บทที่ 6

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [15] เป็นเทคนิคในการปรับปรุงความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อีกทั้งยังช่วยให้ประหยัดหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณด้วย เนื่องจากในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพียงอย่างเดียวในการวิเคราะห์ปัญหานั้น ถ้าต้องการความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขสูง ๆ จะต้องแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็ก ๆ จำนวนมากตลอดทั้งปัญหา ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำจำนวนมาก และอาจทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำที่จำกัดนั้นไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ได้โดยการนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์มาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [16] คือ จะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบ (solution gradient) สูง เพื่อให้ได้ความแม่นยำของคำตอบสูง และจะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น เพื่อประหยัดหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้ โดยไม่ทำให้ความแม่นยำของคำตอบลดลงไปมากนัก โดยการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจะอาศัยจากคำตอบครั้งก่อนหน้า

ในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ จะนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของของไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยในครั้งนี้จะใช้ค่าของความเร็วที่คำนวณได้จากการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสม รายละเอียดดังกล่าวจะขอกล่าวไว้ในหัวข้อต่าง ๆ ในบทนี้

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว คือ การปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าว จะใช้หลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) ในวิชากลศาสตร์

ของแข็ง (solid mechanics) คือ ต้องหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่จะใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสม ดังนั้นจะต้องหา

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

โดย ϕ คือ คำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์, i คือ จุดต่อที่ i

การหาค่าอนุพันธ์ต่าง ๆ เริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$) ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะใช้ค่าของคำตอบที่อยู่บนจุดต่อหลัก (main node) มาใช้เป็นตัวคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยในการทำวิทยานิพนธ์นี้ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อโดยจะมีจุดต่อหลักอยู่สามจุดและจุดต่อที่กึ่งกลางของแต่ละด้านของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอีกสามจุดต่อ ดังนั้นในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้จะต้องใช้คำตอบที่จุดต่อหลักทั้งสามจุดมาใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม ดังนั้น

$$\phi(x,y) = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \tag{6.2}$$

โดย N_i, i = 1, 2, 3 คือ ฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ โดยมีค่า ϕ_i, i = 1, 2, 3 คือ ค่าตัวคำตอบที่จุดต่อหลักของเอลิเมนต์ ที่ใช้เป็นตัวหาค่าอนุพันธ์ของเอลิเมนต์

$$N_i (x, y) = a_i + b_i x + c_i y \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6.3}$$

ค่า a_i, b_i, c_i มีค่าดังสมการ (3.17a-f) คือ

$$a_1 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2A \tag{6.4a}$$

$$a_2 = (x_3 y_1 - x\ y_3) / 2A \tag{6.4b}$$

$$a_3 = (x_1 y_2 - x_2 y_1) / 2A \tag{6.4c}$$

$$b_1 = (y_2 - y_3) / 2A \qquad c_1 = (x_3 - x_2) / 2A \tag{6.4d}$$

$$b_2 = (y_3 - y_1) / 2A \qquad c_2 = (x_1 - x_3) / 2A \tag{6.4e}$$

$$b_3 = (y_1 - y_2) / 2A \qquad c_3 = (x_2 - x_1) / 2A \tag{6.4f}$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{6.5}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \tag{6.6}$$

จะได้ $\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$

ดังนั้น
$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3$$
$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2-y_3)\phi_1 + (y_3-y_1)\phi_2 + (y_1-y_2)\phi_3\right] \quad (6.7a)$$

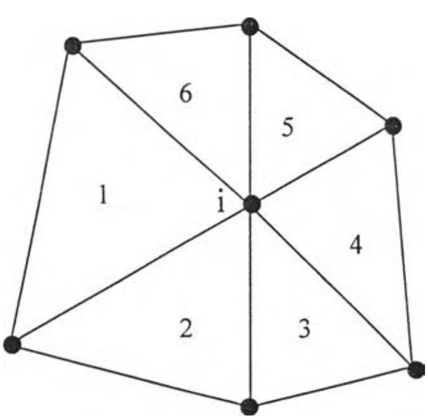
ในทำนองเดียวกัน
$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$
$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3-x_2)\phi_1 + (x_1-x_3)\phi_2 + (x_2-x_1)\phi_3\right] \quad (6.7b)$$

แต่สิ่งที่เราต้องการทราบคือ ค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องนำค่าของอนุพันธ์ของเอลิเมนต์ที่หาได้นี้กระจายไปสู่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ ซึ่งทำได้โดย

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial x}}{n} \quad (6.8a)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial y}}{n} \quad (6.8b)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น จุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์ ค่า $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ จะเป็นการนำเอาค่าอนุพันธ์ของทั้ง 6 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบอยู่มาทำการเฉลี่ยกันดังแสดงในรูปที่ 6.1



$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial x}}{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial y}}{6}$$

รูปที่ 6.1 ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสอง หาได้โดย

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)$$

$$= b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (6.9a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right)$$

$$= c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (6.9b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right)$$

$$= c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (6.9c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)$$

$$= b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (6.9d)$$

โดย $\dfrac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x}$

หลังจากนั้นกระจายค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (6.10a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (6.10b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial x} = \frac{\dfrac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x \partial y} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x \partial y}}{n} \qquad (6.10c)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของ ϕ_i ทั้งหมดแล้ว จึงนำค่าต่าง ๆ ดังกล่าวไปหาค่าในแกนหลัก (principal values)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (6.11)$$

โดยใช้สูตร

$$\text{Pricipal value} = \frac{\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}}{2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}} \tag{6.12}$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าในแกนหลัก $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}$ ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมา โดย

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{6.13}$$

ค่าที่ถูกเลือก (λ) จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป [17] โดย

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h_{min}^2 \lambda_{max} \tag{6.14}$$

ค่า h_{min} คือ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมให้ได้ และค่า λ_{max} คือ ค่าในแกนหลัก (principal value) ที่มีค่ามากที่สุดของทั้งปัญหา

6.2 การนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืด

ในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ได้นำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยจะใช้ค่าของความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหา เนื่องจากค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) มีการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างสูงในบริเวณที่มีลักษณะการไหลที่สลับซับซ้อน เพื่อให้ได้คำตอบในบริเวณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นจะต้องใช้เอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวที่ค่อนข้างเล็ก แต่ในบริเวณอื่น ๆ สามารถที่จะใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้เพื่อเป็นการประหยัดหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้ จากที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 6.1 ที่ว่าหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นใช้หลักการเดียวกับหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง กล่าวคือ เมื่อนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

โดย สมการ ค่าอนุพันธ์ต่าง ๆ ในสมการ (6.6-6.10) จะกลายมาเป็น

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} V_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} V_3 \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)V_1 + (y_3 - y_1)V_2 + (y_1 - y_2)V_3\right] \tag{6.18a}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)V_1 + (x_1 - x_3)V_2 + (x_2 - x_1)V_3\right] \tag{6.18b}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial x}}{n} \tag{6.19a}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial y}}{n} \tag{6.19b}$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3\right)$$

$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \tag{6.20a}$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3\right)$$

$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \tag{6.20b}$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3\right)$$

$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \tag{6.20c}$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3\right)$$

$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \tag{6.20d}$$

โดย $\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial x^2}}{n} \tag{6.21a}$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 V_{e1}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V_{e2}}{\partial y^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 V_{en}}{\partial y^2}}{n} \tag{6.21b}$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y\,\partial x} = \frac{\dfrac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x\,\partial y}+\ldots+\dfrac{\partial^2 V_{en}}{\partial x\,\partial y}}{n} \tag{6.21c}$$

และสมการ (6.14) จะกลายมาเป็น

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{6.22}$$

ค่า λ ที่ได้ในสมการ (6.22) นำไปสู่การหาค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป โดยใช้สมการ (6.15) คือ

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h^2_{min}\lambda_{max} \tag{6.23}$$

ขั้นตอนในทางปฏิบัติในการนำเอาเทคนิคในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งรูปปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นที่ 2 นำปัญหาดังกล่าวไปวิเคราะห์หาค่าที่ต้องการทราบ ในปัญหาด้านการไหลของของไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว ค่าพื้นฐานที่ต้องการทราบคือ ส่วนประกอบความเร็ว (u , v) และความดัน (p) โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้ คือ โปรแกรม NV ที่กล่าวไว้ในบทที่ 5

ขั้นที่ 3 นำผลของความเร็วที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 ไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ โดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังกล่าวจะขอกล่าวไว้ในบทที่ 7 ในโปรแกรม SPACE

ขั้นที่ 4 นำค่าขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3 ไปใช้แบ่งรูปปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ใหม่ในขั้นตอนที่ 1 เสร็จแล้วไปทำขั้นตอนที่ 2 เมื่อทำในขั้นตอนที่ 2 เสร็จแล้ว นำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในครั้งก่อนหน้าว่าค่าของคำตอบต่าง ๆ ที่ได้มีความแตกต่างหรือมีการเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเท่าไร ถ้ามีความแตกต่างกันค่อนข้างมากแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้นี้ยังมีขนาดที่ยังไม่เหมาะสมที่สุด จะต้องนำค่าคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในครั้งหลังนี้ไปใช้หาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ต่อไปในขั้นตอนที่ 3 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกันระหว่างครั้งก่อนหน้าหนึ่งครั้ง