บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไป ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด วิธีสองโมเมนต์แรกและสัดส่วนศูนย์ วิธีไคกำลังสองต่ำสุด และวิธีระยะห่างต่ำสุด ซึ่งมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้

2.1 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการศึกษา

1. **วิธีการประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด** (Maximum Likelihood Method , ML)

ฟังก์ชันความควรจะเป็นสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไป คือ

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left[P(X_i = x_i)\right]$$

เนื่องจากค่าสังเกต $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีค่าเป็นไปได้ $0, 1, 2, \ldots, k$ ดังนั้นนับความถี่ได้ว่ามีค่าสังเกต x_i จำนวน n_0 ที่ต่างมีค่าเท่ากับ 0 จำนวน n_1 ที่ต่างมีค่าเท่ากับ 1 … จำนวน n_k ที่ต่างมีค่าเท่ากับ k และ $n = \sum_{x=0}^{k} n_x$ ซึ่ง n เป็นขนาดตัวอย่างและ k เป็นค่าสังเกตที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ x_i

ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันความควรจะเป็นในอีกรูปแบบหนึ่งได้เป็น

$$L = \prod_{x=0}^{k} \left[P(X = x)\right]^{n_x}$$

$$l(\theta, \beta, m) = \ln L$$

$$= \ln\left\{\prod_{x=0}^{k} \left[P(X = x)\right]^{n_x}\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\left\{\ln\left[\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\theta^{x}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right]^{n_x}\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\left\{\begin{matrix} n_x\ln(m)+n_x\ln(m+\beta x-1)!-n_x\ln(x!)+xn_x\ln(\theta) \\ -n_x\ln(m+\beta x-x)!+(m+\beta x-x)n_x\ln(1-\theta) \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} n\ln(m)-n_0\ln(m)+n\bar{x}\ln(\theta)+n(m+\beta\bar{x}-\bar{x})\ln(1-\theta) \\ +\sum_{x=2}^{k}n_x\sum_{i=1}^{x-1}\ln(m+\beta x-i)-\sum_{x=2}^{k}n_x\ln(x!) \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} (n-n_0)\ln(m)+n\bar{x}\ln(\theta)+n[m+(\beta-1)\bar{x}]\ln(1-\theta) \\ +\sum_{x=2}^{k}n_x\left[\sum_{i=1}^{x-1}\ln(m+\beta x-i)-\ln(x!)\right] \end{matrix}\right\} \quad (2.1)$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ θ,β และ m ทำได้โดยการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของลอกความควรจะเป็น (Loglikelihood) เทียบกับ θ,β และ m ตามลำดับ และให้สมการอนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

ซึ่งจะทำให้ได้สมการความควรจะเป็นสำหรับใช้หาตัวประมาณความควรจะเป็นดังนี้

$$g_1(\theta,\beta,m) = \frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = \frac{n[\bar{x}-\theta(m+\beta\bar{x})]}{\theta(1-\theta)} = 0 \quad (2.2)$$

$$g_2(\theta,\beta,m) = \frac{\partial\ln L}{\partial\beta} = n\bar{x}\ln(1-\theta)+\sum_{x=2}^{k}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{xn_x}{m+\beta x-i} = 0 \quad (2.3)$$

$$g_3(\theta,\beta,m) = \frac{\partial\ln L}{\partial m} = \frac{n-n_0}{m}+n\ln(1-\theta)+\sum_{x=2}^{k}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{n_x}{m+\beta x-i} = 0 \quad (2.4)$$

เนื่องจากการแก้สมการไม่สามารถแก้ได้โดยตรง จำเป็นต้องใช้วิธีการประมาณ ในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = \frac{n\left[\bar{x}(2\theta-1)-\theta^2(\beta\bar{x}+m)\right]}{\theta^2(1-\theta)^2} \qquad (2.5)$$

$$g_{12}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\theta} = \frac{-n\bar{x}}{(1-\theta)}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\beta} = g_{21}(\theta,\beta,m) \qquad (2.6)$$

$$g_{13}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m\partial\theta} = \frac{-n}{(1-\theta)}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial m} = g_{31}(\theta,\beta,m) \qquad (2.7)$$

$$g_{22}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2} = -\sum_{x=2}^{k}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{n_x x^2}{(m+\beta x-i)^2} \qquad (2.8)$$

$$g_{23}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m\partial\beta} = -\sum_{x=2}^{k}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{n_x x}{(m+\beta x-i)^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial m} = g_{32}(\theta,\beta,m) \qquad (2.9)$$

$$g_{33}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = \frac{n_0-n}{m^2}-\sum_{x=2}^{k}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{n_x}{(m+\beta x-i)^2} \qquad (2.10)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.2) ถึง (2.10) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ

$$\begin{bmatrix}\theta\\ \beta\\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \beta_0\\ m_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}g_{11}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{12}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{13}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{21}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{22}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{23}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{31}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{32}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{33}(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}g_1(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_2(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_3(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}$$

และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

2. **วิธีการประมาณแบบสองโมเมนต์แรกและสัดส่วนศูนย์** (Method of First Two Moments and Proportion of Zeros , MOZE)

หลักการของวิธีการนี้คือ จะใช้ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ตัวอย่างสองอันดับแรกของการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไป

ให้ P_0 เป็นความน่าจะเป็นของกลุ่มตัวอย่างที่มีค่าเท่ากับ 0 ในการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไปจะได้

$$P_0 = (1-\theta)^m$$

$$= \frac{n_0}{n} = f_0 \qquad (2.11)$$

โมเมนต์ตัวอย่างสองอันดับแรกของการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไป คือ

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{k} x n_x \qquad (2.12)$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{k} x^2 n_x \qquad (2.13)$$

เมื่อ k เป็นค่าสังเกตที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ x และ $n = \sum_{x=0}^{k} n_x$

โมเมนต์ของประชากรสองอันดับแรกของการแจกแจงทวินามลบแบบทั่วไป คือ

$$E(X) = \frac{m\theta}{(1-\beta\theta)} \qquad (2.14)$$

$$E(X^2) = \frac{(m\theta)^2}{(1-\beta\theta)^2} + \frac{m\theta(1-\theta)}{(1-\beta\theta)^3} \qquad (2.15)$$

จากสมการ (2.11) จะได้

$$(1-\theta)^m = f_0$$

$$m\ln(1-\theta) = \ln f_0$$

$$m^2\left[\ln(1-\theta)\right]^2 = (\ln f_0)^2 \tag{2.16}$$

จัดให้โมเมนต์ตัวอย่างสองอันดับแรกสอดคล้องกับโมเมนต์ของประชากรสองอันดับแรกจะได้สมการ

$$m_1 = \frac{m\theta}{(1-\beta\theta)} \tag{2.17}$$

$$m_2 = \frac{(m\theta)^2}{(1-\beta\theta)^2} + \frac{m\theta(1-\theta)}{(1-\beta\theta)^3} \tag{2.18}$$

จากสมการ (2.17) และ (2.18) จะได้

$$m^2 = \frac{(1-\theta)m_1^3}{\theta^2(m_2-m_1^2)} \tag{2.19}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.19) ลงใน (2.16) จะได้

$$f_1(\theta) = (m_2-m_1^2)(\ln f_0)^2 m_1^{-3}\theta^2 - (1-\theta)[\ln(1-\theta)]^2 = 0 \tag{2.20}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ทำได้โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันแก้สมการ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าพารามิเตอร์มีดังนี้

$$\bar{\theta} = \theta_0 - \frac{f_1(\theta_0)}{f_1'(\theta_0)} \tag{2.21}$$

เมื่อ $\bar{\theta}$ คือค่าประมาณพารามิเตอร์ θ ที่ต้องการ

θ_0 คือค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นซึ่งประมาณมาจากวิธีการประมาณแบบโมเมนต์

$f_1'(\theta_0)$ เป็นการหาอนุพันธ์บางส่วนของตัวสถิติ $f_1(\theta_0)$ เทียบกับ θ

โดยที่

$$f_1'(\theta_0) = 2(m_2-m_1^2)(\ln f_0)^2 m_1^{-3}\theta + 2\ln(1-\theta) + [\ln(1-\theta)]^2 \tag{2.22}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.11) ถึง (2.13) ลงใน (2.20) , (2.22) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.20) , (2.22) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นแทนลงในสมการ (2.21) แล้วใช้กระบวนการทำซ้ำ โดยในรอบที่สองและรอบถัดไป จะให้ θ_0 ในแต่ละรอบเป็นค่า $\bar{\theta}$ ในรอบที่ผ่านมา ทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ โดยกำหนดเกณฑ์การหยุดทำซ้ำดังนี้

$$|\theta - \theta_0| \;<\; 0.001$$

เมื่อค่าประมาณพารามิเตอร์ θ ในรอบนี้แตกต่างจากรอบที่ผ่านมาไม่เกิน 0.001 จะได้ว่า ค่า $\bar{\theta}$ คือค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

เมื่อได้ค่า $\bar{\theta}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณ MOZE ของ θ แล้ว ก็จะสามารถหาตัวประมาณ MOZE อื่น ๆ ได้ดังนี้

$$\bar{m} \;=\; \bar{\theta}^{-1}\left[(1-\bar{\theta})m_1^3\left(m_2 - m_1^2\right)^{-1}\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

และ
$$\bar{\beta} \;=\; \bar{\theta}^{-1} - \frac{\bar{m}}{m_1} \tag{2.24}$$

3. **วิธีการประมาณแบบไคกำลังสองต่ำสุด** (Method of Minimum Chi-Square , MC)

หลักการของวิธีการนี้คือ การหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ตัวสถิติไคกำลังสอง (Q) มีค่าต่ำสุด

$$\min Q \;=\; \sum_{x=0}^{k} \frac{[n_x - nP_x]^2}{nP_x} \tag{2.25}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ทำได้โดยหาอนุพันธ์บางส่วนของตัวสถิติไคกำลังสองเทียบกับ φ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} \;=\; \sum_{x=0}^{k}\left[n - \frac{n_x^{\,2}}{nP_x^{\,2}}\right]\frac{\partial P_x}{\partial \varphi_i} \qquad , \quad i = 1,2,3$$

โดยที่ φ เป็นเซตของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ ในการศึกษาครั้งนี้ $\varphi = (\theta, \beta, m)$

$$P_x = \frac{m}{m+\beta x}\binom{m+\beta x}{x}\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x} \tag{2.26}$$

หาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.25) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติเทียบกับพารามิเตอร์ θ , β และ m จะได้ดังนี้

$$g_1(\theta,\beta,m) = \frac{\partial Q}{\partial\theta} = \sum_{x=0}^{k}\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial P_x}{\partial\theta} = 0 \tag{2.27}$$

$$g_2(\theta,\beta,m) = \frac{\partial Q}{\partial\beta} = \sum_{x=0}^{k}\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial P_x}{\partial\beta} = 0 \tag{2.28}$$

$$g_3(\theta,\beta,m) = \frac{\partial Q}{\partial m} = \sum_{x=0}^{k}\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial P_x}{\partial m} = 0 \tag{2.29}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial P_x}{\partial\theta} = \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial\theta^x}{\partial\theta}+\theta^x\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}(x-m\theta-\beta\theta x)\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial\beta} = \frac{m\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{m\theta^x}{x!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}+\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\frac{\partial}{\partial\beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{xm\theta^x}{x!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\ln(1-\theta)+\sum_{i-1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial m} = \frac{\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{\theta^x}{x!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}+\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \frac{\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right) \quad (2.32)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.26) , (2.30) ถึง (2.32) ลงในสมการ (2.27) ถึง (2.29) จากนั้นแก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\theta^2}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\theta}\right)^2\right] \quad (2.33)$$

$$g_{12}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\beta\partial\theta} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\beta\partial\theta}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial\beta}\right)\right] \quad (2.34)$$

$$g_{13}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial m\partial\theta} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial m\partial\theta}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial m}\right)\right] \quad (2.35)$$

$$g_{21}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\theta\partial\beta} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\theta\partial\beta}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial\theta}\right)\right] \quad (2.36)$$

$$g_{22}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\beta^2} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\beta^2}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\beta}\right)^2\right] \quad (2.37)$$

$$g_{23}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial m\partial\beta} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial m\partial\beta}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial m}\right)\right] \quad (2.38)$$

$$g_{31}(\vartheta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\theta\partial m} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^2}{nP_x^2}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\theta\partial m}+\frac{2n_x^2}{nP_x^3}\left(\frac{\partial P_x}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial\theta}\right)\right] \quad (2.39)$$

$$g_{32}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial\beta\partial m} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^{\,2}}{nP_x^{\,2}}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial\beta\partial m}+\frac{2n_x^{\,2}}{nP_x^{\,3}}\left(\frac{\partial P_x}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial P_x}{\partial\beta}\right)\right] \quad (2.40)$$

$$g_{33}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 Q}{\partial m^2} = \sum_{x=0}^{k}\left[\left(n-\frac{n_x^{\,2}}{nP_x^{\,2}}\right)\frac{\partial^2 P_x}{\partial m^2}+\frac{2n_x^{\,2}}{nP_x^{\,3}}\left(\frac{\partial P_x}{\partial m}\right)^2\right] \quad (2.41)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial\theta^2} = \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(x-m\theta-\beta\theta x)\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\right)$$

$$= \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left(\begin{array}{l}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\\ +\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{array}\right)$$

$$= \frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\theta^{x-2}(1-\theta)^{m+\beta x-x-2}\left(\begin{array}{l}[x(x-1)]+[\theta x(2-\beta\theta)(1-\beta x)]\\ -[2m\theta x(1-\beta\theta)]-[m\theta^2(1-m)]\end{array}\right) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial\beta\partial\theta} = \frac{m\theta^{x-1}}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\right)$$

$$= \frac{m\theta^{x-1}}{x!}\left(\begin{array}{l}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial\beta}\dfrac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\\ +\dfrac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{array}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l}\dfrac{xm\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}}{x!}\displaystyle\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\\ \times\left(-\theta+(x-m\theta-\beta\theta x)\left[\ln(1-\theta)+\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\right)\end{array}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 P_x}{\partial\theta\partial\beta} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial m \partial \theta} = \frac{\theta^{x-1}}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\right)$$

$$= \frac{\theta^{x-1}}{x!}\left(\begin{array}{l}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial m}\dfrac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!} \\ +\dfrac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\dfrac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{array}\right)$$

$$= \frac{\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}(x-2m\theta-\beta\theta x) \\ +m(x-m\theta-\beta\theta x)\left[\begin{array}{l}\ln(1-\theta) \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\end{array}\right]\end{array}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 P_x}{\partial \theta \partial m} \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial \beta^2} = \frac{xm\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\begin{array}{l}\ln(1-\theta) \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{xm\theta^x}{x!}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\frac{\partial}{\partial \beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x} \\ \displaystyle+(1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial \beta}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\end{array}\right)$$

$$= \frac{x^2 m\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}[\ln(1-\theta)]^2 \\ \displaystyle+2\ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)} \\ \displaystyle-\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)^2} \\ \displaystyle+\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-k)(m+\beta x-i)}\end{array}\right) \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial m \partial \beta} = \frac{x\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m} m(1-\theta)^{m+\beta x - x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\begin{bmatrix}\ln(1-\theta) \\ +\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)}\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{x\theta^x}{x!}\begin{pmatrix} m\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)}\right]\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x - x} \\ +(1-\theta)^{m+\beta x - x}\frac{\partial}{\partial m} m\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{m+\beta x - i}\right]\end{pmatrix}$$

$$= \frac{x\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x - x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\begin{pmatrix}\ln(1-\theta)(1+m\ln(1-\theta)) \\ +(1+2m\ln(1-\theta))\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)} \\ -m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)^2} \\ +m\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - k)(m+\beta x - i)}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 P_x}{\partial \beta \partial m} \qquad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial m^2} = \frac{\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x - x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)}\right]\right)$$

$$= \frac{\theta^x}{x!}\begin{pmatrix}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)}\right]\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x - x} \\ +(1-\theta)^{m+\beta x - x}\frac{\partial}{\partial m}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)}\right]\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x - x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x - j)\begin{pmatrix}\ln(1-\theta)(2+m\ln(1-\theta)) \\ +2(1+m\ln(1-\theta))\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)} \\ -m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - i)^2} \\ +m\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x - k)(m+\beta x - i)}\end{pmatrix} \qquad (2.47)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.26) , (2.30) ถึง (2.32) และ (2.42) ถึง (2.47) ลงใน (2.33) ถึง (2.41) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.27) ถึง (2.29) และ (2.33) ถึง (2.41) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ

$$\begin{bmatrix}\theta\\ \beta\\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \beta_0\\ m_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}g_{11}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{12}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{13}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{21}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{22}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{23}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{31}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{32}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{33}(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}g_1(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_2(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_3(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}$$

และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

4. **วิธีระยะห่างต่ำสุด** (Method of Minimum Distance , MD)

หลักการของวิธีการนี้ คือ การทำให้ฟังก์ชันระยะทาง (Distance Function) ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงเชิงทดลอง (Empirical Distribution Function) และฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแบบมีค่าต่ำสุด ซึ่งก็คือหลักการของตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Statistic)

ในที่นี้จะใช้ฟังก์ชันระยะทางระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงเชิงทดลองและฟังก์ชันการแจกแจงยกกำลังสอง ซึ่งก็คือตัวสถิติของคราเมอร์-วอนไมส์ (Cramer-Von Mises Statistic)

$$\min K \quad = \quad \sum_{x=0}^{k}\left[F_n(x)-F(x:\varphi)\right]^2 \tag{2.48}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ φ ทำได้โดยหาอนุพันธ์บางส่วนของตัวสถิติของคราเมอร์-วอนไมส์เทียบกับ φ และให้สมการอนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} \quad = \quad -2\sum_{x=0}^{k}\left[F_n(x)-F(x:\varphi)\right]\frac{\partial F(x)}{\partial \varphi_i} \quad ; \quad i=1,2,3$$

$$F_n(x) \quad = \quad \frac{1}{n}(\text{จำนวนของ } X_i \text{ ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } x) \tag{2.49}$$

โดยที่ φ เป็นเซตของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ ในการศึกษาครั้งนี้ $\varphi=(\theta,\beta,m)$

หาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.48) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติเทียบกับพารามิเตอร์ θ , β และ *m* จะได้ดังนี้

$$g_1(\theta,\beta,m) = \frac{\partial K}{\partial \theta} = -2\sum_{x=0}^{k}[F_n(x)-F(x)]\frac{\partial F(x)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.50)$$

$$g_2(\theta,\beta,m) = \frac{\partial K}{\partial \beta} = -2\sum_{x=0}^{k}[F_n(x)-F(x)]\frac{\partial F(x)}{\partial \beta} = 0 \quad (2.51)$$

$$g_3(\theta,\beta,m) = \frac{\partial K}{\partial m} = -2\sum_{x=0}^{k}[F_n(x)-F(x)]\frac{\partial F(x)}{\partial m} = 0 \quad (2.52)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \theta} = \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial \theta^x}{\partial \theta}+\theta^x\frac{\partial}{\partial \theta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}(x-m\theta-\beta\theta x)\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \beta} = \sum_{x=0}^{k}\frac{m\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m\theta^x}{x!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}+\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\frac{\partial}{\partial \beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{xm\theta^x}{x!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right) \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial m} = \sum_{x=0}^{k}\frac{\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{\theta^x}{x!}\left((1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}+\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right) \quad (2.55)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.49) , (2.53) ถึง (2.55) ลงในสมการ (2.50) ถึง (2.52) จากนั้นแก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\theta^2} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\theta}\right)^2-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\theta^2}\right] \quad (2.56)$$

$$g_{12}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\beta\partial\theta} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\beta}\right)-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\beta\partial\theta}\right] \quad (2.57)$$

$$g_{13}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial m\partial\theta} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial m}\right)-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m\partial\theta}\right] \quad (2.58)$$

$$g_{21}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\theta\partial\beta} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\theta}\right)-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\theta\partial\beta}\right] \quad (2.59)$$

$$g_{22}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\beta^2} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\beta}\right)^2-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\beta^2}\right] \quad (2.60)$$

$$g_{23}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial m\partial\beta} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial m}\right)-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m\partial\beta}\right] \quad (2.61)$$

$$g_{31}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\theta\partial m} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\theta}\right)-(F_n(x)-F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\theta\partial m}\right] \quad (2.62)$$

$$g_{32}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial\beta\partial m} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\beta}\right) - (F_n(x) - F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\beta\partial m}\right] \quad (2.63)$$

$$g_{33}(\theta,\beta,m) = \frac{\partial^2 K}{\partial m^2} = 2\sum_{x=0}^{k}\left[\left(\frac{\partial F(x)}{\partial m}\right)^2 - (F_n(x) - F(x))\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m^2}\right] \quad (2.64)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\theta^2} = \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(x-m\theta-\beta\theta x)\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\begin{pmatrix}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\\ +\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m(m+\beta x-1)!}{x!(m+\beta x-x)!}\theta^{x-2}(1-\theta)^{m+\beta x-x-2}\begin{pmatrix}[x(x-1)]+[\theta x(2-\beta\theta)(1-\beta x)]\\ -[2m\theta x(1-\beta\theta)]-[m\theta^2(1-m)]\end{pmatrix}$$

(2.65)

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial\beta\partial\theta} = \sum_{x=0}^{k}\frac{m\theta^{x-1}}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k}\frac{m\theta^{x-1}}{x!}\begin{pmatrix}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial\beta}\dfrac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\\ +\dfrac{(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{x=0}^{k}\frac{xm\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\\ \displaystyle\times\left(-\theta+(x-m\theta-\beta\theta x)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\right)\end{array}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x)}{\partial\theta\partial\beta} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m \partial \theta} = \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^{x-1}}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}\frac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^{x-1}}{x!}\left(\begin{array}{l}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\dfrac{\partial}{\partial m}\dfrac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!} \\ +\dfrac{m(m+\beta x-1)!}{(m+\beta x-x)!}\dfrac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}(x-m\theta-\beta\theta x)\end{array}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^{x-1}(1-\theta)^{m+\beta x-x-1}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}(x-2m\theta-\beta\theta x) \\ +m(x-m\theta-\beta\theta x)\left[\begin{array}{l}\ln(1-\theta) \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\end{array}\right]\end{array}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F(x)}{\partial \theta \partial m} \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial \beta^2} = \sum_{x=0}^{k} \frac{xm\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\begin{array}{l}\ln(1-\theta) \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\end{array}\right]\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{xm\theta^x}{x!}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\frac{\partial}{\partial \beta}(1-\theta)^{m+\beta x-x} \\ \displaystyle +(1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial \beta}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\end{array}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{x^2 m\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}[\ln(1-\theta)]^2 \\ \displaystyle +2\ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)} \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)^2} \\ \displaystyle +\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-k)(m+\beta x-i)}\end{array}\right) \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m \partial \beta} = \sum_{x=0}^{k} \frac{x\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m} m(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\begin{bmatrix}\ln(1-\theta)\\ +\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{x\theta^x}{x!}\left(\begin{array}{l} m\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x} \\ +(1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial m} m\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\end{array}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{x\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}\ln(1-\theta)(1+m\ln(1-\theta)) \\ +(1+2m\ln(1-\theta))\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)} \\ -m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)^2} \\ +m\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-k)(m+\beta x-i)}\end{array}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F(x)}{\partial \beta \partial m} \tag{2.69}$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial m^2} = \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^x}{x!}\left(\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^x}{x!}\left(\begin{array}{l}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\frac{\partial}{\partial m}(1-\theta)^{m+\beta x-x} \\ +(1-\theta)^{m+\beta x-x}\frac{\partial}{\partial m}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left[1+m\ln(1-\theta)+m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)}\right]\end{array}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{\theta^x(1-\theta)^{m+\beta x-x}}{x!}\prod_{j=1}^{x-1}(m+\beta x-j)\left(\begin{array}{l}\ln(1-\theta)(2+m\ln(1-\theta)) \\ +2(1+m\ln(1-\theta))\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)} \\ -m\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-i)^2} \\ +m\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{(m+\beta x-k)(m+\beta x-i)}\end{array}\right) \tag{2.70}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.49) , (2.53) ถึง (2.55) และ (2.65) ถึง (2.70) ลงใน (2.56) ถึง (2.64) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.50) ถึง (2.52) และ (2.56) ถึง (2.64) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ

$$\begin{bmatrix}\theta\\ \beta\\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \beta_0\\ m_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}g_{11}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{12}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{13}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{21}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{22}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{23}(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_{31}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{32}(\theta_0,\beta_0,m_0) & g_{33}(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}g_1(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_2(\theta_0,\beta_0,m_0)\\ g_3(\theta_0,\beta_0,m_0)\end{bmatrix}$$

และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ