บทที่ 3

ทฤษฎีของฟัซซีเซต ตัวเลขฟัซซี และ ตรรกะฟัซซี

บทนำ

เนื้อหาในบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึงแนวคิดและทฤษฎีเบื้องต้นที่จำเป็นของฟัซซีเซต ตัวเลขฟัซซี และตรรกะฟัซซีตามลำดับ เพื่อที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในขั้นตอนของการประเมินค่าความเชื่อถือได้ในระบบผลิตไฟฟ้ากำลัง และการประเมินค่ากำลังการผลิตที่เหมาะสมต่อไป

3.1 แนวคิดและลักษณะเบื้องต้นของทฤษฎีฟัซซี (Fuzzy Theory Concept)

แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซตได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกในปี 1965 โดย "Zadeh" ลักษณะที่สำคัญที่เป็นจุดเด่นของทฤษฎีฟัซซีเซต คือ ทฤษฎีฟัซซีเซตเป็นแนวทางในการอธิบายถึงความคลุมเครือ(Vagueness) ความไม่ชัดเจนของคำพูด คำอธิบายในเชิงภาษา(Linguistic) หรือความไม่ชัดเจนของข้อมูลให้ออกมาอยู่ในรูปของคณิตศาสตร์ได้ [2-4]

โดยการพิจารณาแนวคิดและหลักการพื้นฐานของทฤษฎีฟัซซีเซตจะพบว่า หลักการพื้นฐานที่แตกต่างกันระหว่างความเป็นฟัซซี(Fuzziness) และความน่าจะเป็น(Probability) คือ ความเป็นฟัซซีนั้นเกี่ยวข้องกับความเป็นไปได้ของเหตุการณ์ที่หาค่าได้หรือกำหนดได้(Deterministic plausibility) ความเป็นฟัซซีเป็นรูปลักษณ์หนึ่งของความไม่แน่นอน เป็นความคลุมเครือที่พบในคำจำกัดความของแนวคิดหรือความหมายของคำ พิจารณาตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับเรื่องไฟฟ้ากำลัง เช่น “โหลดในช่วงเย็นวันจันทร์มีค่าประมาณ 2500 MW” จะเห็นได้ว่าคำกล่าวนี้ ระบุว่าจะเกิดโหลดค่าๆหนึ่งในตอนเย็นวันจันทร์อย่างแน่นอน และสามารถระบุขอบเขตของค่าๆนั้นได้ คือประมาณ 2500 MW แต่ระบุค่าอย่างเจาะจงไม่ได้ ซึ่งคำว่า “ประมาณ” ที่ใช้ไม่ได้บ่งชี้ว่าจะต้องมีช่วงของค่ากว้างหรือแคบเพียงใด ในขณะที่ความน่าจะเป็นจะเกี่ยวข้องกับความน่าจะเกิดขึ้น(Likelihood) ของเหตุการณ์ที่ไม่สามารถคาดการณ์หรือกำหนดได้(Non-deterministic) และเป็นแบบ Stochastic ความไม่แน่นอนตามแนวคิดของความน่าจะเป็นนั้นจะเกี่ยวข้องกับการเกิดขึ้นของปรากฏการณ์ซึ่งมีลักษณะแบบสุ่ม(Randomness) พิจารณาตัวอย่างเช่น “เครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีโอกาสเสีย ถ้าใช้งานติดต่อกันเกิน 4000 ชั่วโมง” จากคำกล่าวนี้ เหตุการณ์ที่เครื่องกำเนิดไฟฟ้าจะเสียหรือไม่นั้นไม่สามารถทราบได้ และขึ้นกับสถานะในเวลาปัจจุบันที่พิจารณา บางทีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าอาจจะเสียก่อนที่มีการใช้งานเป็นเวลาถึง 4000 ชั่วโมงก็ได้

จากตัวอย่างทั้งสองจะพบว่า การกล่าวถึงความไม่แน่นอนในลักษณะของโหลด เทียบกับความไม่แน่นอนในสถานะการทำงานของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า มีความแตกต่างกัน

นอกจากนี้ความเป็นฟัซซี(Fuzziness) และความเป็นเชิงสุ่ม(Randomness) แตกต่างกันในการแสดงความไม่แน่นอน โดยความเป็นฟัซซีจะแสดงความไม่แน่นอนที่เกิดจากความแตกต่างทางความคิดหรือคำจำกัดความที่ขึ้นกับคนแต่ละคนจะคิด(Subjective) ส่วนความเป็นเชิงสุ่มจะแสดงความไม่แน่นอนทางด้านภววิสัยหรือรูปธรรม(Objective) ซึ่งเป็นข้อมูลที่อ้างอิงถึงสถิติ(Statistic)

ความแตกต่างระหว่างความเป็นฟัซซีและความน่าจะเป็นนั้น [11] หากพิจารณาจากการสร้างแบบจำลอง(Modeling) แล้วจะพบว่าแบบจำลองฟัซซีและแบบจำลองทางสถิติ(Statistical model) มีชนิดของข้อมูลที่แตกต่างกันในเชิงปรัชญา คือ แบบจำลองฟัซซี จะแสดงในรูปของค่าความเป็นสมาชิก (Membership) ที่แสดงถึงความคล้ายกันของวัตถุต่างๆที่ไม่สามารถระบุคุณสมบัติอย่างชัดแจ้ง โดยค่าความเป็นสมาชิกนั้นจะได้มาจากฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership function) ที่กำหนดขึ้น ส่วนแบบจำลองทางสถิติจะแสดงถึงการเกิดขึ้นของข้อมูลในเชิงความถี่สัมพัทธ์

สำหรับความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น(Probability density function: pdf) และฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership function) มีดังต่อไปนี้ [6]

- pdf แสดงถึงความน่าจะเกิดขึ้น(likelihood) ของ x ใดๆ ส่วนฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแสดงถึงความเป็นสมาชิกของ x ใดๆในเซต
- ค่ามากที่สุดของ pdf จะเป็นเลขจำนวนจริงบวกค่าหนึ่ง โดยทั่วไปมีค่าน้อยกว่า 1 ส่วนค่ามากที่สุดของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกโดยทั่วไปจะเท่ากับ 1
- การอินทิเกรต(Integrate) ฟังก์ชัน pdf จะได้ค่าความน่าจะเป็นสะสม(Cumulative probability) ส่วนการอินทิเกรตฟังก์ชันความเป็นสมาชิกไม่มีนิยาม
- รอยตัดในแต่ละระดับตามแนวนอนของฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(เรียกว่า α-cut) จะแสดงถึงความเป็นสมาชิกในเซตที่ระดับความเชื่อหนึ่งๆ ส่วนกรณีของ pdf นั้นไม่มีนิยาม

3.2 ทฤษฎีฟัซซีเซต (Fuzzy set theory)

เซตตามความหมายดั้งเดิม(Classical crisp set) คือการจัดกลุ่มของวัตถุ(Object) ที่มีลักษณะเหมือนกันหรือสอดคล้องกันตามคำนิยามของเซตนั้นนำมาไว้รวมเป็นกลุ่มเดียวกัน การกำหนดนิยามของเซตจะเป็นไปในแนวทางเพื่อแยกกลุ่มวัตถุต่างๆในขอบเขตทั้งหมดที่เราสนใจ หรือเอกภพสัมพัทธ์ (Universe of discourse) ออกเป็นสองกลุ่ม คือเป็นสมาชิกและไม่เป็นสมาชิก ลักษณะของขอบเขตในการแบ่งแยกการเป็นสมาชิกและไม่เป็นสมาชิกของเซตจะถูกกำหนดอย่างแน่นอน (Crisp) และมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงทันที ณ ตรงเส้นแบ่งขอบเขตนั้น

เราสามารถนิยามเซตตามความหมายดั้งเดิม(Crisp set) โดยการกำหนดฟังก์ชันที่จะระบุถึงคุณสมบัติหรือลักษณะเฉพาะของเซตนั้น(Characteristic function) ถ้ากำหนดให้ U คือ ขอบเขตทั้งหมดที่เราสนใจหรือเอกภพสัมพัทธ์ ฟังก์ชันคุณสมบัติของเซต A(Crisp set) ใน U ($\mu_A(x)$) จะมีค่าเป็น 0 หรือ 1 นั่นคือ

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x \in A \\ 0 & \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x \notin A \end{cases} \qquad (3.1)$$

สังเกตว่าตรงจุดขอบเขตของเซต A จะมีลักษณะคมและแบ่งแยกกลุ่มของ x ออกเป็นสองกลุ่มอย่างชัดเจน นั่นคือ $x \in A$ หรือ $x \notin A$

ฟัซซีเซต(Fuzzy set) จะมีลักษณะที่แตกต่างจากเซตดั้งเดิมตรงที่ได้ขยายหลักการพื้นฐานของเซตดั้งเดิมออกไป และแสดงออกในรูปที่เป็นรูปแบบทั่วไปยิ่งขึ้น(Generalization) โดยฟัซซีเซตจะแสดงลักษณะของความคลุมเครือ ไม่ชัดเจน โดยการกำจัดขอบเขตในการแบ่งความเป็นสมาชิกและไม่เป็นสมาชิกอย่างชัดเจนตามหลักการของเซตดั้งเดิมออกไป และกำหนดให้ค่าของความเป็นสมาชิกค่อยๆมีค่าเพิ่มขึ้นจากความไม่เป็นสมาชิกเลยไปถึงระดับที่มีความเป็นสมาชิกเต็มที่ หรือในทางตรงกันข้าม ค่าจะค่อยๆลดลงจากระดับที่มีความเป็นสมาชิกเต็มที่ไปจนถึงระดับที่ไม่มีความเป็นสมาชิกเลย

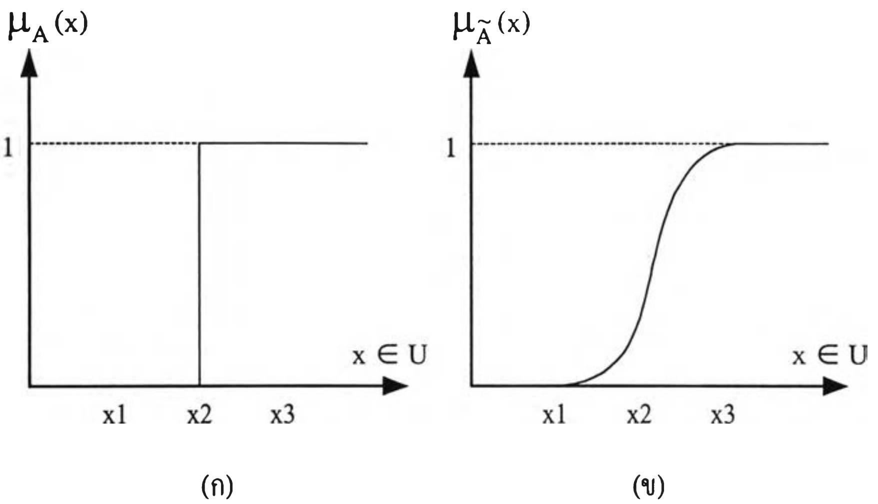
ฟัซซีเซต $\tilde{A}$ (ใช้สัญลักษณ์ ~ แสดงถึงฟัซซีเซต)ใน เอกภพสัมพัทธ์ U สามารถแสดงได้ในลักษณะของเซตของคู่อันดับ คือ

$$\tilde{A} = \left\{ (x\,,\ \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in U \right\} \qquad (3.2)$$

โดย $\mu_{\tilde{A}}(.)$ คือ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership function) ของ $\tilde{A}$ และ $\mu_{\tilde{A}}(.)$ จะแสดงถึงระดับความเป็นสมาชิกของ x ใน $\tilde{A}$ อาจมองได้ว่า $\mu_{\tilde{A}}(.)$ แสดงถึงการจัดลำดับของวัตถุต่างๆใน $\tilde{A}$ โดยเรียงตามระดับของความเป็นสมาชิก ในกรณีที่

- $\mu_{\tilde{A}}(.) : U \rightarrow M \mid M = \{ 0,1 \}$ โดย M คือ ค่าความเป็นสมาชิกที่เป็นไปได้ (Membership space) กรณีนี้เซต $\tilde{A}$ จะไม่เป็นฟัซซีเซต แต่จะเป็นเซตดั้งเดิม (A)
- $\mu_{\tilde{A}}(.) : U \rightarrow M \mid M \subset \Re^+,\ \sup(M) = \infty$ เซต $\tilde{A}$ จะเป็นฟัซซีเซต ซึ่งโดยปกติทั่วไปจะกำหนดให้ $M = [\,0\,,1\,]$

รูปที่ 3.1(ก) แสดงฟังก์ชันคุณสมบัติของเซต(Crisp) A และรูปที่ 3.1(ข) แสดงฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 การเปรียบเทียบระหว่างลักษณะของเซตแบบดั้งเดิม(Crisp set) และฟัซซีเซต

<u>*ตัวอย่างที่ 3.1*</u> กำหนดให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์บนเส้นจำนวนจริง $\Re$ และเซต(Crisp) A เป็นเซตของ "จำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 5" จะได้ว่า

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in U \}$$

โดยฟังก์ชันคุณสมบัติ(Characteristic function) สำหรับเซตนี้ คือ

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < 5 \\ 1 & , x \geq 5 \end{cases}$$

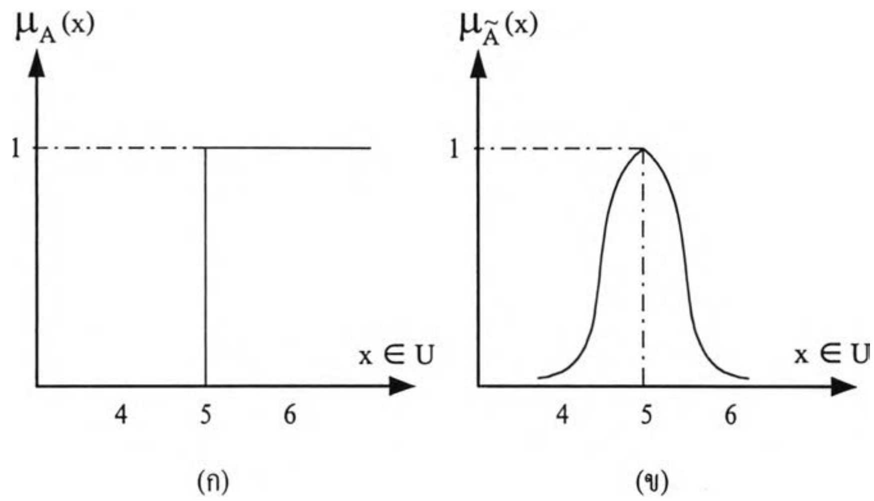
ดังแสดงในรูปที่ 3.2(ก) ถ้าให้ฟัซซีเซต $\tilde{A}$ เป็นเซตของ "จำนวนจริงที่ใกล้เคียง 5" จะได้ว่า

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in U \}$$

โดยในกรณีนี้กำหนดให้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership function) คือ

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + 10(x-5)^2}$$

ดังแสดงในรูปที่ 3.2(ข) สังเกตว่าเราสามารถเลือกใช้หรือกำหนดฟังก์ชันความเป็นสมาชิกให้กับ $\tilde{A}$ ได้หลายรูปแบบ ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวผู้กำหนดเอง(Subjective) ว่าจะกำหนดให้มีลักษณะเป็นแบบใด



รูปที่ 3.2 ลักษณะของเซตแบบดั้งเดิม(Crisp set) และฟัซซีเซตตามตัวอย่างที่ 1

ทั้งนี้การกำหนดลักษณะของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนั้นจะขึ้นอยู่กับการพิจารณาว่าลักษณะของฟังก์ชันใดที่จะเหมาะสมที่สุด ที่จะนำมาใช้อธิบายและจัดลำดับองค์ประกอบหรือวัตถุต่างๆ (x) ใน $\tilde{A}$ เพื่อให้สอดคล้องกับคำนิยามของเซต $\tilde{A}$ นั้น

3.2.1 การนำเสนอของฟัซซีเซต (Representation of fuzzy set)

กำหนดให้ "Support ของฟัซซีเซต" คือเซต(Crisp set) ของ x ทุกตัวที่เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $\mu(x) > 0$ ดังแสดงได้ตามสมการที่ 3.3 คือ

$$\mathrm{supp}(\tilde{A}) = \left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(.) > 0 \right\} \tag{3.3}$$

ฟัซซีเซตที่เป็นเซตว่าง(Empty fuzzy set) จะมี $\mathrm{supp}(\tilde{A})$ ที่เป็นเซตว่างด้วย นั่นคือฟังก์ชันความเป็นสมาชิกจะมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกๆ x ใน U ในกรณีทั่วไปถ้ากำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $U = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \right\}$ คือ U มีค่าไม่ต่อเนื่อง(Discrete) เราสามารถแสดง $\tilde{A}$ ในรูปของคู่อันดับ ดังนี้

$$\tilde{A} = \left\{ (x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \ldots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n)) \right\} \tag{3.4}$$

การนำเสนอของฟัซซีเซตสามารถแสดงได้ในรูปของ "Support ของฟัซซีเซต" ดังนี้ โดยนิยามของ "Support ของฟัซซีเซต" เราสามารถแสดง $\tilde{A}$ ได้ในรูปที่ง่ายขึ้น คือ

$$\tilde{A} = \frac{\mu 1}{x1} + \frac{\mu 2}{x2} + \frac{\mu 3}{x3} + \ldots + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_i \left(\frac{\mu_i}{x_i} \right) \quad (3.5)$$

โดยสัญลักษณ์ + แสดงถึงการ Union และ $\mu_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i) > 0$ นั่นคือเราสนใจเฉพาะค่า x_i ($x_i \in U$) ซึ่งมีค่าความเป็นสมาชิกมากกว่าศูนย์ เครื่องหมาย – ระหว่าง μ_i และ x_i จะแสดงถึงการแบ่งแยกระหว่าง μ_i และ x_i ที่สอดคล้องกันซึ่งไม่ใช่การหาร ในกรณีที่ U มีค่าต่อเนื่อง(Continuous) จะเขียนได้ว่า

$$\tilde{A} = \int_U \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \quad (3.6)$$

โดยเครื่องหมาย $\int$ แสดงถึงการ Union ขององค์ประกอบต่างๆใน $\tilde{A}$ ซึ่งเป็นค่าที่ต่อเนื่อง

3.2.2 α - Cut หรือ α- Level ของฟัซซีเซต

α - cut หรือ α- level set ของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ คือ เซต A(Crisp set) ที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่มีค่าความเป็นสมาชิกใน $\tilde{A}$ มากกว่าหรือเท่ากับ α คือ

$$A_\alpha = \{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha , \alpha \in (0,1] \} \quad (3.7)$$

นอกจากนี้เซตของทุกระดับ $\alpha \in (0,1]$ ที่แสดง α - cut ที่แตกต่างกันของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ จะเรียกว่า Level set ของ $\tilde{A}$ นั่นคือ

$$\Lambda_{\tilde{A}} = \{ \alpha \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha , \exists x \in U \} \quad (3.8)$$

จากสมการที่ 3.7 จะเห็นได้ว่าถ้า $\alpha \leq \beta$ แล้ว $A_\beta \subseteq A_\alpha$

3.2.3 คุณสมบัติความเป็น Convex (Convexity)

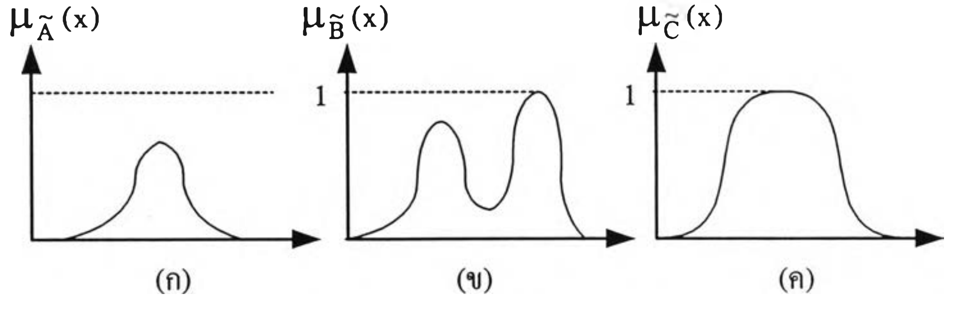
ฟัซซีเซตจะมีคุณสมบัติ Convex ก็ต่อเมื่อแต่ละ α-cut ของฟัซซีเซตเป็นเซตที่ Convex กล่าวคือ

$$\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \qquad (3.9)$$

โดย $x_1, x_2 \in U$, $\lambda \in (0,1]$ จากสมการที่ 3.9 กล่าวได้ว่า เมื่อเราพิจารณาจุด 2 จุดใดๆ คือ x_1, x_2 ในฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และลากเส้นตรงเชื่อมจุด 2 จุดนั้นแล้ว ค่าความเป็นสมาชิกของทุกๆจุด (x) บนเส้นตรงจะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าความเป็นสมาชิกของ x_1 หรือ x_2 แล้วแต่ว่าค่าใดต่ำกว่ากัน นอกจากนี้ พิจารณานิยามของความสูงของฟัซซีเซตดังนี้ นิยามความสูงของฟัซซีเซต(Height of fuzzy set) คือ

$$\text{Height}(\tilde{A}) \equiv \sup_{x} \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (3.10)$$

จากนิยามความสูงของฟัซซีเซตตามสมการที่ 3.10 กล่าวได้ว่า ฟัซซีเซตที่ถูก Normalize แล้วจะมีค่า $\text{Height}(\tilde{A}) = 1$ รูปที่ 3.3(ก) แสดงตัวอย่างของฟัซซีเซตที่ Convex แต่ไม่ Normalized รูปที่ 3.3(ข) แสดงตัวอย่างของฟัซซีเซตที่ Normalized แต่ไม่ Convex และ รูปที่ 3.3(ค) แสดงตัวอย่างของฟัซซีเซตที่ Convex และ Normalized ตามลำดับ



รูปที่ 3.3 ลักษณะของความเป็น Convex ของฟัซซีเซต และลักษณะฟัซซีเซตที่ Normalized

3.2.4 หลักการ Extension (Extension Principle)

หลักการ Extension นำเสนอครั้งแรกโดย Zadeh[1978a] ซึ่งเป็นหลักการหนึ่งที่สำคัญมากในทฤษฎีของฟัซซีเซต หลักการนี้ช่วยในการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์แบบดั้งเดิม(Crisp mathematical concepts) กับการคิดคำนวณบนพื้นฐานของฟัซซีเซต โดยนำเสนอแนวทางในการเชื่อมโยงค่า(Mapping) จากฟังก์ชัน f ใดๆ คือ f : (x_1 , x_2 , . . . x_n) ในเซต(Crisp) U ไปสู่จุดๆหนึ่งในเซต(Crisp) V ให้เป็นกรณีทั่วไป คือ เป็นการเชื่อมโยงค่า จาก n ฟัซซีสับเซต(Fuzzy subset) ใน U ไปสู่ฟัซซีสับเซตใน V ดังนั้นความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ใดๆระหว่าง องค์ประกอบที่ไม่ใช่ฟัซซี(Nonfuzzy elements) จะสามารถขยายไปสู่การจัดการกับองค์ประกอบที่เป็นฟัซซีได้

กำหนดให้ฟังก์ชัน f : U $\rightarrow$ V และฟัซซีเซต $\tilde{A}$ อยู่ใน U โดยอาศัยสมการที่ 3.5 หลักการ Extension กล่าวว่า

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{A}) &= f\left(\frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \frac{\mu_3}{x_3} + \ldots + \frac{\mu_n}{x_n}\right) \\
&= \frac{\mu_1}{f(x_1)} + \frac{\mu_2}{f(x_2)} + \frac{\mu_3}{f(x_3)} + \ldots + \frac{\mu_n}{f(x_n)}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ถ้ามีค่า x มากกว่าหนึ่งค่าใน U ที่ถูกเชื่อมโยงไปยังค่า y เดียวกันใน V โดย f (many-to-one mapping) จะได้ว่า

$$
\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \max_{\substack{x_i \in U \\ f(x_i) = y}} \left(\mu_{\tilde{A}}(x_i)\right) \tag{3.12}
$$

โดย x_i คือค่าที่ถูกเชื่อมโยงไปสู่ค่า y เดียวกัน ให้ U คือ ผลคูณคาร์ทีเซียน(Cartesian Product) ของเอกภพสัมพัทธ์ U= U1 $\times$ U2 $\times$ ... $\times$ Un และ $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, . . . , $\tilde{A}_n$ เป็น n ฟัซซีเซตใน U1 , U2 , . . . , Un ตามลำดับ ฟังก์ชัน f เชื่อมโยงค่า (x_1 , x_2 , . . . , x_n) ในเซต(crisp) U ไปสู่จุด y จุดหนึ่งในเซต(Crisp) V นั่นคือ y = f (x_1 , x_2 , . . . , x_n) จากหลักการ Extension ฟังก์ชัน f (x_1 , x_2 , . . . , x_n) จะถูกขยายไปกระทำบน n ฟัซซีสับเซตของ U : $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, . . . , $\tilde{A}_n$ คือ $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ โดย $\tilde{B}$ คือ ภาพฉายฟัซซี(Fuzzy image) ซึ่งเป็นฟัซซีเซตของ $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, . . . , $\tilde{A}_n$ ผ่าน f (.) โดยฟัซซีเซต $\tilde{B}$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\tilde{B} = \left\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U \right\} \quad (3.13)$$

โดยที่

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U \\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}} \min[\, \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \,] \quad (3.14)$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่เชื่อมโยงค่าจาก $U_1 = \{-1,0,1\}$ และ $U_2 = \{-2,2\}$ ไปยัง $V = \{-2,-1,2,3\}$ โดย $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2$ ให้ $\tilde{A}_1$ และ $\tilde{A}_2$ คือ ฟัซซีเซตที่นิยามบน U_1 และ U_2 ตามลำดับ ที่ซึ่ง $\tilde{A}_1 = (0.5/-1) + (0.1/0) + (0.9/1)$ และ $\tilde{A}_2 = (0.4/-2) + (0.1/2)$ โดยการใช้หลักการ Extension จะได้ $f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ ตามขั้นตอนการคำนวณดังตารางต่อไปนี้

X_1	μ_{A_1}	X_2	μ_{A_2}	$\mu_{A_1 \times A_2}(x_1,x_2)$	$y = f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2$
-1	0.5	-2	0.4	min(0.5,0.4)	-1
-1	0.5	2	1.0	min(0.5,1.0)	3
0	0.1	-2	0.4	min(0.1,0.4)	-2
0	0.1	2	1.0	min(0.1,1.0)	2
1	0.9	-2	0.4	min(0.9,0.4)	-1
1	0.9	2	1.0	min(0.9,1.0)	3

จากตารางจะเห็นว่าคู่ลำดับ (-1,-2) และ (1,-2) และคู่ลำดับ (-1,2) และ (1,2) ถูกเชื่อมโยงไปยังจุดเดียวกันคือจุด y = -1 และ y = 3 ตามลำดับ จากสมการที่ 3.14 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mu_B(y=-1) &= \sup[\, \min(\mu_{A_1}(x_1=-1), \mu_{A_2}(x_2=-2)), \\
&\qquad \min(\mu_{A_1}(x_1=1), \mu_{A_2}(x_2=-2)) \,] \\
&= \sup[\, \min(0.5, 0.4), \min(0.9, 0.4) \,] \quad = 0.4 \\
\mu_B(y=-2) &= \sup[\, \min(\mu_{A_1}(x_1=0), \mu_{A_2}(x_2=-2))] \\
&= \sup[\, \min(0.1, 0.4) \,] \quad = 0.1 \\
\mu_B(y=2) &= \sup[\, \min(\mu_{A_1}(x_1=0), \mu_{A_2}(x_2=2))] \\
&= \sup[\, \min(0.1, 1) \,] \quad = 0.1
\end{aligned}$$

$$\mu_B(y=3) = \sup[\min(\mu_{A_1}(x_1=-1), \mu_{A_2}(x_2=2)),$$
$$\min(\mu_{A_1}(x_1=1), \mu_{A_2}(x_2=2))]$$
$$= \sup[\min(0.5, 1), \min(0.9, 1)] = 0.9$$

ดังนั้น ผลลัพธ์สุดท้าย (ฟัซซีเซต $\tilde{B}$) ที่ได้จากการใช้หลักการ Extension ตามสมการที่ 3.13 และ 3.14 คือ

$$\tilde{B} = (0.1/-2) + (0.4/-1) + (0.1/2) + (0.9/3)$$

3.2.5 พีชคณิตบนช่วง (Interval Arithmetic)

ส่วนใหญ่งานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมจะเกี่ยวข้องกับค่าที่ไม่แน่นอนหรือข้อมูลที่ไม่เที่ยงตรงจากเครื่องมือวัด ซึ่งค่าเหล่านี้มักจะถูกระบุในลักษณะเป็นช่วงของค่า(Interval) เราจึงใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์(Mathematical operation) ในการกระทำบนช่วงเหล่านี้เพื่อที่จะได้ค่าประมาณของการวัดที่เชื่อถือได้ซึ่งอยู่ในรูปของช่วง ดังนั้นการวิเคราะห์ช่วงของค่า(Interval analysis) หรือ พีชคณิตบนช่วง(Interval arithmetic) จึงถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณชนิดนี้

พิจารณาค่าหรือข้อมูลที่ได้จากเครื่องมือวัดทางวิทยาศาสตร์ที่มีค่าไม่แน่นอน เราสามารถระบุตำแหน่งค่าที่ไม่แน่นอนนี้บนเส้นจำนวนจริงได้ภายในช่วงปิด(Closed interval) ช่วงหนึ่ง นั่นคือค่าที่ไม่แน่นอนจะอยู่ภายในช่วงของความเชื่อมั่นหนึ่ง(Interval of confidence) ของ $\Re$, $x \in [a1, a2]$ โดย $a1 \leq a2$ การกระทำเช่นนี้แสดงให้เห็นว่าเราแน่ใจว่าค่า x นั้นมากกว่าหรือเท่ากับ a1 และ น้อยกว่าหรือเท่ากับ a2 หรือกล่าวได้ว่าเราจำกัดความไม่แน่นอนของข้อมูลให้อยู่ในช่วงที่ถูกกำหนดโดยขอบบนและขอบล่าง (a2 และ a1)

กำหนดให้สัญลักษณ์ A = [a1 , a2] ในการแสดงถึงช่วงของค่าช่วงหนึ่ง และถ้าค่าที่ไม่แน่นอน(x) อยู่ภายในช่วงปิดนี้ จะเขียนได้ว่า

$$A = [a1, a2] = \{ x \mid a1 \leq x \leq a2 \} \tag{3.15}$$

โดยทั่วไปตัวเลข a1 และ a2 จะมีค่าจำกัด(finite) ในกรณีที่ค่า x เป็นค่าที่แน่นอนใน $\Re$ เราก็ยังสามารถแสดงได้ในรูปของช่วงคือ x = [x , x] การดำเนินการทางคณิตศาสตร์บนช่วงของความเชื่อมั่นได้แก่ การบวก(+) การลบ(-) การคูณ(*) การหาร(:) การหาค่ามากที่สุด($\vee$) และการหาค่าน้อยที่สุด($\wedge$) สามารถแสดงได้ดังนี้

- การบวก(+) และ การลบ(-) : ให้ A = [a1 , a2] และ B = [b1 , b2] เป็นช่วงความเชื่อมั่นใน $\Re$ ถ้า $x \in [a1, a2]$ และ $y \in [b1, b2]$ แล้ว $x + y \in [a1 + b1, a2 + b2]$ นั่นคือ

$$A\ (+)\ B = [\ a1\ ,\ a2\ ]\ (+)\ [\ b1\ ,\ b2\ ] = [\ a1{+}b1\ ,\ a2{+}b2\ ] \quad (3.16)$$

และสำหรับการลบจะได้

$$A\ (-)\ B = [\ a1\ ,\ a2\ ]\ (-)\ [\ b1\ ,\ b2\ ] = [\ a1{-}b2\ ,\ a2{-}b1\ ] \quad (3.17)$$

- ภาพของ A (Image: $\overline{A}$): ถ้า $x \in [a1, a2]$ แล้วภาพของ A : $\overline{A} = [\ -a2\ ,\ -a1\ ]$ และสังเกตว่า

$$A\ (+)\ \overline{A} = [a1\ ,\ a2]\ (+)\ [-a2\ ,\ -a1] = [\ a1 - a2\ ,\ a2 - a1\ ] \neq 0 \quad (3.18)$$

- การคูณ (.) และ การหาร (:): ให้ A = [a1 , a2] และ B = [b1 , b2] เป็นช่วงความเชื่อมั่นใน $\Re$ จะได้

$$A\ (.)\ B = [\ \min(\ a1b1\ ,\ a1b2\ ,\ a2b1\ ,\ a2b2\ )\ ,\ \max(\ a1b1\ ,\ a1b2\ ,\ a2b1\ ,\ a2b2\ )\ ] \quad (3.19)$$

ในกรณีถ้า $A, B \subset \Re^+$ จะแสดงได้ตามสมการที่ 3.20 คือ

$$A\ (.)\ B = [a1\ ,\ a2]\ (.)\ [b1\ ,\ b2] = [\ a1b1\ ,\ a2b2\ ] \quad (3.20)$$

สำหรับการหารในกรณีที่ $A, B \subset \Re$ และ $0 \notin B$ จะได้ว่า

$$A\ (:)\ B = [\ \min(\ a1/b1\ ,\ a1/b2\ ,\ a2/b1\ ,\ a2/b2)\ ,\ \max(\ a1/b1\ ,\ a1/b2\ ,\ a2/b1\ ,\ a2/b2)\ ] \quad (3.21)$$

ในกรณีถ้า $A, B \subset \Re^+$ และ $0 \notin B$ จะได้

$$A\ (:)\ B = [a1\ ,\ a2]\ (:)\ [b1\ ,\ b2] = [\ a1/b2\ ,\ a2/b1\ ] \quad (3.22)$$

- อินเวอร์สของ A(Inverse : A^{-1}) : ถ้า $x \in [a1, a2] \subset \Re^{+}$, $0 \notin [a1, a2]$ จะได้อินเวอร์สคือ $A^{-1} = [\ 1/a2 , 1/a1\ ]$ สังเกตว่าในกรณีนี้

$$A\ (.)\ A^{-1} = [\ a1/a2 , a2/a1\ ] \neq 0 \tag{3.23}$$

- Max ($\vee$) และ Min ($\wedge$) : พิจารณาช่วงของความเชื่อมั่น $A, B \subset \Re$ จะได้ว่า

$$A\ (\vee)\ B = [\ a1 \vee b1\ ,\ a2 \vee b2\ ] \tag{3.24}$$

$$A\ (\wedge)\ B = [\ a1 \wedge b1\ ,\ a2 \wedge b2\ ] \tag{3.25}$$

คุณสมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการบนช่วงสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 3.1 สังเกตว่าการลบและการหารไม่มีคุณสมบัติการสลับที่(Commutativity) และการเปลี่ยนกลุ่ม(Associativity)

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการบนช่วง

คุณสมบัติ	การบวก (+)	การคูณ (.)
การสลับที่	A (+) B = B (+) A	A (.) B = B (.) A
การเปลี่ยนกลุ่ม	(A (+) B) (+) C = A (+) (B (+) C)	(A (.) B) (.) C = A (.) (B (.) C)
เอกลักษณ์	A (+) 0 = 0 (+) A = A	A (.) 1 = 1 (.) A = A
ภาพและอินเวอร์ส	$A\ (+)\ \overline{A} = \overline{A}\ (+)\ A \neq 0$	$A\ (.)\ A^{-1} = A^{-1}\ (.)\ A \neq 1$
	สำหรับ $\forall A, B, C \subset \Re$	สำหรับ $\forall A, B, C \subset \Re^{+}$

<u>ตัวอย่างที่ 3.3</u> พิจารณาช่วงของจำนวนจริงที่กำหนดขึ้นดังนี้ A = [1.23 , 4.56] , B = [2.45 , 6.26], C = [-3.12 , 5.64] , D = [-4.02 , -1.27] , E = [2 , 4] , F = [-4 , 6] และ G = [-6 , -2] จะได้ว่า

A (+) B = [1.23 , 4.56] (+) [2.45 , 6.26] = [1.23+2.45 , 4.56 + 6.26] = [3.68 , 10.82]

A (-) C = [1.23 , 4.56] (-) [-3.12 , 5.64] = [1.23 - 5.64 , 4.56 + 3.12] = [-4.41 , 7.68]

$\overline{C}$ = [-5.64 , 3.12]

$C\,(+)\,\overline{C}$ = [-3.12 , 5.64] (+) [5.64 , -3.12] = [-8.76 , 8.76] $\neq$ 0

(A (+) B) (-) C = [3.68 , 10.82] (-) [-3.12 , 5.64] = [-1.96 , 13.94]

A (.) B = [1.23 , 4.56] (.) [2.45 , 6.26] = [3.0135 , 28.5456]

A (:) B = [1.23 , 4.56] (:) [2.45 , 6.26] = [1.23 / 6.26 , 4.56 / 2.45]

= [0.1965 , 1.8612]

A^{-1} = [1 / 4.56 , 1 / 1.23] = [0.2193 , 0.8130]

A (.) A^{-1} = [1.23 , 4.56] (.) [0.2193 , 0.8130] = [0.2697 , 3.7073] $\neq$ 1

$E(\wedge)F = [2,4]\ (\wedge)\ [-4,6] = [2 \wedge -4, 4 \wedge 6] = [-4,4]$

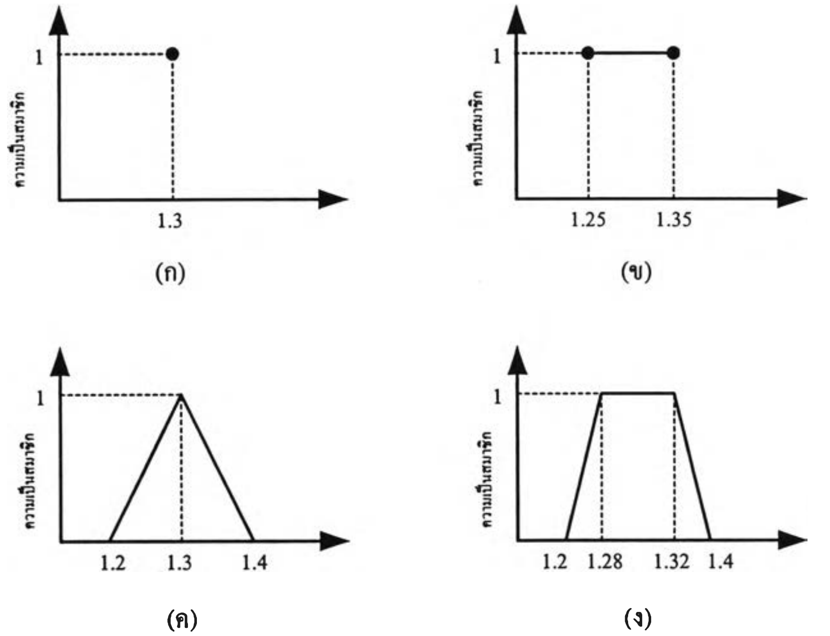
$E(\vee)F = [2 \vee -4, 4 \vee 6] = [2,6]$

3.2.6 ตัวเลขฟัซซี (Fuzzy Number)

ตัวเลขฟัซซีคือ ฟัซซีเซตที่ Convex และ Normalized และถูกนิยามบนเส้นจำนวนจริง $\Re$ ซึ่งมีลักษณะฟังก์ชันความเป็นสมาชิก(Membership function) ที่ต่อเนื่องเชิงท่อน(Piecewise continuous) หรือแต่ละ α-cut เป็นช่วงปิด(Closed interval) $\mu_{\tilde{A}}(.) : \Re \rightarrow [0,1]$

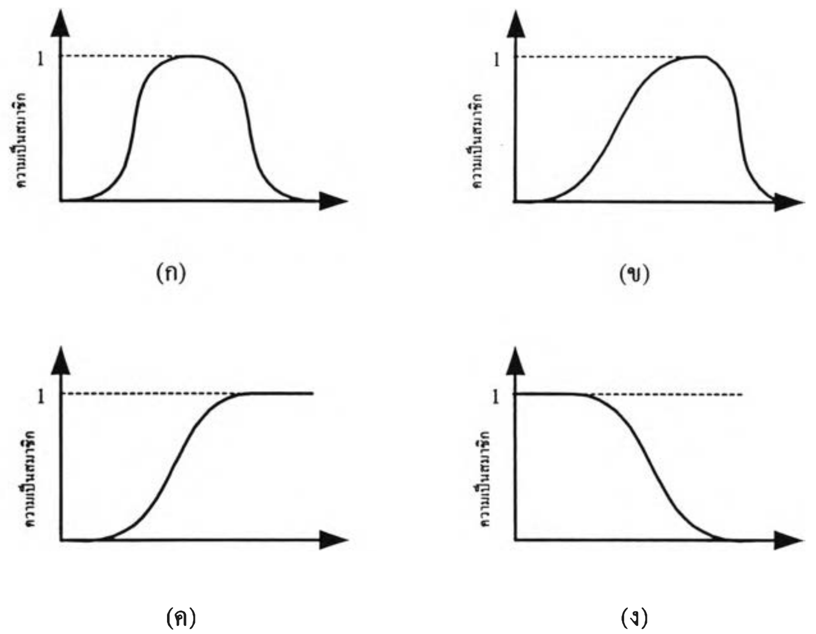
จากคำนิยามของตัวเลขฟัซซี จะพบว่าตัวเลขฟัซซีจะแสดงถึง " ตัวเลข " จากแนวคิดของการประมาณตัวเลขนั้นๆ โดยอาศัยลักษณะการแสดงในเชิงคณิตศาสตร์ในรูปของช่วง(Interval) ตัวเลขฟัซซีจะแสดงค่าของข้อความที่แสดงความไม่แน่นอนของตัวเลข เช่น " มีค่าประมาณ 5 " หรือ " มีค่าใกล้เคียงกับ 3.4 " โดยอาศัยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในการระบุค่าความเป็นสมาชิกให้กับตัวเลขใดๆบนเส้นจำนวนจริงว่ามีคุณสมบัติสอดคล้องหรือใกล้เคียงกับคำนิยามของข้อความนั้นๆมากหรือน้อยเพียงใด ตัวเลขฟัซซีที่เป็นบวก คือตัวเลขฟัซซีที่ค่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเท่ากับศูนย์ สำหรับทุกค่าของตัวแปรอิสระ x ที่เป็นลบ นั่นคือ $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x < 0$ ในทางตรงกันข้าม ตัวเลขฟัซซีที่เป็นลบมีลักษณะคือ $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x > 0$

นอกจากนี้ ตัวเลขธรรมดาหรือช่วงของตัวเลขจำนวนจริงสามารถถูกพิจารณาได้ว่าเป็นกรณีพิเศษของตัวเลขฟัซซี รูปที่ 3.4(ก) แสดงตัวเลขปกติที่มีค่า 1.3 รูปที่ 3.4(ข) แสดงช่วงของจำนวนจริงที่มีค่าระหว่าง 1.25 ถึง 1.35 คือ [1.25 , 1.35] รูปที่ 3.4(ค) แสดงตัวเลขฟัซซีรูปสามเหลี่ยม (Triangular fuzzy number) ที่แสดงถึงข้อความที่ว่า "มีค่าประมาณ 1.3" และรูปที่ 3.4(ง) แสดงตัวเลขฟัซซีรูปสี่เหลี่ยมคางหมู(Trapezoidal fuzzy number) ที่แสดงถึงข้อความที่ว่า "มีค่าอยู่ในช่วง 1.28 ถึง 1.32 และไม่เกิน 1.2 และ 1.4" ตามลำดับ



รูปที่ 3.4 ตัวเลขฟัซซีแบบต่างๆ

ตัวเลขฟัซซีรูปสามเหลี่ยม และตัวเลขฟัซซีรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งก็คือตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมคางหมูตามลำดับ จะเป็นตัวเลขฟัซซีที่นิยมใช้กันมากที่สุด นอกจากนี้ก็ยังมีตัวเลขฟัซซีรูปแบบอื่นๆที่ใช้กันในบางกรณี เช่น ตัวเลขฟัซซีที่เป็นรูประฆัง (Bell-shaped) ซึ่งมีทั้งแบบสมมาตร และไม่สมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ก) และ (ข) ตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่เพิ่มขึ้นอย่างเดียว หรือลดลงอย่างเดียว ซึ่งสื่อถึงข้อความที่ว่า "ตัวเลขค่ามาก" (Large number) และ "ตัวเลขค่าน้อย" (Small number) ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ค) และ (ง)



รูปที่ 3.5 ตัวเลขฟัซซีแบบต่างๆ (ต่อ)

3.2.7 พีชคณิตฟัซซี (Fuzzy Arithmetic)

เนื่องจากคุณสมบัติของตัวเลขฟัซซี คือ Normal และ Convex บนเส้นจำนวนจริงซึ่งมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่ต่อเนื่องเชิงท่อน(Piecewise continuous) นั่นคือทุกๆ α-cut (A_α) ของตัวเลขฟัซซี $\widetilde{A}$ เป็นช่วงปิดบน $\Re$ และค่าสูงที่สุดของ $\mu_{\widetilde{A}}(.)$ มีค่าเป็น 1 ดังนั้นถ้ากำหนดตัวเลขฟัซซี $\widetilde{A}$ และ $\widetilde{B}$ ใน $\Re$ สำหรับค่า α ค่าหนึ่ง : $\alpha_1 \in [0\ ,\ 1]$ เราจะได้ช่วงปิดสองช่วง คือ $A_{\alpha_1} \equiv [a1^{(\alpha_1)}, a2^{(\alpha_1)}]$ จากตัวเลขฟัซซี $\widetilde{A}$ และ $B_{\alpha_1} \equiv [b1^{(\alpha_1)}, b2^{(\alpha_1)}]$ จากตัวเลขฟัซซี $\widetilde{B}$ ซึ่งเราสามารถใช้หลักการของพีชคณิตบนช่วงมาประยุกต์ใช้ได้

ดังนั้นเราสามารถมองว่าตัวเลขฟัซซีเป็นการขยายแนวความคิดของช่วงตัวเลข(Interval) คือแทนที่จะพิจารณาช่วงตัวเลขเพียงแค่ระดับเดียว ตัวเลขฟัซซีจะพิจารณาช่วงของตัวเลข ณ หลายๆระดับ ซึ่งแต่ละช่วงเหล่านี้จะสอดคล้องกับแต่ละ α-cut ของตัวเลขฟัซซี เพื่อแสดงว่าเรากำลังพิจารณาการดำเนินการทางพีชคณิต(Arithmetic operation) บนทุกระดับช่วงปิดของตัวเลขฟัซซี เราจะใช้สัญลักษณ์ $A_\alpha \equiv [a1^{(\alpha)}, a2^{(\alpha)}]$ เพื่อแสดงช่วงปิดของตัวเลขฟัซซี $\widetilde{A}$ ที่ทุกๆระดับ α ($\alpha \in [0,1]$)

กำหนดให้ (*) หมายถึง การดำเนินการบนตัวเลขฟัซซี เช่น การบวก(+) การลบ(-) การคูณ (.) และการหาร (:) โดยใช้หลักการ Extension ผลลัพธ์ $\tilde{A}$ (*) $\tilde{B}$ โดย $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ คือตัวเลขฟัซซีจะได้ว่า

$$\mu_{\tilde{A}(*)\tilde{B}}(z) = \sup_{z = x*y} \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \tag{3.26}$$

กรณีที่ $x, y \in \Re$ สำหรับ $\min(\wedge)$ และ $\max(\vee)$ จะได้ว่า

$$\mu_{\tilde{A}(*)\tilde{B}}(z) = \sup_{z = x*y} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \tag{3.27}$$

ใช้หลักการของ α-Cut กับสมการที่ 3.26 และ 3.27 จะได้ผลลัพธ์ตามสมการที่ 3.28 คือ

$$(A(*)B)_\alpha = A_\alpha (*) B_\alpha \ : \forall\alpha \in [0,1] \tag{3.28}$$

สังเกตว่าสำหรับ $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ ถ้า $\alpha_1 > \alpha_2$ ดังนั้น $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$ ฝั่งขวามือของสมการที่ 3.28 แสดงถึงการดำเนินการเชิงช่วงกับทุกๆ α-cut ของ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \tag{3.29}$$

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] \tag{3.30}$$

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [\min(a_i^\alpha \cdot b_j^\alpha), \max(a_i^\alpha \cdot b_i^\alpha)] \tag{3.31}$$

$$A_\alpha(/)B_\alpha = [\min(a_i^\alpha / b_j^\alpha), \max(a_i^\alpha / b_j^\alpha)] \ ; 0 \notin B_\alpha \tag{3.32}$$

โดยในสมการที่ 3.31 และ 3.32 i , j มีค่าเท่ากับ 1 และ 2

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราสามารถสรุปคุณสมบัติของการดำเนินการ(Operation) บนตัวเลขฟัซซี และ คุณสมบัติการบวกและการคูณเชิงพีชคณิตบนตัวเลขฟัซซี ได้ดังนี้

1. ถ้า $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เป็นตัวเลขฟัซซี ใน $\Re$ แล้ว $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ และ $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ ยังคงเป็นตัวเลขฟัซซี
2. ถ้า $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เป็นตัวเลขฟัซซี ใน $\Re^{+}$ แล้ว $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ และ $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ ยังคงเป็นตัวเลขฟัซซี
3. ไม่มีภาพ(Image) และอินเวอร์ส(Inverse) ของตัวเลขฟัซซีที่ทำให้

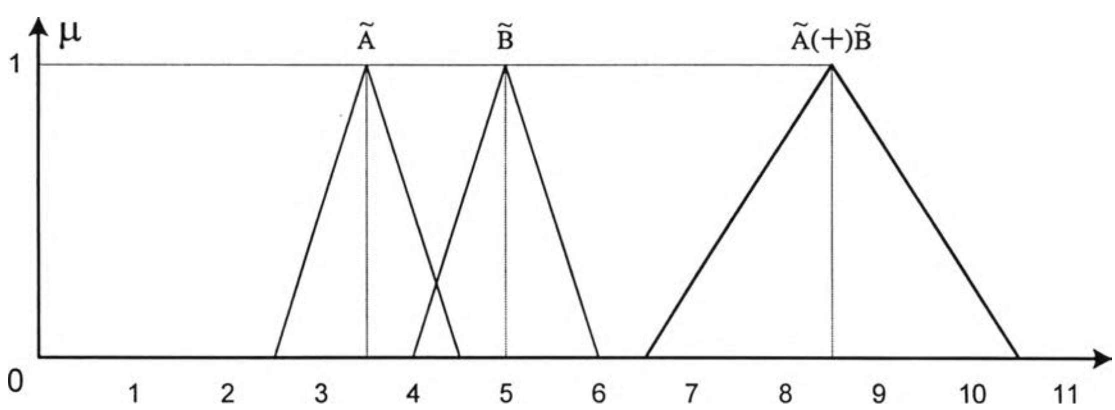
$$\tilde{A}(+)\bar{\tilde{A}} = 0 \quad \text{และ} \quad \tilde{A}(.)\tilde{A}^{-1} = 1$$

4. อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(\tilde{A}(-)\tilde{B})(+)\tilde{B} \neq \tilde{A} \quad \text{และ} \quad (\tilde{A}(:)\tilde{B})(.)\tilde{B} \neq \tilde{A}$$

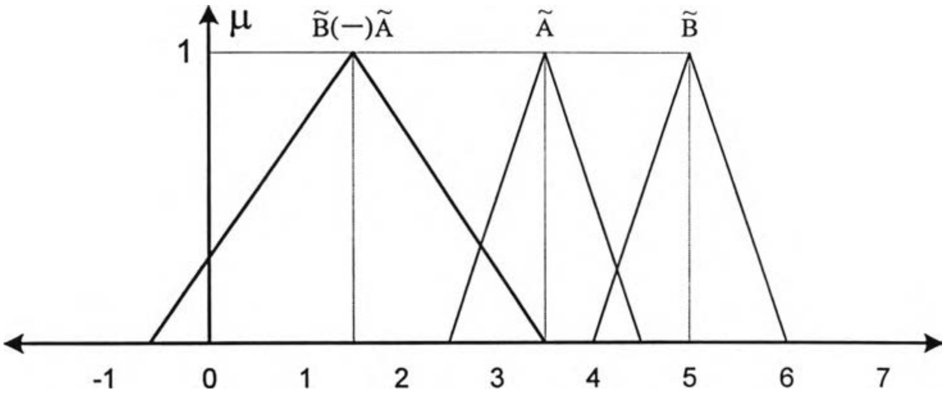
5. ตัวเลขฟัซซีมีคุณสมบัติการสลับที่ และการจัดหมู่

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ ตัวเลขฟัซซี $\tilde{A}$ แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 3.5" และ $\tilde{B}$ แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 5" โดยกำหนดให้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นรูปสามเหลี่ยม เราจะได้ผลลัพธ์จากการดำเนินการบนตัวเลขฟัซซีโดยใช้หลักการพีชคณิตฟัซซีดังนี้



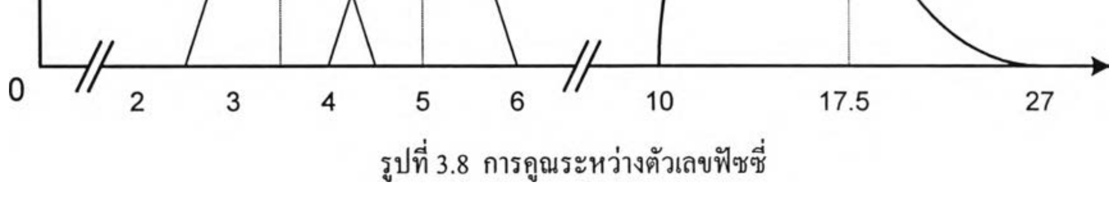
รูปที่ 3.6 การบวกระหว่างตัวเลขฟัซซี่

รูปที่ 3.6 แสดงผลที่ได้จากการบวก คือ $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขฟัซซีที่แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 8.5" โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกับ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$



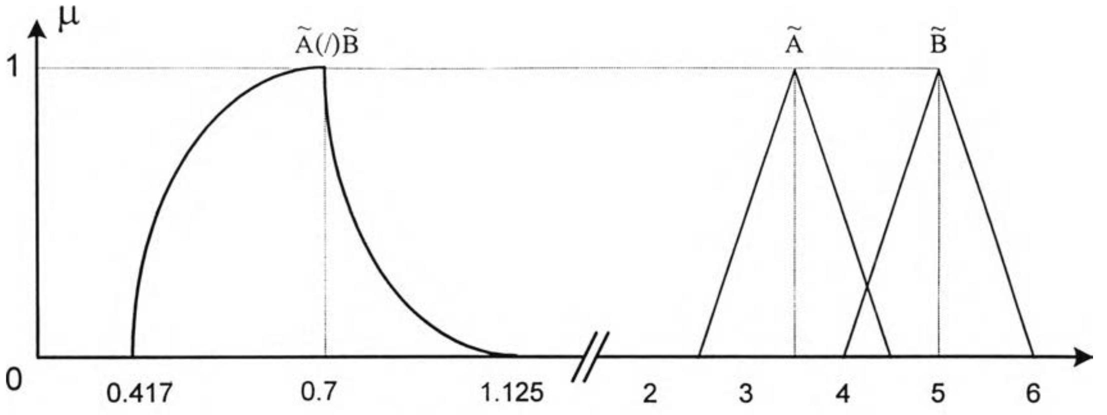
รูปที่ 3.7 การลบระหว่างตัวเลขฟัซซี่

รูปที่ 3.7 แสดงผลที่ได้จากการลบ คือ $\tilde{B}(-)\tilde{A}$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขฟัซซีที่แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 1.5" โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่ยังคงเป็นรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกับฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$



รูปที่ 3.8 การคูณระหว่างตัวเลขฟัซซี่

รูปที่ 3.8 แสดงผลที่ได้จากการคูณ คือ $\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขฟัซซีที่แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 17.5" สังเกตว่าในกรณีนี้ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของผลลัพธ์ที่ได้จะเพี้ยนไปจากของ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 3.9 การหารระหว่างตัวเลขฟัซซี่

รูปที่ 3.9 แสดงผลที่ได้จากการหาร คือ $\tilde{A}(/)\tilde{B}$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขฟัซซีที่แสดงถึงข้อความ "มีค่าประมาณ 0.7" สังเกตว่าในกรณีนี้ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของผลลัพธ์ที่ได้จะเพี้ยนไปจากของ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกับกรณีของการคูณ

3.2.8 สมการฟัซซี (Fuzzy Equation)

ทฤษฎีฟัซซีในเรื่องของตัวเลขฟัซซี และการดำเนินการทางพีชคณิตบนตัวเลขฟัซซีเป็นพื้นฐานที่สำคัญของเรื่องสมการฟัซซี สมการฟัซซีคือสมการที่ตัวสัมประสิทธิ์(Coefficient) หรือตัวแปรเป็นตัวเลขฟัซซี และตัวสมการนั้นถูกเขียนขึ้นมาโดยใช้ตัวดำเนินการของพีชคณิตฟัซซีประกอบเข้าด้วยกัน (คือ การบวก ลบ คูณ และ หาร) แม้ว่าสมการฟัซซีจะเป็นที่รู้จักกันมานานพอสมควรแล้ว แต่ตัวทฤษฎีในเรื่องนี้ยังคงอยู่ในขั้นพัฒนาและยังเป็นที่ถกเถียงกันอยู่ อย่างไรก็ตามในกรณีที่เป็นสมการฟัซซีอย่างง่าย เราสามารถอธิบายคุณสมบัติหรือลักษณะ รวมทั้งวิธีการแก้สมการนี้ได้ไม่ยากนัก เช่น สมการ $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ โดยในที่นี้ $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ คือตัวเลขฟัซซี และ $\tilde{X}$ คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่เป็นตัวเลขฟัซซี ความยากในการแก้สมการฟัซซีอยู่ที่ข้อเท็จจริงที่ว่า $\tilde{X}=\tilde{B}-\tilde{A}$ ไม่ใช่คำตอบของการแก้สมการ เนื่องจากคุณสมบัติของตัวเลขฟัซซีที่ไม่มีอินเวอร์สการบวก

ถ้ากำหนดให้ช่วงปิด 2 ช่วง คือ $A = [a_1, a_2]$ และ $B = [b_1, b_2]$ ซึ่งพิจารณาได้ว่าเป็นกรณีพิเศษของตัวเลขฟัซซี และกำหนดให้ ตัวแปร $X = [x_1, x_2]$ จากสมการ $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ แทนค่า X ลงไปจะได้ผลลัพธ์ตามสมการที่ 3.33 คือ

$$[a_1 + x_1, a_2 + x_2] = [b_1, b_2] \tag{3.33}$$

จากสมการนี้เราสามารถแบ่งปัญหาออกได้เป็น 2 สมการย่อยที่มีองค์ประกอบเป็นตัวเลขปกติ คือสมการ $a_1+x_1=b_1$ และ $a_2+x_2=b_2$ ซึ่งผลเฉลยของ 2 สมการนี้ก็คือ $x_1=b_1-a_1$ และ $x_2=b_2-a_2$ ตามลำดับ และเนื่องจาก X จะต้องเป็นช่วงปิด จึงจำเป็นที่ค่า x_1 ที่ได้จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับค่า x_2 ($x_1 \le x_2$) นั่นคือสมการนี้จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $b_1-a_1 \le b_2-a_2$ ซึ่งจะได้ผลเฉลยคือ $X=[b_1-a_1, b_2-a_2]$ จากวิธีการนี้ โดยการใช้หลักการของ α-cut เราสามารถหาผลเฉลยของสมการฟัซซีนี้สำหรับตัวเลขฟัซซีใดๆ ได้โดยการพิจารณาค่า ณ α-cut หนึ่ง ($\alpha \in [0,1]$)

กำหนดให้ $A_\alpha=[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $B_\alpha=[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ และ $X_\alpha=[x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ คือ α-cut ของ $\tilde{A}$ $\tilde{B}$ และ $\tilde{X}$ ตามลำดับ เราจะได้สมการในรูปของ α-cut คือ $A_\alpha+X_\alpha=B_\alpha$ โดยสมการนี้จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ

- $b_1^\alpha-a_1^\alpha \le b_2^\alpha-a_2^\alpha$ สำหรับ $\forall\alpha \in [0,1]$ และ
- เมื่อ $\alpha \le \beta$ จะได้ว่า $b_1^\alpha-a_1^\alpha \le b_1^\beta-a_1^\beta \le b_2^\beta-a_2^\beta \le b_2^\alpha-a_2^\alpha$

เราจะได้ผลเฉลยในรูปของค่า ณ α-cut หนึ่ง คือ $X_\alpha=[b_1^\alpha-a_1^\alpha, b_2^\alpha-a_2^\alpha]$ ดังนั้นผลเฉลยที่เป็นตัวเลขฟัซซีของสมการนี้ คือ $\tilde{X}$ จะสามารถคำนวณได้โดยการแก้สมการย่อยนี้สำหรับทุกๆ ค่า α-cut นั่นเอง

3.3 ตรรกแบบฟัซซีและระบบการวินิจฉัยแบบฟัซซี (Fuzzy Logic and Fuzzy Inference System)

ตรรกแบบฟัซซีเป็นแนวคิดที่ได้จากการขยายหลักการของทฤษฎีตรรกแบบดั้งเดิม (Two-valued logic) ออกไป [2-4] เช่นเดียวกับกรณีของฟัซซีเซตซึ่งเป็นแนวคิดที่ได้จากการขยายหลักการหรือนิยามของเซตดั้งเดิมออกไป ตรรกแบบฟัซซีสามารถถูกใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างระบบที่มีคุณสมบัติที่สามารถเชื่อมโยงค่าจากกลุ่มอินพุทหนึ่งไปยังกลุ่มของค่าเอาท์พุทหนึ่งได้ ซึ่งเรียกว่า "ระบบฟัซซี หรือ ระบบการวินิจฉัยแบบฟัซซี (Fuzzy Inference System: FIS)" การใช้ตรรกแบบฟัซซีในกรณีนี้จะเป็นวิธีที่ง่าย รวดเร็ว และสะดวกกว่าการใช้วิธีอื่น ยกตัวอย่างเช่น นิวรอลเน็ตเวอร์ค (Neural network) เป็นต้น

รูปที่ 3.10 การเชื่อมโยงจากกลุ่มของค่าอินพุทไปยังกลุ่มของค่าเอาท์พุทโดยระบบ FIS

คุณสมบัติของตรรกแบบฟัซซีสามารถสรุปได้ดังนี้ [4]

1. หลักการของตรรกแบบฟัซซีง่ายต่อการทำความเข้าใจ และอยู่บนพื้นฐานที่ไม่ยุ่งยาก
2. มีความยืดหยุ่นในการนำไปประยุกต์ใช้กับงานหลายประเภท
3. ตรรกแบบฟัซซีสามารถจำลองฟังก์ชันที่ไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนได้ในรูปของระบบฟัซซี(Fuzzy system) โดยมีความสะดวก ง่ายต่อการใช้งาน และมีประสิทธิภาพ
4. สามารถนำไปใช้ในงานเกี่ยวกับ "การตัดสินใจ" ที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอนของข้อมูลได้ดี
5. พื้นฐานของตรรกแบบฟัซซีเป็นพื้นฐานเดียวกันกับสิ่งที่มนุษย์คุ้นเคย คือการกำหนดตัวแปรที่ใช้ในตรรกแบบฟัซซีจะอยู่ในรูป "ตัวแปรเชิงภาษา(Linguistic variable)"

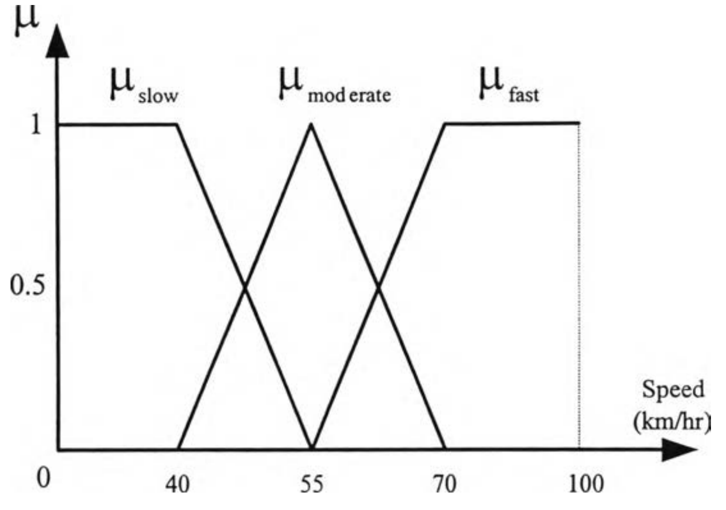
ตัวแปรเชิงภาษาเป็นองค์ประกอบสำคัญของตรรกะฟัซซี ตัวแปรเชิงภาษาคือ การกำหนดนิยามของตัวแปรที่อ้างอิงเชิงภาษา ที่มีค่าเป็นคำหรือประโยคซึ่งสอดคล้องกับความรู้สึกหรือความเข้าใจของคนทั่วไปตามความหมายของตัวภาษานั้น เช่น การอธิบายถึงความเร็ว(Speed) โดยคำว่า "เร็ว(Fast)" "ปานกลาง(Moderate)" และ "ช้า(Slow)" ในที่นี้คำว่า "เร็ว" "ปานกลาง" และ "ช้า" ที่ใช้อธิบายถึงความเร็วก็คือ ค่าของตัวแปรเชิงภาษา "ความเร็ว" นั่นเอง

รูปที่ 3.11 เป็นตัวอย่างของการกำหนดค่าของตัวแปรเชิงภาษา "ความเร็ว" โดยใช้นิยามของทฤษฎีฟัซซีเซต ตามรูปที่ 3.11 "ความเร็ว" เป็นตัวแปรเชิงภาษาโดยมีเอกภพสัมพัทธ์ U = [0 , 100] โดย

"ช้า" เป็นฟัซซีเซตสำหรับความเร็วที่ต่ำกว่า 40 กม./ชม. ด้วยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_{slow}

"ปานกลาง"เป็นฟัซซีเซตสำหรับความเร็วประมาณ 55 กม./ชม. ด้วยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{moderate}$ และ

"เร็ว" เป็นฟัซซีเซตสำหรับความเร็วที่สูงกว่า 70 กม./ชม. ด้วยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_{fast} ตามลำดับ



รูปที่ 3.11 ตัวอย่างของการกำหนดค่าของตัวแปรเชิงภาษา "ความเร็ว"

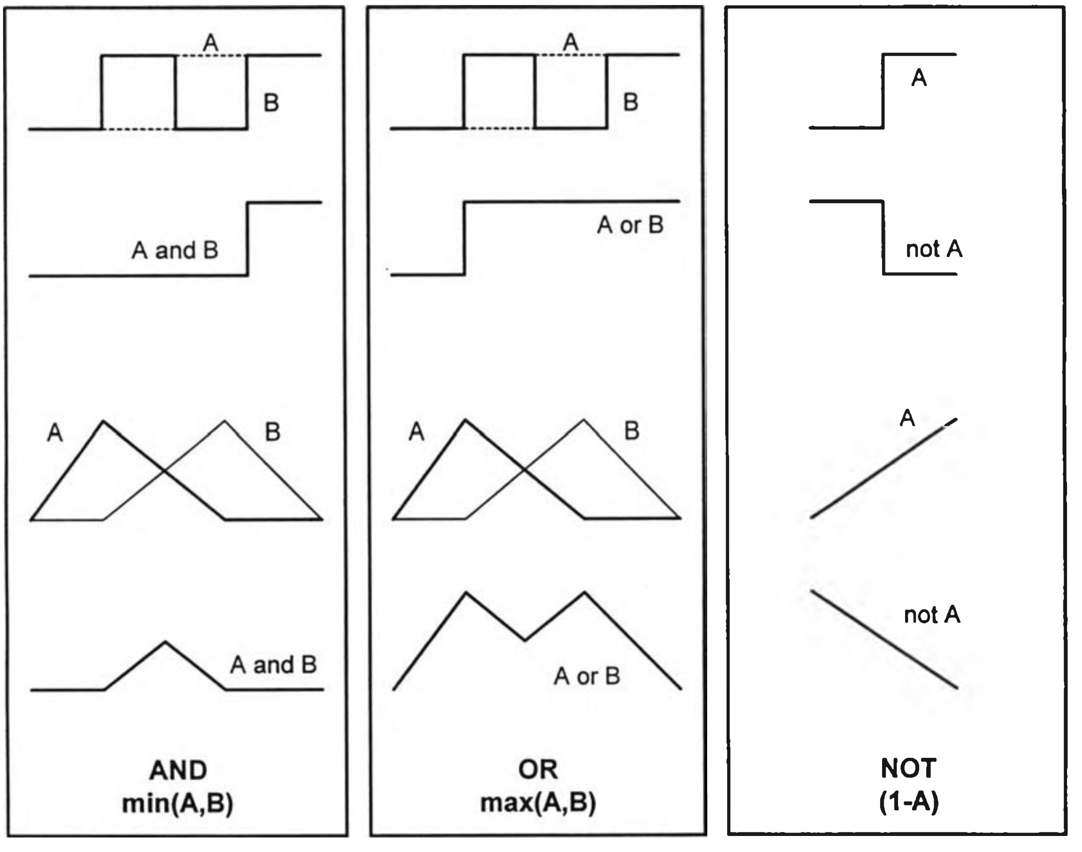
3.3.1 ตัวดำเนินการเชิงตรรก (Logical operations)

ตรรกแบบฟัซซีเป็นหลักการที่ครอบคลุมทฤษฎีตรรกแบบดั้งเดิม(Boolean logic) หลักการของตรรกะฟัซซีจะขยายค่าของตรรกเดิมที่มีแค่ 1 (ถูก) และ 0 (ผิด) ไปเป็นช่วงของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 1 คือ [0 , 1] ตัวดำเนินการพื้นฐานเชิงตรรก ได้แก่ AND, OR และ NOT ระหว่างเซต A และ B คือ (A AND B) , (A OR B) และ (NOT A) จะเปลี่ยนเป็น ฟังก์ชัน MIN , MAX และ (1-A) ตามลำดับ ดังแสดงได้โดยการเปรียบเทียบตารางความจริง (Truth Table) ในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบตารางความจริงของตัวดำเนินการเชิงตรรกพื้นฐานแบบดั้งเดิม กับตัวดำเนินการเชิงตรรกพื้นฐานแบบฟัซซี

A	B	AND		OR		NOT	
		A and B	Min(A , B)	A or B	Max(A , B)	not A	(1-A)
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

จากตารางที่ 3.2 จะเห็นว่า ตัวดำเนินการเชิงตรรกแบบฟัซซีนั้น สามารถนำไปใช้กับเซตแบบดั้งเดิมได้ เพราะให้ผลลัพธ์เหมือนกับกรณีที่ได้จากการใช้ตัวดำเนินการแบบดั้งเดิม รูปที่ 3.12 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างตัวดำเนินการเชิงตรรกทั้ง 2 ประเภทในรูปของแผนภาพซึ่งแสดงให้เห็นชัดถึงหลักการของตรรกแบบฟัซซีที่กำหนดให้ค่าของตรรกมีค่าเป็นช่วงของเลขจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 1



รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบระหว่างตัวดำเนินการเชิงตรรกแบบฟัซซีและแบบดั้งเดิม

3.3.2 ระบบวินิจฉัยแบบฟัซซี (Fuzzy Inference System: FIS)

ระบบการวินิจฉัยแบบฟัซซีเป็นกระบวนการในการเชื่อมโยงค่าจาก ค่าอินพุทที่กำหนดค่าหนึ่งไปยังค่าเอาท์พุทค่าหนึ่งโดยการใช้ตรรกแบบฟัซซีในการพิจารณา [3,4] ระบบ FIS ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในด้านของการควบคุมอัตโนมัติ การแบ่งกลุ่มข้อมูล(Data classification) การวิเคราะห์การตัดสินใจ(Decision analysis) เป็นต้น นอกจากนี้ ระบบ FIS อาจจะถูกเรียกเป็นชื่ออื่นได้ขึ้นอยู่กับงานที่นำไปใช้ เช่น ระบบ Fuzzy-rule-based ระบบผู้เชี่ยวชาญเชิงฟัซซี(Fuzzy expert system) เป็นต้น ระบบ FIS สามารถมีอินพุทได้หลายอินพุท และมีเอาท์พุทได้หลายเอาท์พุทขึ้นกับจุดประสงค์ในการใช้งาน แต่โดยทั่วไปจะกำหนดให้มีเอาท์พุทเพียงเอาท์พุทเดียว

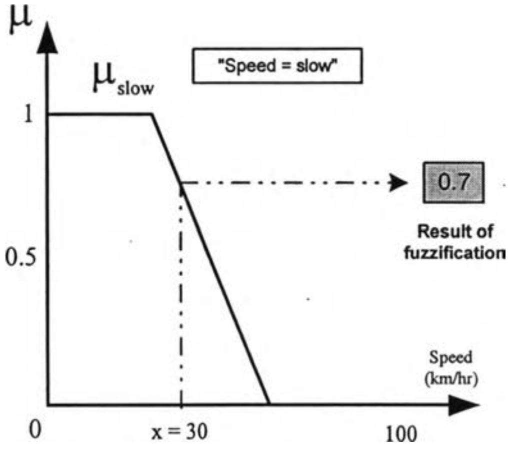
กระบวนการของระบบ FIS แบ่งออกได้เป็น 5 ส่วน ได้แก่ [3,4]

1. การทำ Fuzzification กับตัวแปรอินพุท
2. การดำเนินการเชิงตรรกะฟัซซี(AND, OR ,NOT) ตามกฎ "If-then" ที่กำหนดไว้
3. การเชื่อมโยงจากส่วนของ "เหตุ" ไปยังส่วนของ "ผล" ของแต่ละกฎ
4. การรวม(Aggregation) ผลลัพธ์ที่ได้จากทุกๆกฎเข้าด้วยกัน
5. การทำ Defuzzification เพื่อหาผลลัพธ์สุดท้าย

ดังรายละเอียดที่จะได้กล่าวต่อไปดังนี้

ส่วนที่ 1. การทำ Fuzzification กับตัวแปรอินพุท

ค่าอินพุทแต่ละค่าจะถูกพิจารณาว่าจะมีระดับดีกรีเท่าใดที่จะสอดคล้องและเหมาะสมที่จะอยู่ในเซตของตัวแปรเชิงภาษาที่กำหนดขึ้น โดยการพิจารณาฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตที่แสดงถึงค่าของตัวแปรเชิงภาษานั้น ลักษณะของค่าอินพุทจะเป็นตัวเลขธรรมดาโดยมีค่าอยู่ในขอบเขตจำกัดที่กำหนดไว้ ค่าเอาท์พุทที่ได้จากขั้นตอนนี้ คือระดับความเป็นสมาชิกที่ค่าอินพุทควรจะอยู่ในเซตที่กำลังพิจารณานั้นซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 1



รูปที่ 3.13 การทำ Fuzzification กับตัวแปรอินพุท

รูปที่ 3.13 เป็นตัวอย่างการพิจารณาค่าอินพุทค่าหนึ่งที่จะอยู่ในเซตของคำว่า "ช้า" ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรเชิงภาษา "ความเร็ว" โดยมีขอบเขตที่พิจารณาหรือเอกภพสัมพัทธ์คือ U = [0 , 100] จากตัวอย่าง ความเร็วที่มีค่าเท่ากับ 30 กม./ชม. มีค่าความเป็นสมาชิกในเซตของคำว่า "ช้า" เท่ากับ 0.7

ส่วนที่ 2. การดำเนินการเชิงตรรกะฟัซซี(AND, OR ,NOT) ตามกฎ "If-then" ที่กำหนดไว้

เพื่อที่จะนำไปสู่การได้ผลลัพธ์สุดท้าย ตัวแปรอินพุทกับตัวแปรเอาท์พุทจะถูกเชื่อมโยงกัน โดยอาศัยกฎที่กำหนดขึ้นมาตามที่ต้องการ เรียกว่า "กฎ If-then" ซึ่งจะเขียนอยู่ในรูปของประโยค

"If x is A then y is B" หรือ "ถ้า x เท่ากับ A แล้ว y เท่ากับ B"

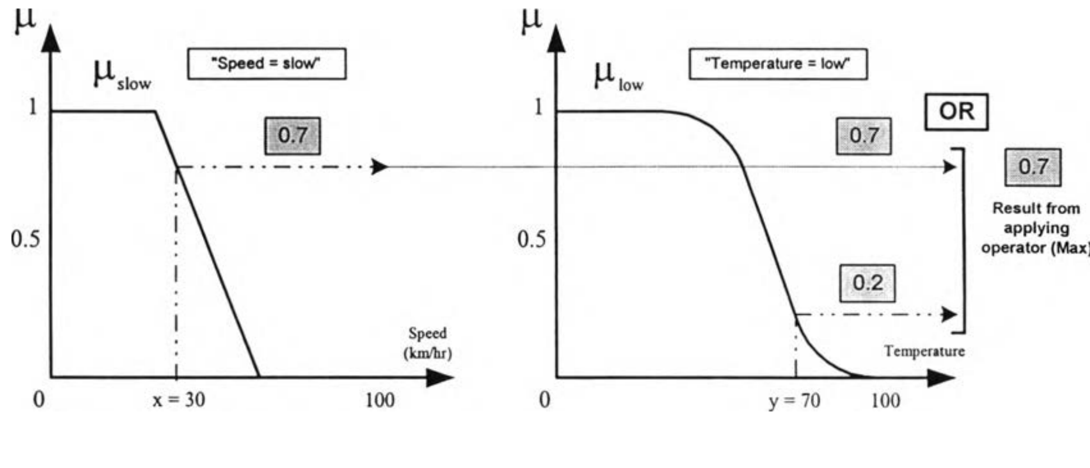
โดย A และ B คือค่าเชิงภาษา(Linguistic value) ซึ่งเป็นฟัซซีเซตที่มีขอบเขตอยู่บนช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปรอินพุท x และตัวแปรเอาท์พุท y ตามลำดับ ส่วนแรกของกฎ " x เท่ากับ A" จะถูกเรียกว่า "เหตุ(Antecedent)" ส่วนหลังของกฎ " y เท่ากับ B" จะถูกเรียกว่า "ผล(Consequent)" ยกตัวอย่างเช่น

ถ้า " ความเร็วเครื่องยนต์ = ช้า " แล้ว "อัตราการจ่ายน้ำมัน = ต่ำ"

ในกรณีที่ส่วนของเหตุประกอบด้วยตัวแปรอินพุทหลายตัว ตัวแปรอินพุทเหล่านั้นจะถูกเชื่อมโยงด้วยตรรก AND หรือ OR และจะถูกดำเนินการตามตรรกแบบฟัซซี Min และ Max สอดคล้องกับกฎที่เขียนไว้ รูปที่ 3.14 แสดงการประมวลผลในส่วนที่ 2 นี้ ตามกฎที่ว่า

ถ้า " ความเร็วเครื่องยนต์ = ช้า " หรือ " อุณหภูมิเครื่องยนต์ = ต่ำ" แล้ว "อัตราการจ่ายน้ำมัน = ต่ำ"

จะเห็นว่ากฎนี้ตัวแปรอินพุท 2 ตัวคือ ความเร็ว และอุณหภูมิ ถูกเชื่อมด้วยคำว่า "หรือ" ซึ่งก็คือการใช้ฟังก์ชัน Max กับอินพุท 2 ตัวนี้ ในกรณีนี้ ตัวแปรอินพุทที่ 2 "อุณหภูมิ" มีเอกภพสัมพัทธ์ U = [0 , 100]

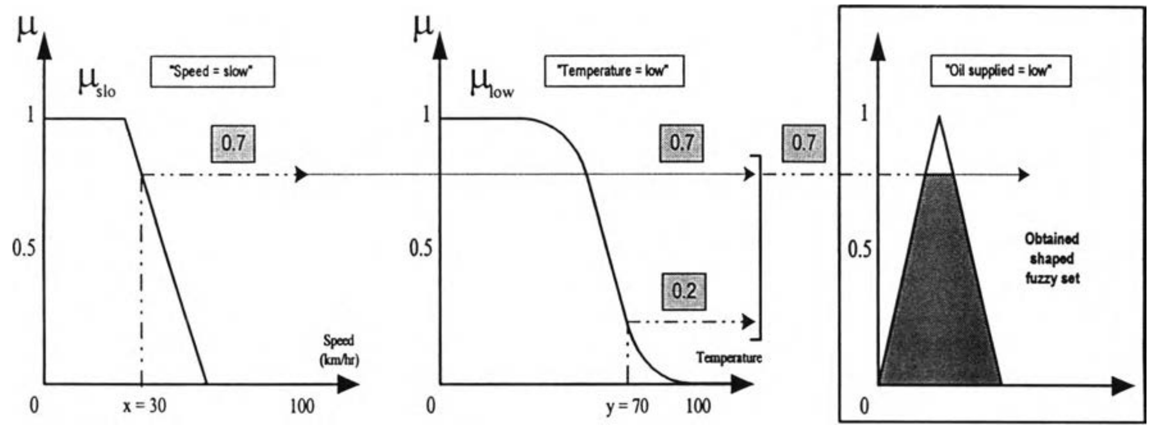


รูปที่ 3.14 การดำเนินการทางตรรกแบบฟัซซีตามกฎ "If-then" ที่กำหนดไว้

ในรูปที่ 3.14 จากการทำ Fuzzification กับตัวแปรอินพุท(ขั้นที่ 1) ค่าความเป็นสมาชิกสำหรับค่าอินพุทจากทั้งสองตัวแปรมีค่าเท่ากับ 0.7 และ 0.2 ตามลำดับ โดยที่ค่าอุณหภูมิเท่ากับ 70 องศา มีค่าความเป็นสมาชิกสำหรับตัวแปร "อุณหภูมิ = ต่ำ" เท่ากับ 0.2 เมื่อเราพิจารณาค่าที่ได้ คือ 0.7 และ 0.2 โดยใช้ฟังก์ชัน Max ก็จะได้ผลลัพธ์จากขั้นตอนที่ 2 นี้ ซึ่งจากตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 0.7

ส่วนที่ 3. การเชื่อมโยงจากส่วนของ "เหตุ" ไปยังส่วนของ "ผล" ของแต่ละกฎ

ผลลัพธ์ที่ได้จากส่วนนี้จะเป็นส่วนของ "ผล" ที่เชื่อมโยงจากส่วนของ "เหตุ" ตามกฎแต่ละข้อที่กำหนดขึ้น ดังแสดงได้ตามรูปที่ 3.15

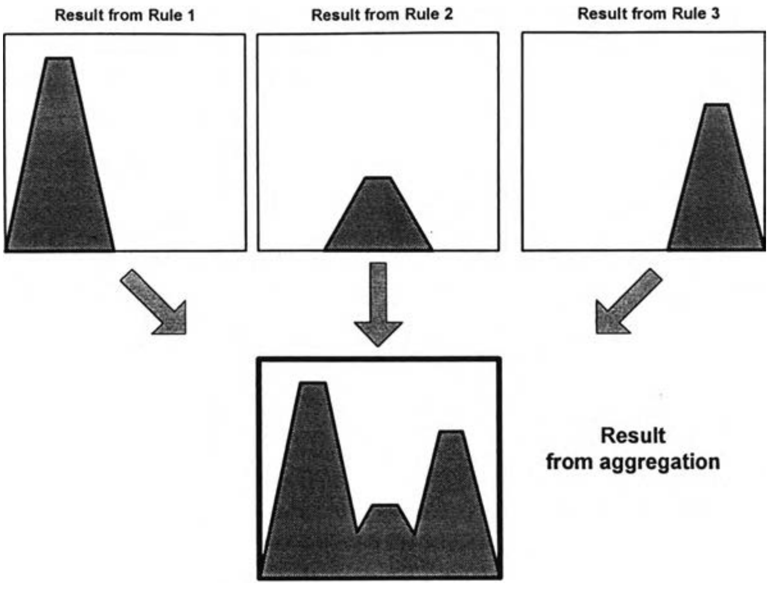


รูปที่ 3.15 การเชื่อมโยงจากส่วนของ "เหตุ" ไปยังส่วนของ "ผล" ตามกฎที่กำหนดขึ้น

จากรูปที่ 3.15 จะเห็นว่าผลที่ได้จะอยู่ในรูปของฟัซซีเซตที่เป็นส่วนที่ได้หลังจากการใช้ตัวดำเนินการ AND กับค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ซึ่งเป็นตัวเลขปกติ (ในตัวอย่างนี้คือ 0.7) และฟัซซีเซตของตัวแปรเอาท์พุท "การจ่ายน้ำมัน = ต่ำ" ผลลัพธ์จากขั้นตอนที่ 3 นี้ได้แก่ ฟัซซีเซตที่ถูกตัดยอด ณ ค่าความเป็นสมาชิกตั้งแต่ 0.7 ขึ้นไป(ส่วนที่แรเงา) อาจกล่าวได้ว่าขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่ทำให้ได้ "ผล" ตามกฎที่ระบุไว้ในรูปของฟัซซีเซตที่มีรูปร่างขึ้นอยู่กับค่าของ "เหตุ" จากขั้นตอนที่ 2 ที่เป็นตัวเลขปกติ

ส่วนที่ 4. การรวม(Aggregation) ผลลัพธ์ที่ได้จากทุกๆกฎเข้าด้วยกัน

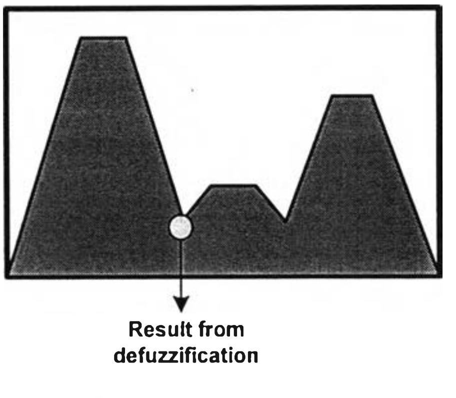
ในขั้นตอนที่ 4 นี้ ผลลัพธ์ในรูปของฟัซซีเซตจากขั้นตอนที่ 3 ของแต่ละกฎที่กำหนดขึ้นจะถูกรวมเข้าด้วยกันกลายเป็นฟัซซีเซตเพียงเซตเดียว โดยการใช้ตัวดำเนินการ Max กับผลลัพธ์ของแต่ละกฎเหล่านั้น ดังแสดงเป็นตัวอย่างได้ในรูปที่ 3.16 จากรูปที่ 3.16 ระบบ FIS มีกฎทั้งหมด 3 กฎ



รูปที่ 3.16 การรวม(Aggregation) ผลลัพธ์ที่ได้จากทุกๆกฎเข้าด้วยกัน

ส่วนที่ 5. การทำ Defuzzification เพื่อหาผลลัพธ์สุดท้าย

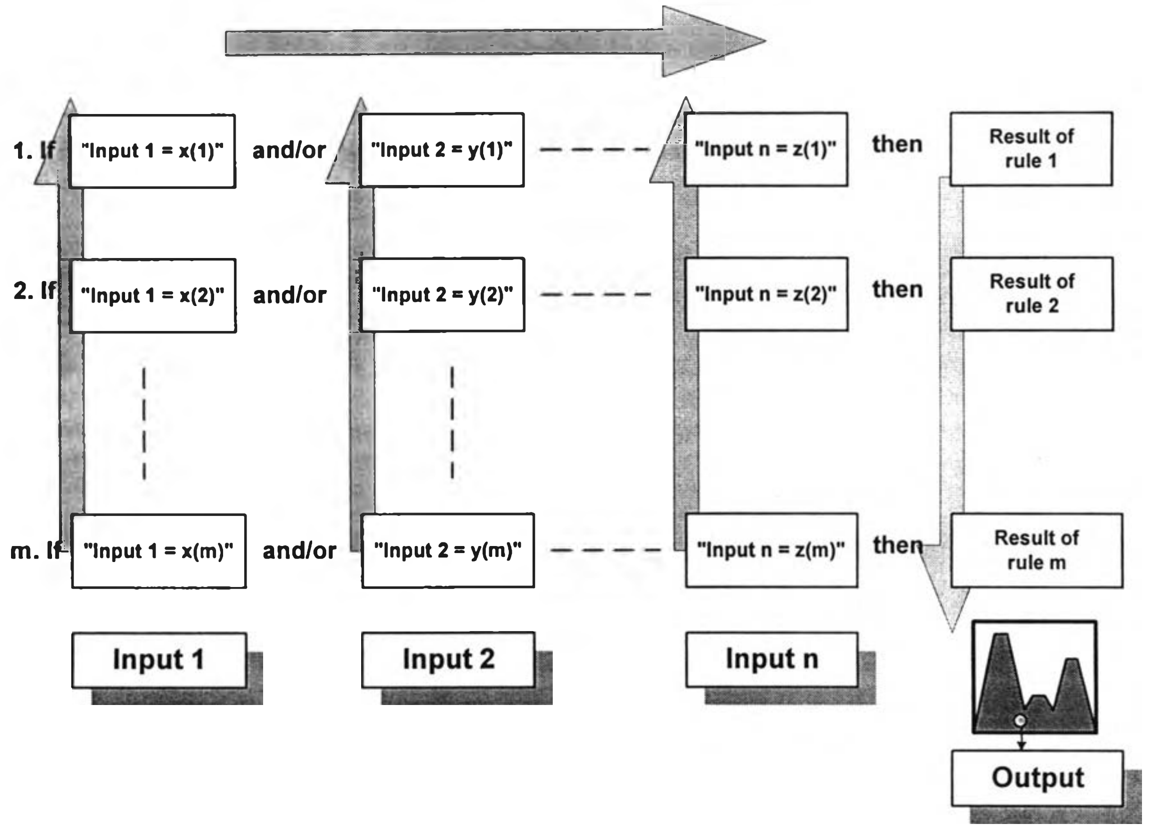
ในขั้นตอนที่ 5 ซึ่งเป็นขั้นตอนสุดท้าย ฟัซซีเซตซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 จะถูกทำกลับให้เป็นตัวเลขธรรมดาที่มีค่าๆหนึ่ง เรียกว่า การ Defuzzification วิธีการ Defuzzificztion มีหลายวิธี แต่วิธีที่นิยมมากที่สุดคือ การคำนวณจุดศูนย์กลางพื้นที่ของรูป(Centroid) ดังแสดงในรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 การทำ Defuzzification

ในรูปที่ 3.17 จุดที่แสดงคือจุดศูนย์กลางพื้นที่ของรูป ผลลัพธ์ที่ได้ในกรณีตัวอย่างนี้ก็คือ อัตราการจ่ายน้ำมันซึ่งเป็นตัวเลขปกติ(Crisp number) ผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนนี้จะเป็นผลลัพธ์สุดท้าย และเป็นค่าเอาท์พุทของระบบ FIS เมื่อมีค่าอินพุทเข้ามาค่าหนึ่ง

โดยสรุปจากที่ได้อธิบายข้างต้น ระบบ FIS จะมีภาพรวมดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 กระบวนการคำนวณของระบบ FIS ที่มี m กฎ n อินพุท และ 1 เอาท์พุท

จากรูปที่ 3.18 กระบวนการจะเริ่มต้นจากการพิจารณาค่าของตัวแปรอินพุทแต่ละตัว และผ่านไปตามแถวแต่ละแถว ซึ่งก็คือ กฎแต่ละกฎ และผ่านลงมาตามเอาท์พุทที่ได้จากกฎแต่ละกฎจนถึงทางด้านขวาล่างซึ่งก็คือ ผลลัพธ์สุดท้ายและเป็นจุดสิ้นสุดของกระบวนการ