = +\frac{1}{4}(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{6,\xi} + N_{7,\xi} + \frac{1}{2}N_{9,\xi}\right)$$
$$N_{4,\xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{7,\xi} + N_{8,\xi} + \frac{1}{2}N_{9,\xi}\right)$$ ก19.3ก

$$N_{5,\xi} = \frac{1}{2}(-2\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_{9,\xi}$$
$$N_{6,\xi} = \frac{1}{2}(1)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_{9,\xi}$$
$$N_{7,\xi} = \frac{1}{2}(-2\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_{9,\xi}$$
$$N_{8,\xi} = \frac{1}{2}(-1)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_{9,\xi}$$ ก19.3ข

$$N_{9,\xi} = -2\xi(1-\eta^2)$$

$$N_{1},_{\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{8},_{\eta} + N_{5},_{\eta} + \frac{1}{2}N_{9},_{\xi}\right)$$

$$N_{2},_{\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{5},_{\eta} + N_{6},_{\eta} + \frac{1}{2}N_{9},_{\xi}\right)$$

$$N_{3},_{\eta} = +\frac{1}{4}(1+\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{6},_{\eta} + N_{7},_{\eta} + \frac{1}{2}N_{9},_{\xi}\right) \qquad \text{......ก19.3ค}$$

$$N_{4},_{\eta} = +\frac{1}{4}(1-\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{7},_{\eta} + N_{8},_{\eta} + \frac{1}{2}N_{9},_{\xi}\right)$$

$$N_{5},_{\eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(-1) - \frac{1}{2}N_{9},_{\eta}$$

$$N_{6},_{\eta} = \frac{1}{2}(1+\xi)(-2\eta) - \frac{1}{2}N_{9},_{\eta}$$

$$N_{7},_{\eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1) - \frac{1}{2}N_{9},_{\eta} \qquad \text{......ก19.3ง}$$

$$N_{8},_{\eta} = \frac{1}{2}(1-\xi)(-2\eta) - \frac{1}{2}N_{9},_{\eta}$$

$$N_{9},_{\eta} = -2(1-\xi^2)\eta$$

และจะได้

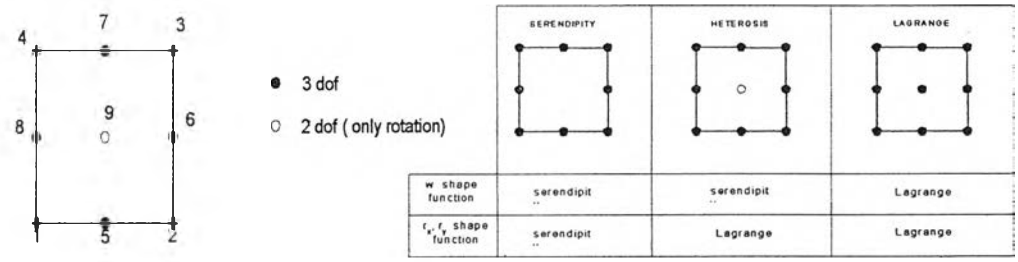
$$[B]_{6\times 27} = [A]_{6\times 8}[E]_{8\times 27} \qquad \text{......ก19.4}$$

โดยแทน $[A]$ จากสมการ ก1.13ก และ $[E]$ ในทำนองเดียวกันกับสมการ ก1.14ก จะได้ว่า

$$[H]_{30\times 30} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก19.5}$$

$$[T]_{30\times 27} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก19.6}$$

ก20 **ชิ้นส่วน HQH4**



รูปที่ ก20.1 ชิ้นส่วน HQH4

จะทำการสมมุติความเค้นเหมือน QH4_OP ทุกประการ แต่จะทำการปรับปรุงสนามการกระจัดใหม่ด้วยชิ้นส่วน อภิชาติ [10] โดย

$$w(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) w_i$$ ก20.1ก

$$r_x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i(\xi,\eta) r_{x_i}$$ ก20.1ข

$$r_y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i(\xi,\eta) r_{y_i}$$ ก20.1ค

และจะได้

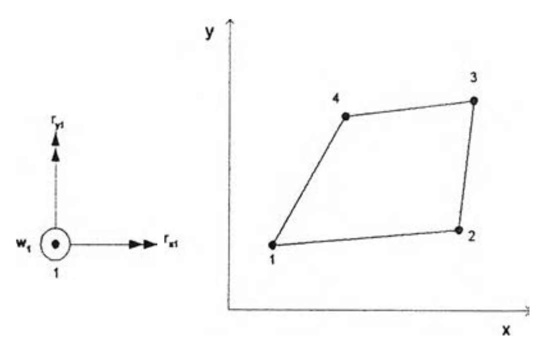
$$[B]_{6\times 27} = [A]_{6\times 8}[E]_{8\times 27}$$ ก20.2

โดยแทน $[A]$ จากสมการ 3.1.13ก และ $[E]$ ในทำนองเดียวกันกับสมการ 3.1.14ก จะได้ว่า

$$[H]_{30\times 30} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta$$ ก20.3

$$[T]_{30\times 26} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta$$ ง20.4

ก21 ชิ้นส่วน HQL9[(5),(6)]



รูปที่ ก 21.1 ชิ้นส่วน HQL9

การสมมุติความเค้น

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ : \\ : \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = [P]_{5\times 9}\{\beta\}$$ ก21.1

การสมมุติการกระจัดที่ขอบ

$$w = (1-\xi_{ij})w_i + \xi_{ij}w_j$$ ก21.2ก

$$r_x = (1-\xi_{ij})r_{xi} + \xi_{ij}r_{xj}$$

$$r_y = (1-\xi_{ij})r_{yi} + \xi_{ij}r_{yj}$$ ก21.2ข

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ w \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ w_i \\ r_{xj} \\ r_{yj} \\ w_j \end{Bmatrix} = [L]_i \{q\}_i$$ ก21.3ก

ก22... **ชิ้นส่วน HQL5**

จากสมการ ก21.1 เปลี่ยน $[P]$ เป็น

$$[P]_{5\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ก22.1

ก23..**ชิ้นส่วน** HQQ9[(5),(6)]

จะทำการสมมุติความเค้นเหมือนสมการ ก21.1 แต่ทำการเปลี่ยนการสมมุติการกระจัด ในสมการ ก 21.2ก เป็น

$$w = (1-\xi_{ij})w_i + \xi_{ij}w_j + \frac{L_{ij}\xi_{ij}}{2}(1-\xi_{ij})(r_{x_i} - r_{x_j})$$ ก23.1

หรือเขียนได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} w_{ij} \\ r_{xij} \\ r_{yij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi_{ij} & \frac{L_{ij}}{2}\xi_{ij}(1-\xi_{ij}) & 0 & \xi_{ij} & -\frac{L_{ij}}{2}\xi_{ij}(1-\xi_{ij}) & 0 \\ 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ r_{xi} \\ r_{yi} \\ w_j \\ r_{xj} \\ r_{yj} \end{Bmatrix}$$ ก23.2

ก24 ชิ้นส่วน HQC9[(5),(6)]

ในทำนองเดียวกันกับ ชิ้นส่วน HQL9 แต่เปลี่ยนการกระจัดในสมการที่ ก21.2ก,ข,ค เป็น

$$w=\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)w_i+\left(3\xi^2-2\xi^3\right)w_j+L_i\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)r_{x_i}-L_i\left(\xi^2-\xi^3\right)r_{x_j} \qquad \text{......ก24.1ก}$$

$$\frac{d\xi_{ij}}{dS_{ij}}=\frac{1}{L_{ij}} \qquad \text{......ก24.1ข}$$

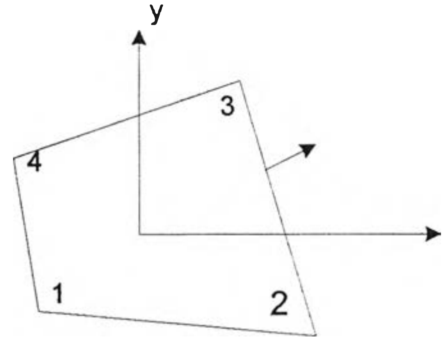
$$\begin{aligned} r_x=\frac{dw}{ds}&=\frac{1}{L_{ij}}\left(-6\xi_{ij}+6\xi_{ij}^2\right)w_i+\frac{1}{L_{ij}}\left(6\xi-6\xi_{ij}^2\right)w_j \\ &+\left(1-4\xi_{ij}+3\xi_{ij}^2\right)r_{xi}+\left(3\xi_{ij}^2-2\xi_{ij}\right)r_{xj} \end{aligned} \qquad \text{......ก24.1ค}$$

$$r_y=\left(1-\xi\right)r_{yi}+\xi r_{yj} \qquad \text{......ก24.1ง}$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} w_{ij} \\ r_{xij} \\ r_{yij} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-3\xi_{ij}^2+2\xi_{ij}^3 & L_{ij}\left(\xi_{ij}-2\xi_{ij}^2+\xi_{ij}^3\right) & 0 & 3\xi_{ij}^2-2\xi_{ij}^3 & -L_{ij}\left(\xi_{ij}^2-\xi_{ij}^3\right) & 0 \\ \frac{1}{L_{ij}}\left(-6\xi_{ij}+6\xi_{ij}^2\right) & 1-4\xi_{ij}+3\xi_{ij}^2 & 0 & \frac{1}{L_{ij}}\left(6\xi_{ij}-6\xi_{ij}^2\right) & 3\xi_{ij}^2-2\xi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{ij} & 0 & 0 & \xi_{ij} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_j \\ r_{xj} \\ r_{yj} \\ w_j \\ r_{xj} \\ r_{yj} \end{Bmatrix} \qquad \text{......ก24.2}$$

ก25 ชิ้นส่วน SCP [42]



รูปที่ ก25.1 ชิ้นส่วน SCP

การสมมุติสนามความเค้นจะเป็น

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccccccccc|cc} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{13} \end{Bmatrix} \qquad \text{......ก25.1}$$

และทำการสมมุติการกระจัดที่ขอบดังนี้

$$w = \left[\xi_{ij} + \lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right]w_i + \left[\xi_{ij}\eta_{ij} + \lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right]\frac{1}{2}r_{xi}$$
$$+ \left[\eta_{ij} - \lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right]w_j + \left[-\xi_{ij}\eta_{ij} + \lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right]\frac{1}{2}r_{yi}$$
$$r_x = -6\lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\frac{w_i}{l} + \left(\eta_{ij} - 3\lambda\eta_{ij}\right)r_{xi} + 6\lambda\xi_{ij}\eta_{ij}\frac{w_j}{l} + \left(\eta_{ij} - 3\lambda\xi_{ij}\right)r_{xj}$$
$$r_y = \eta_{ij}r_{yi} + \xi_{ij}r_{yj}$$

......ก25.2

เมื่อ

$$\eta_{ij} = 1 - \xi_{ij}$$ ก25.3

$$\lambda = \frac{1}{1 + 12\left(D/Tl^2\right)}$$ ก25.4

ดังนั้น

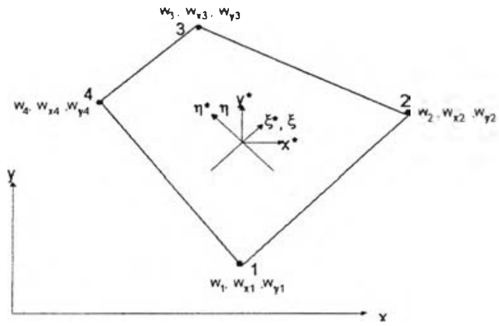
$$[L]_i = \left[\begin{matrix} \eta_{ij} - 3\lambda\eta_{ij} & 0 & \frac{-6\lambda\eta_{ij}\xi_{ij}}{l} \\ 0 & \eta_{ij} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[\eta_{ij}\xi_{ij} + \lambda\eta_{ij}\xi_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right] & 0 & \eta_{ij} + \lambda\eta_{ij}\xi_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right) \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} \eta_{ij} - 3\lambda\eta_{ij} & 0 & \frac{6\lambda\eta_{ij}\xi_{ij}}{l} \\ 0 & \xi_{ij} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[-\eta_{ij}\xi_{ij} + \lambda\eta_{ij}\xi_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right)\right] & 0 & \xi_{ij} - \lambda\eta_{ij}\xi_{ij}\left(\eta_{ij} - \xi_{ij}\right) \end{matrix}\right]$$ ก25.5

ก26 ชิ้นส่วน SCP3

มีการลดรูปสมการ ก25.1 เป็น

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccccccc|cc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix}$$ ก26.1

ก27 ชิ้นส่วน HSQK1 [42]



รูปที่ ก.1 ชิ้นส่วน HSQK1

มีการสมมุติความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & \xi^* I_3 & \eta^* I_3 & \xi^* \eta^* I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = [P]_{3\times 12} \{\beta\}_{12\times 1} \qquad \text{......ก27.1}$$

เมื่อ

$$\xi^* = \left(a_1^2 + b_1^2\right)\xi + \left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right)\xi\eta + \left(a_1 a_3 + b_1 b_3\right)\eta \qquad \text{......ก27.2}$$

$$\eta^* = \left(a_3 a_1 + b_1 b_3\right)\xi + \left(a_2 a_3 + b_2 b_3\right)\xi\eta + \left(a_3^2 + b_3^2\right)\eta \qquad \text{......ก27.3}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{......ก27.4}$$

และมีการสมมุติการกระจัดตามขอบได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} W_{,n} \\ W_{,s} \\ W \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & l(1-\zeta) & m(1-\zeta) & 0 & l\zeta & m\zeta \\ 6\zeta(1-\zeta)/\delta & -m(\zeta-1)(3\zeta-1) & l(\zeta-1)(\zeta-1)^2 & -6\zeta(\zeta-1)/\delta & -m\zeta(3\zeta-2) & l\zeta(3\zeta-2) \\ \left(1-3\zeta^2+2\zeta^3\right) & -m\delta\zeta(\zeta-1)^2 & l\delta\zeta(\zeta-1)^2 & \zeta^2(3-2\zeta) & -m\delta\zeta^2(\zeta-1) & l\delta\zeta^2(\zeta-1) \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} W_i \\ W_{,xi} \\ W_{,yi} \\ W_j \\ W_{,xj} \\ W_{,yj} \end{Bmatrix} \qquad \text{......ก27.5ก}$$

$$\{u\} = [L]\{q_{ij}\} \qquad \text{......ก27.5ข}$$

โดย

$$l = c = \cos\phi_i = \frac{x_j - x_i}{L_{ij}} \qquad \text{......ก27.6ก}$$

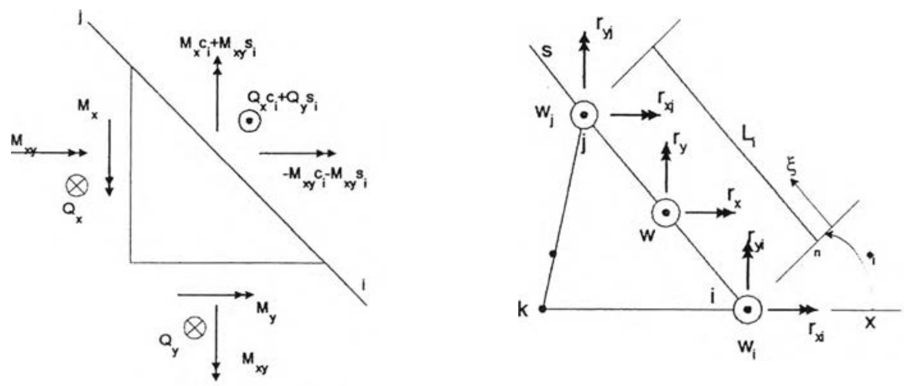
$$m = s = \sin\phi_i = \frac{y_j - y_i}{L_{ij}} \qquad \text{......ก27.6ข}$$

$$L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \qquad \text{......ก27.6ค}$$

$$S_{ij} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \qquad \text{......ก27.6ง}$$

$$\zeta = \xi_{ij} = \frac{S_{ij}}{L_{ij}} \qquad \text{......ก27.6จ}$$

ก28 ชิ้นส่วน HTL9[(5),(6)]



รูปที่ ก28.1 ชิ้นส่วน HTL9

มีการสมมุติความเค้นดังสมการ ก21.1 และมีการสมมุติการกระจัดดังสมการ ก21.2 ทำให้เราสามารถหา สติฟเนสได้ดังสมการ 3.13.7 และจะได้

ก29 ชิ้นส่วน HTL5 [(5),(6)]

มีการสมมุติสนามความเค้นและสนามการกระจัดเช่นเดียวกันกับชิ้นส่วน HQL5 แต่จะประกอบด้วย 3 ด้านเท่านั้น นั้นคือสามารถหาสติฟเนสได้ดังสมการ ก 22.1-ก 22.3

ก30 ชิ้นส่วน HTL9

มีการสมมุติสนามการกระจัดและสนามความเค้นเหมือนชิ้นส่วน HQQ9 ดังนั้นสามารถค่าสติฟเนสได้ดังสมการ ก23.1 –ก23.5 แต่ประกอบขึ้นจากชิ้นส่วนเพียงสามด้านเท่า

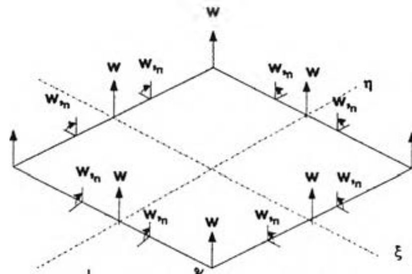
ก31 ชิ้นส่วน HTQ9

มีการสมมุติสนามความเค้นเหมือนสมการ ก24.1 แต่สมมุติสนามการกระจัดเหมือนสมการ ก25.1 ซึ่งแทนค่าหาสติฟเนสออกมาได้

ก32 ชิ้นส่วน HTT9

มีการสมมุติสนามความเค้นและสนามการกระจัดเหมือนชิ้นส่วน HQQ9

ก33. **ชิ้นส่วน 16-DOF** [26]



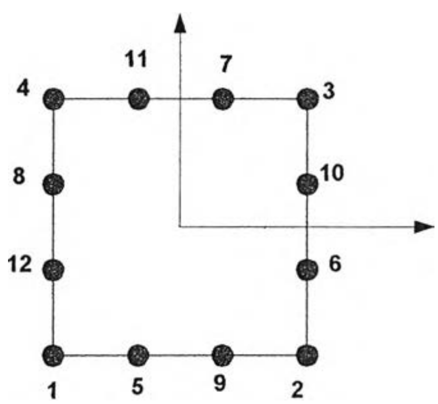
รูปที่ ก33.1 ชิ้นส่วน 16-DOF

มีการสมมุติความเค้น และการกระจัด ดังนี้

$$M_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$
$$M_y = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 \qquad \text{......ก33.1}$$
$$M_{xy} = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3$$

$$w = w_q + w_\lambda$$
$$w_q = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 \qquad \text{......ก33.2}$$
$$\alpha_{11}x^4 + \alpha_{12}x^3y + \alpha_{13}xy^3 + \alpha_{14}y^4 + \alpha_{15}x^3y^2 + \alpha_{16}x^2y^3$$
$$w_\lambda = \lambda_1x^2y^2 + \lambda_2x^5 + \lambda_3x^4y + \lambda_4xy^4 + \lambda_5y^5$$

ก34 **ชิ้นส่วน CH1**



รูปที่ ก 34.1 ชิ้นส่วน CH1

สมมุติสนามความเค้นดังนี้

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} =
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc}
1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \xi\eta^2 & \xi^2\eta & \xi^3 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\eta & 6\xi & 0 & 6\xi\eta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \eta & 2\xi & 0 & \eta^2 & 2\xi\eta & 3\xi^2 & 0 & 3\xi^2\eta & \eta^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right.
$$

$$
\begin{array}{:ccc:ccc:ccc:ccc:}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \xi\eta^2 & \xi^2\eta & \xi^3 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2\xi & 0 & 0 & 6\eta & 0 & 6\xi\eta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 2\eta & 2\xi\eta & \xi^2 & 0 & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi\eta^2
\end{array}
$$

$$
\left. \begin{array}{:ccc:ccc:ccc:ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2\eta^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2\eta^2 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\eta & 4\xi & 0 & 0 & 2\eta^2 & 2\xi^2 \\
1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \xi\eta^2 & \xi^2\eta & \xi^3 & \eta^3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 2\eta & 2\xi\eta & \xi^2 & 0 & 3\eta^2 & 2\xi\eta^2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \eta & 2\xi & 0 & \eta^2 & 2\xi\eta & 3\xi^2 & 0 & 0 & 2\xi^2\eta
\end{array} \right]_{6\times 36}
\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{36} \end{Bmatrix}
$$

$$
= [P]_{6\times 36} \{\beta\}_{36\times 1}
$$

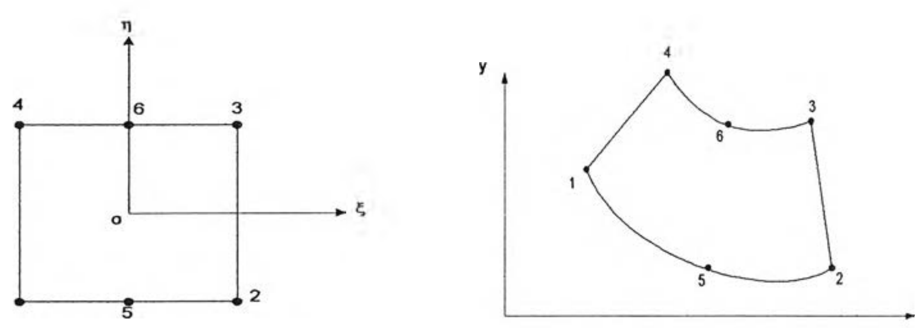
......ก34.1

และสมมุติสนามการกระจัดเป็น

$$
\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ w \end{Bmatrix}_{3\times 1} =
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc}
N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_{12} & 0 & 0 \\
0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_{12} & 0 \\
0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_{12}
\end{array} \right]_{3\times 36} [q]_{36\times 1} \qquad \text{......ก34.2}
$$

นำไปหาสติฟเนสต่อไป

ก35 ชิ้นส่วน HM6-14 [59]



รูปที่ ก35.1 ชิ้นส่วน HM6-14

มีการสมมุติสนามความเค้นดังนี้

$$M=P_f(x)\beta=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & y^2 & x^2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 & x^2 & y^2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & xy & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_{14}\end{Bmatrix} \qquad \text{.....ก35.1}$$

$$Q=P_s(x)\beta=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x & 0 & 2x\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & y & 0 & 2y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_{15}\\ \beta_{16}\\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_{28}\end{Bmatrix} \qquad \text{......ก35.2}$$

นั่นคือ

$$[P]_{5\times 28}=\left[\begin{array}{c|c}P_f & 0\\ \hline 0 & P_s\end{array}\right] \qquad \text{......ก35.3}$$

ทำการสมมุติสนามการกระจัดได้เป็น

$$u=Lq \qquad \text{......ก35.4}$$

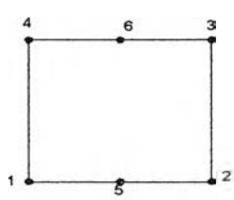
$$L=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}N_1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_6 & 0\\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & N_6\end{array}\right] \qquad \text{......ก35.5}$$

โดย

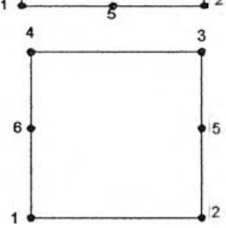
$$N_i=0.25\times(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)-0.5\times(1-\xi^2)(1-\eta) \quad i=1,2$$
$$N_i=0.25\times(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)-0.5\times(1-\xi^2)(1+\eta) \quad i=3,4 \qquad \text{......ก35.6}$$

โดยที่

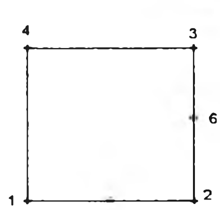
N_5, N_6 จะเปลี่ยนไปตามรูปของชิ้นส่วนดังนี้



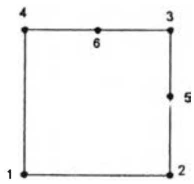
$$N_5=0.5\times(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_6=0.5\times(1-\xi^2)(1+\eta) \qquad \text{......ก35.7}$$



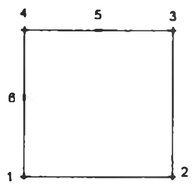
$$N_5=0.5\times(1-\eta^2)(1+\xi)$$
$$N_6=0.5\times(1-\eta^2)(1-\xi) \qquad \text{......ก35.8}$$



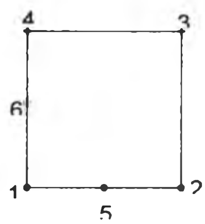
$$N_5=0.5\times(1-\xi^2)$$
$$N_6=0.5\times(1-\eta^2) \qquad \text{......ก35.9}$$



$$N_5 = 0.5 \times \left(1-\eta^2\right)$$
$$N_6 = 0.5 \times \left(1-\xi^2\right) \qquad \text{......ก35.10}$$



$$N_5 = 0.5 \times \left(1-\xi^2\right)$$
$$N_6 = 0.5 \times \left(1-\eta^2\right) \qquad \text{......ก35.11}$$

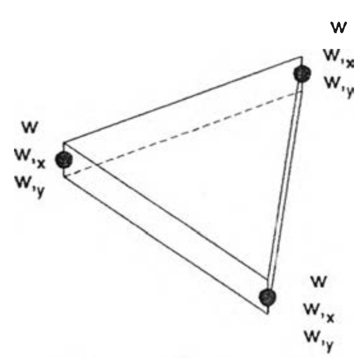


$$N_5 = 0.5 \times \left(1-\xi^2\right)$$
$$N_6 = 0.5 \times \left(1-\eta^2\right) \qquad \text{......ก35.12}$$

สามารถหาค่า $[B]$ ได้จากสมการ 3.18.3ก และ ค่า $[E]$ ในทำนองเดียวกันกับสมการที่ผ่านมา และจะได้

$$[H]_{28\times 28} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T S P |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก35.13}$$
$$[T]_{28\times 18} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T B |J| d\xi d\eta \qquad \text{......ก35.14}$$
$$[K]_{18\times 18} = T^T H^{-1} T \qquad \text{......ก35.15}$$

ก36 ชิ้นส่วน HSM (13)



รูปที่ ก36.1 ชิ้นส่วน HSM

สนามความเค้น

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix} \qquad \text{......ก36.1}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \qquad \text{......ก36.2}$$

สนามการการกระจัด

$$\begin{Bmatrix} w \\ w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} = L_{ij} U_{ij} \qquad \text{……ก36.3}$$

เมื่อ

$$U_{ij} = \lfloor w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad w_j \quad \theta_{x_j} \quad \theta_{y_j} \rfloor^T \qquad \text{……ก36.4}$$

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} H_{01}^1 & cH_{11}^1 & sH_{11}^1 & H_{02}^1 & cH_{12}^1 & sH_{12}^1 \\ 0 & s(1-\xi) & -c(1-\xi) & 0 & s\xi & -c\xi \\ \frac{H_{01,\xi}^1}{l_{ij}} & \frac{cH_{11,\xi}^1}{l_{ij}} & \frac{sH_{11,\xi}^1}{l_{ij}} & \frac{H_{01,\xi}^1}{l_{ij}} & \frac{cH_{12,\xi}^1}{l_{ij}} & \frac{sH_{12,\xi}^1}{l_{ij}} \end{bmatrix} \qquad \text{……ก36.5}$$

โดย

$$\begin{aligned} H_{01}^1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ H_{02}^1 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ H_{11}^1 &= l_{ij}\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) \\ H_{12}^1 &= l_{ij}\left(-\xi^2 + \xi^3\right) \end{aligned} \qquad \text{……ก36.6}$$

เมื่อนำไปแทนค่าหา $[H]$ และ $[T]$ จะได้อยู่ในรูปสำเร็จได้ดังนี้

$$[H] = \begin{bmatrix} c_{11}\phi & c_{12}\phi & c_{13}\phi \\ c_{12}\phi & c_{22}\phi & c_{23}\phi \\ c_{13}\phi & c_{23}\phi & c_{33}\phi \end{bmatrix} \qquad \text{……ก36.10}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} & s_{23} \\ & & s_{33} \end{bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\upsilon^2)} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{……ก36.11}$$

และ

c_{ij} คือสัมประสิทธิ์ของ s^{-1}

และ

$$\phi = \int_A P_0^T P_0 dxdy = \int_A \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} dxdy \qquad \text{……ก36.12}$$

ถ้าเราวางจุดกำเนิด x, y ไว้ที่จุดศูนย์ถ่วง จะได้

$$\phi = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \psi \\ 0 & \psi & \gamma \end{bmatrix} \qquad \text{……ก36.13}$$

เมื่อ

A = พื้นที่สามเหลี่ยม

$$\alpha = \frac{A}{12}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$ ก36.14ก

$$\psi = \frac{A}{12}\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\right)$$ ก36.14ข

$$\gamma = \frac{A}{12}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$$ ก36.14ค

นั้นคือ

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} s_{11}\Lambda & s_{12}\Lambda & s_{13}\Lambda \\ s_{12}\Lambda & s_{22}\Lambda & s_{23}\Lambda \\ s_{13}\Lambda & s_{23}\Lambda & s_{33}\Lambda \end{bmatrix}$$ ก36.15

และ

$$\Lambda = \phi^{-1} = \frac{1}{A\left(\alpha\gamma - \psi^2\right)}\begin{bmatrix} \alpha\gamma - \psi^2 & 0 & 0 \\ 0 & A\gamma & -A\psi \\ 0 & -A\psi & A\alpha \end{bmatrix}$$ ก36.16

และจะได้

$$T_{ij} = \left[\begin{array}{cccccc}
-cs & -\frac{1}{2}c^2 x_{ij} & -\frac{1}{2}c^2 y_{ij} & cs & -\frac{1}{2}c^2 x_{ij} & -\frac{1}{2}c^2 y_{ij} \\
-\frac{1}{2}y_{ij} - csx_k & \frac{1}{2}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}c^2 x_{ij}x_k & -\frac{1}{6}x_{ij}y_{ij} - \frac{1}{2}c^2 y_{ij}x_k & -\frac{1}{2}y_{ij} + csx_k & -\frac{1}{2}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}c^2 x_{ij}x_k & \frac{1}{6}x_{ij}y_{ij} - \frac{1}{2}c^2 y_{ij}x_k \\
-csy_k & -\frac{1}{2}c^2 x_{ij}y_k & -\frac{1}{12}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}c^2 y_{ij}y_k & csy_k & -\frac{1}{2}c^2 x_{ij}y_k & \frac{1}{12}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}c^2 y_{ij}y_k \\
cs & -\frac{1}{2}s^2 x_{ij} & -\frac{1}{2}s^2 y_{ij} & -cs & -\frac{1}{2}s^2 x_{ij} & -\frac{1}{2}s^2 y_{ij} \\
csx_k & -\frac{1}{12}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}s^2 x_{ij}x_k & -\frac{1}{2}s^2 y_{ij}x_k & -csx_k & \frac{1}{12}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}s^2 x_{ij}x_k & -\frac{1}{2}s^2 y_{ij}x_k \\
\frac{1}{2}x_{ij} + csy_k & -\frac{1}{6}x_{ij}y_{ij} - \frac{1}{2}s^2 x_{ij}y_k & \frac{1}{12}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}s^2 y_{ij}y_k & \frac{1}{2}x_{ij} - csy_k & \frac{1}{6}x_{ij}y_{ij} - \frac{1}{2}s^2 x_{ij}y_k & -\frac{1}{12}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}s^2 y_{ij}y_k \\
\left(c^2 - s^2\right) & -csx_{ij} & -csy_{ij} & -csy_{ij} & -csx_{ij} & -csy_{ij} \\
\frac{1}{2}x_{ij} + \left(c^2 - s^2\right)x_k & s^2 y_{ij}x_k & \frac{1}{6}x_{ij}^2 + c^2 x_{ij}x_k & \frac{1}{6}x_{ij}^2 + c^2 x_{ij}x_k & s^2 y_{ij}x_k & -\frac{1}{6}x_{ij}^2 + c^2 x_{ij}x_k \\
-\frac{1}{2}y_{ij} + \left(c^2 - s^2\right)y_k & \frac{1}{6}y_{ij}^2 + s^2 y_{ij}y_k & c^2 x_{ij}y_k & c^2 x_{ij}y_k & -\frac{1}{6}y_{ij}^2 + s^2 y_{ij}y_k & c^2 x_{ij}y_k
\end{array}\right]$$

......ก37.17

เมื่อ

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - x_j$$

$$x_k = \frac{1}{2}(x_i + x_j) \qquad \text{......ก37.18}$$

$$y_k = \frac{1}{2}(y_i - y_j)$$

$$T = T_{12} + T_{23} + T_{31} \qquad \text{......ก37.19}$$

ก38 ชิ้นส่วน STADD III

มีการสมมุติสนามความเค้นดังนี้

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & -xy & x^2 & y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & x & y & 2x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{17} \end{Bmatrix}$$

......ก38.1

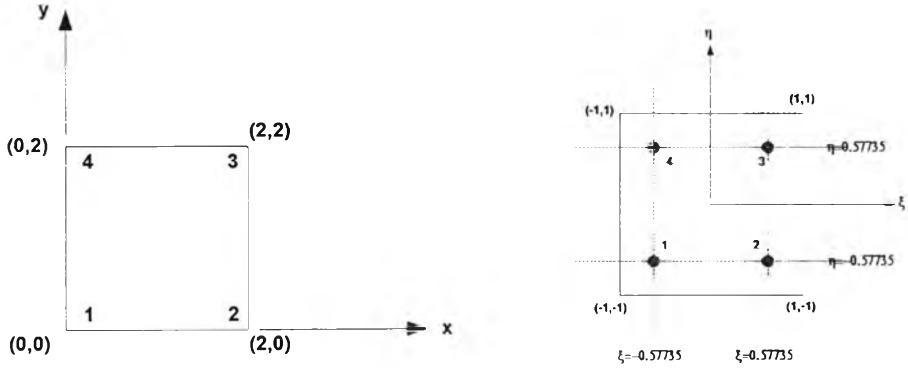
ส่วนสนามการกระจัดนั้นจะใช้ฟังก์ชันกำหนดรูปร่างของไอโซพาราเมตริก แต่แต่ละขั้วจะมีระดับขั้นความเสรี เท่ากับ 6 นั่นคือระดับขั้นความเสรีทั้งหมดเท่ากับ 24

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างการคำนวณ

1. การหาสติฟเนสเมตริกของชิ้นส่วน LH3

จากตัวอย่างทดสอบในรูปที่ 4.1.1.1 กรณี N16 น้ำขึ้นแรกมาพิจารณา



รูปที่ ข1.1 รายละเอียดชิ้นที่ 1

จาก

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = [P]_{6\times 9}\{\beta\}_{9\times 1} \qquad \text{......3.1.4}$$

โดย

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i \qquad \text{......3.1.5ก}$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i \qquad \text{......3.1.5ข}$$

เมื่อ

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad \text{......3.1.6}$$

พิจารณาจุดอินทิเกรทของเก๊าส์จุดที่ 1 จะได้

$$N_1 = 0.6220 \qquad N_2 = 0.1667$$

$$N_3 = 0.0447 \qquad N_4 = 0.1667$$

พิจารณาจุดที่ 1

$$x = 0\times 0.6220 + 2\times 0.1667 + 2\times 0.447 + 0\times 0.1667 = 0.4226$$
$$y = 0\times 0.6220 + 0\times 0.1667 + 2\times 0.447 + 2\times 0.1667 = 0.4226$$

$\lfloor P_{@1} \rfloor =$

1.0000	0.4226	0.4226	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.4226	0.4226	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.4226	0.4226
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$\lfloor P_{@2} \rfloor =$

1.0000	1.5774	0.4226	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.5774	0.4226	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.5774	0.4226
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

$\lfloor P_{@3} \rfloor =$

1.0000	1.5774	1.5774	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.5774	1.5774	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.5774	1.5774
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

$\lfloor P_{@4} \rfloor =$

1.0000	0.4226	1.5774	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.4226	1.5774	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.4226	1.5774
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

การกระจัดที่ทำการสมมติจะเป็นการกระจัดภายในชิ้นส่วน

$$w(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) w_i \qquad ......3.1.7ก$$

$$r_x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) r_{x_i} \qquad ......3.1.7ข$$

$$r_y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) r_{y_i} \qquad ......3.1.7ค$$

หรือ

$$\{u\} = [L]_{3\times12}\{q\}_{12\times1} \qquad ......3.1.8ก$$

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ w \end{Bmatrix}_{3\times1} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array}\right]_{3\times12} \begin{Bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{x4} \\ r_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix}_{12\times1}$$

......3.1.8ข

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \qquad ......3.1.9$$

เมื่อ

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 1 & -\partial/\partial y \\ 1 & 0 & -\partial/\partial x \end{bmatrix}_{6\times3} \qquad ......3.1.10$$

จากความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad ......3.1.11$$

โดย

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \qquad ......3.1.12$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & |J| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & |J| & 0 \end{bmatrix}_{6\times 8} \begin{Bmatrix} \partial r_x/\partial\xi \\ \partial r_x/\partial\eta \\ \partial r_y/\partial\xi \\ \partial r_y/\partial\eta \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ r_x \\ r_y \end{Bmatrix}_{8\times 1}$$

......3.1.13ก

$$\{\varepsilon\} = [A]_{6\times 8}[M]_{8\times 1}$$ 3.1.13ข

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้

$$\begin{Bmatrix} \partial r_x/\partial\xi \\ \partial r_x/\partial\eta \\ \partial r_y/\partial\xi \\ \partial r_y/\partial\eta \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \end{array}\right]_{8\times 12} \begin{Bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{x4} \\ r_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

......3.1.14ก

$$[M] = [E]_{8\times 12}[q]_{12\times 1}$$ 3.1.14ข

โดย

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ N_{2,\xi} &= +\frac{1}{4}(1-\eta) & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ N_{3,\xi} &= +\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{3,\eta} &= +\frac{1}{4}(1+\xi) \\ N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) & N_{4,\eta} &= +\frac{1}{4}(1-\xi) \end{aligned}$$ 3.1.15

จากสมการ 3.1.13ข และ 3.1.14ข จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [A]_{6\times 8}[M]_{8\times 1} \\ &= [A]_{6\times 8}[E]_{8\times 12}[q]_{12\times 1} \\ &= [B]_{6\times 12}[q]_{12\times 1} \end{aligned}$$ 3.1.16

พิจารณาค่าของ $[B]$ ที่จุด 1

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1-\eta)(x_2 - x_1) + (1+\eta)(x_3 - x_4) & (1-\eta)(y_2 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_4) \\ (1-\xi)(x_4 - x_1) + (1+\xi)(x_3 - x_2) & (1-\xi)(y_4 - y_1) + (1+\xi)(y_3 - y_2) \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1-\eta)(2) + (1+\eta)(2) & (1-\eta)(0) + (1+\eta)(0) \\ (1-\xi)(0) + (1+\xi)(0) & (1-\xi)(2) + (1+\xi)(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|J| = 1 \times 1 = 1$$

$\lfloor A_{@1} \rfloor =$

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

$\lfloor E_{@1} \rfloor =$

-0.3943	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000
-0.3943	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000	0.0000
0.0000	-0.3943	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000
0.0000	-0.3943	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000
0.0000	0.0000	-0.3943	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	-0.1057
0.0000	0.0000	-0.3943	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	0.3943
0.6220	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0447	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000
0.0000	0.8220	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0447	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000

$\lfloor B_{@1} \rfloor =$

-0.3943	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000
0.0000	-0.3943	0.0000	0.0000	-0.1057	0.0000	0.0000	0.1057	0.0000	0.0000	0.3943	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3943	-0.3943	0.0000	-0.1057	0.3943	0.0000	0.1057	0.1057	0.0000	0.3943	-0.1057	0.0000
0.0000	0.6220	0.3943	0.0000	0.1667	0.1057	0.0000	0.0447	-0.1057	0.0000	0.1667	-0.3943
0.6220	0.0000	0.3943	0.1667	0.0000	-0.3943	0.0447	0.0000	-0.1057	0.1667	0.0000	0.1057

$\lfloor \bar{S} \rfloor =$

1.0000	-0.3300	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3300	1.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
0.0003	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	2.6600	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0027	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0027

แทนค่าสมการที่ 2.2.3 ด้วยสมการที่ 3.1.4 และ 3.1.16 แล้วทำการอินทิเกรต จะได้

$$[H]_{9\times 9} = \frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^T \bar{S} P |J| d\xi d\eta \qquad ......3.1.17$$

$\lfloor H_{@1} \rfloor =$

8.33E-11	3.52E-11	3.52E-11	-2.75E-11	-1.16E-11	-1.16E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3.52E-11	1.51E-11	1.49E-11	-1.16E-11	-4.91E-12	-4.91E-12	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13
3.52E-11	1.49E-11	1.49E-11	-1.16E-11	-4.91E-12	-4.91E-12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-2.75E-11	-1.16E-11	-1.16E-11	8.33E-11	3.52E-11	3.52E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.16E-11	-4.91E-12	-4.91E-12	3.52E-11	1.49E-11	1.49E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.16E-11	-4.91E-12	-4.91E-12	3.52E-11	1.49E-11	1.51E-11	0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-10	9.37E-11	9.37E-11
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13	9.37E-11	3.98E-11	3.96E-11
0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.37E-11	3.96E-11	3.98E-11

$\lfloor H_{@2} \rfloor =$

8.33E-11	1.31E-10	3.52E-11	-2.75E-11	-4.34E-11	-1.16E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1.31E-10	2.08E-10	5.56E-11	-4.34E-11	-6.84E-11	-1.83E-11	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13
3.52E-11	5.56E-11	1.49E-11	-1.16E-11	-1.83E-11	-4.91E-12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-2.75E-11	-4.34E-11	-1.16E-11	8.33E-11	1.31E-10	3.52E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-4.34E-11	-6.84E-11	-1.83E-11	1.31E-10	2.07E-10	5.56E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.16E-11	-1.83E-11	-4.91E-12	3.52E-11	5.56E-11	1.51E-11	0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-10	3.50E-10	9.37E-11
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13	3.50E-10	5.52E-10	1.48E-10
0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.37E-11	1.48E-10	3.98E-11

$\lfloor H_{@3} \rfloor =$

8.33E-11	1.31E-10	1.31E-10	-2.75E-11	-4.34E-11	-4.34E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1.31E-10	2.08E-10	2.07E-10	-4.34E-11	-6.84E-11	-6.84E-11	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13
1.31E-10	2.07E-10	2.07E-10	-4.34E-11	-6.84E-11	-6.84E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-2.75E-11	-4.34E-11	-4.34E-11	0.33E-11	1.31E-10	1.31E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-4.34E-11	-6.84E-11	-6.84E-11	1.31E-10	2.07E-10	2.07E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-4.34E-11	-6.84E-11	-6.84E-11	1.31E-10	2.07E-10	2.08E-10	0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-10	3.50E-10	3.50E-10
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13	3.50E-10	5.52E-10	5.52E-10
0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.50E-10	5.52E-10	5.52E-10

$\lfloor H_{@4} \rfloor =$

8.33E-11	3.52E-11	1.31E-10	-2.75E-11	-1.16E-11	-4.34E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3.52E-11	1.51E-11	5.56E-11	-1.16E-11	-4.91E-12	-1.83E-11	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13
1.31E-10	5.56E-11	2.07E-10	-4.34E-11	-1.83E-11	-6.84E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-2.75E-11	-1.16E-11	-4.34E-11	8.33E-11	3.52E-11	1.31E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.16E-11	-4.91E-12	-1.83E-11	3.52E-11	1.49E-11	5.56E-11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-4.34E-11	-1.83E-11	-6.84E-11	1.31E-10	5.56E-11	2.08E-10	0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-10	8.37E-11	3.50E-10
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.22E-13	8.37E-11	3.98E-11	1.48E-10
0.00E+00	2.22E-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.50E-10	1.48E-10	5.52E-10

จะต้องนำ $[H]$ ทั้งสี่จุดมารวมเข้ากันทั้งหมดก่อนที่จะทำการหา $\left|H^{-1}\right|$ เพราะ $[H]$ ไม่มีคุณสมบัติการวางซ้อน (superposition) ดังนั้นจะได้

$[H] =$

3.33E-10	3.33E-10	3.33E-10	-1.10E-10	-1.10E-10	-1.10E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3.33E-10	4.45E-10	3.33E-10	-1.10E-10	-1.47E-10	-1.10E-10	0.00E+00	0.00E+00	8.87E-13
3.33E-10	3.33E-10	4.44E-10	-1.10E-10	-1.10E-10	-1.47E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.10E-10	-1.10E-10	-1.10E-10	3.33E-10	3.33E-10	3.33E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.10E-10	-1.47E-10	-1.10E-10	3.33E-10	4.44E-10	3.33E-10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-1.10E-10	-1.10E-10	-1.47E-10	3.33E-10	3.33E-10	4.45E-10	0.00E+00	8.87E-13	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.87E-10	8.87E-10	8.87E-10
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.87E-13	8.87E-10	1.18E-09	8.87E-10
0.00E+00	8.87E-13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.87E-10	8.87E-10	1.18E-09

$\left[H^{-1}\right]=$

2.35E+10	-1.00E+10	-1.01E+10	7.72E+09	-3.30E+09	-3.30E+09	-3.98E+07	9.88E+06	2.99E+07
-1.00E+10	1.00E+10	3.06E-11	-3.30E+09	3.30E+09	9.27E-11	2.99E+07	-1.04E-08	-2.99E+07
-1.01E+10	6.12E-11	1.01E+10	-3.30E+09	2.02E-11	3.30E+09	9.88E+06	-9.88E+06	-6.89E-09
7.72E+09	-3.30E+09	-3.30E+09	2.35E+10	-1.01E+10	-1.00E+10	-3.98E+07	2.99E+07	9.88E+06
-3.30E+09	3.30E+09	1.01E-11	-1.01E+10	1.01E+10	3.06E-11	9.88E+06	-3.45E-09	-9.88E+06
-3.30E+09	1.85E-10	3.30E+09	-1.00E+10	6.12E-11	1.00E+10	2.99E+07	-2.99E+07	-2.09E-08
-3.98E+07	2.99E+07	9.88E+06	-3.98E+07	9.88E+06	2.99E+07	7.87E+09	-3.37E+09	-3.37E+09
9.88E+06	-2.09E-08	-9.88E+06	2.99E+07	-6.89E-09	-2.99E+07	-3.37E+09	3.37E+09	2.35E-06
2.99E+07	-2.99E+07	-3.45E-09	9.88E+06	-9.88E+06	-1.04E-08	-3.37E+09	1.18E-06	3.37E+09

$$[T]_{9\times12}=\frac{2h^3}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^T B|J|d\xi d\eta \qquad \text{......3.1.18}$$

$[T]=$

-8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	-8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00
-8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	-8.33E-05	-8.33E-05	8.33E-05	-8.33E-05
-5.56E-05	0.00E+00	0.00E+00	5.56E-05	0.00E+00	0.00E+00	1.11E-04	0.00E+00	0.00E+00	-1.11E-04	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	-8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	8.33E-05	0.00E+00	0.00E+00	8.33E-05	0.00E+00
0.00E+00	-5.56E-05	0.00E+00	0.00E+00	-1.11E-04	0.00E+00	0.00E+00	1.11E-04	0.00E+00	0.00E+00	5.56E-05	0.00E+00
8.33E-05	-8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	-8.33E-05	-8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	-8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05	8.33E-05
-8.33E-05	-8.33E-05	0.00E+00	-8.33E-05	8.33E-05	0.00E+00	8.33E-05	8.33E-05	0.00E+00	8.33E-05	-8.33E-05	0.00E+00
2.78E-05	-8.33E-05	8.33E-05	-2.78E-05	8.33E-05	-8.33E-05	1.94E-04	8.33E-05	-8.33E-05	1.39E-04	-8.33E-05	8.33E-05
-8.33E-05	2.78E-05	8.33E-05	-8.33E-05	1.39E-04	8.33E-05	8.33E-05	1.94E-04	-8.33E-05	8.33E-05	-2.78E-05	-8.33E-05

และจะได้

$$K=T^T H^{-1}T \qquad \text{......3.1.19}$$

$[K]=$

1.85E+02	1.55E+01	1.08E+02	8.66E+01	-1.17E-01	-1.08E+02	1.02E+02	-1.55E+01	-1.08E+02	9.77E+01	1.17E-01	1.08E+02
1.55E+01	1.65E+02	1.08E+02	1.17E-01	9.77E+01	1.08E+02	-1.55E+01	1.02E+02	-1.08E+02	-1.17E-01	6.66E+01	-1.08E+02
1.08E+02	1.08E+02	1.85E+02	7.72E+01	7.72E+01	-8.17E-14	1.08E+02	1.08E+02	-1.85E+02	7.72E+01	7.72E+01	9.95E-14
6.86E+01	1.17E-01	7.72E+01	1.03E+02	-1.55E+01	-7.72E+01	9.77E+01	-1.17E-01	-7.72E+01	4.10E+01	1.55E+01	7.72E+01
-1.17E-01	3.77E+01	7.72E+01	-1.55E+01	1.03E+02	7.72E+01	1.17E-01	6.66E+01	-7.72E+01	1.55E+01	4.10E+01	-7.72E+01
-1.08E+02	1.08E+02	-9.59E-14	-7.72E+01	7.72E+01	1.85E+02	-1.08E+02	1.08E+02	1.14E-13	-7.72E+01	7.72E+01	-1.85E+02
1.02E+02	-1.55E+01	1.08E+02	9.77E+01	1.17E-01	-1.08E+02	1.65E+02	1.55E+01	-1.08E+02	6.66E+01	-1.17E-01	1.08E+02
-1.55E+01	1.02E+02	1.08E+02	-1.17E-01	6.66E+01	1.08E+02	1.55E+01	1.65E+02	-1.08E+02	1.17E-01	9.77E+01	-1.08E+02
-1.08E+02	-1.08E+02	-1.85E+02	-7.72E+01	-7.72E+01	9.95E-14	-1.08E+02	-1.08E+02	1.85E+02	-7.72E+01	-7.72E+01	-1.07E-13
8.77E+01	-1.17E-01	7.72E+01	4.10E+01	1.55E+01	-7.72E+01	6.66E+01	1.17E-01	-7.72E+01	1.03E+02	-1.55E+01	7.72E+01
1.17E-01	6.66E+01	7.72E+01	1.55E+01	4.10E+01	7.72E+01	-1.17E-01	9.77E+01	-7.72E+01	-1.55E+01	1.03E+02	-7.72E+01
1.08E+02	-1.08E+02	1.14E-13	7.72E+01	-7.72E+01	-1.85E+02	1.08E+02	-1.08E+02	-1.17E-13	7.72E+01	-7.72E+01	1.85E+02

2. การหาค่าเจาะจงของของสติฟเนสเมตริก

จากสมการที่ 5.2.2

$$([K]-\lambda[I])\{q\}=0$$

หลังจากได้สติฟเนสเมตริกของชิ้นส่วน LH3 แล้วนำมาหาค่าตามสมการที่ 5.2.2 จะได้สมการเงื่อนไขคือ

$$\lambda^{12} - 1.81\times10^{3}\lambda^{11} + 1.07\times10^{6}\lambda^{10} - 2.31\times10^{8}\lambda^{9} + 2.32\times10^{10}\lambda^{8} - 1.16\times10^{12}\lambda^{7}$$
$$2.18\times10^{3}\lambda^{6} - 2.62\times10^{14}\lambda^{5} + 1.77\times10^{1}\lambda^{4} = 0$$

......ข2.1

ดังนั้นจะสามารถหาคำตอบของสมการที่ ข2.1 เป็นค่าเจาะจงได้เท่ากับ

$$\lambda = 62.56,\ \ 62.56,\ \ 30.84,\ \ 30.84,\ \ 124.38,\ \ 750.87,\ \ 750.87$$

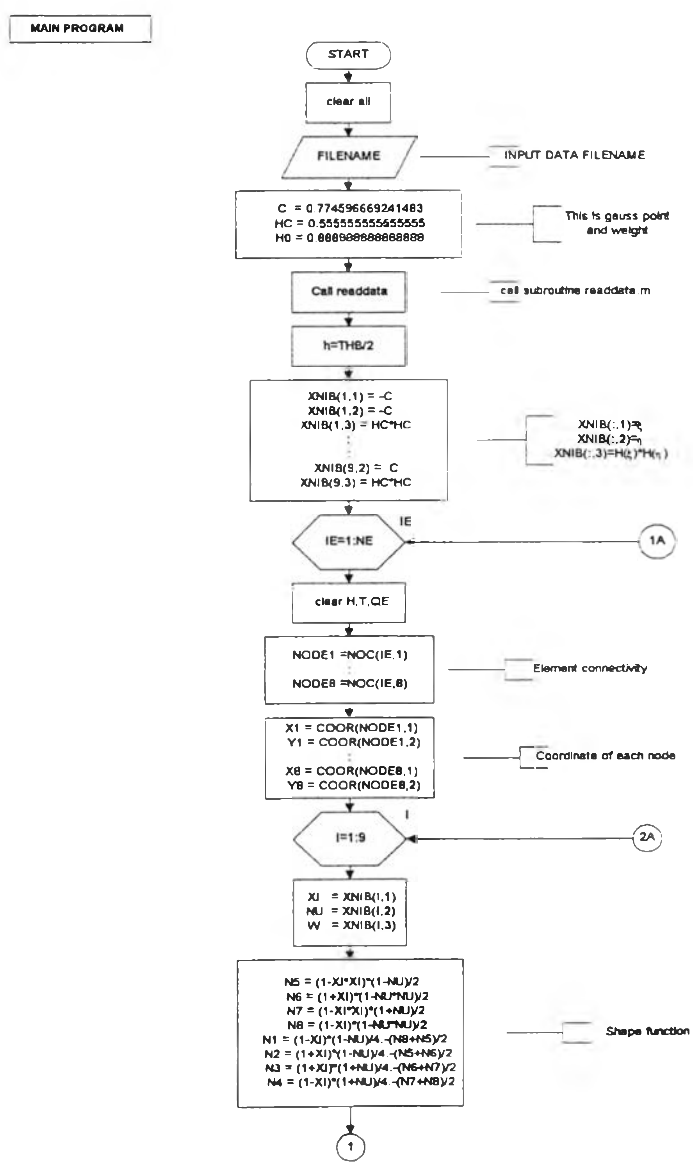
ภาคผนวก ค

รายละเอียดโปรแกรม

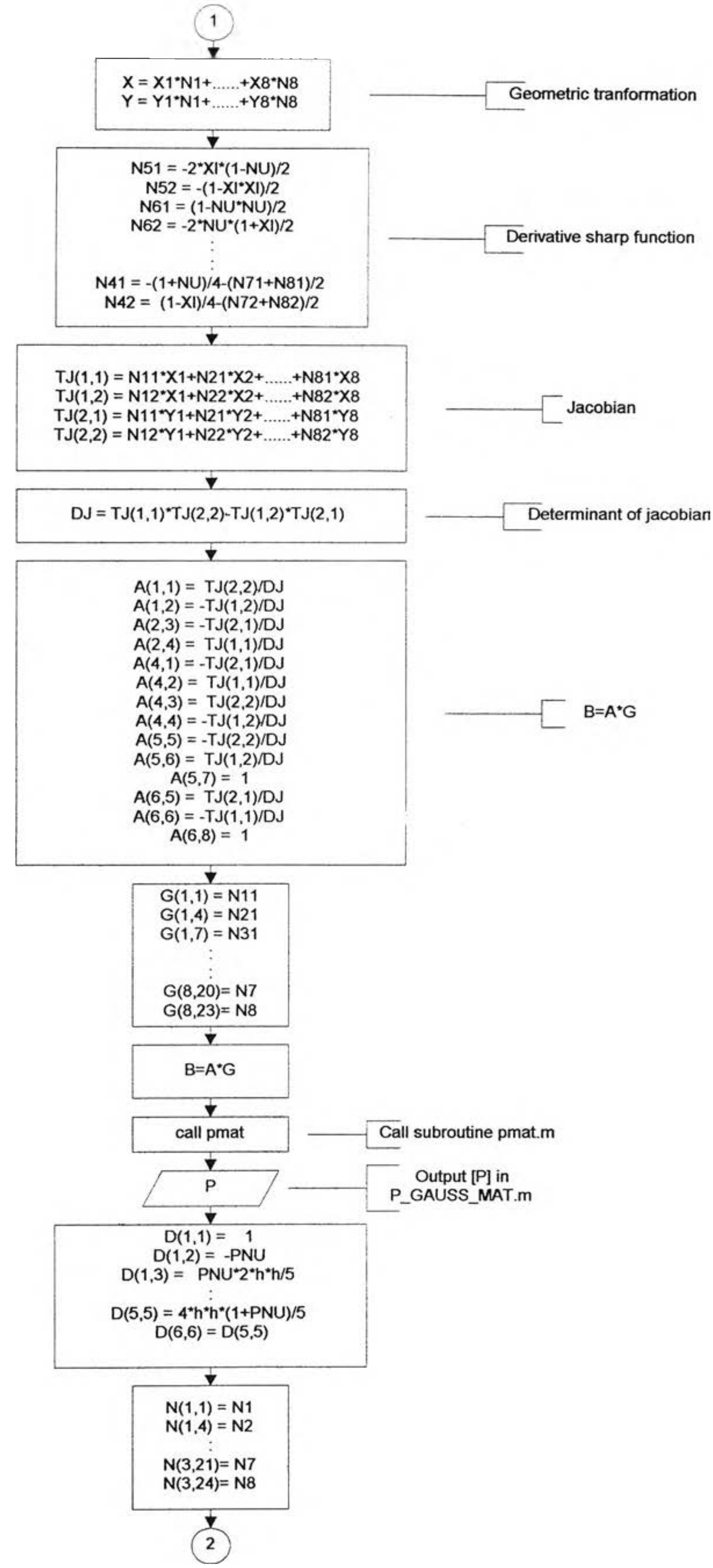
จากผังงาน (flow chart) รูปที่ ค-1 สามารถอธิบาย การทำงานของโปรแกรมได้ดังนี้ โดยขั้นตอนแรกต้องทำการสร้างแฟ้มข้อมูลของปัญหาขึ้นซึ่งสอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการ

รายละเอียดการคำนวณของโปรแกรม

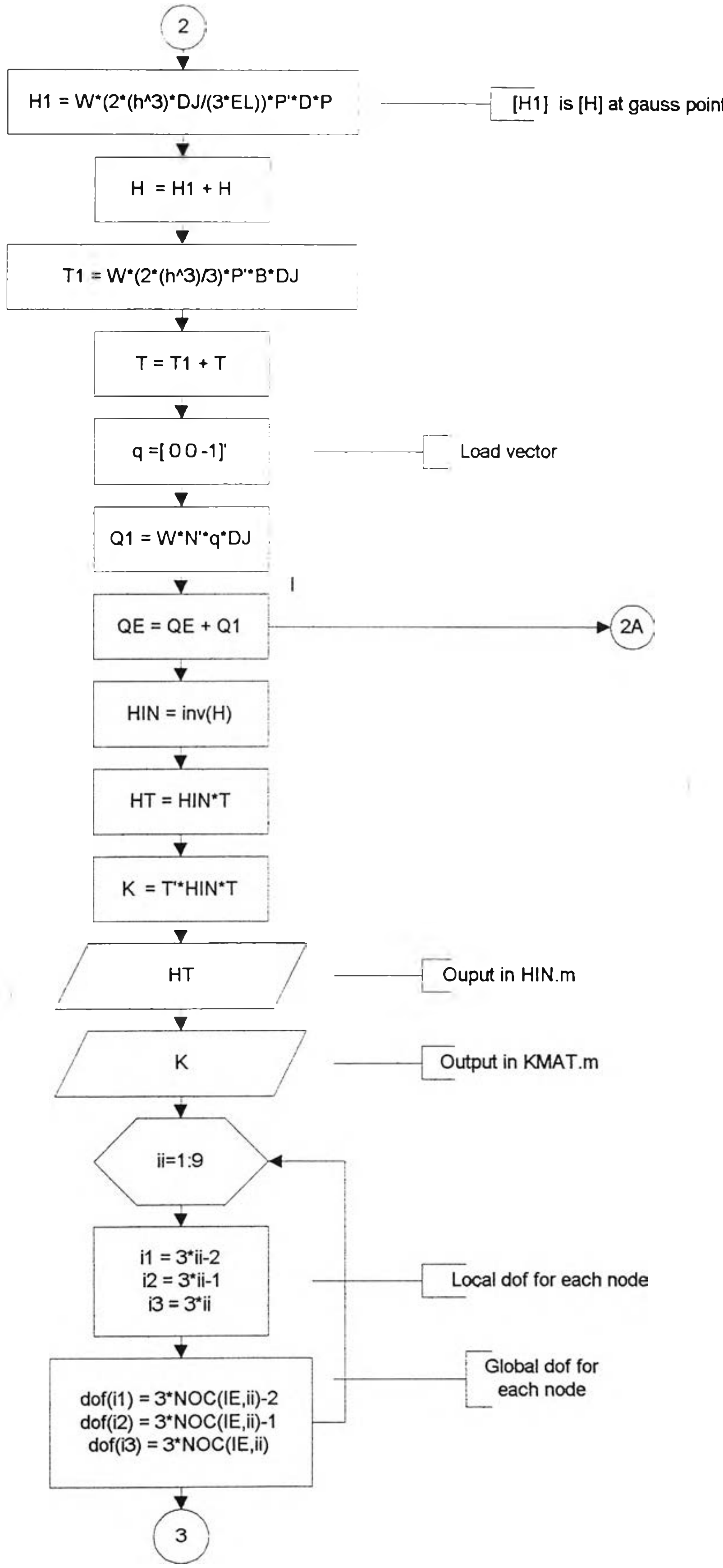
โปรแกรมจะถามชื่อแฟ้มข้อมูลที่เราต้องการแก้ปัญหา ซึ่งลักษณะของการเขียนแฟ้มข้อมูลได้แสดงดังตัวอย่าง ในขั้นตอนนี้ โปรแกรมหลักจะทำการเรียกโปรแกรมย่อย readdata.m มาทำการอ่านข้อมูล ซึ่งลักษณะการทำงานของ โปรแกรมย่อย readdata นั้นมีรายละเอียดดังที่แสดงไว้ในรูปที่ ค -2



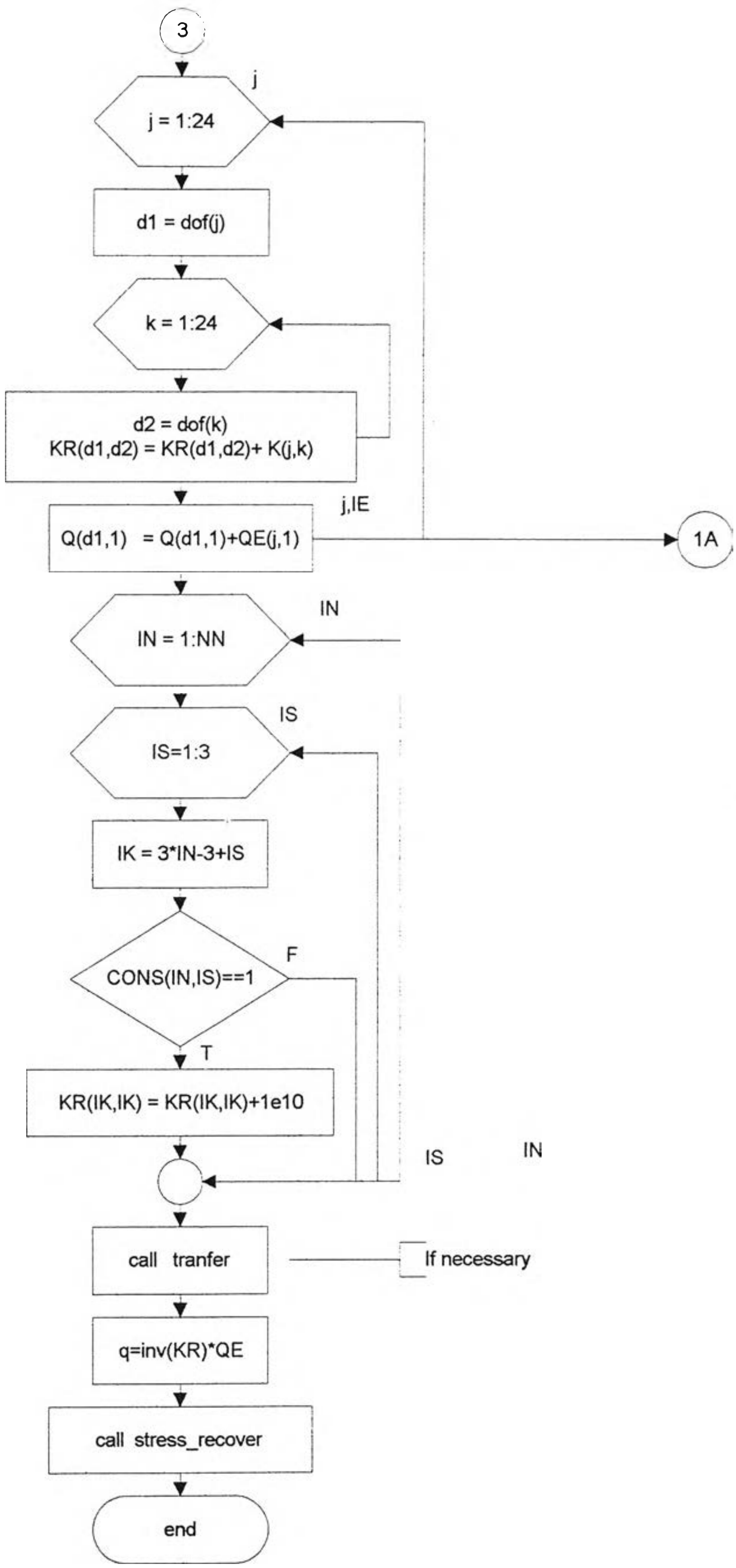
รูปที่ ค-1 ผังงานโปรแกรมหลัก



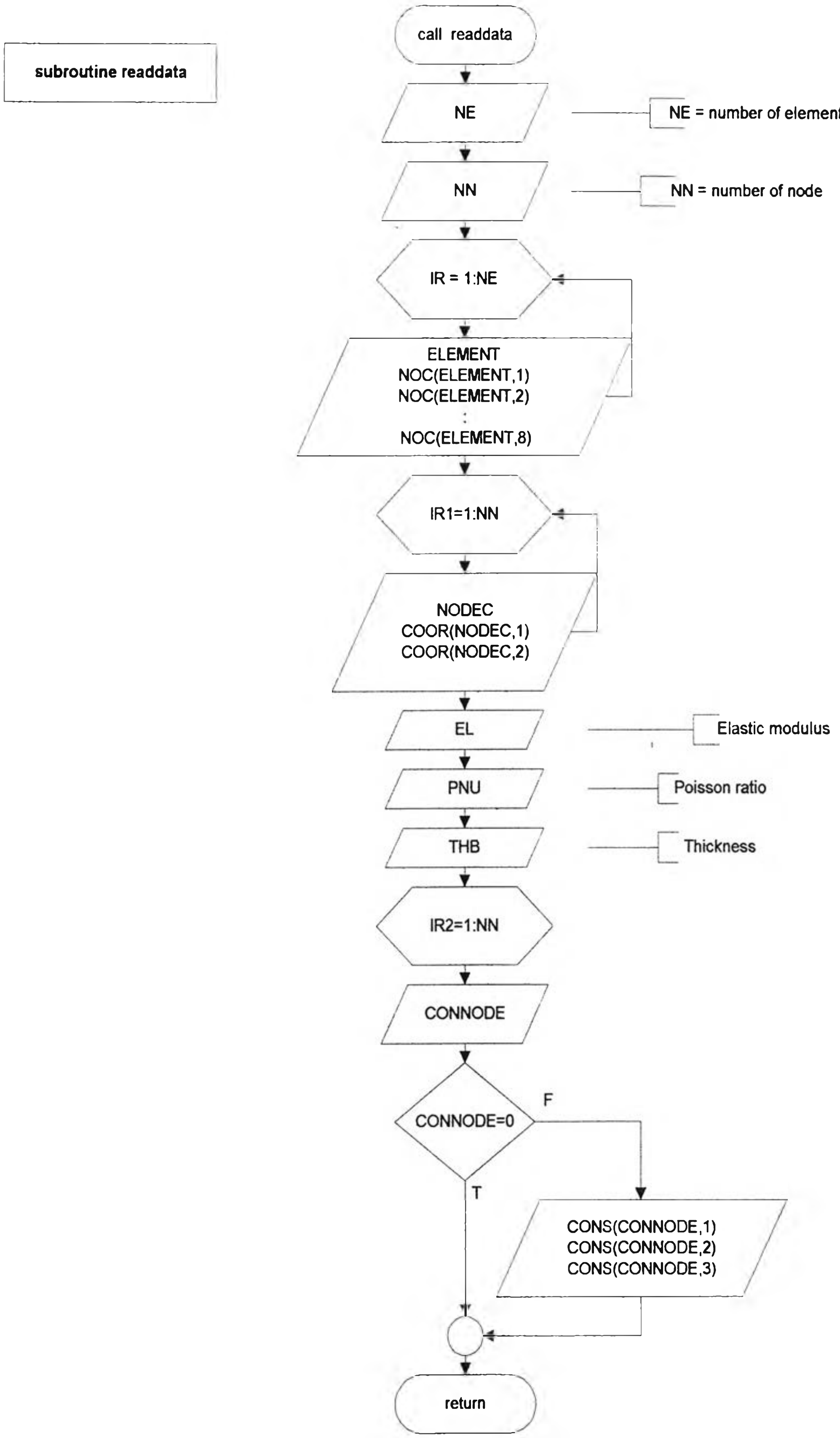
รูปที่ ค-1(ต่อ) ผังงานโปรแกรมหลัก



รูปที่ ค-1(ต่อ) ผังงานโปรแกรมหลัก

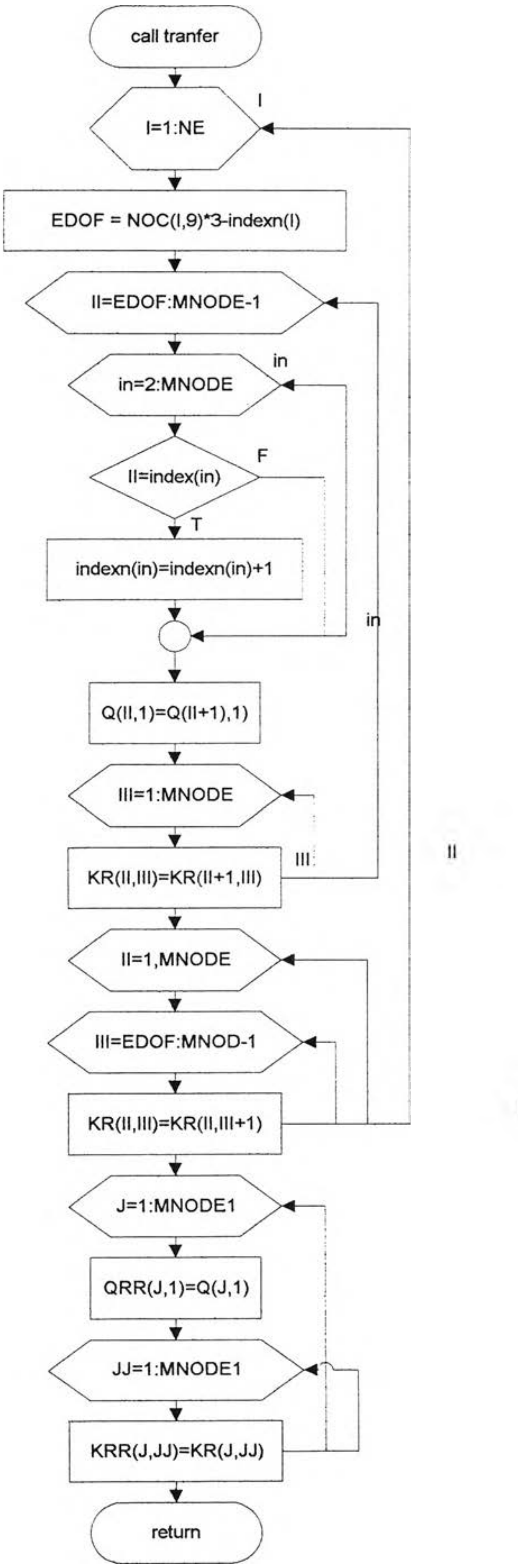


รูปที่ ค-1 (ต่อ) ผังงานโปรแกรมหลัก



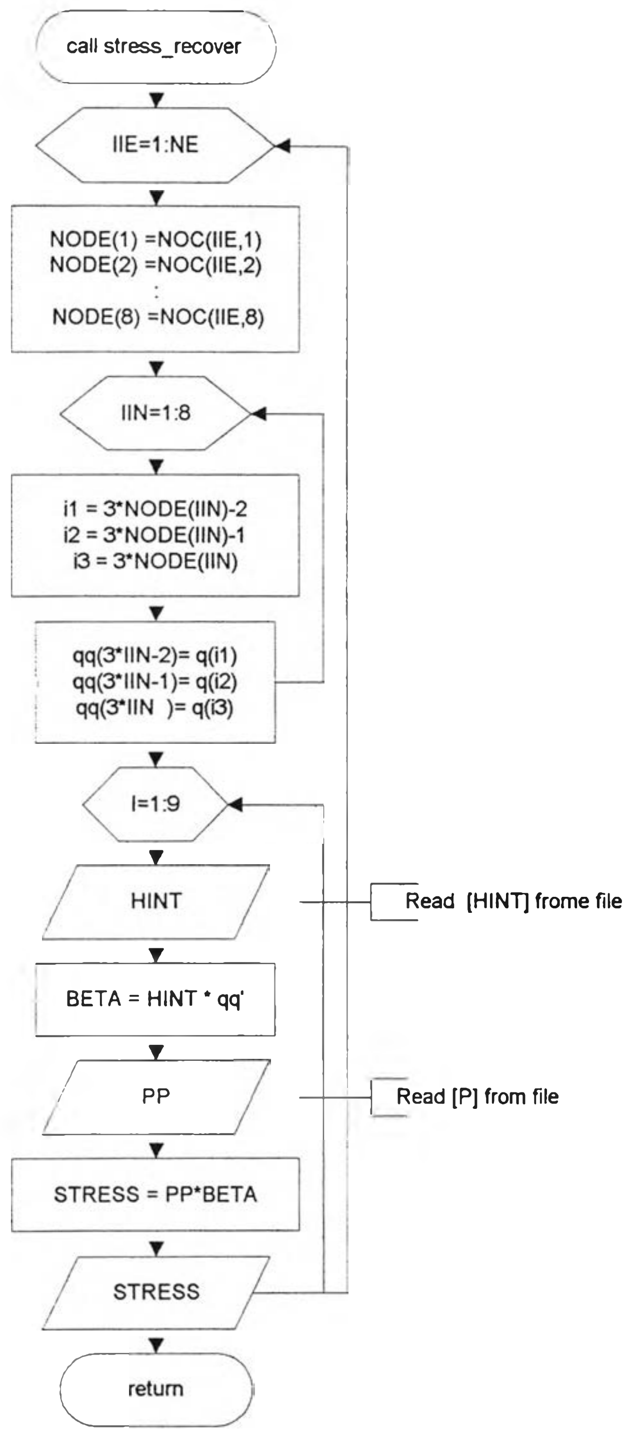
รูปที่ ค-2 โปรแกรมย่อย readdata

subroutine tranfer

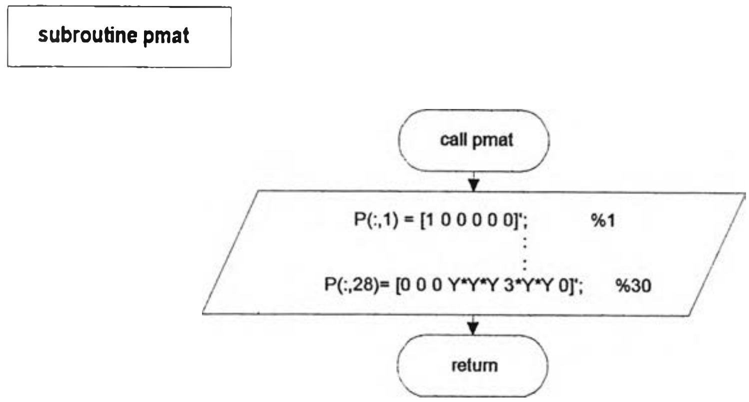


รูปที่ ค-3 โปรแกรมย่อย transfer

subroutine stress_recover



รูปที่ ค-4 โปรแกรมย่อย Stress_recover



รูปที่ ค-5โปรแกรมย่อย pmat

ในโปรแกรมย่อย readdata จะทำการอ่านข้อมูล จำนวนชิ้นส่วนย่อย(NE) จำนวนขั้วต่อ(NN) ลักษณะการต่อของชิ้นส่วน รวมทั้งคุณสมบัติของวัสดุ เช่น โมดูลัสของชิ้นส่วน อัตราส่วนปัวส์ซอง การใส่จุดรองรับและการยึดรั้งของชิ้นส่วนจะกำหนดให้เป็นหนึ่ง ในกรณีที่ไม่อนุญาติให้มีการเคลื่อนที่ในระดับขั้นความอิสระนั้นๆ

หลังจากนั้นโปรแกรมหลักจะทำการกำหนดจุดอินทิเกรดของเกาส์ ในกรณีที่เป็นชิ้นส่วน 4 และ 5 ขั้วจะใช้จุดอินทิเกรดเกาส์ 2 จุด ส่วนชิ้นส่วน 8 และ 9 ขั้ว จะใช้จุดอินทิเกรดเกาส์ 3 จุด

ในแต่ละชิ้นส่วนจะทำการเรียกพิกัด ขั้วต่อเข้ามา ขั้นต่อมาคือการเริ่มหาเมตริก H ,T และ B .ในแต่ละพิกัดของเกาส์ ในกรณีใช้จุดอินทิเกรดของเกาส์ 3 จุด จะมีพิกัดการอินทิเกรดของเกาส์ 9 พิกัด โดยทำการหาฟังก์ชันสัณฐาน(sharp function) ของแต่ละพิกัดการอินทิเกรดของเกาส์ และทำการหาตามขั้นตอนที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3 จนกระทั่งได้เมตริก H , T, B ในแต่ละจุดพิกัด เมื่อนำมารวมทั้งหมดเข้าด้วยกันก็สามารถหาสติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนออกมาได้

หลังจากนั้นเราก็นำสติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนไปใส่ในสติฟเนสรวม โดยการเปลี่ยนจากระดับขั้นความเป็นอิสระในระดับชิ้นส่วนเป็นระดับขั้นความเป็นอิสระในระดับรวม

ทำการปรับปรุงสติฟเนสรวมโดยในระดับขั้นความเป็นอิสระที่มีการยึดรั้งให้ทำการเพิ่มค่าสติฟเนสให้เป็นค่าที่มากขึ้นโดยมากๆ ในกรณีชิ้นส่วนอภิชาติ (HQH24) จะต้องทำการเรียกโปรแกรมย่อย tranfer เพื่อที่จะขจัดระดับขั้นความเป็นอิสระที่ 3 (translation)ของขั้วที่ 9 ออกจากสติฟเนสรวม

เมื่อทำการหาการกระจัดที่ขั้วได้ทั้งหมดแล้ว ขั้นต่อไปคือการหาความเค้น โดยการเรียก โปรแกรมย่อย stress_recover ดังแสดงในผังงานรูปที่ 8 โดยจะต้องทำการเรียกขั้วต่อ และการกระจัดที่สอดคล้องกับแต่ละขั้วต่อออกมา และอ่านค่าเมตริก H^{-1}*T และ เมตริก P ที่เก็บไว้ในแฟ้ม HINT.m และ P_GAUSS_MAT.m ที่ได้เก็บไว้ในโปรแกรมหลัก เราก็สามารถหาค่าความเค้นที่พิกัดเกาส์ออกมาได้

ประวัติผู้วิจัย

นายบุญธรรม เหมหีม เกิดเมื่อวันที่ 1 เดือนธันวาคม พุทธศักราช 2517 มีภูมิลำเนาอยู่ที่ บ้านเลขที่ 12 หมู่ 4 ต. กำแพงเพชร อ.รัตภูมิ จ.สงขลา เป็นบุตรคนที่หก ในจำนวนพี่น้องหกคน เรียนชั้นประถมที่โรงเรียนบ้านเขารักเกียรติ ชั้นมัธยมต้นที่โรงเรียนรัตภูมิวิทยา ชั้นมัธยมปลายเป็นนักเรียนของโรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย แต่จบกรมการศึกษานอกโรงเรียน จังหวัดสงขลา เข้าเรียนที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีพุทธศักราช 2535 ซึ่งเป็นปีเดียวกับเหตุการณ์ พฤษภาทมิฬ โดยสำเร็จการศึกษาในปีพุทธศักราช 2539 ในสาขาวิศวกรรมโยธา เข้าทำงานที่บริษัททีม คอนซัลติ้ง เอนจิเนียร์ จนกระทั่ง เข้าศึกษาต่อที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง ในปีพุทธศักราช 2540 วันที่ 4 เมษายน พุทธศักราช 2543 จึงได้เสนอรายงานวิจัยฉบับนี้แก่คณะกรรมการเพื่อขอจบการศึกษา