บทที่ 4

การพัฒนาสมการเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา

หากไม่คำนึงถึงการสูญเสียพลังงาน (Energy Loss) ค่าพลังงานจำเพาะของการไหลในทางน้ำที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและมีตะแกรงผันน้ำอยู่ที่ท้องน้ำจะถูกสมมติให้มีค่าคงที่ สมมติฐานนี้ใช้ได้กับตะแกรงผันน้ำที่มีความยาวไม่มากจนเกินไปนัก จากสมการ (2-5) ซึ่งแสดงถึงพลังงานจำเพาะของการไหล ณ จุดใดๆในทางน้ำ

$$E = y + \frac{V^2}{2g}$$

เมื่อ	E	=	พลังงานจำเพาะของการไหล
	y	=	ความลึกการไหล
	V	=	ความเร็วเฉลี่ยของการไหล
	g	=	ค่าคงที่เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ถ้ากำหนดให้

A	=	พื้นที่หน้าตัดทั้งหมดของทางน้ำ
a	=	พื้นที่หน้าตัดของการไหลในทางน้ำ
Q	=	อัตราการไหลในทางน้ำที่หน้าตัดนั้นๆ

ดังนั้นจากสมการ (2-5) จะได้

$$E = y + \frac{Q^2}{2ga^2} \qquad (4-1)$$

หรือ

$$Q = a\sqrt{2g(E-y)} \qquad (4-2)$$

จากสมการ (2-22) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$-\frac{dQ}{ds} = \varepsilon cb\sqrt{2gE} \qquad (4\text{-}3)$$

โดยที่ s คือระยะทางที่วัดตามแนวตะแกรงผันน้ำในทิศทางเดียวกับการไหลในทางน้ำ

การเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของตะแกรงผันน้ำในทางน้ำ อันเนื่องมาจากมีการผันน้ำออกโดยใช้ตะแกรงผันน้ำที่วางอยู่ที่ท้องน้ำ สามารถหาได้จากอนุพันธ์ย่อยของสมการ (4-2) เทียบกับ s แล้วแทนค่าที่ได้ลงในสมการ (4-3) จะได้

$$\frac{d}{ds}\left[a\sqrt{2g(E-y)}\right] = -\varepsilon\, cb\sqrt{2gE} \qquad (4\text{-}4)$$

กำหนดให้

$$B = \sqrt{2g(E-y)}. \qquad (4-5)$$

สมการ (4-4) อาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

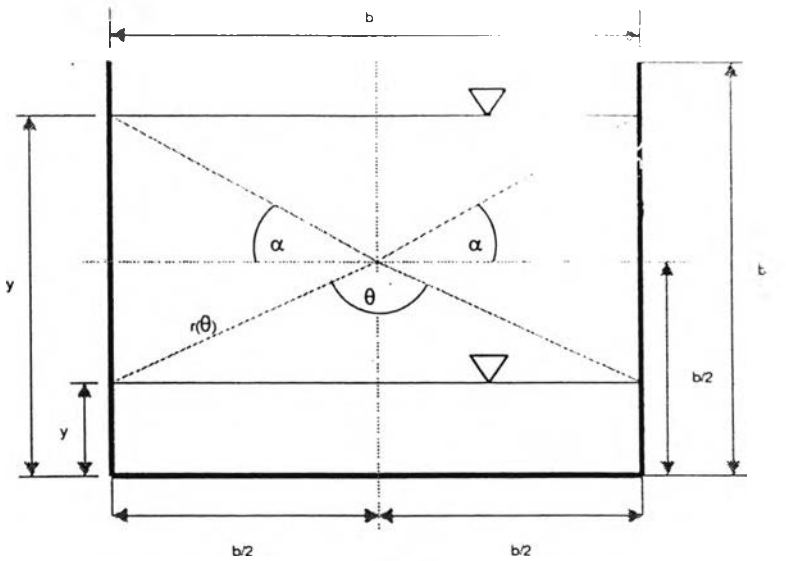
$$\frac{da}{ds}\sqrt{2g(E-y)} + a\frac{dB}{ds} = -\varepsilon\, cb\sqrt{2gE} \qquad (4\text{-}6)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (4-5) เทียบกับ s จะได้

$$\frac{dB}{ds} = -\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{E-y}}\frac{dy}{ds} \qquad (4\text{-}7)$$

แทนค่าสมการ (4-7) ลงในสมการ (4-6) จะได้

$$\frac{da}{ds}\sqrt{2g(E-y)} - \frac{a\sqrt{2g}}{2\sqrt{E-y}}\frac{dy}{ds} = -\varepsilon\, cb\sqrt{2gE} \qquad (4\text{-}8)$$



รูป 4-1 หน้าตัดของทางน้ำรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จากรูป 4-1

เมื่อ y น้อยกว่า b/2 จะได้

$$a = by$$

$$y = \frac{b}{2} - r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a = b\left(\frac{b}{2} - r\cos\frac{\theta}{2}\right) \qquad (4\text{-}9)$$

$$\because \quad r\sin\frac{\theta}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \quad r = \frac{b}{2\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (4\text{-}10)$$

แทนค่า r จากสมการ (4-10) ลงในสมการ (4-9) จะได้

$$a = b\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2\sin\theta/2}\cos\theta/2\right)$$

$$a = \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right) \tag{4-11}$$

$$A = b^2 \tag{4-12}$$

จาก

$$y = \frac{b}{2}-r\cos\theta/2$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$y = \frac{b}{2}\left(1-\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right) \tag{4-13}$$

หรือ

$$y = \frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{\tan\theta/2}\right) \tag{4-14}$$

$$\frac{2y}{b} = 1-\frac{1}{\tan\theta/2}$$

$$\frac{1}{\tan\theta/2} = 1-\frac{2y}{b} = \frac{b-2y}{b}$$

$$\tan\theta/2 = \frac{b}{b-2y}$$

$$\therefore \quad \theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{b-2y}\right) \tag{4-15}$$

เมื่อ y มากกว่าหรือเท่ากับ b/2 จะได้

$$a = by$$

$$a = \frac{b^2}{2}+b\left(y-\frac{b}{2}\right) \tag{4-16}$$

$$\tan\alpha = \frac{y-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2y-b}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{2y}{b}-1$$

$$\tan\alpha = 2\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1} 2\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right) \qquad (4\text{-}17)$$

$$y = \frac{b}{2}(1+\tan\alpha) \qquad (4\text{-}18)$$

$$\theta = \pi + 2\alpha$$

$$\theta = \pi + 2\tan^{-1} 2\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right) \qquad (4\text{-}19)$$

สมการ (4-8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปไร้มิติโดยการใช้ตัวแปรมิติ (Dimension parameters) ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$\frac{y}{b} = t \; ; \; \frac{E}{b} = K \; ; \; \frac{s}{b} = x \qquad (4-20)$$

หารพื้นที่หน้าตัดการไหล,a ด้วยพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดของทางน้ำ,A จะได้

$$\frac{a}{A} = f\left(\frac{y}{b}\right) = f(t) \qquad (4\text{-}21)$$

$$a = A\,f(t) \qquad (4\text{-}22)$$

$$da = A\,f'(t)dt \qquad (4\text{-}23)$$

สมการ (4-13) สามารถเขียนใหม่ในกรณีที่ค่า t มีค่าน้อยกว่า 0.5 ได้ดังนี้คือ

$$t = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right) \qquad (4\text{-}24)$$

หรือ

$$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$dt = \frac{1}{4\sin^2(\theta/2)}d\theta \qquad (4-25)$$

จากสมการ (4-11),(4-12) และ (4-21) จะได้

$$f(t) = \frac{a}{A} = \frac{\frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)}{b^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \qquad (4-26)$$

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{df(t)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \qquad (4-27)$$

$$\frac{df(t)}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\left(-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$\frac{df(t)}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\frac{df(t)}{d\theta} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) \tag{4-28}$$

จากสมการ (4-27) และ (4-28) จะได้

$$f'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\frac{d\theta}{dt} \tag{4-29}$$

สมการ (4-18) อาจเขียนใหม่ในกรณีที่ค่า t มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0.5 ได้ดังนี้ คือ

$$t = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}(1+\tan\alpha) \tag{4-30}$$

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\alpha\ d\alpha \tag{4-31}$$

จากสมการ (4-16) และ (4-21) จะได้

$$f(t) = \frac{a}{A} = \frac{\frac{b^2}{2} + b\left(y - \frac{b}{2}\right)}{b^2}$$

$$f(t) = \frac{(b^2/2)}{b^2} + \frac{b}{b^2}\left(y - \frac{b}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}\left(y-\frac{b}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}+\frac{2}{2}\frac{1}{b}\left(y-\frac{b}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{b/2}\left(y-\frac{b}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{2}-y}{\frac{b}{2}}\right) \qquad (4-32)$$

จากรูป 4-1 จะได้ว่า

$$\frac{\frac{b}{2}-y}{\frac{b}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \qquad (4-33)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการ (4-33) มีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (4-26) และจากสมการ (4-27) และ (4-33) จะได้ว่า

$$\frac{df(t)}{d\theta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\frac{df(t)}{d\theta} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{d\theta}{dt} \qquad (4-34)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการ (4-34) มีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (4-29) แทนค่าสมการ (4-22) และ (4-23) ลงในสมการ (4-8) จะได้

$$\frac{b^2}{ds} f'(t)dt\sqrt{2g(E-y)} - b^2 f(t)\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{E-y}}\frac{dy}{ds} = -\varepsilon\, cb\sqrt{2gE} \qquad (4-35)$$

จากตัวแปรไร้มิติที่กล่าวไว้ในข้างต้น

$$\frac{s}{b} = x \rightarrow s = b\,x \rightarrow ds = b\,dx$$

$$\frac{y}{b} = t \rightarrow y = b\,t \rightarrow dy = b\,dt$$

$$\frac{E}{b} = K \rightarrow E = b\,K$$

แทนค่าตัวแปรไร้มิติเหล่านี้ลงในสมการ (4-35) จะได้

$$\frac{b^2}{b\,dx} f'(t)\,dt\sqrt{2gb\,(K-t)} - b^2 f(t)\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{b(K-t)}}\frac{b\,dt}{b\,dx} = -\varepsilon.cb\sqrt{2gbK}$$

$$-b\,f'(t)\sqrt{2gb}\sqrt{K-t}\frac{dt}{dx} + \frac{b^2 f(t)\sqrt{2g}}{2\sqrt{b\,(K-t)}}\frac{dt}{dx} = \varepsilon.cb\sqrt{2gb}\sqrt{K}$$

$$\frac{dt}{dx}\left[\frac{b^{1.5} f(t)\sqrt{2gb}}{2\sqrt{K-t}\sqrt{b}} - b\,f'(t)\sqrt{2gb}\sqrt{K-t}\right] = \varepsilon.cb\sqrt{2gb}\sqrt{K}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\varepsilon.cb\sqrt{K}}{\frac{b\,f(t)}{2\sqrt{K-t}} - b\,f'(t)\sqrt{K-t}}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\varepsilon.cb\sqrt{K}}{b\sqrt{K-t}\,f'(t) - \frac{b\,f(t)}{2\sqrt{K-t}}} \qquad (4-36)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{-\frac{b\,f(t)}{2\sqrt{K-t}} + b\,f'(t)\sqrt{K-t}}{\varepsilon.cb\sqrt{K}}$$

$$dx = -\frac{b}{\varepsilon.cb}\left[\frac{-\frac{f(t)}{2\sqrt{K-t}} + f'(t)\sqrt{K-t}}{\sqrt{K}}\right]dt$$

$$dx = -\frac{1}{\varepsilon.c}\left[\frac{f'(t)\sqrt{K-t} - \frac{f(t)}{2\sqrt{K-t}}}{\sqrt{K}}\right]dt \qquad (4-37)$$

กำหนดให้

$$F(t) = \frac{f'(t)\sqrt{K-t} - \frac{f(t)}{2\sqrt{K-t}}}{\sqrt{K}} \qquad (4-38)$$

$$\therefore \quad dx = -\frac{1}{\varepsilon.c}F(t)dt \qquad (4-39)$$

สมการ (4-39) สามารถทำให้ดูง่ายขึ้นโดยใช้ความสัมพันธ์

$$dx = \frac{ds}{b}$$

แทนค่า dx ลงในสมการ (4-39) จะได้

$$\frac{ds}{b} = -\frac{1}{\varepsilon.c}F(t)dt \qquad (4-40)$$

$$ds = -\frac{b}{\varepsilon.c}F(t)dt \qquad (4-41)$$

อินทิเกรดสมการ (4-41)

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = -\frac{b}{\varepsilon.c}\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \qquad (4-42)$$

$$s_2 - s_1 = \frac{b}{\varepsilon.c}\left|-\phi(t)\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{b}{\varepsilon.c}\left|\psi(t)\right|_{t_1}^{t_2} \qquad (4-43)$$

หรือ

$$L_x = \frac{b}{\varepsilon.c}\left|\psi(t)\right|_{t_1}^{t_2} \qquad (4-44)$$

เมื่อ L_x = ความยาวของตะแกรงผันน้ำที่ใช้ในการลดระดับน้ำจาก y_1 เป็น y_2

$\phi(t), \psi(t)$ = Integral areas

สำหรับสมการ (4-44) สามารถเขียนใหม่เพื่อให้สอดคล้องกับการศึกษาในครั้งนี้ และสามารถใช้ในการหาความยาวของตะแกรงผันน้ำที่อยู่ที่ท้องน้ำของทางน้ำเปิด เพื่อลดระดับความลึกการไหลจาก y_1 เป็น y_2 ได้ดังนี้ คือ

$$L_x = \frac{b}{\varepsilon.C_D}\left|\psi(t)\right|_{t_1}^{t_2} \qquad (4-45)$$