บทที่ ๓

ตัวอย่างแสดงผลการคำนวณทางตัวเลข และการพิจารณาผลลัพธ์

ตัวอย่างที่แสดงในการวิจัยฉบับนี้ จะแสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์ปัญหาแต่ละข้อด้วยวิธีการหลายอย่าง เพื่อศึกษาหาข้อดีและข้อเสียของวิธีการใหม่ที่นำเสนอโดยการเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ

การวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งได้พัฒนามาจากโปรแกรมวิเคราะห์ไฟไนท์เอเลเมนท์ เขียนโดย Prof. R.L. Taylor [11] โดยใช้โปรแกรมย่อยสับรูทีน (Subroutine Subprogram) ไบลิเนียร์ดีเจนเนอเรทเชลล์ (Bilinear Degenerated Shell) ของ W. Kanok-nukulchai [12] การคำนวณหาสติฟเนสของชิ้นส่วนแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีจุดข้อต่อที่มุม 4 จุดนี้ใช้มโนทัศน์ของการดีเจนเนอเรท (Degeneration Concept) ด้วยการใช้สมมุติฐานที่ว่าแนวเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับผิวกลางชิ้นส่วน (Mid-surface) ยังคงเป็นเส้นตรงแต่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับผิวกลางชิ้นส่วนหลังจากเกิดการเคลื่อนที่เปลี่ยนรูปร่าง ซึ่งจะทำให้สามารถใช้เฉพาะตัวแปรการเคลื่อนที่และการหมุนที่ผิวกลางชิ้นส่วนมาเป็นตัวแปรอิสระต่อกันและยังคิดผลซึ่งเกิดจากแรงเฉือนทางขวาง (Transverse Shear Effect) ได้อีกด้วย เนื่องจากสมการสมดุลย์ของชิ้นส่วนในเทอมของตัวแปรอิสระจะอยู่ในรูปของสมการดีฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง (Second Order Differential Equations) ดังนั้นจึงสามารถใช้ฟังก์ชันของรูปร่างแบบทวิเชิงเส้น (Bilinear Shape Function) ซึ่งมีความต่อเนื่องแบบซี^{0} (C^0-Continuity) กับชิ้นส่วนแบบไอโซพาราเมตริครูปสี่เหลี่ยม การใช้เอเลเมนท์ชนิดนี้จะมีปัญหา คือ เมื่อชิ้นส่วนบางมาก ๆ สติฟเนสของการเฉือนทางขวางมีค่าสูงขึ้นผิดความจริงไปมากจะบดบังสติฟเนสของการดัดเสียหมดทั้ง ๆ ที่สติฟเนสของการเฉือนในกรณีเช่นนี้ควรจะมีค่าน้อย ปัญหานี้แก้ไขได้โดยการลดการอินทิเกรต (Reduced Integration) ในส่วนสติฟเนสของการเฉือนดังกล่าว การทำเช่นนี้ก่อให้เกิดซิงกิวลาริตี (Singularity) ขึ้นเฉพาะสติฟเนสส่วนนี้ซึ่งจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดี [11] นอกจากนั้นยังได้สร้างสติฟเนสขึ้นมาสำหรับรับการหมุนบิด (Torsion) ในแนวหมุนรอบแกนตั้งฉากกับผิวของชิ้นส่วนเพื่อแก้ปัญหาเมื่อโครงสร้าง

เปลือกบางเป็นระนาบหรือกรณีที่โครงสร้างมีความโค้งแต่แบ่งขึ้นส่วนละเอียดมาก ๆ จนเข้าใกล้สภาพระนาบของชิ้นส่วนที่มาต่อกัน ซึ่งจะทำให้ระบบสมการอยู่ในสภาพไม่แข็ง (Ill-Condition)

สำหรับการหาผลลัพธ์ไอเกนนั้นใช้วิธีสับสเปซอิทเทอเรชัน (Subspace Iteration) ของ K.J. Bathe [13] ส่วนการหาการเคลื่อนที่ที่จุดใด ๆ ของโครงสร้างขณะเวลาใดเวลาหนึ่งใช้วิธีการรวมพิกัดหลักของการเคลื่อนที่ (Mode Superposition) ซึ่งดัดแปลงมาจากโปรแกรม แคล (CAL) เขียนโดย Prof. E.L. Wilson [14]

เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้เป็นเครื่องคอมพิวเตอร์ ไอ.บี.เอ็ม. (IBM) 370 แบบ 138 ของสถาบันคอมพิวเตอร์ศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ใช้การคำนวณด้วยความเที่ยงตรงสองเท่า (Double Precision) ผังงานอย่างคร่าว ๆ ของวิธีการที่ใช้ในการวิจัยได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.

ตัวอย่างแสดงผลการวิจัยที่แสดงไว้มีทั้งหมดด้วยกัน ๔ ตัวอย่าง ตัวอย่างที่ ๑ เป็นการศึกษาโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรองรับแบบธรรมดาเพื่อพิจารณาและเปรียบเทียบค่าความถี่อิสระที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายที่นำเสนอ กับวิธีการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงในกรณีที่มีความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยอย่างครบถ้วน โดยใช้ผลลัพธ์ที่ไม่มีการลดจำนวนตัวแปรการเคลื่อนที่ใด ๆ มาเป็นผลลัพธ์หลักในการเปรียบเทียบ ผลลัพธ์อันหลังนี้จะถือว่าถูกต้องเพราะไม่มีความผิดพลาดอันเนื่องมาจากการลดจำนวนตัวแปรความเป็นอิสระ นอกจากนั้นยังได้แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ผลของการเสียความต่อเนื่องระหว่างขอบของแต่ละโครงสร้างย่อยโดยการลดจำนวนตัวแปรทั้งหมดที่จุดข้อต่อประธานรองทิ้ง เหลือไว้เฉพาะตัวแปรของจุดข้อต่อประธานหลักที่มุมทั้งสี่ของแต่ละโครงสร้างย่อยเท่านั้น ในตัวอย่างที่ ๒ เป็นโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าศึกษาโดยมีสาระสำคัญเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ ๑ แต่ได้เพิ่มการวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นเมื่อลดตัวแปรอิสระในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งแต่ยังคงตัวแปรอิสระของการเคลื่อนที่ทางขวาง (Transverse Translation) ไว้ ส่วนที่จุดข้อต่อประธานหลักของแต่ละโครงสร้างย่อยจะยังคงมีตัวแปรอิสระครบ นอกจากนั้นยังได้ทำการวิเคราะห์หาการเคลื่อนที่ของจุดกึ่งกลางที่ปลายยื่นเมื่อมีแรงกระทำคงที่ทางด้านข้างที่จุดนั้นในขณะเวลาใด ๆ ส่วนตัวอย่างที่ ๓ จะศึกษาโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยการแบ่งโครงสร้างให้มีจำนวนชิ้นส่วนมากขึ้นกว่าสองตัวอย่างแรกเพื่อให้สามารถที่จะ

แบ่งโครงสร้าง เป็นโครงสร้างย่อยได้ในหลาย ๆ ลักษณะสำหรับใช้เปรียบเทียบผลซึ่งเกิดจากการเลือกกลุ่มของตัวแปรอิสระที่จะคงไว้เป็นพิกัดประธานของระบบทั้งในกรณีที่มีความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยครบและกรณีที่เสียความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อย และตัวอย่างที่ ๔ จะพิจารณาโครงสร้างหลังคาเปลือกบางโค้งทรงกระบอกด้วยการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ระหว่างวิธีการที่นำเสนอกับวิธีการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง สำหรับรายละเอียดของแบบจำลองต่าง ๆ ที่จะใช้ในแต่ละตัวอย่างจะแสดงไว้ในหัวข้อต่อไป

๓.๑ การสั่นอิสระของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรองรับแบบธรรมดาที่ขอบทั้งสี่ด้าน

รูปที่ ๒ แสดงรายละเอียดของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรองรับแบบธรรมดาที่ขอบทั้งสี่ด้านโดยมีความยาวด้าน a เท่ากับ 10 นิ้ว ความหนา t เท่ากับ 1 นิ้ว โมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุ E เท่ากับ 0.1092×10^{7} ปอนด์ต่อตารางนิ้ว อัตราส่วนปัวซอง ν เท่ากับ 0.3 และความหนาแน่นของมวล ρ เท่ากับ 1 ปอนด์ - $(\text{วินาที})^2/(\text{นิ้ว})^4$

เนื่องจากคุณสมบัติของความสมมาตร ทำให้สามารถทำการวิเคราะห์โครงสร้างเพียงหนึ่งควอดแดรนท์ (Quadrant) และได้จัดแบบจำลองเพื่อศึกษาผลลัพธ์ดังนี้

แบบจำลองที่ 1-1 (รูปที่ ๒.ก) เป็นแบบที่แบ่งชิ้นส่วนเป็น 16 ชิ้นส่วนจัตุรัสขนาดเท่ากันในหนึ่งควอดแดรนท์ คำนวณหาค่าความถี่อิสระโดยไม่มีการลดตัวแปรใด ๆ ซึ่งจะถือเป็นผลลัพธ์ถูกต้องในการเปรียบเทียบ

แบบจำลองที่ 1-2 (รูปที่ ๒.ข) แบ่งชิ้นส่วนเป็น 4 ชิ้นส่วนจัตุรัสขนาดเท่ากันในหนึ่งควอด-แดรนท์ คำนวณหาค่าความถี่อิสระโดยไม่มีการลดตัวแปรใด ๆ

แบบจำลองที่ 1A-S (รูปที่ ๒.ค) ใช้วิธีโครงสร้างย่อยโดยจัดแบ่งรูปที่ ๒.ก ออกเป็น 4 โครงสร้างย่อย ซึ่งมีขอบเขตแสดงด้วยเส้นทึบหนาจุดดำทึบใช้แทนจุดข้อต่อประธาน นอกนั้นจะถูกลดทิ้งหมด โดยใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย

แบบจำลองที่ 1A-C (รูปที่ ๒.ค) มีลักษณะการแบ่งโครงสร้างย่อยเหมือนแบบจำลองที่ 1A-S แต่ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

พิพิธภัณฑ์ สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบจำลองที่ 1AT-S (รูปที่ ๒.ง) ใช้วิธีโครงสร้างย่อยเช่นเดียวกันกับแบบจำลองที่ 1A-S และ 1A-C แต่คงไว้เฉพาะจุดข้อต่อที่มุมทั้งสี่ของแต่ละโครงสร้างย่อยเท่านั้นนอกนั้นลดทิ้งหมด และใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย

ตารางที่ ๑ แสดงการเปรียบเทียบค่าความถี่ไร้มิติและร้อยละของความคลาดเคลื่อน C เป็นความถี่ไร้มิติมีค่าเท่ากับ $\omega / \sqrt{G/\rho t^2}$ เมื่อ ω คือค่าความถี่เป็นเรเดียน/วินาที G เป็นโมดูลัสยืดหยุ่นสำหรับการเฉือน จะเห็นได้ว่าแบบจำลองที่ 1A-C ซึ่งใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงนั้นให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากที่สุดในรูปแบบพิกัดการเคลื่อนที่ ๕ รูปแบบแรก ซึ่งเป็นการเพียงพอสำหรับที่จะใช้ในการคำนวณระยะการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงกระทำต่อไป สำหรับแบบจำลองที่ 1A-S ซึ่งใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายให้ผลลัพธ์ที่ยอมรับได้เพราะร้อยละของความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุดเพียงร้อยละ 10.73 สำหรับสี่รูปแบบพิกัดแรกนั้นดีพอในทางปฏิบัติ และเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่ 1-2 ก็จะเห็นได้ว่าให้ค่าที่มีความถูกต้องสูงกว่า ส่วนแบบจำลองที่ 1AT-S ซึ่งเสียความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยไปทำให้ผลลัพธ์คลาดเคลื่อนจากผลลัพธ์ที่ถูกต้องไปมากแม้แต่ในรูปแบบพิกัดในลำดับที่มีค่าความถี่ต่ำที่สุดซึ่งใช้เป็นรูปแบบหลักก็ยังคลาดเคลื่อนไปถึงร้อยละ 11.58 แสดงให้เห็นว่าความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยนั้นมีความสำคัญมากในอันที่จะทำให้ความถูกต้องของผลลัพธ์ดี

อนึ่งจากการศึกษาตัวอย่างนี้พบว่า การใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบเหมารวม (Lump Mass) ให้ผลคลาดเคลื่อนไปจากผลลัพธ์ที่ถูกต้องซึ่งใช้วิธีการคำนวณด้วยวิธีอีลาสติคเชิงเส้นในสามมิติ (Linear 3-D Elasticity) [15] มาก ดังนั้นจึงใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบคอนซิสแทนต์ (Consistent Mass) สำหรับตัวอย่างนี้

๓.๒ การสั่นของโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปที่ ๓ แสดงรายละเอียดของโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายึดรั้งโดยตลอดหนึ่งด้านและปล่อยอิสระสามด้าน เมื่อความยาวด้านยาว a เท่ากับ 4 นิ้ว ความยาวด้านสั้น b เท่ากับ 2

นิ้ว ความหนา t เท่ากับ 0.2 นิ้ว โมดูลัสยืดหยุ่น E เท่ากับ 0.1092×10^7 ปอนด์ต่อตารางนิ้ว อัตราส่วนปัวซอง ν เท่ากับ 0.3 และความหนาแน่นของมวล ρ เท่ากับ 1 ปอนด์ - (วินาที)^2/(นิ้ว)^4

ในการศึกษาเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้โดยการวิเคราะห์ด้วยวิธีการต่าง ๆ กันจะแบ่งแบบจำลองแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

แบบจำลองที่ 2-1 (รูปที่ ๓.ก) เป็นแบบที่แบ่งชิ้นส่วนเป็น 8 ชิ้นส่วนจัตุรัสมีขนาดเท่ากัน คำนวณหาค่าความถี่อิสระอย่างธรรมดาโดยไม่ลดจำนวนตัวแปร ซึ่งจะถือเป็นผลลัพธ์ถูกต้องในการเปรียบเทียบ

แบบจำลองที่ 2-2 (รูปที่ ๓.ข) แบ่งชิ้นส่วนเป็น 4 ชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละชิ้นส่วนจะมีความยาวเป็นสองเท่าของความกว้าง และหาค่าความถี่อิสระโดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรใด ๆ

แบบจำลองที่ 2A-S และ 2A-C (รูปที่ ๓.ค) ทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการโครงสร้างย่อย ซึ่งแบ่งรูปที่ ๓.ก ออกเป็น 4 โครงสร้างย่อยดังรูป โดยแบบจำลองที่ 2A-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายและแบบจำลองที่ 2A-C ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 2AT-S และ 2AT-C (รูปที่ ๓.ง) โดยวิธีการโครงสร้างย่อยแต่จะลดตัวแปรที่จุดข้อต่อประธานรองทิ้งทั้งหมดเหลือไว้เฉพาะตัวแปรที่จุดข้อต่อประธานหลักที่มุมทั้งสี่ของแต่ละโครงสร้างย่อยเท่านั้น ซึ่งใช้วิธีการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายในแบบจำลองที่ 2AT-S และวิธีการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงกับแบบจำลองที่ 2AT-C

แบบจำลองที่ 2AR-S และ 2AR-C (รูปที่ ๓.จ) ใช้วิธีการโครงสร้างย่อยเช่นเดียวกันแต่จะลดตัวแปรในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งโดยยังคงตัวแปรในการเคลื่อนที่ทางขวางไว้ ส่วนจุดข้อต่อประธานหลักที่มุมทั้งสี่ของแต่ละโครงสร้างย่อยจะยังคงตัวแปรอิสระไว้ครบดังเดิม โดยที่แบบจำลองที่ 2AR-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายส่วนแบบจำลองที่ 2AR-C นั้นใช้วิธีการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

ตารางที่ ๒.๑ และ ๒.๒ แสดงการเปรียบเทียบค่าความถี่ไร้มิติและร้อยละของความคลาดเคลื่อน C มีค่าเท่ากับ $\omega / \sqrt{D/\rho t a^4}$ เมื่อ D คือริจิดิตีในการดัด (Flexural Rigidity)

ซึ่งเท่ากับ $Et^3/12(1-\nu^2)$ ผลที่แสดงในตารางที่ ๒.๑ นั้นใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบคอนซิสแทนต์ ส่วนในตารางที่ ๒.๒ ใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบเหมารวม ซึ่งการใช้วิธีแบบคอนซิสแทนต์ในการหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ในเอกสารอ้างอิง [11] มากกว่า อย่างไรก็ตามแม้ผลลัพธ์ที่ได้จากการหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบเหมารวมจะไม่ค่อยดีนักแต่รูปแบบพิกัดการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ก็ยังคงถูกต้อง

จากการพิจารณาค่าความถี่ไร้มิติและร้อยละของความคลาดเคลื่อนจากตารางดังกล่าวจะเห็นได้ชัดเจนว่า แบบจำลองที่ 2A-C ซึ่งคำนวณผลลัพธ์โดยวิธีโครงสร้างย่อยที่ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงและมีความต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างโครงสร้างย่อยแต่ละโครงสร้างย่อยอย่างครบถ้วนนั้นให้ผลลัพธ์ได้ใกล้เคียงกับแบบจำลองที่ 2-1 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ถูกต้องในการเปรียบเทียบมากที่สุดคือคลาดเคลื่อนไปเพียงร้อยละ 4.43 ในรูปแบบการเคลื่อนที่ลำดับที่ 5 นอกนั้นไม่ถึงร้อยละ 1. ส่วนแบบจำลองที่ 2A-S ซึ่งใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายถึงจะให้ผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนเพียงไม่ถึงร้อยละ 2. ในรูปแบบการเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 ถึงลำดับที่ 4 แต่ก็คลาดเคลื่อนถึงร้อยละ 12.55 ในลำดับที่ 5 แต่อย่างไรก็ตามยังให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าแบบจำลองที่ 2-2 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการแบ่งชิ้นส่วนอย่างหยาบและคำนวณโดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรอิสระใด ๆ สำหรับแบบจำลองที่ 2AT-S 2AT-C 2AR-S และ 2AR-C ซึ่งเสียความต่อเนื่องระหว่างโครงสร้างย่อยนั้นอาจจะกล่าวได้ว่าให้ผลลัพธ์ที่ไม่ควรจะยอมรับได้ แม้ว่าในแบบจำลองที่ 2AR-S และ 2AR-C จะมีความต่อเนื่องสำหรับการเคลื่อนที่ทางขวางระหว่างขอบเขตของโครงสร้างย่อยก็ตามแต่ก็ไม่ได้ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ดีกว่าแบบจำลองที่ 2AT-S และ 2AT-C ซึ่งเสียความต่อเนื่องไปทั้งหมดแต่อย่างใด และไม่ว่าจะใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลแบบใดผลลัพธ์ที่ได้ก็ไม่แตกต่างกันจนเห็นได้ชัด

รูปที่ ๔ แสดงรูปแบบพิกัดการเคลื่อนที่ซึ่งได้จากค่าไอเกนเวคเตอร์ที่ลำดับต่าง ๆ สำหรับพิกัดการเคลื่อนที่ทางขวางด้วยการวิเคราะห์แบบต่าง ๆ ซึ่งจะนำมาใช้ในการคำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ด้วยวิธีการรวมพิกัดหลักของการเคลื่อนที่ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว และในรูปที่ ๕ นั้นแสดงการเปรียบเทียบการตอบสนองต่อแรงภายนอกซึ่งกระทำโดยทันทีทันใดกับโครงสร้างจากผลการวิเคราะห์แบบต่าง ๆ แรงที่กระทำมีขนาด 10 ปอนด์ กระทำตั้งฉากกับแผ่นพื้น ณ. จุดกึ่งกลางปลายยื่นอย่างกระทันหันและคงไว้ตลอดเวลาที่พิจารณา การวิเคราะห์ใช้มวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบเหมารวม และคำนวณผลที่ช่วงเวลา

เพิ่มครั้งละ 0.01 วินาที พบว่าการเคลื่อนที่ของจุดกึ่งกลางปลายยื่น ของแบบจำลองที่ 2A-S จะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ถูกต้องจากแบบจำลองที่ 2-1 และแบบจำลองที่ 2A-C ซึ่งมีค่าความถี่ใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ถูกต้องมาก เพราะปริมาณการเคลื่อนที่ขณะเวลาใด ๆ นั้นได้จากการรวมเชิงเส้นของพิกัดการเคลื่อนที่ซึ่งถ้าหากความถี่และรูปแบบพิกัดการเคลื่อนที่ใกล้เคียงกันแล้ว การตอบสนองก็จะคล้ายกัน

ในการหาปริมาณการเคลื่อนที่ขณะเวลาใด ๆ จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบพิกัด 5 ลำดับแรก และ 10 ลำดับแรกนั้นให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันมาก เป็นการสนับสนุนความจริงที่ว่ารูปแบบพิกัดที่มีความถี่ต่ำจะกำกับพฤติกรรมการตอบสนองทางพลศาสตร์ของโครงสร้าง

๓.๓ การสั่นอิสระของโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

การศึกษาปัญหาตัวอย่างข้อนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะเปรียบเทียบผลลัพธ์ซึ่งได้จากการวิเคราะห์ปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรอิสระของระบบมากกว่าสองตัวอย่างแรก เพราะจะช่วยทำให้สรุปได้แน่ชัดลงไปว่าวิธีการที่นำเสนอจะให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากน้อยเพียงใด

นอกจากนั้นจะได้พิจารณาว่าการเปลี่ยนลักษณะของแบบจำลองเพื่อพิจารณาว่าการเลือกกลุ่มของตัวแปรอิสระต่าง ๆ กันออกไปจะมีผลต่อวิธีการที่นำเสนอหรือไม่

รูปที่ ๖ แสดงรายละเอียดของโครงสร้างแผ่นบางยื่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยมีความยาวด้าน a เท่ากับ 6 นิ้ว ความหนา t เท่ากับ 0.2 นิ้ว โมดูลัสยืดหยุ่น E เท่ากับ 0.1092×10^{7} ปอนด์ต่อตารางนิ้ว อัตราส่วนปัวซอง ν เท่ากับ 0.3 และความหนาแน่นของมวล ρ เท่ากับ 1 ปอนด์-(วินาที)^2/(นิ้ว)^4

ในการเปรียบเทียบค่าความถี่อิสระในตัวอย่างนี้ได้แบ่งแบบจำลองในลักษณะต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

แบบจำลองที่ 3-1 (รูปที่ ๖.ก) แบ่งชิ้นส่วนออกเป็น 36 ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นส่วนเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดเท่ากันวิเคราะห์หาความถี่อิสระโดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรซึ่งจะถือเป็นผลลัพธ์ถูกต้องใน

การเปรียบเทียบ

แบบจำลองที่ 3-2 (รูปที่ ๖.ข) เป็นแบบจำลองที่แบ่งเป็น 20 ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นส่วนเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดกว้าง 1.2 นิ้ว และยาว 1.5 นิ้ว ทำการคำนวณหาความถี่อิสระโดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรซึ่งจะมีจำนวนตัวแปรอิสระหลังจากกำหนดสภาพขอบเขตแล้วใกล้เคียงกับแบบจำลองที่ทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีโครงสร้างย่อยซึ่งมีสภาวะความต่อเนื่องที่ขอบเขตของแต่ละโครงสร้างย่อยอย่างครบถ้วน

แบบจำลองที่ 3-3 (รูปที่ ๖.ค) แบ่งชิ้นส่วนออกเป็น 6 ชิ้นส่วนเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดกว้าง 2 นิ้ว และยาว 3 นิ้ว เป็นแบบจำลองที่คำนวณผลลัพธ์โดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรแต่อย่างใดใช้เป็นผลลัพธ์อย่างหยาบ ๆ ในการเปรียบเทียบ

สำหรับแบบจำลองที่จะทำการวิเคราะห์โดยวิธีโครงสร้างย่อยมีดังนี้

แบบจำลองที่ 3A-S และ 3A-C (รูปที่ ๖.ง.๑) ด้วยการแบ่งรูปที่ ๖.ก ออกเป็น 6 โครงสร้างย่อย โดยที่แบบจำลองที่ 3A-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย และแบบจำลองที่ 3A-C ลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3AR-S และ 3AR-C (รูปที่ ๖.ง.๒) แบ่งโครงสร้างย่อยเช่นเดียวกับรูปที่ ๖.ง.๑ แต่คำนวณหาผลลัพธ์โดยลดตัวแปรในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งแต่ยังคงมีครบสำหรับจุดข้อต่อประธานหลัก ซึ่งแบบจำลองที่ 3AR-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายส่วนแบบจำลองที่ 3AR-C ใช้การลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3B-S และ 3B-C (รูปที่ ๖.จ.๑) แบ่งรูปที่ ๖.ก ออกเป็น 6 โครงสร้างย่อย ซึ่งแบบจำลองที่ 3B-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย และแบบจำลองที่ 3B-C ลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3BR-S และ 3BR-C (รูปที่ ๖.จ.๒) แบ่งโครงสร้างย่อยในลักษณะเดียวกันกับรูปที่ ๖.จ.๑ แต่คำนวณหาผลลัพธ์โดยลดตัวแปรในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งแต่มีครบที่จุดข้อต่อประธานหลัก โดยที่แบบจำลองที่ 3BR-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย ส่วนแบบ

จำลองที่ 3BR-C ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3BT-S และ 3BT-C (รูปที่ ๖.จ.๓) แบ่งโครงสร้างย่อยเช่นเดียวกับรูปที่ ๖.จ.๑ และ ๖.จ.๒ แล้ววิเคราะห์หาผลลัพธ์โดยการลดตัวแปรทุกชนิดของจุดข้อต่อประธานรองทิ้ง โดยที่แบบจำลองที่ 3BT-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย แต่แบบจำลองที่ 3BT-C ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3C-S และ 3C-C (รูปที่ ๖.ฉ.๑) เป็นการแบ่งโครงสร้างย่อยโดยแบ่งรูปที่ ๖.ก ออกเป็น 4 โครงสร้างย่อยดังรูปซึ่งแบบจำลองที่ 3C-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย และแบบจำลองที่ 3C-C ลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3CR-S และ 3CR-C (รูปที่ ๖.ฉ.๒) เป็นการแบ่งโครงสร้างย่อยในลักษณะเดียวกันกับรูปที่ ๖.ฉ.๑ คำนวณหาผลลัพธ์โดยลดตัวแปรในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้ง แต่ยังคงตัวแปรไว้ครบที่จุดข้อต่อประธานหลัก ซึ่งแบบจำลองที่ 3CR-S ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย และแบบจำลองที่ 3CR-C ลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3D-S และ 3D-C (รูปที่ ๖.ช.๑) เป็นแบบที่แบ่งโครงสร้างย่อยจากรูปที่ ๖.ก ออกเป็น 4 โครงสร้างย่อยดังรูป โดยแบบจำลองที่ 3D-S นั้นใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย ส่วนแบบจำลองที่ 3D-C ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

แบบจำลองที่ 3DR-S และ 3DR-C (รูปที่ ๖.ช.๒) เป็นการแบ่งโครงสร้างย่อยในลักษณะเดียวกันกับรูปที่ ๖.ช.๑ แต่วิเคราะห์หาผลลัพธ์โดยลดตัวแปรในแนวหมุนของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งยกเว้นจุดข้อต่อประธานหลักซึ่งจะยังมีอยู่ครบตัวแปร ใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายสำหรับแบบจำลองที่ 3DR-S และใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงสำหรับแบบจำลองที่ 3DR-C

จากการวิเคราะห์ปัญหาสองตัวอย่างแรกที่ผ่านมาพบว่าการใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบคอนซิสแทนต์ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าแบบเหมารวมดังนั้นในปัญหาตัวอย่างข้อนี้จึงใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบคอนซิสแทนต์

ค่าความถี่ไร้มิติ (มีนิยามเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่สอง) และร้อยละของความคลาดเคลื่อน

ที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ ๓.๑ - ๓.๕ และกราฟประกอบในรูปที่ ๗ และ ๘ นั้น จากการพิจารณาตารางที่ ๓.๑ และ ๓.๒ ประกอบกับกราฟในรูปที่ ๗ จะพบว่าการใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าการใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายในทุก ๆ ด้านทั้งที่รูปแบบพิกัดลำดับต่ำ ๆ หรือลำดับสูง สำหรับรูปแบบพิกัดการเคลื่อนที่ลำดับสูงนั้นปรากฏว่ารูปร่างของพิกัดการเคลื่อนที่ซึ่งพิจารณาจากค่าไอเกนเวคเตอร์ที่ได้จากวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายจะผิดรูปผิดร่างไปเลยทีเดียว สำหรับการลดตัวแปรของจุดข้อต่อประธานรองทิ้งไม่ว่าจะลดทิ้งเฉพาะตัวแปรในแนวการหมุนหรือทั้งหมดนั้น เมื่อพิจารณาจากตารางที่ ๓.๓ - ๓.๕ จะเห็นได้ว่าให้ผลลัพธ์ในลักษณะที่อาจกล่าวได้ว่าไม่อาจยอมรับได้ไม่ว่าจะใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลด้วยวิธีการใดซึ่งผลสรุปอันนี้ก็สอดคล้องกับข้อสรุปที่ได้จากตัวอย่างทั้งสองที่กล่าวมาแล้ว

แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณากราฟในรูปที่ ๘ ก็จะพบว่าวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายในกรณีที่ยังคงตัวแปรประธานทั้งหมดไว้ครบให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันในรูปแบบพิกัดแรก ๆ กับการแก้ปัญหาโดยไม่มีการลดจำนวนตัวแปรใด ๆ ของแบบจำลองที่ 3-2 ซึ่งมีจำนวนตัวแปรอิสระใกล้เคียงกัน แต่ก็ไม่อาจกล่าวได้ว่าให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากเมทริคซ์ของมวลที่ลดขนาดแล้วมีลักษณะการกระจายที่ไม่สม่ำเสมอเช่นในปัญหาจริง ๆ แต่เมทริคซ์ของมวลของแบบจำลองที่ 3-2 นั้นมีการกระจายที่สม่ำเสมอ แม้ว่าสติฟเนสเมทริคซ์จะไม่ดีเท่าก็ยังให้ผลลัพธ์ที่ดีพอ ๆ กันกับการวิเคราะห์โดยใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายได้ จึงทำให้กล่าวได้ว่าสำหรับโครงสร้างแผ่นบางนั้นถ้าแบ่งชิ้นส่วนให้มีจำนวนมากเพียงพอซึ่งจะทำให้ได้จำนวนตัวแปรอิสระของโครงสร้างเป็นจำนวนมากกล่าวคือมากกว่าจำนวนรูปแบบพิกัดที่สนใจหลาย ๆ เท่าผลลัพธ์ที่ได้ก็จะอยู่ในเกณฑ์ดี

สำหรับผลที่เกิดจากการเลือกกลุ่มของตัวแปรที่จะคงไว้นั้นเป็นไปตามความคาดหมายบ้างในบางส่วน กล่าวคือการใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายนั้นพอที่จะทำนายผลได้ล่วงหน้าว่าแบบจำลองใดจะให้ผลลัพธ์ดีกว่าหรือพอ ๆ กัน เช่นในแบบจำลองที่ 3A-S และ 3B-S ซึ่งมีขนาดและจำนวนโครงสร้างย่อยเท่ากันก็ให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันในขณะที่แบบจำลองที่ 3B-C ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าแบบจำลองที่ 3A-C จนเห็นได้อย่างชัดเจน ส่วนแบบจำลองที่ 3C-S และ 3D-S ซึ่งให้ผลที่ผิดพลาดไปมากก็เนื่องมาจากการแบ่งโครงสร้างย่อยแต่ละอันมีขนาดใหญ่บ้างเล็กบ้างไม่สม่ำเสมอกันเป็นผลทำให้จุดข้อ

ต่อกระจายกันในลักษณะที่ไม่อาจจะจัดรูปแบบพิกัดของการเคลื่อนที่ในแต่ละลำดับให้เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริงได้ เปรียบเสมือนกับการแบ่งโครงสร้างด้วยชิ้นส่วนเบื้องต้นขนาดใหญ่บ้างเล็กบ้างและมีจำนวนน้อย แต่สำหรับแบบจำลองที่ 3C-C และ 3D-C นั้นให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับแบบจำลองที่ 3A-C มากจนไม่อาจกล่าวได้ว่าแบบไหนจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่ากัน ซึ่งอาจสรุปได้ว่าวิธีการที่นำเสนอจะให้ผลลัพธ์ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะการแบ่งโครงสร้างย่อยเป็นหลักอันจะทำให้มีข้อดีอยู่บ้างในการวิเคราะห์ปัญหา เพราะทำให้สะดวกในการเลือกโครงสร้างย่อยว่าจะใช้เป็นจำนวนเท่าไรโดยยึดหลักง่าย ๆ ว่าให้แต่ละโครงสร้างย่อยมีขนาดและลักษณะใกล้เคียงกัน หลักการนี้ไม่อาจใช้กับวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง เพราะผลลัพธ์ที่ได้จะแตกต่างกันมาก แม้กระนั้นก็ตามจากกราฟรูปที่ ๗ พบว่าไม่ว่าจะเลือกแบบจำลองอย่างใดวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลงก็ยังให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าการทำการลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย

๓.๔ <u>การสั่นอิสระของโครงสร้างหลังคาเปลือกบางโค้งทรงกระบอก</u>

ตัวอย่างสุดท้ายที่จะทำการศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาการสั่นอิสระของโครงสร้างหลังคาเปลือกบางโค้งทรงกระบอกรองรับที่ปลายทั้งสองด้านด้วยริจิดไดอาแฟรม (Rigid Diaphragm) รายละเอียดของโครงสร้างและแบบจำลองต่าง ๆ ได้แสดง ในรูปที่ ๘ โดยมีความยาวด้าน L เท่ากับ 50 ฟุต รัศมีของส่วนโค้ง R เท่ากับ 25 ฟุต มุมรองรับส่วนโค้งที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ 80 องศา ความหนา t เท่ากับ 0.25 ฟุต โมดูลัสยืดหยุ่น E เท่ากับ 4.32×10^8 ปอนด์/(ฟุต)^2 อัตราส่วนปัวซอง ν เท่ากับ 0. และความหนาแน่นของมวล ρ เท่ากับ 1000 ปอนด์-(วินาที)^2/(ฟุต)^4

การวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างข้อนี้ศึกษาเฉพาะชุดของรูปแบบการเคลื่อนที่ในลักษณะสมมาตรเท่านั้นจึงคำนวณหาผลลัพธ์โดยใช้เพียงหนึ่งในสี่ของโครงสร้างดังรูป และได้จัดแบบจำลองแบบต่าง ๆ เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ ดังนี้

แบบจำลองที่ 4-1 (รูปที่ ๘.ข) แบ่งชิ้นส่วนเป็น 16 ชิ้นส่วนจัตุรัสขนาดเท่ากัน คำนวณหาผลลัพธ์โดยไม่มีการลดตัวแปรใด ๆซึ่งจะถือเป็นผลลัพธ์ถูกต้องในการเปรียบเทียบ

แบบจำลองที่ 4-2 (รูปที่ ๘.ค) แบ่งชิ้นส่วนเป็น 4 ส่วนจัตุรัสขนาดเท่ากัน คำนวณหาผล-

ลัพธ์โดยไม่มีการลดตัวแปรใด ๆ

แบบจำลองที่ 4A-S และ 4A-C (รูปที่ ๔.ง) ทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีโครงสร้างย่อยโดยแบ่งรูปที่ ๔.ข ออกเป็น 4 โครงสร้างย่อยดังรูป โดยแบบจำลองที่ 4A-S ทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่าย ส่วนแบบจำลองที่ 4A-C นั้นใช้วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างคงตัวแปลง

การเปรียบเทียบค่าความถี่ดังแสดงไว้ในตารางที่ ๔ และกราฟรูปที่ ๔.จ โดยใช้วิธีหามวลของชิ้นส่วนเบื้องต้นแบบเหมารวมนั้นพบว่าวิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายนั้นให้ผลลัพธ์ที่อยู่ในเกณฑ์ยอมรับได้ เพราะร้อยละความคลาดเคลื่อนสำหรับรูปแบบพิกัดแรกเท่ากับ 2.3 และสำหรับรูปแบบพิกัดที่มีค่าความถี่สูงขึ้นไปอีกสามรูปแบบก็มีความคลาดเคลื่อนไม่เกินร้อยละ 8 ซึ่งในทางปฏิบัตินั้นผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนระดับนี้เป็นผลลัพธ์ที่ดีพอจะนำมาใช้ได้ และถ้าพิจารณาผลลัพธ์ดังกล่าวเปรียบเทียบกับผลจากแบบจำลองที่ 4-2 ก็จะพบว่า วิธีลดขนาดเมทริคซ์ของมวลอย่างง่ายนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องสูงกว่ามาก จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างนี้กับตัวอย่างที่หนึ่งซึ่งมีลักษณะการสร้างแบบจำลองที่คล้ายคลึงกันอาจตั้งข้อสังเกตุได้ว่า การใช้วิธีการโครงสร้างย่อยกับปัญหาโครงสร้างเปลือกบาง มีแนวโน้มว่าจะให้ผลที่น่าพึงพอใจกว่าในปัญหาโครงสร้างแผ่นพื้น เพราะผลของความโค้งของผิวทำให้การวิเคราะห์โดยการแบ่งโครงสร้างเป็นชิ้นส่วนอย่างหยาบ ๆ ให้ผลที่ไม่ดีนัก เห็นได้จากค่าความถี่ที่ได้จากแบบจำลองที่ 4-2 ในรูปแบบพิกัดที่หนึ่งคลาดเคลื่อนถึงร้อยละ 17.35 แต่สำหรับการแบ่งโครงสร้างเป็นชิ้นส่วนอย่างหยาบ ๆ ในปัญหาโครงสร้างแผ่นบางเช่นแบบจำลองที่ 1-2 ก็ยังให้ผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนเพียงร้อยละ 4.21 ในรูปแบบพิกัดที่หนึ่ง