บทที่ 2
ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนเป็นกระบวนการคิดและตัดสินใจที่จะนำไปใช้ ในขั้นตอนการออกแบบกระบวนการเคมีโดยคำนึงถึงความไม่แน่นอนที่เกิดในกระบวนการจริง เพื่อให้แน่ใจว่ากระบวนการจะยืดหยุ่น (flexibility) ในสภาวะปฏิบัติการจริง ซึ่งความไม่แน่นอนสามารถเกิดจากภายในกระบวนการและภายนอกกระบวนการ ตัวอย่างความไม่แน่นอนภายในกระบวนการ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเท, ค่าคงที่ของปฏิกิริยา, ประสิทธิภาพเทรย์ และคุณสมบัติทางกายภาพอื่น ๆ และตัวอย่างความไม่แน่นอนภายนอกกระบวนการ เช่น ความต้องการของผลิตภัณฑ์, อัตราการไหลของสายป้อน, ราคาวัตถุดิบ และค่าใช้จ่ายทางเศรษฐศาสตร์อื่น ๆ

ในบทนี้เริ่มแรกจะกล่าวถึงองค์ประกอบของปัญหาการออปติไมซ์ และการจำแนกวิธีการออปติไมซ์, ความหมายของการออปติไมซ์ ต่อมาจะกล่าวถึงผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนในวิศวกรรมเคมี และผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนในวิศวกรรมสาขาอื่น ๆ ส่วนรายละเอียดเกี่ยวกับ วิธีการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนจะกล่าวถึงในบทที่ 3

2.1 องค์ประกอบของปัญหาการออปติไมซ์

การออปติไมซ์คือการหาจุดที่เหมาะสมเป็นกระบวนการคิด และตัดสินใจทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุด ซึ่งปัญหาการออปติไมซ์มีด้วยกัน 3 องค์ประกอบคือ (Rao, 1979)

1. ออปเจกทีฟฟังก์ชัน (objective function) คือค่าที่ต้องการหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุด ซึ่งปัญหาในด้านวิศวกรรมศาสตร์จำนวนมากเกี่ยวกับการหาจุดต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชัน สำหรับตัวอย่างออปเจกทีฟฟังก์ชัน ได้แก่ กำไร, ค่าใช้จ่าย, พลังงานที่ใช้, ระยะเวลาคืนทุน หรือต้นทุน เป็นต้น ฟังก์ชันเหล่านี้ส่วนใหญ่จะเป็นฟังก์ชันทางเศรษฐศาสตร์ แต่อาจเป็นฟังก์ชันทางด้านอื่นได้ เช่นทางด้านเทคโนโลยี ซึ่งจะใช้เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจในการออปติไมซ์
2. ตัวแปรตัดสินใจ (decision variable) หมายถึงตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จะเป็นตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงค่าแล้วมีผลต่อออปเจกทีฟฟังก์ชัน ในขั้นตอนการออปติไมซ์จะเปลี่ยนค่าตัวแปรตัดสินใจ เพื่อหาค่า

สูงสุด หรือต่ำสุด ของออปเจกทีฟฟังก์ชัน ยกตัวอย่างตัวแปรตัดสินใจ เช่น อุณหภูมิ, ความดัน, อัตราการไหล, จำนวนเทรย์, ความเข้มข้นของสาร และขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ เป็นต้น

3. ข้อจำกัด (constraint) คือ ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัวตัดสินใจกับค่าที่แน่นอน เพื่อกำหนดขอบเขตดำเนินการ (feasible region) ของตัวแปรตัดสินใจ หรือพื้นที่ของตัวแปรตัดสินใจที่น่าจะเป็นไปได้ถูกกำหนดขอบเขตโดยข้อจำกัด ซึ่งข้อจำกัดสามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ

- ข้อจำกัดที่เป็นสมการ (equality constraint) เป็นข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $=$ นั้นคือเป็นสมการ ซึ่งแสดงข้อกำหนดของแบบจำลองกระบวนการและผลิตภัณฑ์ เช่น สมการสมดุลมวลสาร สมการสมดุลพลังงาน และสมการผลรวมของเศษส่วนโมล เป็นต้น
- ข้อจำกัดที่เป็นอสมการ (inequality constraint) เป็นข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $\neq$, $<$, $>$, $\leq$ หรือ $\geq$ นั้นคือเป็นอสมการ ซึ่งแสดงข้อจำกัดของการออกแบบ และข้อจำกัดต่าง ๆ เช่น เศษส่วนโมล และค่าอัตราการไหลควรมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์, ค่าสูงสุดของความดันของระบบ, ค่าสูงสุดปริมาตรของสารที่เครื่องปฏิกรณ์รับได้ และค่าต่ำสุดของอัตราการผลิต หรือความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์

สรุปแล้วการออปติไมซ์จะหมายถึงการหาค่าของตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าสอดคล้องกับข้อจำกัด และทำให้ออปเจกทีฟฟังก์ชันมีค่าต่ำสุด หรือสูงสุด ตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

ตัวอย่างการนำไปใช้ (application) ของการออปติไมซ์ในทางด้านวิศวกรรมเคมี ได้แก่ (Edgar และ Himmelblau, 1989: 9)

1. การหาสภาวะการผลิตที่ดีที่สุดของหน่วยปฏิบัติการต่าง ๆ เช่น เครื่องปฏิกรณ์เคมี, หอกลั่น หรือหอดูดซับ (absorbers) เป็นต้น
2. การออกแบบกระบวนการของโรงงาน
3. การตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูลโรงงานที่ได้จากการวัด เพื่อนำไปใช้ประโยชน์อื่น เช่น การสร้างแบบจำลองของกระบวนการผลิต
4. การหาเส้นทางการกระจายน้ำมันดิบ และผลิตภัณฑ์ของโรงกลั่นน้ำมัน
5. ค่าการจัดสรรทรัพยากร หรือการใช้งานของหน่วยการผลิตต่าง ๆ
6. การออกแบบขนาด และแผนผัง (layout) ของท่อส่ง
7. การหาทำเลที่ดีที่สุดของโรงงาน
8. การลดค่าใช้จ่ายของการเก็บสินค้า หรือผลิตภัณฑ์
9. การหากำหนดการบำรุงรักษา และการทดแทนอุปกรณ์การผลิต
10. การวางแผน และกำหนดการเกี่ยวกับการก่อสร้าง

2.2 การจำแนกวิธีการออปติไมซ์

การหาคำตอบของปัญหาออปติไมซ์ คือการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ ช่วยตัดสินใจหาคำตอบที่เหมาะสม ดังนั้นการจะออปติไมซ์ปัญหาใด ๆ จะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้ เพื่อให้เข้าใจปัญหาออปติไมซ์นั้นเพิ่มมากขึ้น สำหรับรูปแบบทั่ว ๆ ไปของปัญหาการออปติไมซ์สามารถเขียนในรูปแบบคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ (Edgar และ Himmelblau, 1989: 16)

$$\min_{\mathbf{x}} \quad C(\mathbf{x})$$

โดยมีเงื่อนไข

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจ

$C(\mathbf{x})$ คือ สมการออปเจกทีฟฟังก์ชันซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของ $\mathbf{x}$

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ คือ เวคเตอร์ข้อจำกัดที่เป็นสมการ

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ คือ เวคเตอร์ข้อจำกัดที่เป็นอสมการ

ข้อจำกัดที่เป็นสมการในสมการ (2.1) ข้างต้น: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ เป็นสมการที่แสดงข้อกำหนดต่าง ๆ ของกระบวนการ เช่น ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ต้องเท่ากับ 98 % นอกจากนี้ข้อจำกัดที่เป็นสมการยังแสดงแบบจำลองของกระบวนการสมการ เช่น สมดุลมวลสาร สมดุลพลังงาน สมการผลรวมของสัดส่วนโมล หรือสมการสมดุลปฏิกิริยา เป็นต้น

ส่วนข้อจำกัดที่เป็นอสมการ: $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ เป็นอสมการที่แสดงข้อจำกัดของการออกแบบหรือข้อจำกัดทางธรรมชาติของปัญหาต่าง ๆ เช่น

- สัดส่วนโมล และอัตราการไหลทั้งหมดมีค่ามากกว่า หรือเท่ากับศูนย์ (สัดส่วนโมล หรืออัตราการไหลเป็นลบไม่ได้)
- ความดันภายในท่อจะต้องมีค่าไม่เกินค่าจำนวนหนึ่งที่เป็นขอบบน (upper limit)
- เครื่องปฏิกรณ์มีปริมาตรไม่มากกว่าค่าสูงสุดที่เครื่องปฏิกรณ์รับได้
- อัตราการผลิต และความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์จะต้องมีค่ามากกว่าค่าหนึ่งที่ต่ำสุด

จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไป ของปัญหาการออปติไมซ์สามารถแบ่งเทคนิควิธีการออปติไมซ์ทางคณิตศาสตร์ตามลักษณะของออปเจกทีฟฟังก์ชัน, ข้อจำกัด และตัวแปรตัดสินใจได้เป็นการออปติไมซ์หลายแบบด้วยกัน เช่น ปัญหาออปติไมซ์แบบเชิงเส้น หรือแบบไม่เชิงเส้น, ปัญหาออปติไมซ์มีหนึ่งตัวแปร หรือหลายตัวแปร, ปัญหาออปติไมซ์แบบมีข้อจำกัด หรือไม่มีข้อจำกัด เป็นต้น ดังนั้นจากสมการ (2.1) ทำให้เกิดการจำแนกวิธีการออปติไมซ์เป็นปัญหาแบบต่าง ๆ ดังนี้

ถ้าเวคเตอร์ตัวแปรตัดสินใจในสมการ (2.1) เป็นสเกล่าร์ (scalar) ปัญหาออปติไมซ์ (2.1) จะเป็นปัญหา 1 ตัวแปร และถ้าเวคเตอร์ตัวแปรตัดสินใจเป็นเวคเตอร์หลายมิติ จะเป็นปัญหาออปติไมซ์หลายตัวแปร ซึ่งจะแก้ปัญหายุ่งยากกว่า และซับซ้อนมากกว่า

ถ้าปัญหาออปติไมซ์สมการ (2.1) ไม่มีข้อจำกัดสำหรับทุกตัวแปรตัดสินใจ ดังนั้นปัญหาออปติไมซ์จะกลายเป็นปัญหาแบบไม่มีข้อจำกัด ซึ่งปัญหาในอุตสาหกรรมส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาแบบมีข้อจำกัด

ถ้าข้อจำกัด **h** และ **g** เป็นสมการเชิงเส้น (linear) ทั้งหมด ปัญหาออปติไมซ์จะกลายเป็นปัญหาแบบเชิงเส้น ส่วนกรณีที่มีข้อจำกัด **h** และ **g** เป็นสมการเชิงเส้น (nonlinear) จะกลายเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น อีกทั้ง ถ้าฟังก์ชันออปเจกทีฟ $C(\mathbf{x})$ เป็นสมการเชิงเส้นพร้อมด้วยข้อจำกัดก็เป็นเชิงเส้น จะเรียกปัญหานี้ว่าปัญหาการโปรแกรมแบบเชิงเส้น (linear programming problem: LP) (Douglas, 1996)

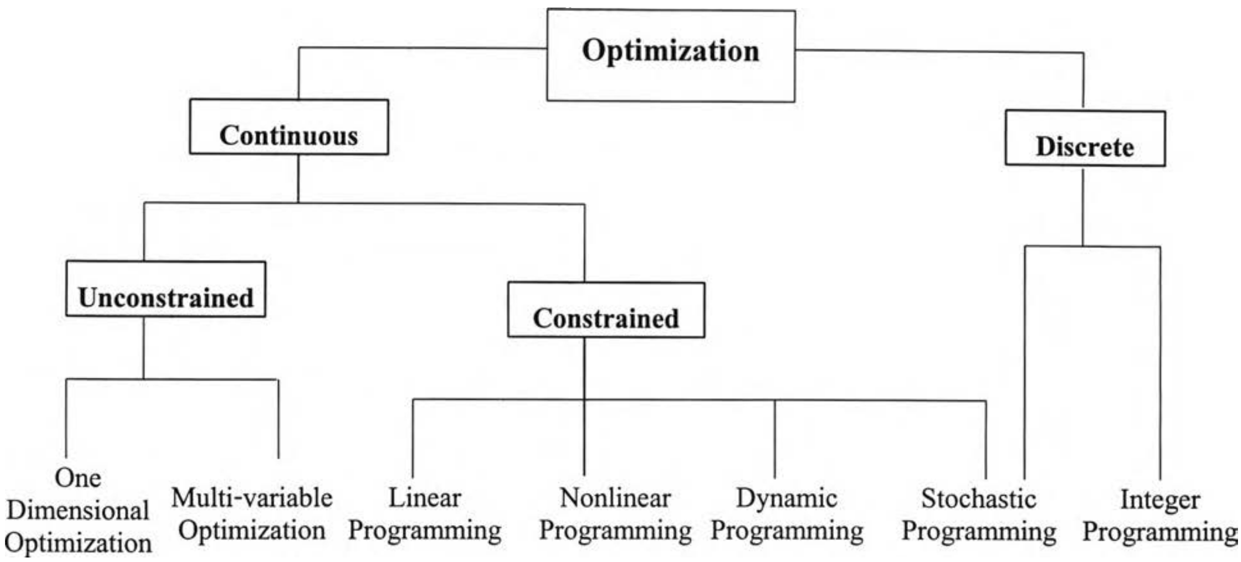
ถ้าสมการออปเจกทีฟฟังก์ชัน $C(\mathbf{x})$ หรือข้อจำกัดมีลักษณะไม่เชิงเส้น จะเรียกปัญหานี้ว่าปัญหาการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น (non-linear programming problem: NLP) เป็นลักษณะที่พบมากที่สุดในกระบวนการอุตสาหกรรม ซึ่งปัญหาชนิดนี้จะยากที่จะแก้ปัญหา ในบางเทคนิควิธีแก้ปัญหาอาจเปลี่ยนปัญหา NLP ไปเป็น LP เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมของปัญหา

ถ้าตัวแปรตัดสินใจ **x** เป็นจำนวนไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนเต็มอย่างเดียว จะเรียกปัญหานี้ว่าการโปรแกรมแบบจำนวนเต็ม (integer programming problem) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการวางแผนการผลิต หรือจัดตารางการผลิตของกระบวนการ ที่ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

ถ้าตัวแปรตัดสินใจ **x** มีทั้งที่เป็นจำนวนเต็มและจำนวนจริง ใช้วิธีการออปติไมซ์ที่เรียกว่าการโปรแกรมแบบผสมจำนวนจริง (mixed integer programming problem: MIP) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการวางแผนการผลิต และจัดตารางการผลิตเช่นเดียวกัน

ถ้ากรณีพารามิเตอร์ไม่ว่าตัวใดตัวหนึ่ง หรือทั้งหมดของออปเจกทีฟฟังก์ชัน หรือข้อจำกัดในสมการออปติไมซ์ (2.1) มีค่าไม่แน่นอน กล่าวคือมีพารามิเตอร์ที่ค่าไม่คงที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา เป็นตัวแปรสุ่มหรือแจกแจงแบบฟังก์ชันความน่าจะเป็น จะเรียกปัญหาแบบนี้ว่าปัญหาการโปรแกรมแบบสโตแคสติก (stochastic programming)

สำหรับวิธีการออปติไมซ์สามารถแบ่งตามวิธีทางคณิตศาสตร์ได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงการแบ่งวิธีการออปติไมซ์ทางคณิตศาสตร์

จากลักษณะของออปเจกทีฟฟังก์ชัน, ข้อจำกัด และตัวแปรตัดสินใจ สามารถแบ่งวิธีการออปติไมซ์ตามรูปแบบคณิตศาสตร์ได้เป็นลำดับชั้นดังนี้

1. แบบต่อเนื่อง (Continuous) เป็นวิธีการโปรแกรมกรณีที่ออปเจกทีฟฟังก์ชัน, ข้อจำกัด และตัวแปรตัดสินใจเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง วิธีการออปติไมซ์สำหรับปัญหาแบบต่อเนื่องสามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่มที่สำคัญ คือ

1.1 การออปติไมซ์แบบไม่มีข้อจำกัด (Unconstrained Optimization)

ปัญหาการออปติไมซ์แบบไม่มีข้อจำกัดสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\min_{\mathbf{x}} \quad C(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจ : $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ ที่มีความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชัน $C(\mathbf{x})$ ที่มีค่าต่ำสุด

การออปติไมซ์สมการ (2.2) ซึ่งไม่มีข้อจำกัดขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจ สามารถแบ่งเป็น 2 กรณีคือกรณี 1 ตัวแปรกล่าวคือสมการ(2.2) n=1 และกรณีมีหลายตัวแปร

1.1.1 การออปติไมซ์ 1 ตัวแปร (One Dimensional Optimization)

กรณีตัวแปรตัดสินใจในสมการ (2.2) มีเพียงหนึ่งตัวแปร จะเป็นการออปติไมซ์ 1 ตัวแปร ซึ่งวิธีการออปติไมซ์แบบ 1 ตัวแปร จะเป็นพื้นฐานสำหรับการโปรแกรมปัญหาหลายตัวแปรแบบมีข้อจำกัด ในอุตสาหกรรมเคมีส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาออปติไมซ์หลายตัวแปรแบบมีข้อจำกัด

1.1.2 การออปติไมซ์หลายตัวแปร (Multivariable Optimization) เป็นการโปรแกรมสมการ (2.2) โดยมีตัวแปรตัดสินใจหลายตัว มีเทคนิคการโปรแกรม หรือการแก้ปัญหาออปติไมซ์แบ่งเป็น 2 แนวทางด้วยกันคือ วิธีทางตรง และวิธีทางอ้อม

- **วิธีทางตรง** (Direct method) คือวิธีที่คำนวณเพียงค่าออปเจกทีฟฟังก์ชัน ไม่มีการคำนวณอนุพันธ์ของออปเจกทีฟฟังก์ชัน สำหรับวิธีแบบทางตรงดูได้ตามตารางที่ 2.1
- **วิธีทางอ้อม** (Indirect method) คือวิธีที่คำนวณทั้งค่าออปเจกทีฟฟังก์ชัน และค่าอนุพันธ์ของออปเจกทีฟฟังก์ชัน เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสม ได้แก่ วิธีของนิวตัน (Newton's method), วิธีกึ่งนิวตัน (Quasi-Newton method) และวิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์ (Conjugate gradient method) ตามตารางที่ 2.1

1.2 การออปติไมซ์แบบมีข้อจำกัด (Constrained Optimization) การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของออปเจกทีฟฟังก์ชันที่มีข้อจำกัดมาให้ จัดได้ว่าเป็นเรื่องที่ยากกว่ากรณีของฟังก์ชันไม่มีข้อจำกัด ปัญหาในกรณีมีการกำหนดข้อจำกัดมาให้ยังสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท โดยอาศัยลักษณะของเงื่อนไขที่กำหนดให้มาทั้งข้อจำกัดที่เป็นสมการหรืออสมการ ว่าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น เป็นตัวช่วยแบ่งประเภท

- **การโปรแกรมแบบเชิงเส้น** (Linear Programming) เป็นเทคนิคหนึ่งที่ถูกใช้งานกันอย่างกว้างขวาง เป็นวิธีการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด เมื่อทั้งออปเจกทีฟฟังก์ชัน และข้อจำกัดเป็นสมการเชิงเส้น สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดมีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 2 ตัวแปรขึ้นไป การหาจุดตัดของข้อจำกัดต่าง ๆ โดยการเขียนกราฟทำได้ยาก ดังนั้นวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) ซึ่งเป็นวิธีการโปรแกรมแบบเชิงเส้นที่คิดค้นโดย George Dantizig (1951) (Dixon, 1976) เป็นวิธีการหนึ่งที่อาศัยหลักการเดียวกับวิธีการเขียนกราฟ โดยวิธีการนี้จะทำการคำนวณหาจุดตัดทุกจุดของสมการข้อจำกัด แล้วเลือกจุดที่ให้ค่าออปเจกทีฟฟังก์ชันสูงสุดหรือต่ำสุดเป็นจุดที่เหมาะสม สำหรับการโปรแกรมแบบเชิงเส้น จะนำไปประยุกต์ในการจัดตารางการผลิตและวางแผนทางเศรษฐศาสตร์ ยกตัวอย่างเช่น จัดตารางการผลิตของหอกลั่น และกำหนดตำแหน่งการกระจายของผลิตภัณฑ์ (Hadley, 1962) และกำหนดส่วนผสมของก๊าซโซลีน (Garvin, 1960) เป็นต้น สำหรับการประยุกต์ใช้ของการโปรแกรมแบบเชิงเส้นมีทั่วไปในสาขาวิชาต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น ฟิสิกส์ เคมี วิศวกรรม สามารถดูเพิ่มเติมได้จากหนังสือของ Gass (1960)
- **การโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น** (Nonlinear Programming) เป็นวิธีการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด เมื่อออปเจกทีฟฟังก์ชันเป็นสมการไม่เชิงเส้น หรือข้อจำกัดเป็นสมการไม่เชิงเส้น หรือทั้งออปเจกทีฟฟังก์ชัน และข้อจำกัด เป็นสมการไม่เชิงเส้น การโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้นยากกว่า และ

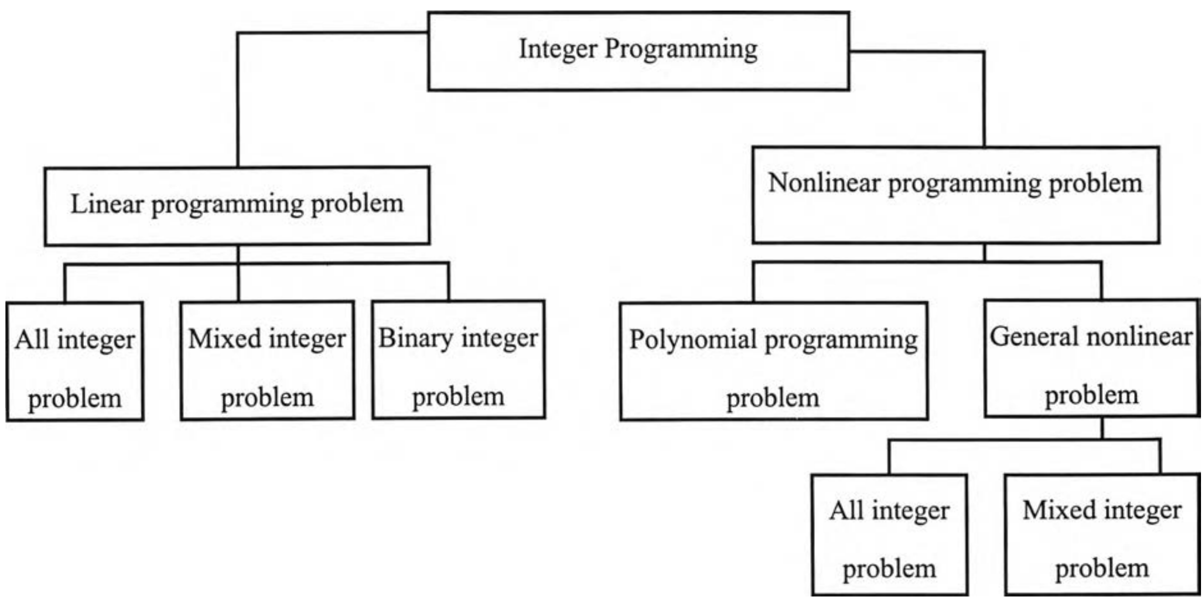
ซับซ้อนกว่า แต่มีข้อแตกต่างจากการโปรแกรมแบบเชิงเส้นหลายอย่าง เช่น ในกรณีของการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสามารถมีได้หลายจุด นอกจากนี้คำตอบจากการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่จุดตัดระหว่างเงื่อนไขข้อจำกัด หรือขอบของขอบเขตดำเนินการ คำตอบสามารถอยู่ที่ตำแหน่งใดก็ได้ในบริเวณขอบเขตดำเนินการก็ได้ สำหรับผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้นมีมากมายหลายผลงาน เช่น ผลงานวิจัยของ Sargent และ Gaminivandara (1976) ออกแบบหาจำนวนเทรย์ และสภาวะปฏิบัติการที่เหมาะสมของหอกลั่นซึ่งเป็นกระบวนการไม่เชิงเส้นที่ใช้กันมากในอุตสาหกรรม สำหรับแยกองค์ประกอบของผสม

- **การโปรแกรมแบบไดนามิก** (Dynamic Programming) เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาตัดสินใจหลายขั้น (multistage decision problem) ซึ่งเทคนิคนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นโดย Richard Bellmann ในช่วงต้นศตวรรษ 1950 สำหรับปัญหาที่การตัดสินใจจะทำในลำดับที่แตกต่างของช่วงเวลา หรือที่ระดับที่แตกต่างกัน เช่น การหาสภาวะปฏิบัติการที่เหมาะสมสำหรับแต่ละกะของหอกลั่นแบบกะ (batch) ซึ่งมีหลายผลิตภัณฑ์ (multicomponent batch distillation) เป็นหอกลั่นแบบกะที่แยกสารผสมทั้งหมดองค์ประกอบ 5 องค์ประกอบ มีการใช้แบบจำลองทางอุณหพลศาสตร์แบบไม่อุดมคติ (non-ideal thermodynamic model) ในการออปติไมซ์มีจำนวนทรัพยากร เช่น จำนวน หรือขนาดของผลิตภัณฑ์ และข้อจำกัดของการปฏิบัติการเป็นตัวกำหนดขอบเขตดำเนินการหรือจำกัดขอบเขตของตัวแปรตัดสินใจ

- **การโปรแกรมแบบสโตแคสติก** (Stochastic Programming) หรือการโปรแกรมแบบความน่าจะเป็น (probabilistic programming) เป็นวิธีการโปรแกรมที่มีความน่าจะเป็นเข้ามาเกี่ยวข้อง กล่าวคือ พารามิเตอร์บางตัวหรือทุกตัวของปัญหาการออปติไมซ์เป็นตัวแปรแบบสโตแคสติด (ตัวแปรสุ่ม หรือเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น) จากลักษณะของสมการที่มีตัวแปรสุ่มในปัญหาออปติไมซ์จะแบ่งเป็นปัญหาสโตแคสติกประเภทต่าง ๆ ได้แก่ ปัญหาแบบเชิงเส้น, ไดนามิก หรือไม่เชิงเส้น สำหรับหลักการพื้นฐานสำหรับแก้ปัญหาการโปรแกรมแบบสโตแคสติก คือ เปลี่ยนปัญหาสโตแคสติกให้เป็นปัญหาดีเทอร์มินิสติก (equivalent deterministic problem) กล่าวคือ กำหนดค่าให้ตัวแปรสุ่มให้เป็นจำนวนเฉพาะเจาะจง ซึ่งปัญหาแบบดีเทอร์มินิสติกนี้สามารถแก้ได้โดยใช้วิธีเช่นเดียวกับการโปรแกรมแบบเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น ตามลักษณะของปัญหาได้เช่นเดียวกัน

2. แบบดิสครีต (Discrete) เป็นวิธีการทำที่ออปเจกทีฟฟังก์ชัน, ข้อจำกัด และตัวแปรตัดสินใจ เป็นฟังก์ชันดิสครีต หรือไม่ต่อเนื่อง เช่น เป็นจำนวนเต็ม หรือมีค่าเป็นจำนวนเฉพาะเจาะจง ซึ่งวิธีการออปติไมซ์แบบดิสครีตสามารถแบ่งเป็น 2 ประเภทด้วยกันดังนี้

2.1 การโปรแกรมแบบจำนวนเต็ม (Integer Programming) เป็นปัญหาที่ค่าของตัวแปรตัดสินใจต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ใช้โดยทั่วไปในการกำหนดตารางการผลิต (scheduling) ซึ่งในปัญหาออปติไมซ์มากมายที่ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็ม เช่น จำนวนคน จำนวนเครื่องจักร หรือจำนวนองค์ประกอบที่ต้องการใช้ในระบบ หรือการกำหนดตารางการผลิต บางกรณีอาจใช้วิธีการปัดจุดทศนิยมไม่ได้ เช่น กรณีปัญหาที่ต้องการคำตอบเป็นแบบไบนารี (binary หรือ zero-one) คือ เลขศูนย์ กับ เลขหนึ่งเท่านั้น ถ้าใช้การโปรแกรมแบบเชิงเส้นแก้ปัญหา แล้วผลที่ได้ออกมาเท่ากับ 0.4 คำตอบที่เป็นไปได้จากการปัดจุดทศนิยมอาจจะเป็น ศูนย์ หรือ หนึ่ง ก็ได้ จะเห็นได้ว่ากรณีนี้ไม่สามารถใช้วิธีการปัดจุดทศนิยมกับปัญหานี้ได้ จึงต้องมีวิธีการโปรแกรมแบบจำนวนเต็ม สำหรับปัญหาการจำแนกโปรแกรมแบบจำนวนเต็มสามารถแบ่งประเภทได้ ดังแสดงรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การจำแนกการโปรแกรมแบบจำนวนเต็ม (Rao, 1979)

ปัญหาออปติไมซ์แบบจำนวนเต็ม สามารถแบ่งเป็นปัญหาแบบเชิงเส้น และไม่เชิงเส้นได้เช่นเดียวกัน ซึ่งปัญหาการโปรแกรมแบบเชิงเส้น สามารถแบ่งตามลักษณะของตัวแปรตัดสินใจได้ดังนี้ คือ เมื่อทุกค่าของทุกตัวแปรตัดสินใจถูกกำหนดต้องเป็นจำนวนเต็มหมดในปัญหาออปติไมซ์ จะเรียกปัญหาชนิดนี้ว่าปัญหาการโปรแกรมแบบจำนวนเต็มหมด (all integer programming) ถ้ามีบางตัวแปรตัดสินใจที่ถูกกำหนดต้องเป็นจำนวนเต็ม ปัญหาออปติไมซ์ชนิดนี้เรียกว่า ปัญหาการโปรแกรมแบบผสมจำนวนเต็ม (mixed integer programming) ถ้าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาออปติไมซ์มีคำตอบได้เป็นแค่ ศูนย์ กับ หนึ่ง เรียกปัญหาออปติไมซ์ชนิดนี้ว่า ปัญหาการโปรแกรม

แบบจำนวนไบนารี (binary integer programming) นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยแบบการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้นที่ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็ม ที่แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาการโปรแกรมแบบโพลีโนเมียล (polynomial programming) และปัญหาการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้นทั่วไป (general nonlinear problem) ซึ่งสามารถแบ่งได้ 2 ประเภท คือ ปัญหาออปติไมซ์แบบตัวแปรตัดสินใจมีคำตอบเป็นจำนวนเต็มหมด และปัญหาแบบผสมจำนวนเต็ม (Beale, 1977)

2.2 การโปรแกรมแบบสโตแคสติก (Stochastic Programming) เป็นวิธีการโปรแกรมที่มีความน่าจะเป็นเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งฟังก์ชันความน่าจะเป็นนี้มีทั้งแบบต่อเนื่อง และดิสครีต สำหรับการโปรแกรมแบบสโตแคสติกพารามิเตอร์หรือตัวแปรตัดสินใจเป็นตัวแปรแบบดิสครีต สามารถแก้ปัญหาได้โดยทำให้ปัญหาแบบสโตแคสติกให้เป็นปัญหาแบบดีเทอร์มินิสติก แล้วออปติไมซ์ตามแต่ลักษณะสมการของปัญหาออปติไมซ์ต่อไป

ตาราง 2.1 สรุปวิธีการออปติไมซ์ (a)

ปัญหา	เทคนิคหรือหลักการออปติไมซ์	ชื่อวิธีการออปติไมซ์	ชื่อผู้คิดค้น	สรุปข้อดีและข้อเสีย	
				ข้อดี	ข้อเสีย
Unconstrained • single variable	brute force simulation techniques	Brute force simulation	-	• ทำได้ง่ายใช้ทดสอบความถูกต้องของวิธีอื่น ๆ • สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• ใช้เวลามาก • ถ้าเป็นปัญหาที่ต้องออปติไมซ์ถี่จะเสียค่าใช้จ่ายมาก
	region eliminating techniques	Fibonacci search	Kiefer (1953)	• สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• ถ้าเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนจะใช้เวลามาก
		Golden section method	Wilde (1964) & Beighter (1967)	• สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• ถ้าเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนจะใช้เวลามาก
	polynomial fitting techniques	Quadratic interpolation method	Coggins (1964)	• สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• ช้ากว่าวิธี Gradient Techniques
		Cubic interpolation method	Coggins (1994)	• สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• ช้ากว่าวิธี Gradient Techniques • คำนวณอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
	Gradient techniques	Newton's method	Issac Newton (1660) & Joseph Raphson (1690)	• ใช้เวลาคำนวณน้อย • อัตราการลู่เข้าเป็นแบบควอเดรติค	• กรณีอนุพันธ์อันดับสองเท่ากับศูนย์จะหาคำตอบไม่ได้ • การลู่เข้าจะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้น

ตารางที่ 2.1 สรุปวิธีออปติไมซ์ (b)

ปัญหา	เทคนิคหรือหลักการออปติไมซ์	ชื่อวิธีการออปติไมซ์	ชื่อผู้คิดค้น	สรุปข้อดีและข้อเสีย	
				ข้อดี	ข้อเสีย
		Quasi - Newton method (Finite difference approximation of Newton's method)	-	• ไม่ต้องคำนวณค่าอนุพันธ์ • ใช้ได้ทุกปัญหา	• การเรียกใช้ฟังก์ชันมากขึ้น (evaluation function) • ใช้เวลานานกว่า Newton's method
		Secant method	Newton (1665)	• ไม่ต้องคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสอง • การเรียกใช้ฟังก์ชันน้อยกว่า Quasi - Newton	• ลู่เข้าช้า และอาจเกิดการแกว่งของค่าตัวแปรตัดสินใจ • ใช้เวลานานกว่า Newton's method
• multi-variable	Direct method (using function values only)	Brute fore simulation	-	• ใช้ทดสอบความถูกต้องของวิธีอื่น ๆ • สามารถใช้ได้ทุกปัญหา	• เป็นวิธีที่ยากสำหรับแก้ปัญหาหลายตัวแปร
		Random search	Dixon & James (1980)	• เป็นวิธีที่ทำได้ง่าย	• ประสิทธิภาพต่ำ เสียเวลามาก
		Grid search	Box & Hunter (1962)	• เป็นวิธีที่ทำได้ง่าย	• ประสิทธิภาพต่ำ เสียเวลามาก
		Univariate search	-	• เป็นวิธีที่ทำได้ง่าย	• ประสิทธิภาพต่ำ เสียเวลามาก
		Simplex method	Spendley, Hext & Himsworth (1962)	• ใช้ได้ทุกปัญหา • ง่ายไม่ซับซ้อน	• ใช้เวลานานกว่าวิธีทางอ้อม

ตารางที่ 2.1 สรุปวิธีการออปติไมซ์ (c)

ปัญหา	เทคนิคหรือหลักการออปติไมซ์	ชื่อวิธีการออปติไมซ์	ชื่อผู้คิดค้น	สรุปข้อดีและข้อเสีย	
				ข้อดี	ข้อเสีย
	Indirect method (using function and derivative value)	Steepest descent / ascent method	Cauchy (1847)	• เป็นวิธีที่ง่ายไม่ซับซ้อน	• ใช้ iteration มาก • อาจเกิดการแกว่งของตัวแปรตัดสินใจ
		Newton's method	Issac Newton (1660), Joseph Raphson (1690) & Simpson (1740)	• ใช้เวลาคำนวณน้อย • อัตราการลู่เข้าเป็นแบบควอเดรติค	• กรณี Hessian matrix เท่ากับหรือมากกว่าศูนย์จะหาคำตอบไม่ได้หรือมากกว่า • การลู่เข้าจะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้น
		Marquardt method	Marquardt (1963) & Levenberg (1964)	• หาคำตอบได้กรณี Hessian Matrix น้อยกว่าศูนย์	• กรณี Hessian matrix เท่ากับศูนย์จะหาคำตอบไม่ได้
		Quasi - Newton • Broyden • DFP • BFGS	 Broyden (1967) Davidon (1959), Fletcher (1963) & Powell (1963) Broyden, Flectcher, Goldfarb & Shanno (1970)	ทั้ง 3 วิธีมีข้อดีดังนี้ • นิยมใช้ทั่วไป • ลู่เข้าแบบ superlinear • มีประสิทธิภาพกว่า วิธี Steepest descent method	ทั้ง 3 วิธีมีข้อเสียดังนี้ • สำหรับปัญหาตัวแปรมาก ๆ วิธีนี้มีจะประสิทธิภาพต่ำ

ตารางที่ 2.1 สรุปวิธีการออปติไมซ์ (d)

ปัญหา	เทคนิคหรือหลักการออปติไมซ์	ชื่อวิธีการออปติไมซ์	ชื่อผู้คิดค้น	สรุปข้อดีและข้อเสีย	
				ข้อดี	ข้อเสีย
		Conjugate gradient method • HS • PR • FR	 Hestenes & Stiefel (1952) Polak & Ribiere (1969) Fletcher & Reeves (1964)	ทั้ง 3 วิธีมีข้อดีดังนี้ • สามารถแก้ปัญหา 1000 ตัวแปรได้ในเวลาอันสั้น • ใช้หน่วยความจำน้อยในการคำนวณแต่ละ iteration • คำนวณในรูปเวคเตอร์ • ลู่เข้าแบบควอเดรติค	ทั้ง 3 วิธีมีข้อเสียดังนี้ • บางกรณีอาจเกิดการแกว่งของตัวแปรตัดสินใจ
Constrained	Liner programming (LP)	Simplex method	George Dantzig (1947)	• ให้ข้อมูลความไว (sensitivity) พร้อมกับคำตอบที่เหมาะสม • นิยมใช้ในการวางแผนและทางเศรษฐศาสตร์	• มีการเพิ่มตัวแปร slack / surplus ให้ปัญหา ทำให้มีตัวแปรไม่ทราบค่าเพิ่มมากขึ้น

ตารางที่ 2.1 สรุปวิธีการออปติไมซ์ (e)

ปัญหา	เทคนิคหรือหลักการออปติไมซ์	ชื่อวิธีการออปติไมซ์	ชื่อผู้คิดค้น	สรุปข้อดีและข้อเสีย	
				ข้อดี	ข้อเสีย
	Nonlinear programming (NLP)				
	• Direct search method	Box's complex method	Box (1965)	• วิธีง่าย • สามารถใช้กับทุกปัญหา	• ช้ากว่าวิธีทางอ้อม
	• Gradient approaches	Largrange Multipliler method	-	• ใช้ได้ดีทางทฤษฎี • ใช้กับปัญหาตัวแปรน้อย	• ถ้าตัวแปรมาก การแก้ปัญหาจะยาก
		Penalty function and Augmented Lagrangian method	Conrant (-) & Carrol (1961)	• เป็นวิธีง่าย ๆ ใช้กับโจทย์ง่าย ๆ	• ลู่เข้าช้า
		Generalized reduce gradient method (GRG)	Wolfe (1963), Abadie & Carpentier (1969)	• วิธีทั่วไปที่นิยมใช้กับปัญหา NLP • เร็วและง่าย	• การประมาณให้เป็นเชิงเส้น (linearized) อาจทำให้คำตอบออกนอกขอบเขตดำเนินการ
		Successive linear programming (SLP)	Griffith & Stewart (1961)	• อัลกอริธึมง่ายเพราะอาศัยพื้นฐาน LP	• ลู่เข้าช้าสำหรับปัญหาไม่เชิงเส้นหลายตัวแปร
		Successive (Sequential, Recursive) quadratic programming (SQP)	Wilson (1963)	• นิยมใช้ในปัจจุบัน • ใช้งานได้อย่างกว้างขวาง	• เวลาในการเขียนโปรแกรมนาน • เป็นวิธีที่ซับซ้อนในการเขียนโปรแกรม

2.3 ผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนในวิศวกรรมเคมี

ปัญหาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนในวิศวกรรมเคมีได้รับความสนใจอย่างยิ่งโดยเฉพาะในช่วงทศวรรษที่ผ่านนี้ ซึ่งจากชนิดของความไม่แน่นอนที่แทนลงสมการออปติไมซ์มีทั้งแบบดิสครีตและต่อเนื่อง จึงสามารถแบ่งปัญหาการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนได้เป็น 2 ชนิดคือ ดีเทอร์มินิสติก (Deterministic) และสโตแคสติก (Stochastic)

2.3.1 ผลงานวิจัยการหาค่าแบบดีเทอร์มินิสติก (Deterministic Approach) กำหนดให้ความไม่แน่นอนเป็นแบบมีขอบเขตที่เจาะจง (specific bounds) และมีค่าคงที่จำกัดจำนวน (finite number)

การออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนแบบดีเทอร์มินิสติกเริ่มขึ้นตั้งแต่ปลายศตวรรษ 1970 โดย Takamatsu et. al. (1973) ได้ให้ความไม่แน่นอนเป็นแบบขอบเขต (bound variable)

จากแนวความคิดของ Takamatsu et. al. ตามที่กำหนดให้ความไม่แน่นอนเป็นแบบขอบเขต Nishida et. al. (1974) ได้เสนอวิธีมินิแม็กซ์ (minimax) สำหรับออกแบบกระบวนการ โดยให้ความไม่แน่นอนเป็นแบบมีขอบเขตตามที่ Takamatsu et. al. กำหนด ส่วนวิธีมินิแม็กซ์ในขั้นแรกจะหาค่าความไม่แน่นนอนเพียงค่าเดียวภายในขอบเขตที่ทำให้ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายมีค่ามากที่สุด เรียกค่าความไม่แน่นอนนี้ว่าค่าที่แย่ที่สุด (worst) จากนั้นแล้วนำค่าความไม่แน่นอนที่สถานการณ์แย่ที่สุดนี้แทนลงในสมการออปติไมซ์ หาตัวแปรออกแบบที่ทำให้ค่าใช้จ่ายมีค่ามากที่สุด ซึ่งคำตอบของตัวแปรออกแบบที่ได้จากวิธีนี้ไม่อาจรับรองได้ว่าอยู่ในขอบเขตดำเนินการ (feasible region) ตลอดทุกค่าของตัวแปรความไม่แน่นอนในขอบเขตนั้น และคำตอบจากวิธีมินิแม็กซ์ยังไม่ได้เป็นจุดที่เหมาะสมตลอดช่วงของความไม่แน่นอนด้วย เพราะวิธีมินิแม็กซ์เป็นการโปรแกรมเฉพาะจุดความไม่แน่นอน ที่สถานการณ์ค่าแย่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายมีค่ามากที่สุด ไม่ได้เป็นการโปรแกรมทุกค่าในตลอดช่วงของตัวแปรที่ไม่แน่นอน

จากนั้นการแก้ปัญหาออปติไมซ์ในทางวิศวกรรมจึงได้แบ่งตัวแปรตัดสินใจเป็น 2 ชนิด คือ ตัวแปรออกแบบ และตัวแปรควบคุม เพราะตัวแปรออกแบบจะเป็นตัวแปรที่คงที่ขณะปฏิบัติการ ส่วนตัวแปรควบคุมนั้น จะเป็นตัวแปรที่สามารถปรับได้ในขณะปฏิบัติการตามค่าความไม่แน่นอน Halemane และ Grossmann (1983) จึงได้เสนอว่าปัญหาออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนนั้นเป็นปัญหาออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอน (two-stage optimization) คือขั้นแรกจะหาตัวแปรออกแบบ เช่น ขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ ที่ให้ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายคาดหวังหรือเฉลี่ย (the expected cost) ต่ำที่สุด ซึ่งฟังก์ชันค่าใช้จ่ายคาดหวังเป็นค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันค่าใช้จ่ายที่ต่ำสุด จากมินิไมซ์ฟังก์ชันค่าใช้จ่าย

ขณะมีความไม่แน่นอนในขั้นที่สอง ซึ่งในขั้นที่สองนั้นจะมินิไมซ์ฟังก์ชันค่าใช้จ่าย เพื่อหาตัวแปรควบคุมที่สามารถปรับได้ในขณะปฏิบัติการที่มีความไม่แน่นอนอยู่ในระบบ

จากปัญหาออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอน Grossmann และ Sargent (1978) ได้แปลงปัญหาการออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือใช้วิธีสร้างภาพ (scenario) กำหนดให้ความไม่แน่นอนกระจายแบบดิสครีตเป็นจำนวนที่มีจำกัด หาค่าความไม่แน่นอน 3 สถานการณ์ คือความไม่แน่นอนที่สถานการณ์ที่ทำให้ออปเจกทีฟฟังก์ชันมีค่าดีที่สุด (best), ความไม่แน่นอนที่ค่าปกติ (normal) และความไม่แน่นอนที่ทำให้ค่าออปเจกทีฟฟังก์ชันมีค่าเลวที่สุด (worst) แล้วกำหนดน้ำหนัก (weight) หรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดของแต่ละสถานการณ์ ลงในสมการค่าใช้จ่าย จากนั้นแล้วมินิไมซ์ค่าใช้จ่ายคาดหวังหรือค่าใช้จ่ายเฉลี่ยทั้ง 3 สถานการณ์นั้น Grossmann และ Sargent (1978) ได้ประยุกต์ใช้วิธีนี้กับการออกแบบขนาดท่อพร้อมปั๊ม (the design of pipeline with a pump) เปรียบเทียบผลจากการออกแบบกับวิธีโอเวอร์ดีไซน์ จะเห็นได้ว่าวิธีสร้างภาพนี้มีเหตุผลมากกว่าวิธีโอเวอร์ดีไซน์ และจะได้ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายต่ำกว่าวิธีโอเวอร์ดีไซน์ด้วย ต่อมาวิธีสร้างภาพของ Grossmann และ Sargent (1978) ได้พัฒนานำไปประยุกต์ใช้ออกแบบกระบวนการโดยคำนึงถึงความไม่แน่นอนที่จะเกิดในสภาวะปฏิบัติการแทนวิธีโอเวอร์ดีไซน์ เช่น ออกแบบเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger network) (Floudas และ Grossmann, 1987), ออกแบบระบบแบบปรับเปลี่ยน (retrofit design) (Pistikopoulous และ Grossmann, 1988,1989) และการออกแบบหอกลั่นแบบลำดับขั้น (distillation sequence) (Wagler และ Douglas, 1988; Douglas, Mallick และ Wagler, 1991) นอกจากนี้วิธีสร้างภาพของ Grossmann และ Sargent (1987) ยังได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการออปติไมซ์แบบหลายช่วงเวลา (multiperiod optimization) คือ กระบวนการที่สภาวะปฏิบัติการมีหลายสภาวะที่ขึ้นอยู่กับเวลา เช่น โรงงานผลิตยาที่มีหลายผลิตภัณฑ์และความต้องการของผลิตภัณฑ์จะเปลี่ยนไปตามฤดูกาล การประยุกต์ใช้วิธีสร้างภาพของ Grossmann และ Sargent (1978) ลงในปัญหาหลายช่วงเวลาโดยให้ความไม่แน่นอนที่จะเกิดแต่ละช่วงเวลา (period) แทนความไม่แน่นอนแต่ละสถานการณ์ตามวิธีของ Grossmann และ Sargent (1978) และให้สัดส่วนระยะเวลาแต่ละช่วงของเวลาของความไม่แน่นอน แทนน้ำหนักแต่ละสถานการณ์ สำหรับตัวอย่างวิธีออปติไมซ์ปัญหาหลายช่วงเวลา ดูได้จากผลงานวิจัยของ Varvarezos, Grossmann และ Biegler (1992, 1994) ซึ่งออกแบบเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน มินิไมซ์ค่าใช้จ่ายรายปีเพื่อหาขนาดพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนที่เหมาะสม โดยกำหนดให้อุณหภูมิขาเข้าของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนมีการเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล นอกจากนี้ผลงานวิจัยของ Shah และ Pantelides (1992) ยังประยุกต์ใช้วิธีออปติไมซ์ของ Grossmann และ Sargent (1978) จัดตารางการผลิตและออกแบบขนาดของเครื่องปฏิกรณ์แบบกะที่มีผลิตภัณฑ์ 3 ชนิด ซึ่งมีความต้องการ

ของผลิตภัณฑ์ทั้ง 3 ชนิดนี้ไม่แน่นอนเป็นแบบหลายช่วงเวลา ซึ่งจะเป็นปัญหาการออปติไมซ์แบบดิสครีตที่ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

จะเห็นได้ว่าวิธีออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนของ Grossmann และ Sargent (1978) สามารถนำมาประยุกต์กับกระบวนการต่าง ๆ ได้ แต่ยังมีข้อจำกัด คือที่ไม่สามารถรับรองได้ว่าช่วงของความไม่แน่นอนที่เลือกนั้นจะอยู่ในขอบเขตดำเนินการทุกค่าหรือไม่ ดังนั้น Halemann และ Grossmann (1983) เสนอว่าควรเพิ่มข้อจำกัด แม็กซ์-มิน-แม็กซ์ (max-min-max) สำหรับทดสอบความยืดหยุ่น (flexible test) เพื่อพิสูจน์คำตอบได้จากวิธีของ Grossmann และ Sargent (1978) ในก่อนหน้านี้ว่าสามารถปฏิบัติการอยู่ในสภาวะคงตัว และอยู่ในขอบเขตดำเนินการทุกค่าในช่วงของความไม่แน่นอนนั้น สำหรับอัลกอริธึมวิธีแม็กซ์-มิน-แม็กซ์ จะให้ตัวแปรออกแบบคงที่ซึ่งได้จากวิธีของ Grossmann และ Sargent (1978) ขั้นแรกจะแม็กซิไมซ์อสมการข้อจำกัดหาอสมการแย่ที่สุด กล่าวคือสำหรับอสมการที่ต้องมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับศูนย์ตลอดทุกค่าของความไม่แน่นอน เลือกอสมการที่มีค่ามากที่สุด หรือมีค่ามากกว่าศูนย์มากที่สุดเป็นสมการที่แย่ที่สุด ส่วนขั้นสองนำอสมการที่แย่ที่สุดนั้น มาปรับหาตัวแปรควบคุมที่ทำให้อสมการนั้นมีค่าน้อยที่สุด แล้วนำฟังก์ชันนั้นมาแม็กซิไมซ์ทุกค่าของความไม่แน่นอนในช่วงที่กำหนดนั้น พิจารณาคำตอบที่ได้ ถ้ามีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แสดงว่าตัวแปรออกแบบที่ได้นั้น สามารถปฏิบัติการอยู่ในขอบเขตดำเนินการตลอดช่วงความไม่แน่นอนนั้น แต่ถ้าคำตอบจากวิธีแม็กซ์-มิน-แม็กซ์มีค่ามากกว่าศูนย์แสดงว่าตัวแปรออกแบบที่ได้นั้น ไม่สามารถปฏิบัติการอยู่ในขอบเขตดำเนินการ ตลอดทุกค่าในช่วงของความไม่แน่นอนนั้นมีบางค่าในช่วงความไม่แน่นอนนั้นจะไม่สามารถปฏิบัติการอยู่ในขอบเขตดำเนินการหรือไม่สอดคล้องกับข้อจำกัดของกระบวนการ Saboo และ Morari (1984) ใช้วิธีแม็กซ์-มิน-แม็กซ์ช่วยออกแบบเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน ที่ซึ่งอุณหภูมิขาเข้ามีความไม่แน่นอนแบบดิสครีตให้มีความยืดหยุ่น นั่นคือสามารถปฏิบัติการอยู่ในสภาวะคงตัว และอยู่ในขอบเขตดำเนินการได้ตลอดช่วงความไม่แน่นอนนั้น

สำหรับผลงานวิจัยที่ผ่านมาสามารถแสดงอยู่ในรูปตารางได้ดังตารางที่ 2.2

2.3.2 ผลงานวิจัยการหาค่าแบบสโตแคสติก (Stochastic Approach) เป็นการกำหนดให้ความไม่แน่นอนเป็นตัวแปรเฟ้นสุ่ม มีจำนวนนับถ้วน มีลักษณะการกระจายแบบฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นอย่างต่อเนื่อง (continue probability distribution function) ลงในสมการออปติไมซ์

จากแนวความคิดของ Halemane และ Grossmann (1983) เสนอว่าปัญหาการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนนั้นเป็นปัญหาออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอน (two-stage optimization) คือขั้นแรกจะหาตัวแปรออกแบบ เช่น ขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ ที่ให้ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายคาดหวังหรือ

ค่าเฉลี่ย (the expected cost) ต่ำที่สุด ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันค่าใช้จ่ายที่ต่ำสุด จากมินิไมซ์ในขั้นที่สอง ส่วนขั้นที่สองนั้นจะมินิไมซ์ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายหาตัวแปรควบคุมที่สามารถปรับได้ในขณะปฏิบัติการที่มีความไม่แน่นอนอยู่ในระบบ กล่าวคือเป็นการมินิไมซ์ค่าใช้จ่ายทุกค่าของตัวแปรความไม่แน่นอนที่กระจายแบบฟังก์ชันความน่าจะเป็น ดังนั้นการหาค่าแบบสโตแคสติก จะทำปัญหาออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอน ให้กลายเป็นปัญหาการออปติไมซ์สโตแคสติกแบบ 2 ขั้นตอน (two-stage stochastic optimization) ซึ่งเป็นมีความซับซ้อนยุ่งยากกว่าแบบดีเทอร์มินิสติก ในแบบสโตแคสติก เป็นการกำหนดให้ความไม่แน่นอนเป็นตัวแปรสุ่ม มีการกระจายแบบความน่าจะเป็น แตกต่างจากแบบดีเทอร์มินิสติก ที่ให้ความไม่แน่นอนเป็นค่าจำกัดที่นับถ้วน แทนลงในปัญหาออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอน (Pai และ Hughes, 1987) สำหรับการหาค่าแบบสโตแคสติกเพิ่งได้รับความสนใจในต้นศตวรรษที่ 90 นี้โดย Straub และ Grossmann (1990) ได้ใส่ความไม่แน่นอนแบบฟังก์ชันแจงแจงรูปปกติ (Normal distribution) ลงในสมการออปติไมซ์ นิยามฟังก์ชันความยืดหยุ่นของสโตแคสติก (Stochastic flexibility) เป็นออปเจกทีฟฟังก์ชันในการออปติไมซ์ และใช้วิธีการเกาส์เซียนอินทิกรัล (Gaussian Integral) ช่วยในอินทิเกรตฟังก์ชัน

เขาทั้งสองได้ประสพผลสำเร็จในการประยุกต์วิธีออปติไมซ์ โดยแม็กซิไมซ์ฟังก์ชันความยืดหยุ่นของสโตแคสติก กับการออกแบบระบบเชิงเส้น (Straub และ Grossmann, 1990) และการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหล (plug flow) ซึ่งเป็นระบบไม่เชิงเส้น (Straub และ Grossmann, 1993) ได้สำเร็จ แต่วิธีการโปรแกรมโดยการกำหนดให้ออปเจกทีฟฟังก์ชันคือฟังก์ชันความยืดหยุ่นของสโตรแคสติกนั้น ไม่ได้เป็นการออปติไมซ์ที่มีออปเจกทีฟฟังก์ชันเป็นค่าฟังก์ชันทางเศรษฐศาสตร์ เช่น ค่ากำไรสูงสุด ค่าใช้จ่ายต่ำสุด

ดังนั้น Ierapetritou และ Pistikopoulos (1994) เสนอวิธีการโปรแกรมแบบสโตแคสติก โดยเพิ่มฟังก์ชันกำไรลงในสมการอินทิกรัลความยืดหยุ่นของ Straub และ Grossmann (1990) จะได้เป็นการหาฟังก์ชันกำไรคาดหวัง หรือฟังก์ชันกำไรเฉลี่ยตลอดทุกค่าความไม่แน่นอนที่เป็นฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น Ierapetritou และ Pistikopoulos (1994) ได้ทดลองวางแผนการผลิต (planning) ของระบบแบบกะที่ความต้องการของผลิตภัณฑ์ไม่แน่นอนเพื่อให้กำไรคาดหวังสูงสุด ซึ่งเป็นการโปรแกรมแบบเชิงเส้น (linear) และใช้วิธีของ Ierapetritou, Pistikopoulos และ Floudas (1996) ออกแบบกระบวนการผลิตเบนซินคลอริเนชัน (benzene chlorination) ที่ให้ความต้องการของผลิตภัณฑ์และสัดส่วนโมลของคลอโรเบนซินมีความไม่แน่นอน เพื่อหาขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ที่ได้ค่ากำไรคาดหวังสูงสุด ซึ่งเป็นการโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Programming) แต่ก็เป็นแนวทางสำคัญสำหรับการแก้ปัญหาออปติไมซ์สโตแคสติกแบบ 2 ขั้นตอน นอกจากนี้ Terwiesch, Revemark, Schenker และ Rippin (1998) ได้ใช้วิธีหนึ่งที่ Straub และ Grossmann (1990) เสนอมา

หาขนาดของเครื่องปฏิกรณ์แบบกึ่งกะ (semi-batch) ที่มีปฏิกิริยาแบบไม่ย้อนกลับ ซึ่งให้ค่าคงที่ทางจลนพลศาสตร์ (kinetic constant) มีความไม่แน่นอน เพียงแต่เปลี่ยนค่าของออปเจกทีฟฟังก์ชันเป็นการอินทิกรัลของผลคูณระหว่างฟังก์ชันค่าใช้จ่ายกับฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น เพื่อหาค่าความเสี่ยงต่ำที่สุด หรือความน่าจะเป็นจะเกิดของแต่ละข้อจำกัดมีค่ามากที่สุด นอกจากนี้ยังได้ทำการทดลองเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณได้ ต่อมา Ierapetritou และ Pistikopoulos (1995) ได้ร่วมกันพัฒนาวิธีออปติไมซ์สำหรับปัญหาออปติไมซ์เชิงเส้นที่ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็มเพิ่มขึ้น (Mixed Integral Linear Programming: MILP) เพื่อช่วยจัดตารางการผลิตกระบวนการแบบกะที่มีความไม่แน่นอนแบบต่อเนื่อง สำหรับผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์แบบสโตแคสติกดูได้ดังตารางที่ 2.3

2.4 ผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนในวิศวกรรมด้านอื่น

การออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนได้มีทำวิจัยในวิศวกรรมด้านอื่น ดังนี้

- ทางวิศวกรรมโยธา เช่น Kwak and Hang (1976) เสนอวิธีออกแบบโครงสร้างที่เหมาะสมกรณีน้ำหนักภายนอก (the external load) มีความไม่แน่นอน เพื่อหาขนาดตัวแปรออกแบบที่เป็นตัวแปรตัดสินใจ โดยจะต้องรักษาให้โครงสร้างอยู่ในขอบเขตปฏิบัติการตลอด เมื่อน้ำหนักภายนอกมีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งตัวแปรตัดสินใจจะเปลี่ยนตามน้ำหนักภายนอก แต่การออกแบบทางโยธาจะแตกต่างจากทางเคมี เพราะการออกแบบในทางโยธาจะไม่มีตัวแปรที่สามารถปรับในอนาคตขณะปฏิบัติการต่างกับการออกแบบทางเคมีที่กระบวนการเคมี ที่จะมีตัวแปรปรับได้ในขณะปฏิบัติการ
- ทางวิศวกรรมไฟฟ้า เช่น Polak และ Sangiovanni-Vincentelli (1979) เสนอวิธีจูนหรือปรับวงจรไฟฟ้า เพื่อแก้ไขผลของความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนการผลิต (manufacture) แต่ในการจูนหรือปรับวงจรไฟฟ้าจะทำหลังจากวงจรนั้นผลิตเสร็จแล้วค่อยปรับ ไม่เหมือนกระบวนการเคมีที่จะทำระหว่างขั้นตอนการผลิต
- วิศวกรรมอุตสาหการ เช่น รัชต์วรรณ กาญจนปัญญาคม และชาติชาย วิจิตธรรมภาณี (2541) การหาจำหน่วยเครื่องจักรน้อยที่สุด ในแผนกเครื่องจักรกลของอุตสาหกรรมการผลิตหัวอ่าน) ที่มีความสามารถในการผลิตของเครื่องจักร (capacity) มีความไม่แน่นอน โดยใช้วิธีสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) และใช้โปรแกรม LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer) ช่วยการคำนวณหาจำนวนเครื่องจักรที่เหมาะสม ซึ่งวิธีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะได้จำนวนเครื่องจักรน้อยกว่า วิธีดั้งเดิมที่อาศัยประสบการณ์ของฝ่ายผลิต (Heuristic)

อย่างไรก็ตามวิธีที่จะแก้ปัญหาในทางวิศวกรรมเหล่านี้ จะต่างจากปัญหาทางด้านวิศวกรรมเคมี เพราะความไม่แน่นอนของกระบวนเคมีจะสอดคล้องกับตัวแปรของกระบวนการ ซึ่งมีปฏิกิริยาทางเคมีเข้ามาเกี่ยวข้อง และปัญหาทางวิศวกรรมเคมีมีการแบ่งแยกตัวแปรระหว่าง ตัวแปรออกแบบและตัวแปรควบคุม นั้นคือตัวออกแบบเป็นตัวแปรที่คงที่ แต่ตัวแปรควบคุมสามารถปรับได้ในขณะที่มีความไม่แน่นอนอยู่ในกระบวนการ ดังนั้นวิธีที่เสนอกับวิศวกรรมด้านอื่นไม่สามารถใช้ได้กับกระบวนการเคมี

2.5 บทสรุป

จากผลงานวิจัยที่ผ่านมาการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนจะนำมาใช้แก้ปัญหาการหาค่าตัวแปรออกแบบในขั้นตอนออกแบบ ซึ่งวิธีการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนนั้นจะเป็นการออปติไมซ์แบบ 2 ขั้นตอน กล่าวคือทำออปติไมซ์ทั้งขั้นตอนออกแบบและขั้นตอนปฏิบัติการ โดยขั้นตอนออกแบบนั้นจะหาค่าตัวแปรออกแบบที่เหมาะสมที่ทำให้ค่าใช้จ่ายคาดหวังต่ำที่สุด ซึ่งตัวแปรออกแบบจะมีค่าคงที่ตลอดในขณะปฏิบัติการ ส่วนขั้นปฏิบัติการจะหาค่าตัวแปรควบคุมที่ทำให้ค่าใช้จ่ายมีค่าต่ำที่สุดทุกค่าของความไม่แน่นอน ซึ่งตัวแปรควบคุมสามารถปรับได้ขณะปฏิบัติการ ฉะนั้นกรณีระบบมีความไม่แน่นอนจะทำให้ตัวแปรควบคุมมีหลายค่า โดยที่ตัวแปรควบคุมจะเปลี่ยนตามความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา มีความแปรปรวนรอบค่าหนึ่ง

นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าการพัฒนาวิธีการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอน สามารถแบ่งเป็น 2 แนวทางที่แตกต่างตามชนิดของความไม่แน่นอนที่ใส่ลงสมการออปติไมซ์ คือ

1) แบบดีเทอร์มินิสติก จะกำหนดขอบเขตของความไม่แน่นอนให้ความไม่แน่นอนมีค่าเฉพาะที่มีจำกัดนับถ้วน หรือดิสครีต แล้วจึงมินิไมซ์หาค่าใช้จ่ายคาดหวัง กล่าวคือค่าใช้จ่ายเฉลี่ยทางคณิตศาสตร์ของฟังก์ชันค่าใช้จ่าย ที่มีความไม่แน่นอนกระจายแบบความน่าจะเป็น
2) แบบสโตแคสติก จะให้ความไม่แน่นอนเป็นตัวแปรเฟ้นสุ่มที่นับถ้วน ที่มีการกระจายแบบฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง แล้วมินิไมซ์หาฟังก์ชันค่าใช้จ่ายที่คาดหวัง

สำหรับในงานวิจัยนี้จะออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนทั้ง 2 แนวทาง เพื่อมินิไมซ์ค่าใช้จ่ายคาดหวังต่ำสุด ช่วยหาขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ที่เหมาะสม ซึ่งจะเป็นตัวแปรคงที่ขณะปฏิบัติการและหาอุณหภูมิของเครื่องปฏิกรณ์ ซึ่งจะเป็นตัวแปรควบคุมที่สามารถปรับได้ขณะปฏิบัติการ โดย

ขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ที่เหมาะสมจะเป็นค่าที่มีความยืดหยุ่น กล่าวคือสามารถทำให้ระบบอยู่ในสภาวะคงตัวได้ สอดคล้องกับข้อจำกัดที่เป็นสมการ และอสมการ ตลอดทุกค่าของความไม่แน่นอน

ตารางที่ 2.2 ผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนแบบดีเทอร์มินิสติก (a)

ค.ศ.	ชื่อผู้วิจัย	ปัญหา	ออปเจกทีฟฟังก์ชัน	ความไม่แน่นอน
1978	Grossmann & Sargent	ออกแบบขนาดท่อพร้อมปั๊ม	ค่าใช้จ่ายรายปีคาดหวังต่ำสุด	ประสิทธิภาพของปั๊ม และแฟกเตอร์ฟิตชั่นของท่อ
1983	Halemane & Grossmann	ระบบเครื่องปฏิกรณ์ซึ่งประกอบด้วย CSTR และ เครื่องหล่อเย็น	ค่าใช้จ่ายคาดหวังต่ำที่สุด	อุณหภูมิสายป้อน, อัตราการไหลสายป้อน, ค่าคงที่ของปฏิกิริยา, ค่าคงที่การถ่ายเทความร้อน และอุณหภูมิน้ำหล่อเย็น
1984	Saboo & Morari	ออกแบบขนาดพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger network)	ดัชนีความยืดหยุ่นสูงสุด	อุณหภูมิขาเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน
1985	Swaney & Grossmann	Reactor - Recycle system ประกอบด้วยเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหล (PFR) และเครื่องอัดก๊าซ (compressor)	ดัชนีความยืดหยุ่นสูงสุด	อัตราการไหลของสายป้อน, น้ำหนักโมเลกุลของสายป้อน, น้ำหนักโมเลกุลของก๊าซไหลย้อนกลับ และความดันลด
1987	Floudas & Grossmann	ออกแบบขนาดพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	ดัชนีความยืดหยุ่นสูงที่สุด	อุณหภูมิขาเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

ตารางที่ 2.2 ผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนแบบดีเทอร์มินิสติก (b)

ค.ศ.	ชื่อผู้วิจัย	ปัญหา	ออปเจกทีฟฟังก์ชัน	ความไม่แน่นอน
1990	Pistikopoulos & Mazzuchi	ออกแบบพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	ดัชนีความยืดหยุ่นสูงสุด	อุณหภูมิขาเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน
1991	Douglas, Mallick & Wagler	ออกแบบ และจัดลำดับหอกลั่นแบบ thermally integrated distillation ที่มีจำนวน 4 หอ เพื่อแยกสารผสมอัลเคนเบา 5 องค์ประกอบ	ค่าใช้จ่ายรายปีคาดหวังต่ำที่สุด	อัตราการไหลของสายป้อน, ค่าสมดุลไอ-ของเหลว (varpor-liquid equilibrium: K), ประสิทธิภาพเทรย์ และสัมประสิทธิการถ่ายเทความร้อน
1992	Paules & Floudas	ออกแบบ และจัดลำดับหอกลั่นแบบ thermally integrated distillation	ค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายยูทิลิตี้ (Utilities Cost) ต่ำสุด	อัตราการไหลของสายป้อน
1992	Varvarezos, Grossmann & Biegler	ออกแบบ และจัดตารางการผลิตแบบกะที่มีผลิตภัณฑ์หลายตัว	ค่าใช้จ่ายคาดหวังต่ำที่สุด	อัตราการผลิตเปลี่ยนตามฤดูกาล
1992	Shah & Pantelides	ออกแบบขนาดเครื่องปฏิกรณ์แบบกะ และจัดตารางการกระบวนการผลิต	ค่าใช้จ่ายคาดหวังต่ำสุด	ความต้องการของผลิตภัณฑ์
1994	Subrahmanyam, Pekny & Reklaitis	จัดตารางกระบวนการผลิตกระบวนการแบบกะ	กำไรสุทธิคาดหวังสูงสุด	ความต้องการของผลิตภัณฑ์
1994	Varvarezos, Biegler & Grossmann	ออกแบบพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	ค่าใช้จ่ายสุทธิคาดหวังต่ำสุด	อุณหภูมิขาเข้า

ตารางที่ 2.3 ผลงานวิจัยที่ผ่านมาของการออปติไมซ์ภายใต้ความไม่แน่นอนแบบสโตแคสติก

ค.ศ.	ชื่อผู้วิจัย	ปัญหา	ออปเจกทีฟฟังก์ชัน	ความไม่แน่นอน
1987	Pai & Hughes	กระบวนการ Olefin alkylation ประกอบด้วย CSTR และหอกลั่น	กำไรการผลิตที่คาดหวังสูงสุด	อัตราการไหลของผลิตภัณฑ์ และความเข้มข้นของกรดที่เหลืออยู่
1990	Straub & Grossmann	ออกแบบเครื่องปฏิกรณ์แบบท่อไหล	ดัชนีความยืดหยุ่นทางสโตแคสติกที่คาดหวังสูงสุด	ความร้อนจากการเกิดปฏิกิริยา และพลังงานกระตุ้นของปฏิกิริยา
1993	Straub & Grossmann	ออกแบบขนาดพื้นที่เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนของเครือข่ายเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	ดัชนีความยืดหยุ่นทางสโตแคสติกที่คาดหวังสูงสุด	อุณหภูมิขาเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน 4 สาย
1994	Ierapetritou & Pistikopolos	วางแผนกระบวนการผลิตแบบกะเป็นปัญหาแบบ MILP	กำไรคาดหวังสูงสุด	ความต้องการของผลิตภัณฑ์
1995	Ierapetritou & Pistikopolos	จัดตารางกระบวนการผลิตแบบกะซึ่งเป็นเครื่องปฏิกรณ์แบบกะต่อเนื่องกัน 3 เครื่อง มีผลิตภัณฑ์ 2 ชนิด	กำไรคาดหวังสูงสุด	ความต้องการของผลิตภัณฑ์ทั้งสองชนิด
1996	Ierapetritou, Pistikopolos & Floudas	ออกแบบขนาดเครื่องปฏิกรณ์ของกระบวนการ benzene chlorination ซึ่งประกอบด้วย 3 CSTR และ 2 หอกลั่น	กำไรคาดหวังสูงสุด	ความต้องการของผลิตภัณฑ์ และปริมาณสัดส่วนโมลของคลอโรเบนซีน
1998	Terwiesch, Revemark, Schenker & Rippin	ออกแบบปริมาตรเครื่องปฏิกรณ์แบบกึ่งกะ (semi - batch)	ผลผลิต (yield) ของผลิตภัณฑ์สูงสุดและอัตราการเสี่ยงต่ำสุด	ค่าคงที่ทางจลนพลศาสตร์