บทที่ 3

กรรมวิธีที่ใช้ศึกษาผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก

ความนำ

ประสิทธิภาพและความแม่นยำในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์เลี้ยวเบนในย่านความถี่สูงได้รับความสนใจมาเป็นเวลาหลายปี ทำให้มีกรรมวิธีและทฤษฎีมากมายถูกคิดขึ้นเพื่อนำมาศึกษาปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่เกิดขึ้น เช่น ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ (physical theory of diffraction, PTD) ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต (geometrical theory of diffraction, GTD) และกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ (equivalent edge currents method, EEC) เป็นต้น ซึ่งในแต่ละวิธีก็จะมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกัน สำหรับในบทนี้ได้ประยุกต์กรรมวิธีและทฤษฎีที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ และทำให้เห็นถึงกลไกของการเกิดการเลี้ยวเบนมาวิเคราะห์ผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนที่มีต่อขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก เช่น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล โพลาไรเซชันร่วม โพลาไรเซชันไขว้ และอัตราขยาย โดยแบ่งออกเป็นหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้คือ หัวข้อแรกกล่าวถึงแนวทางในการวิเคราะห์ซึ่งบ่งบอกถึงการเลือกใช้กรรมวิธีและทฤษฎีต่าง ๆ ในขั้นตอนที่ใช้วิเคราะห์หาขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก ในหัวข้อที่สองกล่าวถึงสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่นำมาใช้วิเคราะห์และการแปลงระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น ส่วนในหัวข้อที่สามกล่าวถึงรายละเอียดของทฤษฎีที่ใช้ศึกษาพฤติกรรมการสะท้อนของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่พื้นผิวสะท้อนเพื่อนำมาใช้หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่สะท้อนจากพื้นผิวจานสะท้อนมายังบนระนาบหน้าจาน และหัวข้อที่สี่และห้ากล่าวถึงรายละเอียดของทฤษฎีที่ใช้ศึกษาพฤติกรรมการเลี้ยวเบนของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ขอบของจานสะท้อนเพื่อนำมาใช้หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เลี้ยวเบนจากขอบจานสะท้อนมายังบนระนาบหน้าจาน หัวข้อสุดท้ายกล่าวถึงรายละเอียดในการหาขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกคือ แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล โพลาไรเซชันร่วม โพลาไรเซชันไขว้ อัตราขยาย และประสิทธิภาพต่าง ๆ จากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนระนาบหน้าจาน

แนวทางในการวิเคราะห์

การวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่นสามารถทำได้หลายวิธี (G. Franceschetti and A. Mohsen, 1986) เช่น กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงกายภาพ (physical optics, PO) ซึ่งทำการอินทิเกรตกระแสบนพื้นผิวจานสะท้อน (Silver, 1949) กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (geometrical optics, GO) รวมกับการอินทิเกรตสนามบนระนาบหน้าจาน (aperture field integration) (Silver, 1949) หรือกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตรวมกับการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบ (plane wave spectrum method, PWS) เป็นต้น

กรรมวิธีที่กล่าวมาข้างต้นเป็นกรรมวิธีที่นำมาใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่นอย่างกว้างขวางในช่วงระยะแรกของการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนซึ่งไม่สามารถอธิบายผลกระทบเนื่องจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่

ขอบของจานสะท้อนได้ สำหรับกรรมวิธีที่นำมาใช้ในการศึกษาปรากฏการณ์เลี้ยวเบนนั้นได้พัฒนาขึ้นจากกรรมวิธีต่าง ๆ ข้างต้น ในปัจจุบันนี้มีกรรมวิธีและทฤษฎีที่ใช้ศึกษาปรากฏการณ์เลี้ยวเบนอย่างกว้างขวางแบ่งออกได้ 3 วิธีคือ

1. ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต (J. B. Keller, 1962) เป็นทฤษฎีที่ขยายแนวความคิดของกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต โดย Keller เสนอว่ามีสนามการเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อมีสนามตกกระทบที่บริเวณที่เป็นขอบ หรือจุดยอด

2. ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ (P. Y. Ufimtsev, 1962, quoted in E. F. Knott and B. A. Thomas, 1974) เป็นทฤษฎีที่ขยายแนวความคิดของกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงกายภาพ โดย Umifsev เสนอว่ามีกระแสไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นที่บริเวณขอบ หรือจุดยอด

3. กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ เป็นกรรมวิธีที่อธิบายปรากฏการณ์เลี้ยวเบนโดยสมมุติว่า มีแหล่งกระแสสมมูลที่ขอบที่สามารถให้กำเนิดสนามเลี้ยวเบนที่สอดคล้องกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต ซึ่งโดยปกติแล้วมักนำมาใช้ในการแก้จุดบกพร่องของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตที่ไม่สามารถหาสนามที่บริเวณการตัดกันของรังสีได้

เมื่อพิจารณากรรมวิธีและทฤษฎีที่นำมาใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่นข้างต้นสามารถสรุปข้อดีและข้อเสียเป็นดังตาราง 3.1 ดังนี้

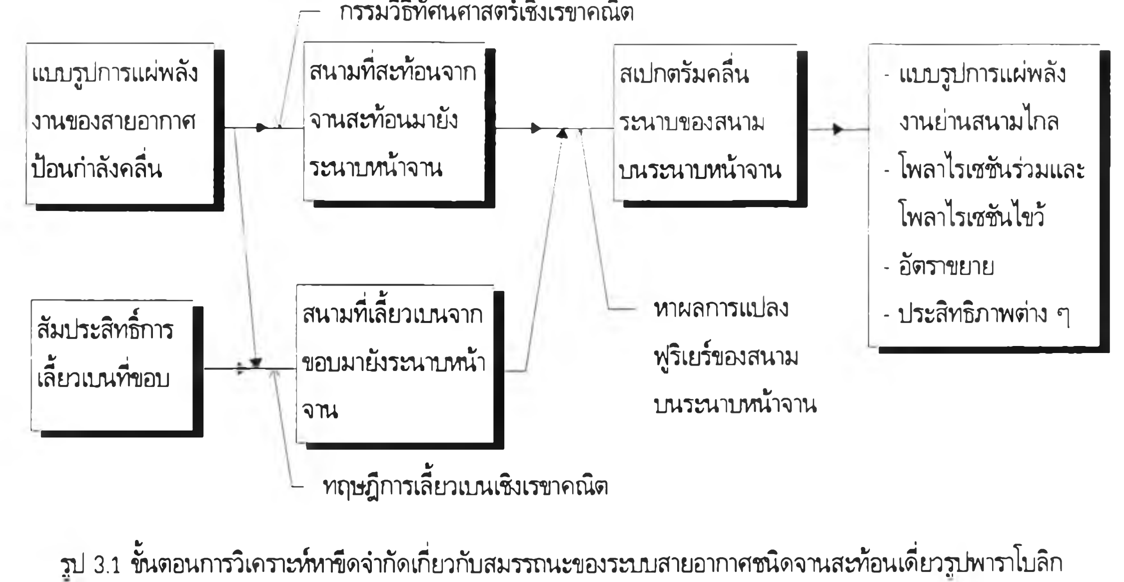
ตาราง 3.1 ข้อดีและข้อเสียของกรรมวิธีและทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่น

กรรมวิธีหรือทฤษฎี	ข้อดี	ข้อเสีย
กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต	1. เป็นวิธีการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ 2. สามารถเห็นกลไกในการเกิดพฤติกรรมการสะท้อนของคลื่นได้ชัดเจน 3. ใช้เวลาในการคำนวณหาสนามที่จุดสังเกตใด ๆ ไม่มากนักขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้ในการหาจุดที่เกิดการสะท้อน 4. ใช้เวลาไม่มากในการคำนวณหาสนามเมื่อระบบสายอากาศอากาศมีจานสะท้อนหลายตัวและมีสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเพียงตัวเดียว	1. ต้องคำนวณหาจุดที่เกิดการสะท้อนตามกฎการสะท้อนโดยใช้กรรมวิธีเชิงเลข 2. อาจจะเกิดจุดที่เกิดการตัดกันของรังสีสะท้อนซึ่งทำให้ไม่สามารถหาค่าสนามที่จุดนั้นได้ 3. ต้องใช้เวลาคำนวณหาจุดที่เกิดการสะท้อนมากเมื่อระบบสายอากาศมีสายอากาศป้อนกำลังคลื่นหลายตัว
กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงกายภาพ	1. เป็นวิธีการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ 2. ไม่มีจุดสังเกตที่ไม่สามารถหาค่าได้	1. ต้องอินทิเกรตกระแสซึ่งเป็นปริมาณแบบเวกเตอร์ทั่วทั้งโดเมนของพื้นผิวจานสะท้อนทำให้เสียเวลาอย่างมากในการคำนวณหาสนามที่จุดสังเกตใด ๆ 2. ต้องใช้เวลาอย่างมากเมื่อนำไปใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศที่มีจานสะท้อนหลายตัว
กรรมวิธีการอินทิเกรตสนามบนระนาบหน้าจาน	1. เป็นวิธีการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ	1. ต้องทำการอินทิเกรตสนามบนระนาบหน้าจานซึ่งเป็นปริมาณแบบเวกเตอร์ทั่วทั้งโดเมนบนระนาบหน้าจาน

ตาราง 3.1 (ต่อ) ข้อดีและข้อเสียของกรรมวิธีและทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่น

กรรมวิธีหรือทฤษฎี	ข้อดี	ข้อเสีย
กรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์สเปกตรัมคลื่นระนาบ	1. เป็นวิธีการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ 2. ทำให้เห็นกลไกของการแผ่พลังงานคลื่นเนื่องจากมองคลื่นที่แผ่กระจายออกไปในลักษณะของสเปกตรัมคลื่นระนาบ	1. ต้องทำการอินทิเกรตทั่วทั้งโดเมนบนระนาบจากสนามในแนวขนานกับระนาบเพื่อหาสเปกตรัมคลื่นระนาบที่เกิดขึ้น
ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต	1. เป็นวิธีที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ 2. สามารถเห็นกลไกการเกิดพฤติกรรมการเลี้ยวเบนของคลื่นได้อย่างชัดเจน 3. สามารถคิดผลจากการเลี้ยวเบนหลาย ๆ ครั้งได้ (multiple diffraction) 4. ใช้เวลาไม่มากในการคำนวณหาสนามเมื่อระบบสายอากาศอากาศมีจานสะท้อนหลายตัวและมีสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเพียงตัวเดียว	1. ต้องคำนวณหาจุดที่เกิดการเลี้ยวเบนตามกฎการเลี้ยวเบน 2. อาจเกิดจุดตัดกันของรังสีเลี้ยวเบนทำให้ไม่สามารถคำนวณหาสนามที่จุดนั้นได้ แต่สามารถแก้ไขได้โดยใช้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ 3. ต้องใช้เวลาในการคำนวณหาจุดที่เกิดเลี้ยวเบนมากเมื่อระบบสายอากาศมีสายอากาศป้อนกำลังคลื่นหลายตัว
ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ	1. ไม่เกิดปัญหาในการเกิดจุดที่หาค่าสนามไม่ได้	1. ยากต่อการทำเข้าใจ 2. ไม่สามารถคิดผลจากการเลี้ยวเบนหลาย ๆ ครั้งได้

จากข้อดีและข้อ.สียที่กล่าวมา ในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ประยุกต์กรรมวิธีและทฤษฎีข้างต้นในการวิเคราะห์หาขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก เช่น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล โพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ อัตราขยาย และประสิทธิภาพต่าง ๆ ดังแสดงได้ดังรูป 3.1



รูป 3.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์หาขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก

การประยุกต์กรรมวิธีและทฤษฎีตามขั้นตอนในรูป 3.1 เป็นการเลือกใช้กรรมวิธีและทฤษฎีที่ง่ายในการทำความเข้าใจและสามารถทำให้เห็นกลไกของการเกิดการเลี้ยวเบนและการแผ่พลังงานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกได้อย่างชัดเจน นอกจากนี้ขั้นตอนดังกล่าวยังสามารถดัดแปลงเพื่อนำไปใช้วิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนหลายตัวที่มีสายอากาศป้อนกำลังคลื่นตัวเดียวได้โดยทำให้ไม่เสียเวลาในการคำนวณมากนัก หรือนำมาใช้วิเคราะห์หาสนามในย่านเฟรส์แนลเพื่อดูผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบที่มีต่อการสังเคราะห์คลื่นระนาบของการวัดสายอากาศในย่านทดสอบแบบกระชับได้อีกด้วย ซึ่งรายละเอียดของกรรมวิธี ทฤษฎี และการวิเคราะห์ในแต่ละขั้นตอนในรูป 3.1 ได้กล่าวไว้ในหัวข้อต่อไป

สายอากาศป้อนกำลังคลื่น

สายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก เนื่องจากเป็นแหล่งกำเนิดขั้นปฐมภูมิที่กำเนิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามาตกกระทบพื้นผิวจานสะท้อนแล้วแผ่พลังงานออกไปทำให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก ต้องพิจารณาสนามที่แผ่พลังงานออกมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นอันดับแรก

สายอากาศที่นำมาใช้เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกมีอยู่หลายชนิดขึ้นอยู่กับการนำไปประยุกต์ใช้งาน (A.D. Olver, P.J.B. Clarricoats, A.A. Kishk และ L. Shafai, 1994) ซึ่งอาจจะเป็นสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้น (linear polarization) หรือแบบวงกลม (circular polarization) ก็ได้ วิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นมาเป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในการศึกษาผลกระทบเนื่องจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่มีต่อขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศ และโดยปกติในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก จานสะท้อนถูกวางอยู่ในบริเวณย่านสนามไกลของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น ดังนั้นสนามที่แผ่พลังงานจากสายอากาศที่นำมาใช้เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นสามารถพิจารณาได้จากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศนั้น

ในบริเวณย่านสนามไกลของสายอากาศใด ๆ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่พลังงานมาจากสายอากาศเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง (transverse electromagnetic wave, TEM) ซึ่งไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวที่คลื่นเคลื่อนที่ไป ดังนั้นสำหรับในระบบพิกัดทรงกลม $r''\theta''\phi''$ แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\bar{E}^{feed}(r'',\theta'',\phi'') = \left[E_{\theta''}(\theta'',\phi'')\bar{a}_{\theta''} + E_{\phi''}(\theta'',\phi'')\,\bar{a}_{\phi''}\right]\frac{e^{-jk_0r''}}{r''} \tag{3.1}$$

เมื่อพิจารณาองค์ประกอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $x''y''z''$ จะได้

$$\begin{aligned}
E_{x''}(\theta'',\phi'') &= E_{\theta''}(\theta'',\phi'')\cos\theta''\cos\phi'' - E_{\phi''}(\theta'',\phi'')\sin\phi'' \\
E_{y''}(\theta'',\phi'') &= E_{\theta''}(\theta'',\phi'')\cos\theta''\sin\phi'' + E_{\phi''}(\theta'',\phi'')\cos\phi'' \\
E_{z''}(\theta'',\phi'') &= -E_{\theta''}(\theta'',\phi'')\sin\theta''
\end{aligned} \tag{3.2}$$

สำหรับสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลสามารถพิจารณาได้จากองค์ประกอบของสนามที่เกิดขึ้นในทิศทางตามแนวเล็งหลัก (boresight direction) เช่น สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y'' นั้น องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับ y'' (x'' กับ z'') เป็นศูนย์ในทิศทางตามแนวเล็งหลัก ($\theta''=0, \phi''$ ใด ๆ กับ $\theta''=\frac{\pi}{2}, \phi''=0,\pi$) ดังนั้นเมื่อพิจารณาในทิศทาง $\theta''=0, \phi''$ ใด ๆ

$$\begin{aligned} E_{x''}(0,\phi'') &= E_{\theta''}(0,\phi'')\cos\phi'' - E_{\phi''}(0,\phi'')\sin\phi'' = 0 \\ E_{z''}(0,\phi'') &= -E_{\theta''}(0,\phi'')\sin 0 = 0 \end{aligned} \tag{3.3ก}$$

และในทิศทาง $\theta''=\frac{\pi}{2}, \phi''=0,\pi$

$$\begin{aligned} E_{x''}(\frac{\pi}{2},0) &= E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},0)\cos\frac{\pi}{2}\cos 0 - E_{\phi''}(\frac{\pi}{2},0)\sin 0 = 0 \\ E_{z''}(\frac{\pi}{2},0) &= -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},0)\sin\frac{\pi}{2} = 0 \\ E_{x''}(\frac{\pi}{2},\pi) &= E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\pi)\cos\frac{\pi}{2}\cos\pi - E_{\phi''}(\frac{\pi}{2},\pi)\sin\pi = 0 \\ E_{z''}(\frac{\pi}{2},\pi) &= -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\pi)\sin\frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned} \tag{3.3ข}$$

เนื่องจาก θ'' กับ ϕ'' เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $E_{\theta''}(\theta'',\phi'') = E_{\theta''}(\theta'')E_{\theta''}(\phi'')$ และ $E_{\phi''}(\theta'',\phi'') = E_{\phi''}(\theta'')E_{\phi''}(\phi'')$ ทำให้สมการ (3.3ก) เขียนใหม่ได้เป็น

$$E_{\theta''}(0)E_{\theta''}(\phi'')\cos\phi'' = E_{\phi''}(0)E_{\phi''}(\phi'')\sin\phi''$$

ซึ่งเป็นจริงทุก ϕ'' เมื่อ

$$E_{\theta''}(0) = E_{\phi''}(0) \tag{3.4ก}$$

$$E_{\theta''}(\phi'')\cos\phi'' = E_{\phi''}(\phi'')\sin\phi'' \tag{3.4ข}$$

และสมการ (3.3ข) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2})E_{\theta''}(0) &= 0 \\ -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2})E_{\theta''}(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4ค}$$

จากสมการ (3.4ก-ค) ทำให้ได้ $E_{\theta''}(0)=E_{\phi''}(0)$, $E_{\theta''}(\phi'')=\sin\phi''$ และ $E_{\phi''}(\phi'')=\cos\phi''$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.1) จะได้

$$\bar{E}^{feed}(r'',\theta'',\phi'')=\left[E_{\theta''}(\theta'')\sin\phi''\bar{a}_{\theta''}+E_{\phi''}(\theta'')\cos\phi''\bar{a}_{\phi''}\right]\frac{e^{-jk_0r''}}{r''} \tag{3.5}$$

โดยที่ $E_{\theta''}(\theta'')$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ $\phi''=\pi/2$ หรือที่เรียกว่าระนาบสนามไฟฟ้าเนื่องจากมีเพียงสนามไฟฟ้าวางตัวอยู่ในระนาบนั้น และ $E_{\phi''}(\theta'')$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ $\phi''=0$ หรือที่เรียกว่าระนาบสนามแม่เหล็กเนื่องจากมีเพียงสนามแม่เหล็กวางตัวอยู่ในระนาบนั้น

สมการ (3.5) แสดงถึงแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y'' ซึ่งถ้า $E_{\theta''}(\theta'')=E_{\phi''}(\theta'')$ สำหรับทุก ๆ θ'' เราเรียกสายอากาศที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y'' แบบสมมาตร แต่ถ้า $E_{\theta''}(0)\neq E_{\phi''}(0)$ สายอากาศจะมีโพลาไรเซชันในแนว x'' ซึ่งเป็นโพลาไรเซชันไขว้ (cross polarization) เกิดขึ้นในทิศทาง $\theta''=0$ สายอากาศที่มีคุณสมบัติเช่นนี้เป็นเพียงสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้น และถ้า $E_{\theta''}(0)=E_{\phi''}(0)$ แต่ $E_{\theta''}(\theta'')\neq E_{\phi''}(\theta'')$ ที่ $\theta''\neq 0$ เราเรียกสายอากาศที่มีคุณสมบัติแบบนี้ว่า สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y'' แบบไม่สมมาตร

ในทำนองเดียวกัน สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว x'' องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับ x'' (y'' กับ z'') เป็นศูนย์ในทิศทางตามแนวเล็งหลัก ($\theta''=0,\phi''$ ใด ๆ กับ $\theta''=\frac{\pi}{2},\phi''=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$) ซึ่งเมื่อพิจารณาในทิศทาง $\theta''=0,\phi''$ ใด ๆ

$$\begin{aligned}E_{y''}(0,\phi'')&=E_{\theta''}(0,\phi'')\sin\phi''+E_{\phi''}(0,\phi'')\cos\phi''=0\\E_{z''}(0,\phi'')&=-E_{\theta''}(0,\phi'')\sin 0=0\end{aligned} \tag{3.6ก}$$

และในทิศทาง $\theta''=\frac{\pi}{2},\phi''=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$$\begin{aligned}E_{y''}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})&=E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+E_{\phi''}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}=0\\E_{z''}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})&=-E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}=0\\E_{y''}(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})&=E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}+E_{\phi''}(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\cos\frac{3\pi}{2}=0\\E_{z''}(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})&=-E_{\theta''}(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}=0\end{aligned} \tag{3.6ข}$$

เนื่องจาก θ'' กับ ϕ'' เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $E_{\theta''}(\theta'',\phi'')=E_{\theta''}(\theta'')E_{\theta''}(\phi'')$ และ $E_{\phi''}(\theta'',\phi'')=E_{\phi''}(\theta'')E_{\phi''}(\phi'')$ ทำให้สมการ (3.6ก) เขียนใหม่ได้เป็น

$$E_{\theta''}(0)E_{\theta''}(\phi'')\sin\phi''=-E_{\phi''}(0)E_{\phi''}(\phi'')\cos\phi''$$

ซึ่งเป็นจริงทุก ϕ'' เมื่อ

$$E_{\theta''}(0) = E_{\phi''}(0) \tag{3.7ก}$$

$$E_{\theta''}(\phi'')\sin\phi'' = -E_{\phi''}(\phi'')\cos\phi'' \tag{3.7ข}$$

และสมการ (3.6ข) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2})E_{\theta''}(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ -E_{\theta''}(\frac{\pi}{2})E_{\theta''}(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{aligned} \tag{3.7ค}$$

จากสมการ (3.7ก-ค) ทำให้ได้ $E_{\theta''}(0) = E_{\phi''}(0)$, $E_{\theta''}(\phi'') = \cos\phi''$ และ $E_{\phi''}(\phi'') = -\sin\phi''$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.1) จะได้

$$\bar{E}^{feed}(r'',\theta'',\phi'') = \left[E_{\theta''}(\theta'')\cos\phi''\bar{a}_{\theta''} - E_{\phi''}(\theta'')\sin\phi''\bar{a}_{\phi''}\right]\frac{e^{-jk_0r''}}{r''} \tag{3.8}$$

โดยที่ $E_{\theta''}(\theta'')$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ $\phi'' = 0$ หรือที่เรียกว่าระนาบสนามไฟฟ้าเนื่องจากมีเพียงสนามไฟฟ้าวางตัวอยู่ในระนาบนั้นและ $E_{\phi''}(\theta'')$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ $\phi'' = \pi/2$ หรือที่เรียกว่าระนาบสนามแม่เหล็กเนื่องจากมีเพียงสนามแม่เหล็กวางตัวอยู่ในระนาบนั้น

สมการ (3.8) แสดงถึงแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว x'' ซึ่งถ้า $E_{\theta''}(\theta'') = E_{\phi''}(\theta'')$ สำหรับทุก ๆ θ'' เราเรียกสายอากาศที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว x'' แบบสมมาตร แต่ถ้า $E_{\theta''}(0) \neq E_{\phi''}(0)$ สายอากาศจะมีโพลาไรเซชันในแนว y'' ซึ่งเป็นโพลาไรเซชันไขว้ (cross polarization) เกิดขึ้นในทิศทาง $\theta'' = 0$ สายอากาศที่มีคุณสมบัติเช่นนี้เป็นเพียงสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้น และถ้า $E_{\theta''}(0) = E_{\phi''}(0)$ แต่ $E_{\theta''}(\theta'') \neq E_{\phi''}(\theta'')$ ที่ $\theta'' \neq 0$ เราเรียกสายอากาศที่มีคุณสมบัติแบบนี้ว่า สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว x'' แบบไม่สมมาตร

จากการวิเคราะห์ข้างต้น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังสมการ (3.9)

$$\bar{E}^{feed}(r'',\theta'',\phi'') = \left[f_E(\theta'')\sin(\phi'' - \phi_{pol})\bar{a}_{\theta''} + f_H(\theta'')\cos(\phi'' - \phi_{pol})\,\bar{a}_{\phi''}\right]\frac{e^{-jk_0r''}}{r''} \tag{3.9}$$

โดยที่ ϕ_{pol} คือ ค่าปัจจัยที่ใช้กำหนดโพลาไรเซชัน ซึ่ง $\phi_{pol} = 0$ โพลาไรเซชันของสายอากาศอยู่ในแนวแกน y'' และ $\phi_{pol} = -\pi/2$ โพลาไรเซชันของสายอากาศอยู่ในแนวแกน x'' และ $f_E(\theta'')$ คือ สนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ $\phi'' - \phi_{pol} = \pi/2$ และ $f_H(\theta'')$ คือ สนามไฟฟ้าที่เกิดจากการวัดรอบแกนของสายอากาศในระนาบ

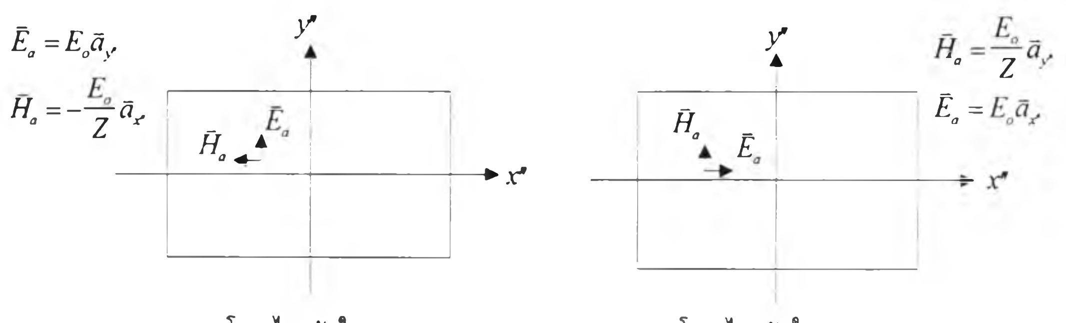
$\phi' - \phi_{pol} = 0$ ซึ่งเป็นค่าปัจจัยที่ใช้กำหนดชนิดของสายอากาศ สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นและมี $f_E(\theta')$ กับ $f_H(\theta')$ ดังต่อไปนี้มาเป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

1. เมื่อ $f_E(\theta') = \cos^{q_E}\theta'$ และ $f_H(\theta') = \cos^{q_H}\theta'$ ซึ่งในที่นี้เรียกว่า สายอากาศชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ (raised cosine)

2. เมื่อ $f_E(\theta') = \cos\theta'$ และ $f_H(\theta') = 1$ เป็นกรณีเฉพาะของสายอากาศชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ ($q_E = 1$ และ $q_H = 0$) ซึ่งมีแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเหมือนกับสายอากาศชนิดไดโพลขนาดสั้นมาก (infinitesimal dipole) ดังนั้นจึงเรียกว่า สายอากาศชนิดไดโพลขนาดสั้นมาก (R. E. Collin, 1985)

3. เมื่อ $f_E(\theta') = 1$ และ $f_H(\theta') = 1$ เป็นกรณีเฉพาะของสายอากาศชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ ($q_E = 0$ และ $q_H = 0$) โดยในที่นี้เรียกว่า สายอากาศชนิดโคไซน์กำลังศูนย์หรือสายอากาศชนิดเอกรูป (uniform)

4. เมื่อ $f_E(\theta') = 1 + \cos\theta'$ และ $f_H(\theta') = 1 + \cos\theta'$ เรียกว่า สายอากาศชนิดฮอยเกนหรือแหล่งกำเนิดแบบฮอยเกน (Huygen source) ซึ่งเกิดจากมีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กวางตัวขนานกับช่องเปิดขนาดเล็กดังรูป 3.2 (R. E. Collin, 1985)



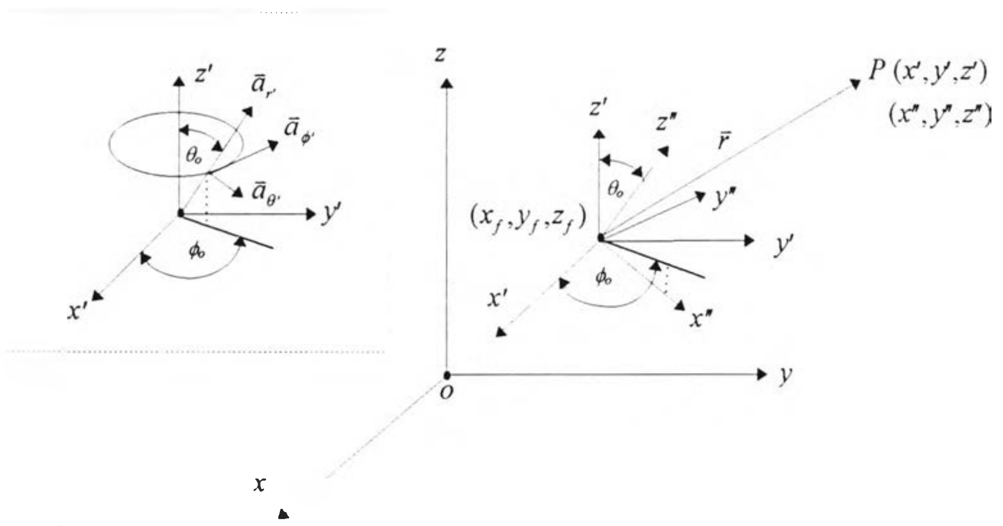
ก) โพลาไรเซชันในแนว y' ข) โพลาไรเซชันในแนว x'

รูป 3.2 สายอากาศชนิดฮอยเกนหรือแหล่งกำเนิดแบบฮอยเกน

โดยปกติแล้วสายอากาศป้อนกำลังคลื่นสามารถวางตัวที่ตำแหน่งและในทิศทางใด ๆ ก็ได้ ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกจึงประกอบด้วยระบบพิกัดหลัก ๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ ระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น ระบบพิกัดของจานสะท้อน และระบบพิกัดของการแผ่พลังงาน ในวิทยานิพนธ์นี้ระบบพิกัดของการแผ่พลังงานและระบบพิกัดของจานสะท้อนเป็นระบบพิกัดเดียวกัน ส่วนระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นไม่สามารถใช้ระบบพิกัดเดียวกันได้ ดังนั้นในการวิเคราะห์หาสนามจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นจึงต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดที่ใช้ทั้งสอง ซึ่งสามารถทำได้โดยแปลงระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นให้อยู่ในระบบพิกัดของจานสะท้อน ในที่นี้กำหนดให้ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน xyz เป็นระบบพิกัดของจานสะท้อนและระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $x'y'z'$ เป็นระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นดังรูป 3.3

จากรูป 3.3 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $x'y'z'$ เกิดจากการแปลงระบบพิกัด xyz โดยการย้ายจุดกำเนิดของระบบพิกัด xyz ไปอยู่ที่ (x_f, y_f, z_f) ทำให้เกิดระบบพิกัด $x'y'z'$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับระบบพิกัด xyz เป็นดังสมการ (3.10)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_f \\ y - y_f \\ z - z_f \end{bmatrix} \tag{3.10}$$



รูป 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดของจานสะท้อน xyz กับระบบพิกัดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น $x''y''z''$

และระบบพิกัด $x''y''z''$ เกิดจากหมุนแกน z' รอบแกน y เป็นมุม θ_o ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และหมุนแกน x' รอบแกน z เป็นมุม ϕ_o ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด $x''y''z''$ กับระบบพิกัด $x'y'z'$ สามารถพิจารณาจากเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ที่จุด P ใด ๆ ของระบบพิกัดทั้งสองดังนี้

จากรูป 3.3 เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ที่จุด P ใด ๆ ของระบบพิกัดทั้งสองเป็นดังสมการ (3.11)

$$\bar{r} = x'\bar{a}_{x'} + y'\bar{a}_{y'} + z'\bar{a}_{z'} = x''\bar{a}_{x''} + y''\bar{a}_{y''} + z''\bar{a}_{z''} \tag{3.11}$$

และเนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน $\bar{a}_{x''},\bar{a}_{y''},\bar{a}_{z''}$ ของระบบพิกัด $x''y''z''$ มีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน $\bar{a}_{r'},\bar{a}_{\theta'},\bar{a}_{\phi'}$ ของระบบพิกัดทรงกลม $r'\theta'\phi'$ ของระบบพิกัดจานสะท้อนในทิศทาง (θ_o,ϕ_o) คือ

$$\bar{a}_{x''} = \bar{a}_{\theta'}, \quad \bar{a}_{y''} = \bar{a}_{\phi'}, \quad \bar{a}_{z''} = \bar{a}_{r'} \tag{3.12}$$

จากสมการ (3.11) (3.12) และความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดทรงกลม $r'\theta'\phi'$ กับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $x'y'z'$ ในภาคผนวก ก. จะได้ระบบพิกัด $x''y''z''$ มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัด $x'y'z'$ เป็น

$$\begin{aligned} x'' &= \bar{r}\cdot\bar{a}_{x''} = x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{x''}) + y'(\bar{a}_{y'}\cdot\bar{a}_{x''}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{x''}) \\ &= x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{\theta'}) + y'(\bar{a}_{y'}\cdot\bar{a}_{\theta'}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{\theta'}) \\ &= x'\cos\theta_o\cos\phi_o + y'\cos\theta_o\sin\phi_o - z'\sin\theta_o \end{aligned} \tag{3.13ก}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \bar{r}\cdot\bar{a}_{y''} = x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{y''}) + y'(\bar{a}_{y'}\cdot\bar{a}_{y''}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{y''}) \\ &= x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{\phi'}) + y'(\bar{a}_{y'}\cdot\bar{a}_{\phi'}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{\phi'}) \\ &= -x'\sin\phi_o + y'\cos\phi_o \end{aligned} \tag{3.13ข}$$

$$z'' = \bar{r}\cdot\bar{a}_{z''} = x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{z''}) + y'(\bar{a}_{y}\cdot\bar{a}_{z''}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{z''})$$
$$= x'(\bar{a}_{x'}\cdot\bar{a}_{r'}) + y'(\bar{a}_{y}\cdot\bar{a}_{r'}) + z'(\bar{a}_{z'}\cdot\bar{a}_{r'}) \quad (3.13ค)$$
$$= x'\sin\theta_o\cos\phi_o + y'\sin\theta_o\sin\phi_o + z'\cos\theta_o$$

สมการ (3.13ก-ค) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o\cos\phi_o & \cos\theta_o\sin\phi_o & -\sin\theta_o \\ -\sin\phi_o & \cos\phi_o & 0 \\ \sin\theta_o\cos\phi_o & \sin\theta_o\sin\phi_o & \cos\theta_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

เมื่อแทนสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.14) ระบบพิกัดของระบบสายอากาศป้อนกำลังคลื่น $x''y''z''$ มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดของจานสะท้อน xyz เป็น

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o\cos\phi_o & \cos\theta_o\sin\phi_o & -\sin\theta_o \\ -\sin\phi_o & \cos\phi_o & 0 \\ \sin\theta_o\cos\phi_o & \sin\theta_o\sin\phi_o & \cos\theta_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_f \\ y - y_f \\ z - z_f \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

และเมื่อแปลงแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นแบบเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกลม $r''\theta''\phi''$ ดังสมการ (3.9) ไปอยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $x''y''z''$ จะได้

$$\begin{bmatrix} E_{x''}^{feed}(x,y,z) \\ E_{y''}^{feed}(x,y,z) \\ E_{z''}^{feed}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta''\cos\phi'' & \cos\theta''\cos\phi'' & -\sin\phi'' \\ \sin\theta''\sin\phi'' & \cos\theta''\sin\phi'' & \cos\phi'' \\ \cos\theta'' & -\sin\theta'' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ f_E(\theta'')\sin(\phi''-\phi_{pol}) \\ f_H(\theta'')\cos(\phi''-\phi_{pol}) \end{bmatrix}\frac{e^{-jkr''}}{r''} \quad (3.16)$$

โดยที่ $r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$, $\theta'' = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x''^2 + y''^2}}{z''}\right)$ และ $\phi'' = \tan^{-1}\left(\frac{y''}{x''}\right)$ และจากรูป 3.3 $\bar{a}_{x'} = \bar{a}_x$, $\bar{a}_{y'} = \bar{a}_y$ และ $\bar{a}_{z'} = \bar{a}_z$ ดังนั้นจากสมการ (3.12) สนามไฟฟ้าในระบบพิกัด $x''y''z''$ สามารถเขียนอยู่ในระบบพิกัดของจานสะท้อน xyz ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} E_{x}^{feed}(x,y,z) \\ E_{y}^{feed}(x,y,z) \\ E_{z}^{feed}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o\cos\phi_o & -\sin\phi_o & \sin\theta_o\cos\phi_o \\ \cos\theta_o\sin\phi_o & \cos\phi_o & \sin\theta_o\sin\phi_o \\ -\sin\theta_o & 0 & \cos\theta_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{x''}^{feed}(x,y,z) \\ E_{y''}^{feed}(x,y,z) \\ E_{z''}^{feed}(x,y,z) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

จากการแปลงระบบพิกัดข้างต้น สังเกตว่าแกน y'' ของระบบพิกัดสายอากาศป้อนกำลังคลื่นนั้นวางตัวอยู่ในระนาบ xy เท่านั้น ซึ่งการกำหนดระบบพิกัดสายอากาศป้อนกำลังคลื่นแบบนี้มีความเหมาะสมสำหรับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y ที่นำมาใช้วิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ เนื่องจากสายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว y เกิดจาก

การใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว $y''(\phi_{pol}=0)$ และภาพฉายของแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นบนระนาบ xy ทำมุม $\phi_o=0$ กับแกน x แกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นสามารถทำมุมกับแกน z เป็นมุม θ_o ใด ๆ ดังแกน $x''y''z''$ ที่แสดงในรูป 2.8 และ 2.9 ดังนั้นทำให้สามารถหาสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y ซึ่งมีการวางตัวอยู่ที่ตำแหน่ง (x_f, y_f, z_f) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน xyz และแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นทำมุมกับแกน z เป็นมุม θ_o ในระบบพิกัดของจานสะท้อนและมีทิศทางอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ ได้ดังสมการ (3.16)

นอกจากการแปลงระบบพิกัดเพื่อหาสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในระบบพิกัดจานสะท้อนที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว การวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกยังมีค่าปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่สำคัญอย่างหนึ่งในการดูสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกคือ ระดับความเรียวที่ขอบ (edge taper) ของจานสะท้อน

ระดับความเรียวที่ขอบของจานสะท้อนเป็นค่าปัจจัยที่กำหนดจากระดับความเข้มของสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ขอบของจานสะท้อนเปรียบเทียบกับระดับความเข้มของสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในทิศทางตามแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่จุดบนพื้นผิวสะท้อนดังสมการ (3.18)

$$ET(dB) = 20\log\left(\frac{\left|\vec{E}^{feed}_{edge}\right|}{\left|\vec{E}^{feed}_{boresight}\right|}\right) \tag{3.18}$$

โดยที่ $\vec{E}^{feed}_{edge}$ คือ สนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ขอบของจานสะท้อน และ $\vec{E}^{feed}_{boresight}$ คือ สนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในทิศทางแนวเล็งหลักของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่จุดบนพื้นผิวสะท้อน

จากข้อกำหนดของระดับความเรียวที่ขอบข้างต้น เมื่อพิจารณาระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรที่ใช้วิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ดังรูป 2.8 สายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางตัวอยู่ที่จุดโฟกัสซึ่งเป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดจานสะท้อน $(x_f=0, y_f=0, z_f=0)$ โดยแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นทำมุมกับแกน z เป็นมุม $\theta_o=\pi$ และภาพฉายของแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นบนระนาบ xy ทำมุม $\phi_o=0$ กับแกน x ดังนั้นระดับความเรียวที่ขอบในระนาบ xz จึงเป็น

$$\begin{aligned} ET(dB) &= 20\log\left(\frac{\left|\vec{E}^{feed}(r_e,\Psi_o,0)\right|}{\left|\vec{E}^{feed}(r_o,0,0)\right|}\right) \\ &= 20\log\left(\frac{\sqrt{\left|f_E(\Psi_o)\right|^2\sin^2(\phi_{pol})+\left|f_H(\Psi_o)\right|^2\cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{\left|f_E(0)\right|^2\sin^2(\phi_{pol})+\left|f_H(0)\right|^2\cos^2(\phi_{pol})}}\frac{r_o}{r_e}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

จากสมการ (2.2ข) $r_o=\dfrac{2f}{1+\cos 0}=f$ คือ ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังจุดบนจานสะท้อนในทิศทางตามแนวแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น และ $r_e=\dfrac{2f}{1+\cos\Psi_o}$ คือ ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังจุดขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.19) จะได้

$$ET(dB) = 20\log\left(\frac{\sqrt{|f_E(\Psi_o)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(\Psi_o)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{|f_E(0)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(0)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}} \frac{1+\cos(\Psi_o/2)}{2}\right) \qquad (3.20)$$

โดยที่ Ψ_o คือ มุมกว้างของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรหาได้ดังสมการ (2.6) และสำหรับในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรที่ใช้ในการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ดังรูป 2.9 สายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางตัวอยู่ที่จุดโฟกัสซึ่งเป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดจานสะท้อน $(x_f = 0, y_f = 0, z_f = 0)$ โดยแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นทำมุมกับแกน z เป็นมุม $\theta_o = \pi - \Psi_f$ และภาพฉายของแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นบนระนาบ xy ทำมุม $\phi_o = 0$ กับแกน x ดังนั้นระดับความเรียวที่ขอบในระนาบ xz ที่ขอบบนและขอบล่างเป็น

$$\begin{aligned} ET_U(dB) &= 20\log\left(\frac{|\bar{E}^{feed}(r_U, \Psi_U - \Psi_f, 0)|}{|\bar{E}^{feed}(r_f, 0, 0)|}\right) \\ &= 20\log\left(\frac{\sqrt{|f_E(\Psi_U - \Psi_f)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(\Psi_U - \Psi_f)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{|f_E(0)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(0)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}} \frac{r_f}{r_U}\right) \end{aligned} \qquad (3.21ก)$$

$$\begin{aligned} ET_L(dB) &= 20\log\left(\frac{|\bar{E}^{feed}(r_L, \Psi_f - \Psi_L, 0)|}{|\bar{E}^{feed}(r_f, 0, 0)|}\right) \\ &= 20\log\left(\frac{\sqrt{|f_E(\Psi_f - \Psi_L)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(\Psi_f - \Psi_L)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{|f_E(0)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(0)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}} \frac{r_f}{r_L}\right) \end{aligned} \qquad (3.21ข)$$

จากสมการ (2.2ข) $r_f = \dfrac{2f}{1+\cos\Psi_f}$ คือ ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังจุดบนจานสะท้อนในทิศทางตามแนวแกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น $r_U = \dfrac{2f}{1+\cos\Psi_U}$ คือ ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังจุดขอบบนในระนาบ xz ของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร และ $r_L = \dfrac{2f}{1+\cos\Psi_L}$ คือ ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังจุดขอบล่างในระนาบ xz ของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.21ก-ข) จะได้

$$ET_U(dB) = 20\log\left(\frac{\sqrt{|f_E(\Psi_U - \Psi_f)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(\Psi_U - \Psi_f)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{|f_E(0)|^2 \sin^2(\phi_{pol}) + |f_H(0)|^2 \cos^2(\phi_{pol})}} \frac{1+\cos\Psi_U}{1+\cos\Psi_f}\right) \qquad (3.22ก)$$

$$ET_L(dB) = 20\log\left(\frac{\sqrt{\left|f_E(\Psi_f-\Psi_L)\right|^2\sin^2(\phi_{pol})+\left|f_H(\Psi_f-\Psi_L)\right|^2\cos^2(\phi_{pol})}}{\sqrt{\left|f_E(0)\right|^2\sin^2(\phi_{pol})+\left|f_H(0)\right|^2\cos^2(\phi_{pol})}}\frac{1+\cos\Psi_L}{1+\cos\Psi_f}\right) \quad (3.22ข)$$

โดยที่ Ψ_f คือ มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น Ψ_U,Ψ_L คือ มุมกว้างของขอบบนและขอบล่างของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรในระนาบออฟเซต ตามลำดับ

ระดับความเรียวที่ขอบที่กล่าวไว้ข้างต้นเป็นค่าปัจจัยที่ใช้เป็นดูผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก ซึ่งได้แสดงไว้ในผลการวิเคราะห์ในบทที่ 4 ต่อไป

<u>กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต</u>

กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเป็นวิธีประมาณเชิงวิเคราะห์ในย่านความถี่สูงสำหรับการศึกษาพฤติกรรมของคลื่นในตัวกลาง เช่น การตกกระทบ การสะท้อน และการหักเหที่ผิวรอยต่อ โดยใช้แนวความคิดเกี่ยวกับรังสีมาอธิบาย การเคลื่อนที่ของรังสีและการเคลื่อนไปของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำรังสีเป็นแนวความคิดสำคัญในการวิเคราะห์คลื่นที่แผ่กระจายในชั้นบรรยากาศเมื่อความยาวคลื่นเข้าใกล้ศูนย์ ($\lambda \to 0$)

ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมของคลื่นที่พื้นผิวจานสะท้อนของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในวิทยานิพนธ์นี้ ขนาดของจานสะท้อนจะมีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับความยาวคลื่นที่ใช้งาน หรือกล่าวคือความยาวคลื่นที่ใช้งานมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเทียบกับขนาดของพื้นผิวจานสะท้อนที่พิจารณา ($\lambda/D \to 0$) ทำให้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนระนาบหน้าจานที่เกิดจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นแผ่พลังงานมาตกกระทบบนพื้นผิวจานสะท้อนแล้วเกิดการสะท้อนมายังระนาบหน้าจานสามารถหาได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต

กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตแบบดั้งเดิมนั้นถูกพัฒนาเพื่อวิเคราะห์การเคลื่อนไปของแสงซึ่งมีความถี่สูงพิเศษ โดยไม่จำเป็นต้องพิจารณาธรรมชาติความเป็นคลื่นของแสง โดยการเคลื่อนที่และการส่งผ่านพลังงานจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยหลักการพื้นฐาน 2 ประการที่อธิบายการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในลักษณะของรังสีคือ

1. หลักการของแฟร์มาต์ (Fermat's principle) เป็นหลักการที่ทำให้ทราบว่าคลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางใด กล่าวไว้ว่า แนวรังสีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ P_1 กับ P_2 นั้นเป็นไปตามเส้นทางที่ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด หรือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปในเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดในการเดินทาง ซึ่งหลักการดังกล่าวนี้เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} n(s)ds = 0 \quad (3.23)$$

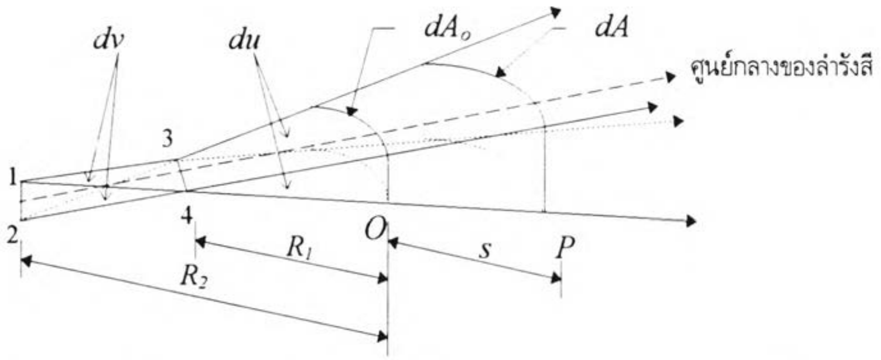
โดยที่ δ แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับ s ซึ่งเป็นระยะทางที่รังสีเคลื่อนไปและ $n(s)$ คือ ดัชนีหักเหของตัวกลางซึ่งเท่ากับ $k(s)/k_0$ และบ่งบอกว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของรังสีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ P_1 กับ P_2 ต้องคงตัว (stationary) เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ ในทิศทางที่รังสีเคลื่อนไป

2. หลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ บ่งบอกถึงการลดทอนความเข้มของคลื่นที่เคลื่อนไป โดยมีหลักว่ากำลังงานที่ส่งผ่านภาคตัดขวางใด ๆ ภายในลำรังสีเล็ก ๆ จะคงที่ตลอดความยาวของลำรังสีนั้น

หลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ นี้ สามารถอธิบายความเข้มของคลื่นที่ตำแหน่งต่าง ๆ โดยสมมุติว่าคลื่นที่เคลื่อนที่ไปถูกแทนด้วยลำรังสีดังรูป 3.4 โดยที่หน้าคลื่นของคลื่นถูกกำหนดโดยจุดต่าง ๆ บนพื้นที่หน้าตัดของลำรังสี

และรัศมีความโค้งหลัก (principal radii) ของหน้าคลื่นถูกกำหนดด้วย R_1 และ R_2 ทำให้ลำรังสีนี้สามารถใช้แทนคลื่นที่มีหน้าคลื่นแบบใด ๆ ได้ เช่น

1. ถ้ารัศมีความโค้งหลัก R_1 และ R_2 เท่ากัน ลำรังสีนี้ใช้แทนคลื่นที่มีหน้าคลื่นแบบทรงกลม
2. ถ้ารัศมีความโค้งหลัก R_1 หรือ R_2 มีค่าเป็นอนันต์ ลำรังสีนี้ใช้แทนคลื่นที่มีหน้าคลื่นแบบทรงกระบอก
3. ถ้ารัศมีความโค้งหลัก R_1 และ R_2 มีค่าเป็นอนันต์ ลำรังสีนี้ใช้แทนคลื่นที่มีหน้าคลื่นแบบระนาบ



รูป 3.4 ลำรังสีที่ใช้อธิบายความเข้มของคลื่นที่ตำแหน่งใด ๆ โดยหลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ

จากรูป 3.4 และหลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ กำลังงานที่ผ่านภาคตัดขวาง dA_o กับ dA มีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$S_o dA_o = S dA \tag{3.24}$$

โดยที่ S_o และ S คือ ความหนาแน่นของกำลังงานที่จุด O และจุด P ตามลำดับ

สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้น ความหนาแน่นของกำลังงาน $S(\bar{r})$ สามารถหาได้จากความเข้มสนามไฟฟ้า $\bar{E}(\bar{r})$ ดังสมการ (3.25)

$$S(\bar{r}) = \frac{|\bar{E}(\bar{r})|^2}{2Z} = \frac{|\bar{E}(\bar{r})|^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tag{3.25}$$

โดยที่ $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ คือ อิมพีแดนซ์ลักษณะสมบัติของตัวกลางในบริเวณการแผ่กระจายคลื่น

ถ้าความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด O และ P เป็น $\bar{E}_O$ และ $\bar{E}_P$ ตามลำดับ ดังนั้นกำลังงานที่ผ่านพื้นที่ภาคตัดขวาง dA_o กับ dA เท่ากับ $\frac{|\bar{E}_O|^2 R_1 du R_2 dv}{2Z}$ และ $\frac{|\bar{E}_P|^2 (R_1+s)du(R_2+s)dv}{2Z}$ ตามลำดับ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.24) จะได้

$$|\bar{E}_P| = |\bar{E}_O|\sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1+s)(R_2+s)}} \tag{3.26}$$

จากสมการ (3.26) พบว่า ความเข้มของสนามไฟฟ้าที่จุดใด ๆ แปรผันตาม $\sqrt{\dfrac{R_1R_2}{(R_1+s)(R_2+s)}}$ ซึ่งเรียกว่า ตัวประกอบการลดทอนเชิงอวกาศ (spatial attenuation factor)

หลักการพื้นฐานทั้ง 2 ที่กล่าวมาไม่สามารถบ่งบอกข้อมูลเกี่ยวกับเฟสและโพลาไรเซชันของคลื่น ทำให้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตแบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นในตัวกลางได้ครบถ้วน เนื่องจากข้อมูลเกี่ยวกับโพลาไรเซชันและเฟสเป็นคุณสมบัติสำคัญที่ต้องรวมเข้าไปพิจารณาพฤติกรรมของคลื่น ดังนั้นกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตแบบดั้งเดิมจึงถูกปรับปรุงเพื่อให้สามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นได้อย่างครบถ้วน โดยทำการหาผลเฉลยของสมการแมกซ์เวลล์และสมการคลื่นด้วยวิธีการประมาณเชิงวิเคราะห์ในย่านความถี่สูงหรือเมื่อความถี่เชิงมุมเข้าใกล้ค่าอนันต์ ซึ่ง Luneberg และ Kline สมมุติว่าผลเฉลยดังกล่าวอยู่ในรูปอนุกรมที่เป็นส่วนกลับของความถี่เชิงมุมกำลังต่าง ๆ ดังนี้

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m}e^{-jk_0\psi(\bar{r})} \qquad (3.27ก)$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m}e^{-jk_0\psi(\bar{r})} \qquad (3.27ข)$$

โดยที่ k_0 เท่ากับ $\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ และถ้าตัวกลางที่คลื่นเคลื่อนที่ไปเป็นตัวกลางแบบไอโซทรอปิกที่มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า (ε) และค่าความซึมซาบทางแม่เหล็ก (μ) เป็นฟังก์ชันขององค์ประกอบเชิงตำแหน่ง x, y และ z และเมื่อแทนผลเฉลยในสมการ (3.27ก-ข) ลงในสมการแมกซ์เวลล์ในบริเวณปราศจากแหล่งกำเนิดดังสมการ (3.28ก-ง)

$$\nabla\times\bar{E}(\bar{r},\omega) = -j\omega\mu\bar{H}(\bar{r},\omega) \qquad (3.28ก)$$

$$\nabla\times\bar{H}(\bar{r},\omega) = j\omega\varepsilon\bar{E}(\bar{r},\omega) \qquad (3.28ข)$$

$$\nabla\cdot\bar{D} = 0 \qquad (3.28ค)$$

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0 \qquad (3.28ง)$$

และใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\times\Psi\bar{A} \equiv \nabla\Psi\times\bar{A} + \Psi\nabla\times\bar{A}$ และ $\nabla\Psi\times\bar{A} \equiv -\bar{A}\times\nabla\Psi$ จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\times\bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} + \frac{jk_0\bar{E}_m(\bar{r})\times\nabla\psi(\bar{r})}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi(\bar{r})} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-j\omega\mu\bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m}\,e^{-jk_0\psi(\bar{r})} \qquad (3.29ก)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\times\bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} + \frac{jk_0\bar{H}_m(\bar{r})\times\nabla\psi(\bar{r})}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi(\bar{r})} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-j\omega\varepsilon\bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m}\,e^{-jk_0\psi(\bar{r})} \qquad (3.29ข)$$

จาก $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ และ $\bar{B} = \mu\bar{H}$ และใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\cdot\Psi\bar{A} \equiv \nabla\Psi\cdot\bar{A} + \Psi\nabla\cdot\bar{A}$ กับสมการ (3.28ค-ง) จะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}-\frac{jk_0\varepsilon\vec{E}_m(\vec{r})\cdot\nabla\psi(\vec{r})}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi(\vec{r})}=0$$

หรือ
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\varepsilon\cdot\vec{E}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}+\frac{\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}-\frac{jk_0\varepsilon\vec{E}_m(\vec{r})\cdot\nabla\psi(\vec{r})}{(j\omega)^m}\right]=0 \tag{3.29ค}$$

และ
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\cdot\mu\vec{H}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}-\frac{jk_0\mu\vec{H}_m(\vec{r})\cdot\nabla\psi(\vec{r})}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi(\vec{r})}=0$$

หรือ
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\mu\cdot\vec{H}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}+\frac{\mu\nabla\cdot\vec{H}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m}-\frac{jk_0\mu\vec{H}_m(\vec{r})\cdot\nabla\psi(\vec{r})}{(j\omega)^m}\right]=0 \tag{3.29ง}$$

จากสมการ (3.29ก-ง) เมื่อกระจายอนุกรมเพียงพจน์แรก ๆ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของความถี่เชิงมุมเท่ากันในสมการ (3.29ก) จะได้

$$k_0\vec{E}_0\times\nabla\psi=-\omega\mu\vec{H}_0 \tag{3.30ก}$$

$$\nabla\times\vec{E}_0+\frac{k_0}{\omega}\vec{E}_1\times\nabla\psi=-\mu\vec{H}_1 \tag{3.30ข}$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (3.29ข) จะเป็น

$$k_0\vec{H}_0\times\nabla\psi=-\omega\varepsilon\vec{E}_0 \tag{3.31ก}$$

$$\nabla\times\vec{H}_0+\frac{k_0}{\omega}\vec{H}_1\times\nabla\psi=-\varepsilon\vec{E}_1 \tag{3.31ข}$$

และจากสมการ (3.29ค) จะได้

$$-jk_0\varepsilon\vec{E}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{3.32ก}$$

$$\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}_0-\frac{k_0}{\omega}\varepsilon\vec{E}_1\cdot\nabla\psi+\vec{E}_0\cdot\nabla\varepsilon=0 \tag{3.32ข}$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (3.29ง) จะเป็น

$$-jk_0\mu\vec{H}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{3.33ก}$$

$$\mu\nabla\cdot\bar{H}_0-\frac{k_0}{\omega}\mu\bar{H}_1\cdot\nabla\psi+\bar{H}_0\cdot\nabla\mu=0 \tag{3.33ข}$$

จากการกระจายอนุกรมของผลเฉลยข้างต้นพบว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เป็นผลเฉลยนั้นเกิดจากการแก้สมการหาผลเฉลยในลำดับแรก ๆ ก่อนแล้วแทนผลเฉลยในลำดับแรก ๆ ลงไปเพื่อหาผลเฉลยในลำดับต่อ ๆ ไป ซึ่งผลเฉลยแม่นตรงเกิดจากการรวมผลเฉลยในลำดับต่าง ๆ ที่ได้ตามสมการ (3.27ก) และ (3.27ข) แต่สำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในลำดับที่ศูนย์ของผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้นที่ถูกนำมาใช้อธิบายพฤติกรรมต่าง ๆ ของคลื่น ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมการ (3.30ก-3.33ก) พบว่า

$$\bar{E}_0\times\nabla\psi=-\frac{\omega\mu}{k_0}\bar{H}_0 \tag{3.34ก}$$

$$\bar{H}_0\times\nabla\psi=\frac{\omega\varepsilon}{k_0}\bar{E}_0 \tag{3.34ข}$$

$$\bar{E}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{3.34ค}$$

$$\bar{H}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{3.34ง}$$

จากสมการ (3.34ก-ง) พบว่า เวกเตอร์ $\bar{E}_0$, $\bar{H}_0$ และ $\nabla\psi$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือกล่าวคือ สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และ $\nabla\psi$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และเนื่องจากการแปรเปลี่ยนของเฟสจากสมการ (3.27ก-ง) ขึ้นอยู่กับพื้นผิว ψ ดังนั้นหน้าคลื่นหรือแนวที่เฟสคงที่ถูกกำหนดด้วยพื้นผิว ψ เท่ากับค่าคงที่เมื่อ ψ เป็นจำนวนจริง หรือกำหนดด้วยส่วนจริงของ ψ เท่ากับค่าคงที่เมื่อ ψ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และทิศทางการส่งผ่านพลังงานคลื่นสามารถพิจารณาได้จากพอยน์ติงเวกเตอร์แบบเชิงซ้อน ดังนั้นจากสมการ (3.34ก) จะได้

$$\bar{E}_0\times\bar{H}_0^*=\bar{E}_0\times(-\frac{k_0}{\omega\mu^*}\bar{E}_0^*\times\nabla\psi^*) \tag{3.35}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})\equiv(\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B}-(\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$ และสมการ (3.34ค) $\bar{E}_0\cdot\nabla\psi^*=0$ ทำให้สมการ (3.35) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\bar{E}_0\times\bar{H}_0^*=-\frac{k_0}{\omega\mu^*}\left[\left(\bar{E}_0\cdot\nabla\psi^*\right)\bar{E}_0^*-\left(\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*\right)\nabla\psi^*\right]=\frac{k_0}{\omega\mu^*}\left(\bar{E}_0\cdot\bar{E}_0^*\right)\nabla\psi^* \tag{3.36}$$

จากสมการ (3.36) พบว่า พอยน์ติงเวกเตอร์อยู่ในทิศทางของ $\nabla\psi^*$ ดังนั้นการส่งผ่านพลังงานคลื่นจะอยู่ในทิศทางของ $\nabla\psi$ เมื่อ ψ เป็นจำนวนจริง และเนื่องจาก ψ เป็นฟังก์ชันพื้นผิว ดังนั้น $\nabla\psi$ คือ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ψ ซึ่งทำให้ทิศทางการส่งผ่านพลังงานคลื่นตั้งฉากกับพื้นผิวหรือตั้งฉากกับหน้าคลื่น แต่สำหรับในตัวกลางแบบมีการสูญเสีย (lossy media) ค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ และค่าความซาบซึมทางแม่เหล็ก $\mu = \mu' - j\mu''$ และ $\psi = \psi_r - j\psi_i$ นั้นเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นในการบ่งบอกถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของรังสีหรือการส่งผ่านพลังงานคลื่นในตัวกลางแบบมีการสูญเสีย พิจารณาจากส่วนจริงของสมการ (3.36)

$$\mathrm{Re}\left[\bar{E}_0 \times \bar{H}_0^*\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{k_0}{\omega\mu^*}\left(\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*\right)\nabla\psi^*\right] = \frac{k_0}{\omega\mu\mu^*}\left(\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*\right)\left(\mu'\nabla\psi_r + \mu''\nabla\psi_i\right) \qquad (3.37)$$

และเมื่อดำเนินการ $\nabla\psi\times$ กับทั้งสองด้านของสมการ (3.34ก) จะได้

$$\begin{aligned}\nabla\psi\times\left(\bar{E}_0 \times \nabla\psi\right) &= \left(\nabla\psi\cdot\nabla\psi\right)\bar{E}_0 - \left(\nabla\psi\cdot\bar{E}_0\right)\nabla\psi = \left(\nabla\psi\cdot\nabla\psi\right)\bar{E}_0 \\ &= -\frac{\omega\mu}{k_0}\nabla\psi\times\bar{H}_0 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{k_0^2}\bar{E}_0\end{aligned} \qquad (3.38)$$

ดังนั้น

$$\nabla\psi\cdot\nabla\psi = n^2 = \frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0} \qquad (3.39)$$

สมการ (3.39) เรียกว่า สมการอีโคนัล (eikonal equation) และ ψ เรียกว่า ฟังก์ชันอีโคนัล (eikonal function) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (3.39) ที่บ่งบอกได้เพียงทิศทางการเคลื่อนที่ของรังสีและหน้าคลื่น แต่ไม่สามารถบ่งบอกถึงการเคลื่อนที่ไปของสนามไฟฟ้า $\bar{E}_0$ และสนามแม่เหล็ก $\bar{H}_0$ ในตัวกลาง

การบ่งบอกการเคลื่อนที่ไปของสนามไฟฟ้า $\bar{E}_0$ และสนามแม่เหล็ก $\bar{H}_0$ ในตัวกลางนั้นหาได้จากการแทนผลเฉลยในสมการ (3.27ก-ข) ลงในสมการคลื่นซึ่งเกิดจากการดำเนินการ $\nabla\times$ กับทั้งสองด้านของสมการ (3.28ก) ดังนี้

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E} = \nabla\nabla\cdot\bar{E} - \nabla^2\bar{E} = \nabla\times(-j\omega\mu\bar{H}) = -j\omega\mu\nabla\times\bar{H} + j\omega\bar{H}\times\nabla\mu \qquad (3.40)$$

และแทนสมการ (3.28ข) ลงในสมการ (3.40) จะได้

$$\nabla\nabla\cdot\bar{E} - \nabla^2\bar{E} = -j\omega\mu\cdot\left(j\omega\varepsilon\bar{E}\right) - \frac{\nabla\times\bar{E}}{\mu}\times\nabla\mu$$

หรือ

$$\nabla^2\bar{E} - \nabla\nabla\cdot\bar{E} + \omega^2\mu\varepsilon\bar{E} + \frac{\nabla\mu}{\mu}\times(\nabla\times\bar{E}) = 0 \qquad (3.41)$$

แทนผลเฉลยจากสมการ (3.27ก) ลงในแต่ละพจน์ของสมการ (3.41) และจากเอกลักษณ์ไดแอดิก $\nabla(\Psi\bar{A}) \equiv \Psi\nabla\bar{A} + \bar{A}\nabla\Psi$ จะได้

$$\nabla^2\bar{E} = \nabla\cdot\nabla\bar{E} = \nabla\cdot\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\frac{\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi}\right\} \qquad (3.42)$$

จากเอกลักษณ์ไดแอดิก $\nabla\cdot(\Psi\bar{\bar{A}}) \equiv \Psi\nabla\cdot\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{A}}\cdot\nabla\Psi$ สมการ (3.42) เขียนใหม่เป็น

$$\nabla^2\bar{E} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{e^{-jk_0\psi}\nabla\cdot\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - \frac{jk_0\nabla\psi e^{-jk_0\psi}\cdot\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right] - \left[\frac{jk_0e^{-jk_0\psi}\nabla\cdot(\nabla\psi\bar{E}_m)}{(j\omega)^m} - \frac{(jk_0)^2\nabla\psi e^{-jk_0\psi}\cdot(\nabla\psi\bar{E}_m)}{(j\omega)^m}\right]\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\nabla\cdot\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla\cdot(\nabla\psi\bar{E}_m)}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi} - \left(jk_0\nabla\psi e^{-jk_0\psi}\right)\cdot\left[\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla\psi\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]\right\}$$

และเนื่องจาก $\nabla\cdot(\nabla\psi\bar{E}_m) = \bar{E}_m\nabla\cdot\nabla\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_m$ ดังนั้น

$$\nabla^2\bar{E} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{\nabla\cdot\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla\cdot(\nabla\psi\bar{E}_m)}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\cdot\left[\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\frac{\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]\right\}e^{-jk_0\psi}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{\nabla^2\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\bar{E}_m\nabla\cdot\nabla\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\cdot\left[\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\frac{\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]\right\}e^{-jk_0\psi}$$

หรือ

$$\nabla^2\bar{E} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{\nabla^2\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla^2\psi\frac{\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\cdot\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\cdot\left[\frac{\nabla\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\nabla\psi\frac{\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]\right\}e^{-jk_0\psi}$$

และ

$$\nabla\nabla\cdot\bar{E} = \nabla\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\cdot\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla\psi\cdot\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right]e^{-jk_0\psi}\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{-jk_0\nabla\psi\left[\frac{\nabla\cdot\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla\psi\cdot\bar{E}_m}{(j\omega)^m}\right] + \frac{\nabla\nabla\cdot\bar{E}_m}{(j\omega)^m} - jk_0\frac{\nabla(\nabla\psi\cdot\bar{E}_m)}{(j\omega)^m}\right\}e^{-jk_0\psi}$$

และพจน์ $\nabla\times\bar{E}$ ถูกกำหนดโดยพจน์ด้านซ้ายของสมการ (3.29ก) ซึ่งเมื่อแทนแต่ละพจน์ลงในสมการ (3.41) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์พจน์ ω^2 จะได้

$$-k_0^2(\nabla\psi\cdot\bar{E}_0)\nabla\psi - k_0^2(\nabla\psi\cdot\nabla\psi)\bar{E}_0 + n^2k_0^2\bar{E}_0 = 0$$

จากสมการ (3.34ค) $\bar{E}_0\cdot\nabla\psi = 0$ ดังนั้น

$$\nabla\psi\cdot\nabla\psi = n^2$$

และเทียบสัมประสิทธิ์พจน์ ω จะได้

$$\frac{jk_0^2}{\omega}(\nabla\psi\cdot\nabla\psi)\bar{E}_1 - jk_0\nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_0 - jk_0\nabla^2\psi\bar{E}_0 - jk_0\nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_0 - \frac{jk_0^2}{\omega}\nabla\psi\nabla\psi\cdot\bar{E}_1$$
$$+ jk_0\nabla\psi\nabla\cdot\bar{E}_0 + jk_0\nabla(\nabla\psi\cdot\bar{E}_0) - \frac{jn^2k_0^2}{\omega}\bar{E}_1 + jk_0\nabla\ln\mu\times(\bar{E}_0\times\nabla\psi) = 0 \quad (3.43)$$

จากสมการ (3.33ข) (3.34ค) และ (3.39) ทำให้สมการ (3.43) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$-2jk_0\nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_0 - jk_0\nabla^2\psi\bar{E}_0 - \nabla\psi jk_0(\nabla\ln\varepsilon\cdot\bar{E}_0 + \nabla\cdot\bar{E}_0) + jk_0\nabla\psi\nabla\cdot\bar{E}_0 + jk_0\nabla\ln\mu\times(\bar{E}_0\times\nabla\psi) = 0$$

หรือ
$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi\bar{E}_0 + \nabla\psi\cdot\nabla\bar{E}_0 + \frac{1}{2}\nabla\psi\nabla\ln\varepsilon\cdot\bar{E}_0 - \frac{1}{2}\nabla\ln\mu\times(\bar{E}_0\times\nabla\psi) = 0 \quad (3.44)$$

และจากความสมมูลของ $\bar{E}_0$ กับ $\bar{H}_0$ และ μ กับ ε จะได้ $\bar{H}_0$ ที่สอดคล้องเป็นดังสมการ (3.45)

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi\bar{H}_0 + \nabla\psi\cdot\nabla\bar{H}_0 + \frac{1}{2}\nabla\psi\nabla\ln\mu\cdot\bar{H}_0 - \frac{1}{2}\nabla\ln\varepsilon\times(\bar{H}_0\times\nabla\psi) = 0 \quad (3.45)$$

สมการ (3.44) และ (3.45) เป็นสมการที่แสดงถึงการเคลื่อนที่ไปของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในตัวกลางซึ่งเรียกว่า สมการการขนส่ง (transport equation) และเนื่องจาก $\nabla\psi$ แสดงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของรังสีในตัวกลางแบบไม่สูญเสียเมื่อ ψ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ใช้บ่งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของรังสีถูกกำหนดเป็น

$$\hat{s} = \frac{\nabla\psi}{\sqrt{\nabla\psi\cdot\nabla\psi}} = \frac{\nabla\psi}{n} \quad (3.46)$$

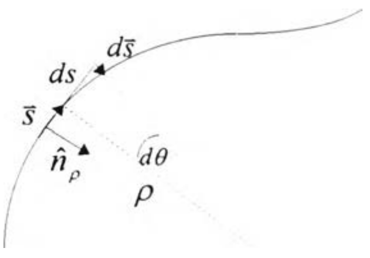
ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.34ก) จะได้

$$\bar{H}_0 = \frac{k_0}{\omega\mu}n\hat{s}\times\bar{E}_0 = \frac{\hat{s}\times\bar{E}_0}{Z} \quad (3.47)$$

โดยที่ $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ คือ อิมพีแดนซ์ลักษณะสมบัติของตัวกลางในบริเวณการแผ่กระจายคลื่น

จากความสัมพันธ์ของ $\bar{E}_0, \bar{H}_0$ และ $\hat{s}$ ในสมการ (3.34ค) (3.34ง) และ (3.47) พบว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตนั้นสอดคล้องกับคุณสมบัติของคลื่นระนาบในตัวกลางแบบไม่มีการสูญเสีย และถ้าเป็นตัวกลางแบบมีการสูญเสีย $\hat{s}$ จะมีทิศทางตามสมการ (3.37)

จากที่กล่าวมาในตัวกลางแบบไม่มีการสูญเสีย การเคลื่อนที่ของรังสีเป็นไปตาม $\hat{s}$ ในสมการ (3.46) ซึ่งการเคลื่อนที่ของรังสีนั้นอาจจะเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางใด ๆ ถ้าสมมุติว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของรังสีเป็นดังรูป 3.5 ซึ่งมีแนวการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง การบ่งบอกแนวการเคลื่อนที่ของรังสีก็สามารถทำได้โดยพิจารณาจากรัศมีความโค้งของรังสี



รูป 3.5 การพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของรังสีใด ๆ จากรัศมีความโค้งของรังสี

จากรูป 3.5 ρ คือ รัศมีความโค้งของรังสี และ $\hat{n}_\rho$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของรัศมีความโค้ง ดังนั้นจากแคลคูลัส (อรุณี, 2533)

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{\hat{n}_\rho}{\rho}$$

และเนื่องจาก $\hat{s}\cdot\nabla\hat{s} = d\hat{s}/ds$ และจากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla(\bar{A}\cdot\bar{B}) \equiv (\bar{A}\cdot\nabla)\bar{B} + (\bar{B}\cdot\nabla)\bar{A} + \bar{B}\times(\nabla\times\bar{A})$ ทำให้ $\hat{s}\cdot\nabla\hat{s} = -\hat{s}\times(\nabla\times\hat{s})$ ดังนั้น

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = -\hat{s}\times(\nabla\times\hat{s}) = \frac{\hat{n}_\rho}{\rho} \tag{3.48}$$

เมื่อแทน $\hat{s}$ ในสมการ (3.46) ลงในสมการ (3.48) ใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\times(\Psi\bar{A}) \equiv \nabla\Psi\times\bar{A} + \Psi\nabla\times\bar{A}$ และ $\nabla\times\nabla\Psi \equiv 0$ และเนื่องจาก $\nabla\frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}\nabla n = -\frac{\nabla\ln n}{n}$ จะได้

$$\frac{\hat{n}_\rho}{\rho} = -\hat{s}\times(\nabla\times\frac{\nabla\psi}{n}) = -\hat{s}\times(\nabla\frac{1}{n}\times\nabla\psi + \frac{1}{n}\nabla\times\nabla\psi) = -\hat{s}\times(\nabla\frac{1}{n}\times\nabla\psi)$$
$$= -\hat{s}\times(-\frac{1}{n}\nabla\ln n\times\nabla\psi) = -\hat{s}\times(\hat{s}\times\nabla\ln n)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) \equiv (\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B} - (\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$ ดังนั้น

$$\frac{\hat{n}_\rho}{\rho} = -(\hat{s}\cdot\nabla\ln n)\hat{s} + (\hat{s}\cdot\hat{s})\nabla\ln n = -(\hat{s}\cdot\nabla\ln n)\hat{s} + \nabla\ln n \tag{3.49}$$

ซึ่งทำการดำเนินการ $\hat{n}_\rho \cdot$ กับสมการ (3.49) และเนื่องจาก $\hat{n}_\rho \cdot \bar{s} = 0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\rho} = \hat{n}_\rho \cdot \nabla \ln n \tag{3.50}$$

เนื่องจากรัศมีความโค้งของรังสีเป็นค่าบวก เมื่อกำหนดให้ $\hat{n}_\rho$ มีทิศพุ่งเข้าหาศูนย์กลางความโค้ง ดังนั้นจากสมการ (3.50) อัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีหักเหในทิศทางของรัศมีความโค้งจะต้องมีค่าเป็นบวกนั่นคือ รังสีจะมีทิศทางเบนเข้าหาตัวกลางที่มีดัชนีหักเหสูงกว่า และสำหรับในตัวกลางเอกพันธุ์ดัชนีหักเหไม่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบเชิงตำแหน่ง ดังนั้น $\nabla \ln n = 0$ ทำให้รัศมีความโค้งของรังสีมีค่าเป็นอนันต์ หรือกล่าวได้ว่ารังสีเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในตัวกลางเอกพันธุ์

การวิเคราะห์ข้างต้นพิจารณาตัวกลางแบบไอโซทรอปิกใด ๆ แต่ในการศึกษาพฤติกรรมคลื่นโดยส่วนใหญ่นั้นจะพิจารณาตัวกลางแบบไอโซทรอปิกที่เป็นตัวกลางเอกพันธุ์และไม่มีการสูญเสีย รวมทั้งระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกก็ถูกนำมาใช้งานในอวกาศว่าง (free space) ก็เป็นตัวกลางแบบนี้ ซึ่งค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าและค่าความซาบซึมทางแม่เหล็กเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับองค์ประกอบเชิงตำแหน่ง ดังนั้นสมการที่ใช้ศึกษาการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางดังสมการ (3.39) (3.44) และ (3.47) จะกลายเป็น

$$\nabla\psi \cdot \nabla\psi = n^2 = \frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0} \tag{3.51ก}$$

$$\left(\nabla\psi \cdot \nabla\right)\bar{E}_0 + \frac{1}{2}\nabla^2\psi\bar{E}_0 = 0 \tag{3.51ข}$$

$$\bar{H}_0 = \frac{\bar{s} \times \bar{E}_0}{Z} \tag{3.51ค}$$

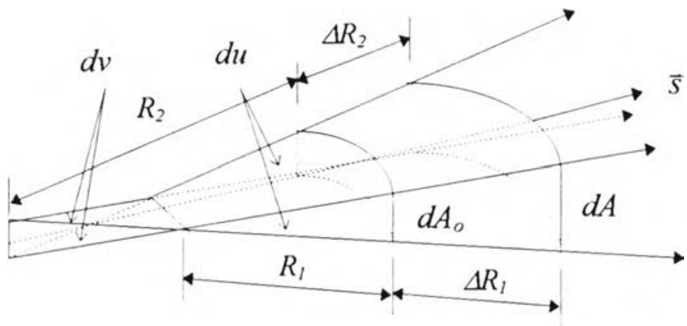
โดยที่ $\bar{s} = \nabla\psi/n$ และสำหรับตัวกลางแบบไม่สูญเสีย

$$\bar{E}_0 \times \bar{H}_0^* = \frac{k_0}{\omega\mu}(\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*)\nabla\psi = \frac{(\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*)\bar{s}}{Z}$$

เนื่องจาก $\nabla\psi \cdot \nabla = n(\nabla\psi/n) \cdot \nabla = n\bar{s} \cdot \nabla = n\, d/ds$ เป็นอนุพันธ์ในทิศทางรังสี ดังนั้นสมการ (3.51ก) และ (3.51ข) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\psi}{ds} = n \tag{3.52ก}$$

$$n\frac{d\bar{E}_0}{ds} + \frac{1}{2}\nabla^2\psi\bar{E}_0 = 0 \tag{3.52ข}$$



รูป 3.6 ลำรังสีที่ใช้แทนการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสีย

และเมื่ออินทิเกรตสมการ (3.52ก) และ (3.52ข) ตามเส้นทางการเคลื่อนที่ของรังสีจะได้

$$\psi(s) = \psi(s_0) + \int_{s_0}^{s} n ds = \psi(s_0) + n(s - s_0) \tag{3.53ก}$$

$$\bar{E}_0(s) = \bar{E}_0(s_0) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{s_0}^{s} \frac{\nabla^2 \psi}{n} ds \right) \tag{3.53ข}$$

จากรูป 3.6 การเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสียสามารถแทนได้ด้วยลำรังสีเล็ก ๆ ซึ่งมี $\bar{s}$ เป็นเวกเตอร์ที่บ่งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของรังสีอยู่ในแนวเส้นตรง เนื่องจากรังสีเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในตัวกลางเอกพันธุ์ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว และพื้นผิวเฟสคงที่หรือหน้าคลื่นใด ๆ ψ ของคลื่นถูกกำหนดโดยจุดบนพื้นที่ภาคตัดขวาง dA_0 ซึ่งมีรัศมีความโค้งหลักเป็น R_1 และ R_2 และมีค่าความโค้งแบบเกาส์ $K_1 = 1/R_1R_2$ และพื้นผิวเฟสคงที่หรือหน้าคลื่น $\psi+\Delta\psi$ ใกล้ ๆ ถูกกำหนดโดยจุดบนพื้นที่ภาคตัดขวาง dA ซึ่งมีรัศมีความโค้งหลักเป็น $R_1+\Delta R_1$ และ $R_2+\Delta R_2$ และมีค่าความโค้งแบบเกาส์ $K_2 = 1/(R_1+\Delta R_1)(R_2+\Delta R_2)$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\bar{F} = Kn\bar{s}$ จะได้

$$\begin{aligned} \oint_A \bar{F} \cdot d\bar{A} &= \bar{F} \cdot \bar{s}\big|_{\psi+\Delta\psi} dA - \bar{F} \cdot \bar{s}\big|_{\psi} dA_o \\ &= K_2 n(R_1 + \Delta R_1)(R_2 + \Delta R_2) du dv - K_1 n R_1 R_2 du dv = 0 \end{aligned}$$

โดยที่ A คือ พื้นผิววงปิดซึ่งประกอบด้วยพื้นผิวด้านข้างทั้งสองด้านของลำรังสีและหน้าคลื่น ψ และ $\psi+\Delta\psi$ และจากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้ $\oint_A \bar{F} \cdot d\bar{A} = \int_V \nabla \cdot \bar{F} dV = 0$ ดังนั้น $\nabla \cdot \bar{F} = 0$ หรือ $\nabla \cdot Kn\bar{s} = Kn \nabla \cdot \bar{s} + \bar{s} \cdot \nabla Kn = 0$ ซึ่งจะได้

$$\nabla \cdot \bar{s} = -\frac{\bar{s} \cdot \nabla Kn}{Kn} = -\frac{1}{Kn}\frac{dKn}{ds} = -\frac{d \ln(Kn)}{ds}$$

เนื่องจาก $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla \cdot n\bar{s}$ และสำหรับกรณีที่ตัวกลางเป็นสารเอกพันธุ์ ดัชนีหักเห n มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับองค์ประกอบเชิงตำแหน่ง ดังนั้น

$$\nabla^2 \psi = n\nabla \cdot \bar{s} = -n\frac{d\ln(Kn)}{ds} = -n\frac{d\ln K}{ds} \tag{3.54}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.53ข) จะได้

$$\begin{aligned}\bar{E}_0(s) &= \bar{E}_0(s_0)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{\nabla^2\psi}{n}ds\right) = \bar{E}_0(s_0)\exp\left(\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{d\ln K}{ds}ds\right) \\ &= \bar{E}_0(s_0)\exp\left(\frac{1}{2}\int_{K(s_0)}^{K(s)}d\ln K\right) = \bar{E}_0(s_0)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\ln K(s) - \ln K(s_o)\right]\right) \\ &= \bar{E}_0(s_0)\exp\left(\ln\sqrt{\frac{K(s)}{K(s_o)}}\right) = \bar{E}_0(s_0)\sqrt{\frac{K(s)}{K(s_o)}}\end{aligned} \tag{3.55}$$

และเมื่อแทนสมการ (3.55) และ (3.53ก) ลงในสมการ (3.27ก) โดยคิดเฉพาะพจน์แรกของอนุกรมจะได้

$$\begin{aligned}\bar{E}(s) &= \bar{E}_o(s)e^{-jk_o\psi(s)} = \bar{E}_o(s_o)\sqrt{\frac{K(s)}{K(s_o)}}e^{-jk_o\psi(s_o)-jk_o n(s-s_o)} \\ &= \bar{E}_o(s_o)\sqrt{\frac{R_1R_2}{(R_1+\Delta R_1)(R_2+\Delta R_2)}}e^{-jk_o\psi(s_o)-jk_o n(s-s_o)}\end{aligned} \tag{3.56}$$

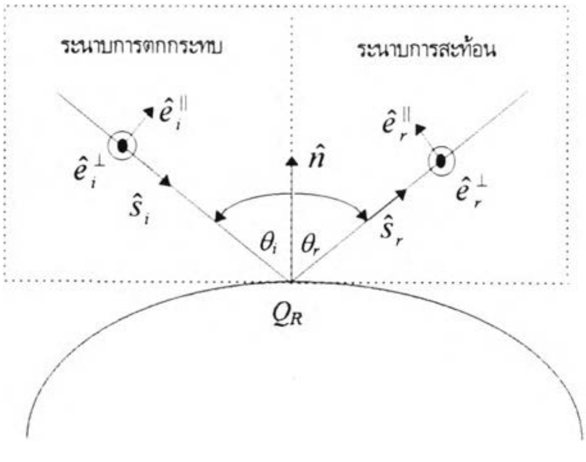
สมการ (3.56) คือ ผลเฉลยของสนามไฟฟ้าเนื่องจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสีย ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการอธิบายคลื่นที่แผ่กระจายไปในอวกาศว่างได้ เนื่องจากในอวกาศว่างเป็นสารเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสียโดยมีค่าดัชนีหักเหเป็นหนึ่ง และจากรูป 3.6 ถ้ากำหนดให้ตำแหน่งอ้างอิงอยู่ที่จุด Q ใด ๆ ที่ซึ่ง $s_o=0$ และเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง $\Delta R_1 = \Delta R_2 = s$ ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่แผ่พลังงานจากจุดอ้างอิง Q ใด ๆ เป็นดังสมการ (3.57)

$$\bar{E}(s) = \bar{E}(Q)\sqrt{\frac{R_1R_2}{(R_1+s)(R_2+s)}}e^{-jk_o s} \tag{3.57}$$

โดยที่ $\bar{E}(Q)$ คือ สนามไฟฟ้าที่จุดอ้างอิง Q ใด ๆ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\bar{E}_o(s_o=0)e^{-jk_o\psi(0)}$ และเมื่อพิจารณาสมการ (3.57) เราพบว่า สนามไฟฟ้าที่แผ่พลังงานจากจุดอ้างอิงใด ๆ ไปยังจุดสังเกตนั้นมีการลดทอนเนื่องจากตัวประกอบการลดทอนเช่นเดียวกับในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตแบบดั้งเดิมซึ่งหาได้จากหลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ แต่สมการ (3.57) สามารถบ่งบอกถึงโพลาไรเซชันและเฟสของของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้ โดยที่โพลาไรเซชันของคลื่นเป็นไปตามโพลาไรเซชันของคลื่นที่จุดอ้างอิงใด ๆ และเฟสของคลื่นแปรเปลี่ยนตามเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันของระยะทางที่รังสีเคลื่อนที่ แต่ในตัวกลางไม่เอกพันธุ์ที่มีการสูญเสีย โพลาไรเซชันของคลื่นจะเป็นไปตามสมการ (3.44) และ (3.45) และเฟสของคลื่นแปรเปลี่ยนตามเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันของพื้นผิว ψ และเมื่อพิจารณาสมการ (3.57) พบว่า ข้อเสียของกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตคือไม่สามารถหาสนามไฟฟ้าที่จุดหรือแนวการตัดกันของรังสี (caustic) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อระยะทางที่รังสีเคลื่อนที่ s เท่ากับ $-R_1$ หรือ $-R_2$ ซึ่งทำให้ค่าปัจจัยการลดทอนมีค่าเป็นอนันต์ โดยถ้า $-R_2 < s < -R_1$ พจน์ R_1+s ในค่าปัจจัยการลดทอนจะเป็นลบทำให้

ค่าปัจจัยการลดทอนเป็นจำนวนจินตภาพแท้ ดังนั้นเมื่อคลื่นผ่านจุดหรือแนวการตัดกันของรังสีจะทำให้เฟสของคลื่นเปลี่ยนไป 90 องศา และเมื่อ $s < -R_2 < -R_1$ ทั้งเทอม R_1+s และ R_2+s จะเป็นลบดังนั้นเฟสของคลื่นก็จะเปลี่ยนไปอีก 90 องศา

จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตข้างต้นเป็นการอธิบายถึงการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางแบบต่าง ๆ โดยไม่ได้กล่าวถึงพฤติกรรมที่เกิดขึ้นที่ผิวรอยต่อ เช่น การสะท้อน และการหักเห ดังนั้นในการอธิบายพฤติกรรมดังกล่าวเพื่อหาสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวจานสะท้อนมายังระนาบหน้าจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกสามารถหาได้โดยพิจารณาสนามเนื่องจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตและเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อ ซึ่งในกรณีตัวกลางแบบไอโซทรอปิกที่เป็นตัวกลางเอกพันธุ์และไม่มีการสูญเสีย สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเคลื่อนที่ไปในลักษณะของคลื่นระนาบในทิศทางของรังสี ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมการสะท้อนของคลื่นสามารถหาได้โดยสมมุติให้สนามไฟฟ้าที่มาตกกระทบที่จุด Q_R บนพื้นผิวสะท้อนเคลื่อนที่ไปในทิศทาง $\hat{s}_i$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของการตกกระทบและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง $\hat{e}_i^{\perp}$ และ $\hat{e}_i^{\parallel}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบการตกกระทบ (plane of incidence) ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์ $\hat{n}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R โดยที่ไม่มีองค์ประกอบในแนวการเคลื่อนที่ดังรูป 3.7 และ $\hat{s}_i$, $\hat{e}_i^{\perp}$ และ $\hat{e}_i^{\parallel}$ ถูกเลือกให้มีความสัมพันธ์ดังสมการ (3.58ก-ข)



รูป 3.7 ทิศทางและโพลาไรเซชันของสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบและที่สะท้อนจากจุด Q_R บนพื้นผิวสะท้อน

$$\hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_i^{\perp} \times \hat{s}_i \tag{3.58ก}$$

และ

$$\hat{e}_i^{\perp} = \frac{\hat{n} \times \hat{s}_i}{\left|\hat{n} \times \hat{s}_i\right|} \tag{3.58ข}$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด Q_R สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการได้เป็น

$$\bar{E}^i(Q_R) = \left[\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}\right]\hat{e}_i^{\perp} + \left[\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\right]\hat{e}_i^{\parallel} \tag{3.59}$$

และถ้าสมมุติว่าสนามไฟฟ้าที่สะท้อนที่จุด Q_R เกิดจากสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด Q_R คูณกับสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิก $\tilde{R}$ (dyadic reflection coefficient) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตบนพื้นผิวสะท้อน ดังนั้น

$$\vec{E}^r(Q_R) = \vec{E}^i(Q_R) \cdot \tilde{R} \tag{3.60}$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด Q_R สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากจุด Q_R ก็จะเคลื่อนที่ออกไปในลักษณะของคลื่นระนาบในทิศทางที่กำหนดโดย $\hat{s}_r$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของการสะท้อนและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง $\hat{e}_r^{\perp}$ และ $\hat{e}_r^{\parallel}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบการสะท้อนที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\hat{s}_r$ กับเวกเตอร์ $\hat{n}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R และจากหลักการของแฟร์มาต์พบว่า $\hat{s}_r$ วางตัวอยู่ในระนาบการสะท้อน (plane of reflection) ซึ่งเป็นระนาบเดียวกับระนาบการตกกระทบดังรูป 3.7 และ $\hat{s}_r$, $\hat{e}_r^{\perp}$ และ $\hat{e}_r^{\parallel}$ ถูกเลือกให้มีความสัมพันธ์ดังสมการ (3.61ก-ข)

$$\hat{e}_r^{\parallel} = \hat{e}_r^{\perp} \times \hat{s}_r \tag{3.61ก}$$

และ

$$\hat{e}_r^{\perp} = \frac{\hat{n} \times \hat{s}_r}{\left|\hat{n} \times \hat{s}_r\right|} \tag{3.61ข}$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R เป็น

$$\vec{E}^r(Q_R) = \left[\vec{E}^r(Q_R) \cdot \hat{e}_r^{\perp}\right]\hat{e}_r^{\perp} + \left[\vec{E}^r(Q_R) \cdot \hat{e}_r^{\parallel}\right]\hat{e}_r^{\parallel} \tag{3.62}$$

จากสนามไฟฟ้าตกกระทบดังสมการ (3.59) และสนามไฟฟ้าสะท้อนดังสมการ (3.62) เมื่อแทนลงในสมการ (3.60) ทำให้สัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิกที่สอดคล้องเป็นดังสมการ (3.63)

$$\tilde{R} = R_s \hat{e}_i^{\perp} \hat{e}_r^{\perp} + R_h \hat{e}_i^{\parallel} \hat{e}_r^{\parallel} \tag{3.63}$$

โดยที่ R_h คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันในทิศที่ขนานกับระนาบการตกกระทบ (hard polarization) และ R_s คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันในทิศที่ตั้งฉากกับระนาบการตกกระทบ (soft polarization) เมื่อแทนสมการ (3.63) ลงในสมการ (3.60) จะได้

$$\vec{E}^r(Q_R) = \vec{E}^i(Q_R) \cdot \left[R_s \hat{e}_i^{\perp} \hat{e}_r^{\perp} + R_h \hat{e}_i^{\parallel} \hat{e}_r^{\parallel}\right] = \left[\vec{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^{\perp}\right] R_s \hat{e}_r^{\perp} + \left[\vec{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^{\parallel}\right] R_h \hat{e}_r^{\parallel} \tag{3.64}$$

เมื่อเปรียบเทียบสนามไฟฟ้าสะท้อนจากสมการ (3.62) กับ (3.64) จะได้

$$\vec{E}^r(Q_R) \cdot \hat{e}_r^{\perp} = \vec{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^{\perp} R_s \tag{3.65ก}$$

และ $$\bar{E}^{r}(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\parallel} = \bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}R_h \quad (3.65ข)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์การสะท้อนสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่พื้นผิวสะท้อน และสำหรับในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกพื้นผิวสะท้อนเป็นตัวนำสมบูรณ์ ดังนั้นจากเงื่อนไขขอบเขตสนามไฟฟ้าในแนวขนานกับพื้นผิวรอยต่อต้องต่อเนื่องระหว่างพื้นผิวทั้งสอง และเนื่องจากไม่มีสนามไฟฟ้าในบริเวณพื้นผิวจานสะท้อนที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ ทำให้ไม่มีสนามไฟฟ้ารวมในแนวขนานที่บริเวณเหนือพื้นผิวสะท้อนตามเงื่อนไขขอบเขต ดังนั้นที่จุด Q_R ใด ๆ บนพื้นผิวจานสะท้อนสนามไฟฟ้ารวมในแนวขนานซึ่งประกอบด้วยสนามไฟฟ้าตกกระทบและสนามไฟฟ้าสะท้อนในแนวขนานจะเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\hat{n}\times\left[\bar{E}^{i}(Q_R)+\bar{E}^{r}(Q_R)\right] = 0 \quad (3.66)$$

และเมื่อแทนสมการ (3.59) และ (3.62) ลงในสมการ (3.66) จะได้

$$\left[\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}\right]\hat{n}\times\hat{e}_i^{\perp}+\left[\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\right]\hat{n}\times\hat{e}_i^{\parallel}+\left[\bar{E}^{r}(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\perp}\right]\hat{n}\times\hat{e}_r^{\perp}+\left[\bar{E}^{r}(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\parallel}\right]\hat{n}\times\hat{e}_r^{\parallel} = 0 \quad (3.67)$$

เนื่องจาก $\hat{n}\times\hat{e}_i^{\parallel} = -\hat{n}\times\hat{e}_r^{\parallel} = \hat{e}_i^{\perp} = \hat{e}_r^{\perp}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์ในระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบการตกกระทบ และ $\hat{n}\times\hat{e}_i^{\perp} = \hat{n}\times\hat{e}_r^{\perp}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์ในระนาบการตกกระทบ ดังนั้นจากสมการ (3.67) เมื่อพิจารณาองค์ประกอบในแนวขนานกับพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์ในแต่ละระนาบจะได้

$$\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}+\bar{E}^{r}(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\perp} = 0 \quad (3.68ก)$$

และ $$\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}-\bar{E}^{r}(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\parallel} = 0 \quad (3.68ข)$$

เมื่อแทนสมการ (3.65ก-ข) ลงในสมการ (3.68ก-ข) ทำให้ได้

$$\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}+\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}R_s = 0 \quad (3.69ก)$$

และ $$\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}-\bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}R_h = 0 \quad (3.69ข)$$

ดังนั้น $R_s = -1$ และ $R_h = 1$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.64) จะได้

$$\bar{E}^{r}(Q_R) = \bar{E}^{i}(Q_R)\cdot\left[-\hat{e}_i^{\perp}\hat{e}_r^{\perp}+\hat{e}_i^{\parallel}\hat{e}_r^{\parallel}\right] \quad (3.70)$$

สมการ (3.70) แสดงถึงสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R บนพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์โดยอธิบายจากค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน และจากเงื่อนไขขอบเขตสามารถหาสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R ได้โดยหักองค์ประกอบในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์ของสนามไฟฟ้ารวมออกทำให้เหลือเพียงองค์ประกอบในแนวขนานกับพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์ดังสมการ (3.71)

$$\left[\bar{E}^r(Q_R)-(\bar{E}^r(Q_R)\cdot\hat{n})\hat{n}\right]+\left[\bar{E}^i(Q_R)-(\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{n})\hat{n}\right]=0 \tag{3.71}$$

จากสมการ (3.59) และ (3.70) จะพบว่า

$$\hat{n}\cdot\left[\bar{E}^i(Q_R)-\bar{E}^r(Q_R)\right]=\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\left[\hat{n}\cdot\hat{e}_i^{\parallel}-\hat{n}\cdot\hat{e}_r^{\parallel}\right]$$

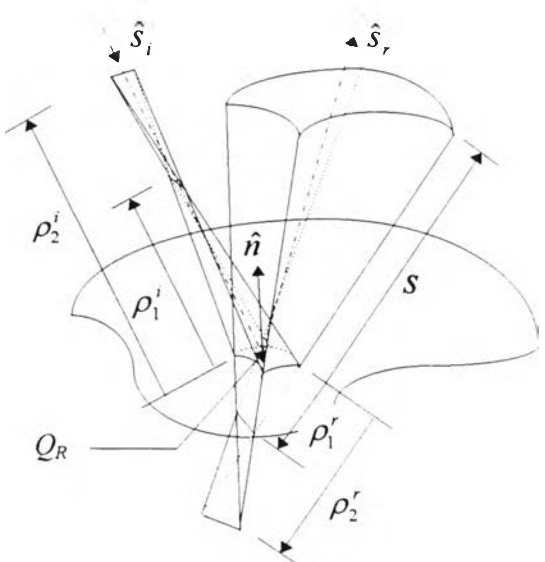
และจากสมการ (3.58ก) และ (3.61ก) จะได้ $\hat{n}\cdot\left[\bar{E}^i(Q_R)-\bar{E}^r(Q_R)\right]=\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\left[\hat{n}\cdot(\hat{e}_i^{\perp}\times\hat{s}_i)-\hat{n}\cdot(\hat{e}_i^{\perp}\times\hat{s}_r)\right]$ และจากสมการ (3.58ข) (3.61ข) และเอกลักษณ์เวกเตอร์ $(\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{C}\equiv(\bar{C}\times\bar{A})\cdot\bar{B}\equiv(\bar{B}\times\bar{C})\cdot\bar{A}$ จะได้

$$\hat{n}\cdot\left[\bar{E}^i(Q_R)-\bar{E}^r(Q_R)\right]=\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\left[-(\hat{e}_i^{\perp}\cdot\hat{e}_i^{\perp})\left|\hat{s}_i\times\hat{n}\right|+(\hat{e}_i^{\perp}\cdot\hat{e}_i^{\perp})\left|\hat{s}_r\times\hat{n}\right|\right]$$

จากหลักการของแฟร์มาต์หรือกฎการสะท้อนของสเนลล์ $\left|\hat{s}_i\times\hat{n}\right|=\left|\hat{s}_r\times\hat{n}\right|$ ทำให้ $\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{n}=\bar{E}^r(Q_R)\cdot\hat{n}$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.71) สนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R บนพื้นผิวตัวนำสมบูรณ์จะเป็น

$$\bar{E}^r(Q_R)=-\bar{E}^i(Q_R)+2(\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{n})\hat{n} \tag{3.72}$$

สมการ (3.70) และ (3.72) แสดงถึงสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R ซึ่งจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต ถ้าสมมุติว่าจุด Q_R เป็นจุดอ้างอิงของสนามไฟฟ้าสะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนและการเคลื่อนที่ไปของสนามไฟฟ้าสะท้อนแทนด้วยลำรังสี ดังรูป 3.8 ดังนั้นสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุดสังเกตใด ๆ เป็นดังสมการ (3.73ก-ข)



รูป 3.8 ลำรังสีที่ใช้แทนหน้าคลื่นและการเคลื่อนที่ไปของสนามตกกระทบและสนามสะท้อนที่พื้นผิวสะท้อนในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสีย

$$\bar{E}^r(s)=\bar{E}^i(Q_R)\cdot\left[-\hat{e}_i^{\perp}\hat{e}_r^{\perp}+\hat{e}_i^{\parallel}\hat{e}_r^{\parallel}\right]\sqrt{\frac{\rho_1^r\rho_2^r}{(\rho_1^r+s)(\rho_2^r+s)}}e^{-jk_o s} \tag{3.73ก}$$

หรือ $$\bar{E}^r(s)=\left[-\bar{E}^i(Q_R)+2(\bar{E}^i(Q_R)\cdot\hat{n})\hat{n}\right]\sqrt{\frac{\rho_1^r\rho_2^r}{(\rho_1^r+s)(\rho_2^r+s)}}e^{-jk_o s} \qquad (3.73ข)$$

โดยที่ ρ_1^r , ρ_2^r คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดสะท้อน ซึ่งมีความสัมพันธ์กับรัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นตกกระทบที่จุดสะท้อนดังแสดงไว้ในภาคผนวก ข. เป็น

$$\frac{1}{\rho_{1,2}^r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^i}+\frac{1}{\rho_2^i}\right)+\frac{1}{f_{1,2}} \qquad (3.74)$$

โดยที่ ρ_1^i,ρ_2^i คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นตกกระทบที่จุดสะท้อน และ f_1,f_2 คือ ระยะโฟกัสซึ่งขึ้นอยู่กับหน้าคลื่นของคลื่นตกกระทบและค่าปัจจัยต่าง ๆ ของพื้นผิวสะท้อนที่จุดสะท้อนดังสมการ (3.75)

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_{1,2}}=&\frac{\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{22}^2+\Theta_{12}^2}{R_1}+\frac{\Theta_{21}^2+\Theta_{11}^2}{R_2}\right)\\&\pm\frac{1}{2}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\rho_1^i}-\frac{1}{\rho_2^i}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho_1^i}-\frac{1}{\rho_2^i}\right)\frac{4\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{22}^2-\Theta_{12}^2}{R_1}+\frac{\Theta_{21}^2-\Theta_{11}^2}{R_2}\right)\\&+\frac{4\cos^2\theta_i}{|\Theta|^4}\left[\left(\frac{\Theta_{22}^2+\Theta_{12}^2}{R_1}+\frac{\Theta_{21}^2+\Theta_{11}^2}{R_2}\right)^2-\frac{4|\Theta|^2}{R_1R_2}\right]\end{aligned}\right\}^{1/2}\end{aligned} \qquad (3.75)$$

ในสมการ (3.75) เครื่องหมายบวกใช้สำหรับ f_1 เครื่องหมายลบใช้สำหรับ f_2 และ R_1,R_2 คือ รัศมีความโค้งหลักของพื้นผิวสะท้อนที่จุดสะท้อน และ $|\Theta|$ คือ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ Θ กำหนดดังสมการ (3.76)

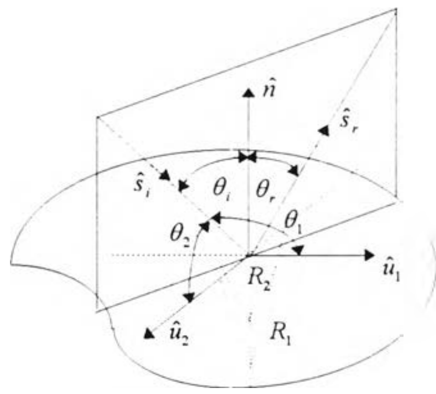
$$\Theta=\begin{bmatrix}\hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2\\ \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2\end{bmatrix} \qquad (3.76)$$

โดยที่สมาชิกของเมตริกซ์ Θ คือ $\Theta_{jk}=\hat{X}_j^i\cdot\hat{u}_k$ และเวกเตอร์ $\hat{X}_1^i,\hat{X}_2^i$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลักของหน้าคลื่นตกกระทบที่จุดสะท้อนมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบ $\hat{s}_i$ ดังสมการ (3.77) และ $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลักของพื้นผิวสะท้อนมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนและมีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้ง $\hat{n}$ ดังสมการ (3.78)

$$\hat{s}_i=\hat{X}_2^i\times\hat{X}_1^i \qquad (3.77)$$

$$\hat{n}=\hat{u}_2\times\hat{u}_1 \qquad (3.78)$$

และ θ_i คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ในทิศทางการตกกระทบ $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ดังรูป 3.9 และในสมการ (3.75) ค่า $\Theta_{11}^2+\Theta_{21}^2$, $\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2$ และ $|\Theta|=\Theta_{11}\Theta_{22}-\Theta_{21}\Theta_{12}$ สามารถพิจารณาได้จาก $\hat{s}_i\times\hat{u}_1$, $\hat{s}_i\times\hat{u}_2$ และ $(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\times(\hat{s}_i\times\hat{u}_2)$ ดังนี้



รูป 3.9 ค่าปัจจัยทางเรขาคณิตต่าง ๆ บนพื้นผิวสะท้อนเพื่อใช้หารัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดสะท้อน

$$\begin{aligned}\hat{s}_i\times\hat{u}_1&=(\hat{X}_2'\times\hat{X}_1')\times\hat{u}_1=-\hat{u}_1\times(\hat{X}_2'\times\hat{X}_1')\\&=-(\hat{u}_1\cdot\hat{X}_1')\hat{X}_2'+(\hat{u}_1\cdot\hat{X}_2')\hat{X}_1'=-\Theta_{11}\hat{X}_2'+\Theta_{21}\hat{X}_1'\end{aligned} \tag{3.79ก}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_i\times\hat{u}_2&=(\hat{X}_2'\times\hat{X}_1')\times\hat{u}_2=-\hat{u}_2\times(\hat{X}_2'\times\hat{X}_1')\\&=-(\hat{u}_2\cdot\hat{X}_1')\hat{X}_2'+(\hat{u}_2\cdot\hat{X}_2')\hat{X}_1'=-\Theta_{12}\hat{X}_2'+\Theta_{22}\hat{X}_1'\end{aligned} \tag{3.79ข}$$

ดังนั้น $|\hat{s}_i\times\hat{u}_1|^2=|\hat{s}_i|^2|\hat{u}_1|^2\sin^2\theta_1=\sin^2\theta_1=\Theta_{11}^2+\Theta_{21}^2$ โดยที่ θ_1 คือ มุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตกกระทบ $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลักของพื้นผิวสะท้อน $\hat{u}_1$ และ $|\hat{s}_i\times\hat{u}_2|^2=|\hat{s}_i|^2|\hat{u}_2|^2\sin^2\theta_2=\sin^2\theta_2=\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2$ โดยที่ θ_2 คือ มุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตกกระทบ $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลักของพื้นผิวสะท้อน $\hat{u}_2$ และสำหรับ $|\Theta|=\Theta_{11}\Theta_{22}-\Theta_{21}\Theta_{12}$ พิจารณาได้จาก

$$(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\times(\hat{s}_i\times\hat{u}_2)=\left[(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\cdot\hat{u}_2\right]\hat{s}_i-\left[(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\cdot\hat{s}_i\right]\hat{u}_2$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $(\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{C}\equiv(\bar{C}\times\bar{A})\cdot\bar{B}\equiv(\bar{B}\times\bar{C})\cdot\bar{A}$ จะได้

$$(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\times(\hat{s}_i\times\hat{u}_2)=\left[(\hat{u}_1\times\hat{u}_2)\cdot\hat{s}_i\right]\hat{s}_i-\left[(\hat{s}_i\times\hat{s}_i)\cdot\hat{u}_1\right]\hat{u}_2=(-\hat{n}\cdot\hat{s}_i)\hat{s}_i \tag{3.80}$$

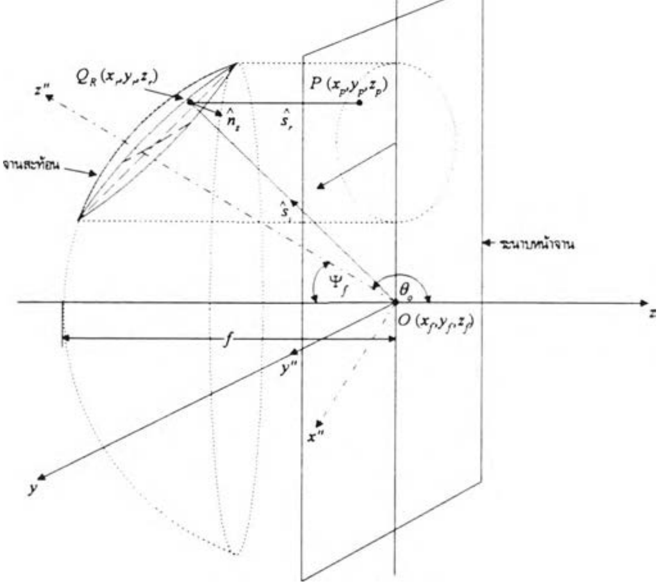
และจากสมการ (3.79ก-ข)

$$(\hat{s}_i\times\hat{u}_1)\times(\hat{s}_i\times\hat{u}_2)=(-\Theta_{11}\hat{X}_2'+\Theta_{21}\hat{X}_1')\times(-\Theta_{12}\hat{X}_2'+\Theta_{22}\hat{X}_1')=(\Theta_{21}\Theta_{12}-\Theta_{11}\Theta_{22})\hat{s}_i \tag{3.81}$$

ดังนั้นจากสมการ (3.80) และ (3.81) $|\Theta|^2 = |(\hat{s}_i \times \hat{u}_1) \times (\hat{s}_i \times \hat{u}_2)|^2 = (\Theta_{11}\Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{12})^2 = (-\hat{n}\cdot\hat{s}_i)^2 = \cos^2\theta_i$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.75) จะได้

$$\frac{1}{f_{1,2}} = \frac{1}{\cos\theta_i}\left(\frac{\sin^2\theta_2}{R_1} + \frac{\sin^2\theta_1}{R_2}\right) \pm \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i}\right)\frac{4}{\cos\theta_i}\left(\frac{\Theta_{22}^2 - \Theta_{12}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{21}^2 - \Theta_{11}^2}{R_2}\right) + 4\left[\frac{1}{\cos^2\theta_i}\left(\frac{\sin^2\theta_2}{R_1} + \frac{\sin^2\theta_1}{R_2}\right)^2 - \frac{4}{R_1 R_2}\right]\right\}^{1/2} \tag{3.82}$$

จากข้างต้นสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนตัวนำสมบูรณ์รูปร่างใด ๆ สามารถหาได้จากสมการ (3.73ก) หรือ (3.73ข) ดังนั้นสามารถนำสมการทั้งสองมาใช้หาสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนตัวนำสมบูรณ์รูปพาราโบลิกดังรูป 3.10 ได้ โดยสมมุติว่าสายอากาศป้อนกำลังคลื่นอยู่ที่จุด $O(x_f, y_f, z_f)$ และสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานที่ต้องการหาอยู่ที่จุด $P(x_p, y_p, z_p)$



รูป 3.10 การหาสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก

เมื่อพิจารณาสมการ (3.73ก) และ (3.73ข) พบว่า สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวรูปพาราโบลิกมายังจุดสังเกต $P(x_p, y_p, z_p)$ ใด ๆ บนระนาบหน้าจานนั้น ขึ้นอยู่กับสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ตกกระทบที่จุดสะท้อน $Q_R(x_r, y_r, z_r)$ บนพื้นผิวสะท้อนรูปพาราโบลิก โดยจุดสะท้อน $Q_R(x_r, y_r, z_r)$ นี้เป็นจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการสะท้อน คือ

1. มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน ซึ่งจากรูป 3.10 จะได้

$$\hat{s}_i \cdot \hat{n}_s = -\hat{s}_r \cdot \hat{n}_s \qquad (3.83ก)$$

โดยที่ $\hat{n}_s$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนรูปพาราโบลิกที่จุดสะท้อน Q_R และมีทิศพุ่งเข้าหารังสีตกกระทบ

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตกกระทบ $\hat{s}_i$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสะท้อน $\hat{s}_r$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุดสะท้อน $Q_R(x_r, y_r, z_r)$ ต้องวางตัวอยู่ในระนาบเดียวกันซึ่งก็คือ ระนาบการตกกระทบ ดังนั้น

$$\hat{s}_i \cdot (\hat{n}_s \times \hat{s}_r) = \hat{s}_r \cdot (\hat{n}_s \times \hat{s}_i) = 0 \qquad (3.83ข)$$

และเนื่องจากพื้นผิวรูปพาราโบลิกมีสมการพื้นผิวเป็นดังสมการ (2.3ข) และในวิทยานิพนธ์นี้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางอยู่ที่จุดโฟกัสของจานสะท้อนรูปพาราโบลิก $(x_f = 0, y_f = 0, z_f = 0)$ ดังนั้น $\hat{s}_i$, $\hat{s}_r$ และ $\hat{n}_s$ แสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ ของระบบพิกัดจานสะท้อน xyz เป็น

$$\hat{s}_i = \frac{x_r\bar{a}_x + y_r\bar{a}_y + \left(\dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f\right)\bar{a}_z}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2 + \left(\dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f\right)^2}} \qquad (3.84ก)$$

$$\hat{s}_r = \frac{(x_p - x_r)\bar{a}_x + (y_p - y_r)\bar{a}_y + \left[z_p - \left(\dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f\right)\right]\bar{a}_z}{\sqrt{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2 + \left[z_p - \left(\dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f\right)\right]^2}} \qquad (3.84ข)$$

และ

$$\hat{n}_s = \frac{-x_r\bar{a}_x - y_r\bar{a}_y + 2f\bar{a}_z}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2 + 4f^2}} \qquad (3.84ค)$$

โดยที่ f คือ ระยะโฟกัสของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนรูปพาราโบลิก

จากเงื่อนไขการสะท้อนดังสมการ (3.83ก) และ (3.83ข) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ที่ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัวแปรคือ x_r, y_r ซึ่งในการแก้หา x_r, y_r สามารถทำได้โดยใช้กรรมวิธีเชิงเลข สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method) (R. L. Burden and J. D. Faires, 1993) จากฟังก์ชัน fsolve ของโปรแกรม MATLAB มาแก้หา x_r, y_r ดังกล่าว โดยกำหนดให้ทำการวนซ้ำมากที่สุด 60 ครั้ง และมีความแม่นยำอยู่ในเกณฑ์ 10^{-10} ก็จะได้ตำแหน่งของจุดสะท้อน $Q_R = \left(x_r, y_r, z_r = \dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f\right)$

ค่า x_r, y_r ของจุดสะท้อนที่หาได้ต้องมีการตรวจสอบว่าอยู่ในขอบเขตของพื้นผิวสะท้อนรูปพาราโบลิก สำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรที่จานสะท้อนมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ D ดังรูป 2.8 ตำแหน่ง x_r, y_r ที่คำนวณได้ต้องอยู่ในขอบเขตภาพฉายของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ตรวจสอบจากเงื่อนไขดังสมการ (3.85)

$$\left| x_r^2 + y_r^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right| \leq 10^{-10} \tag{3.85}$$

และสำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรที่ภาพฉายของจานสะท้อนมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ D ดังรูป 2.9 ตำแหน่ง x_r, y_r ที่คำนวณได้ต้องอยู่ในขอบเขตภาพฉายของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ตรวจสอบจากเงื่อนไขดังสมการ (3.86)

$$\left| \left[x_r - \left(\frac{D}{2} + h\right) \right]^2 + y_r^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right| \leq 10^{-10} \tag{3.86}$$

เมื่อทราบตำแหน่งของจุดสะท้อน $Q_R = \left(x_r, y_r, z_r = \dfrac{x_r^2 + y_r^2}{4f} - f \right)$ ดังนั้นสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่จุดสะท้อน $Q_R = (x_r, y_r, z_r)$ สามารถหาได้จากสมการ (3.17) เป็น

$$\begin{bmatrix} E_x^{feed}(x_r, y_r, z_r) \\ E_y^{feed}(x_r, y_r, z_r) \\ E_z^{feed}(x_r, y_r, z_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o \cos\phi_o & -\sin\phi_o & \sin\theta_o \cos\phi_o \\ \cos\theta_o \sin\phi_o & \cos\phi_o & \sin\theta_o \sin\phi_o \\ -\sin\theta_o & 0 & \cos\theta_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x'}^{feed}(x_r, y_r, z_r) \\ E_{y'}^{feed}(x_r, y_r, z_r) \\ E_{z'}^{feed}(x_r, y_r, z_r) \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

โดยในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร $\theta_o = \pi$ และ $\phi_o = 0$ และในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร $\theta_o = \pi - \Psi_f$ และ $\phi_o = 0$

เมื่อแทนสมการ (3.87) ลงในสมการ (3.73ข) จะได้สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากจุดสะท้อน $Q_R = (x_r, y_r, z_r)$ มายังจุด $P(x_p, y_p, z_p)$ บนระนาบหน้าจานเป็น

$$\begin{bmatrix} E_x^r(P) \\ E_y^r(P) \\ E_z^r(P) \end{bmatrix} = \left\{ -\begin{bmatrix} E_x^{feed}(Q_R) \\ E_y^{feed}(Q_R) \\ E_z^{feed}(Q_R) \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} n_{sx} \\ n_{sy} \\ n_{sz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x^{feed}(Q_R) \\ E_y^{feed}(Q_R) \\ E_z^{feed}(Q_R) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n_{sx} \\ n_{sy} \\ n_{sz} \end{bmatrix} \right\} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s_r)(\rho_2^r + s_r)}} e^{-jks_r} \tag{3.88}$$

โดยที่ n_{sx}, n_{sy} และ n_{sz} คือ องค์ประกอบตามแนวแกน x, y และ z ของ $\hat{n}_s$ ตามลำดับ และรัศมีความโค้งของหน้าคลื่นสะท้อน ρ_1^r, ρ_2^r เป็นดังสมการ (3.74) และเนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้สมมุติว่าคลื่นที่มาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นคลื่นทรงกลม ดังนั้นรัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นตกกระทบ $\rho_1^i = \rho_2^i = s_i$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.74) จะได้

$$\frac{1}{\rho_{1,2}^r} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{\cos\theta_i}\left(\frac{\sin^2\theta_2}{R_1} + \frac{\sin^2\theta_1}{R_2}\right) \pm \frac{1}{2}\left\{4\left[\frac{1}{\cos^2\theta_i}\left(\frac{\sin^2\theta_2}{R_1} + \frac{\sin^2\theta_1}{R_2}\right)^2 - \frac{4}{R_1 R_2}\right]\right\}^{1/2} \tag{3.89}$$

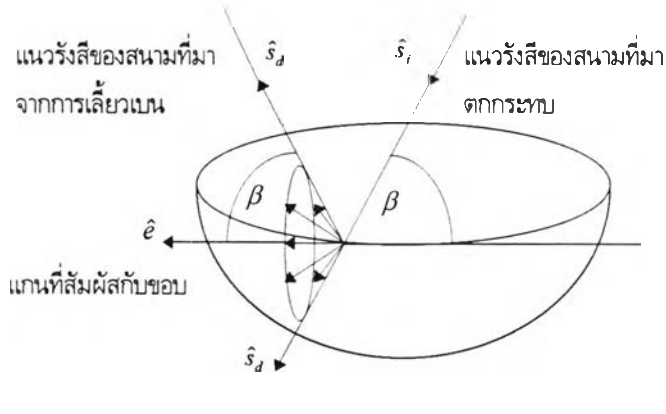
โดยที่ $\cos\theta_i = -\hat{n}_s \cdot \hat{s}_i$, $\sin\theta_1 = \sqrt{1-(\hat{s}_i \cdot \hat{u}_1)^2}$, $\sin\theta_2 = \sqrt{1-(\hat{s}_i \cdot \hat{u}_2)^2}$ และค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของพื้นผิวรูปพาราโบลิกที่จุดสะท้อนซึ่งประกอบด้วย รัศมีความโค้งหลัก R_1, R_2 และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลัก $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ ของพื้นผิวรูปพาราโบลิกสามารถหาได้ดังสมการ (2.39ก-ข) และ (2.42ก-ข) ตามลำดับ

จากการวิเคราะห์หารัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนดังสมการ (3.89) พบว่า เมื่อสายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางอยู่ที่จุดโฟกัส รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อน $\rho_1^r = \rho_2^r \to \infty$ ซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบสะท้อนออกมาจากพื้นผิวรูปพาราโบลิกตรงกับคุณสมบัติทางเรขาคณิตของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกที่ทำหน้าที่ในการดัดหน้าคลื่น ดังนั้นตัวประกอบการลดทอน $\sqrt{\dfrac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s_r)(\rho_2^r + s_r)}} = \sqrt{\dfrac{1}{(1+\dfrac{s_r}{\rho_1^r})(1+\dfrac{s_r}{\rho_2^r})}} \approx 1$

จากข้างต้นสนามไฟฟ้าเนื่องจากการสะท้อนบนพื้นผิวรูปพาราโบลิกมายังจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจานสามารถหาได้ดังสมการ (3.88) ซึ่งใช้ได้กับทั้งกรณีที่เป็นจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรและไม่สมมาตร เนื่องจากมีคุณสมบัติและค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของพื้นผิวเหมือนกัน สนามไฟฟ้าเนื่องจากการสะท้อนเป็นองค์ประกอบหนึ่งของสนามที่แผ่พลังงานออกมาจากจานสะท้อนไปยังจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจานที่เกิดจากพฤติกรรมการสะท้อนของคลื่น สำหรับอีกองค์ประกอบหนึ่งที่แผ่พลังงานออกมานั้นเกิดจากพฤติกรรมการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนคลื่น ซึ่งรายละเอียดในการหาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนนั้นได้กล่าวไว้ในหัวข้อถัดไป

<u>ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต</u>

การศึกษาพฤติกรรมของคลื่นเนื่องจากการเลี้ยวเบนทำได้หลายวิธีดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อแนวทางในการวิเคราะห์ แต่ในการศึกษาผลกระทบเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบที่มีต่อระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในวิทยานิพนธ์นี้ ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตได้นำมาใช้ในการวิเคราะห์ตามเหตุผลที่กล่าวไว้ในหัวข้อแนวทางในการวิเคราะห์



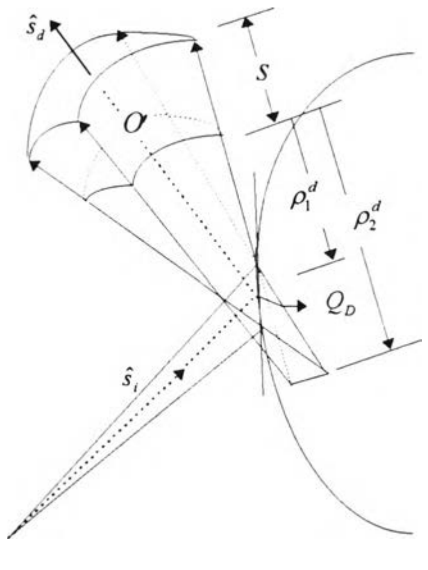
รูป 3.11 แนวรังสีของสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบเมื่อแนวรังสีของสนามที่มาตกกระทบทำมุม β กับแกนที่สัมผัสกับขอบในบริเวณที่เป็นตัวกลางเอกพันธุ์ตามเงื่อนไขการเลี้ยวเบนของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต

ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตเป็นกรรมวิธีที่ใช้ในย่านความถี่สูงวิธีหนึ่ง ซึ่ง J.B. Keller (1962) ได้ขยายแนวความคิดของกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเพื่อนำมาอธิบายปรากฏการณ์เกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของแสงที่เกิดขึ้นในบริเวณเงา (shadow region) ที่กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตไม่สามารถอธิบายได้ โดยคิดว่ามีสนามปริมาณหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อมี

สนามตกกระทบที่ขอบ (edge) มุม (corner) หรือจุดยอด (vertex) แล้วเลี้ยวเบนไปในบริเวณเงา Keller เรียกสนามปริมาณนั้นว่า สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบน (diffracted field) สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนนี้ Keller ได้ใช้คุณสมบัติของรังสีที่ใช้ในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตมาอธิบายโดยมีกฎของการเลี้ยวเบน (law of diffraction) ซึ่งหาได้จากกฎของสเนลล์หรือดัดแปลงหลักการของแฟร์มาต์โดยกล่าวว่า ในบริเวณที่เป็นตัวกลางเอกพันธุ์ รังสีที่มาจากการเลี้ยวเบนที่ขอบมีทิศทางทำมุมกับแนวแกนที่สัมผัสกับขอบเท่ากับมุมที่รังสีตกกระทบทำกับแนวแกนที่สัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบนในทุกระนาบรอบแกนนั้น หรือกล่าวคือรังสีการเลี้ยวเบน (diffracted rays) มีทิศทางอยู่บนพื้นผิวกรวยที่มีมุมเป็นสองเท่าของมุมระหว่างรังสีตกกระทบกับแนวแกนที่สัมผัสกับขอบ (แกนของกรวย) ดังรูป 3.11

จากรูป 3.11 แนวรังสีของสนามที่มาจากการเลี้ยวเบนกำหนดโดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเลี้ยวเบน $\hat{s}_d$ แนวรังสีของสนามที่มาตกกระทบกำหนดโดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบ $\hat{s}_i$ และแนวแกนที่สัมผัสกับขอบกำหนดโดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบ $\hat{e}$ ดังนั้นกฎของการเลี้ยวเบนสามารถกำหนดด้วยสมการคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\hat{s}_i \cdot \hat{e} = \hat{s}_d \cdot \hat{e} \tag{3.90}$$



รูป 3.12 ลำรังสีของสนามไฟฟ้าตกกระทบและสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดขอบ Q_D

จากแนวความคิดของ Keller และกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต เมื่อมีสนามไฟฟ้าตกกระทบพื้นผิวที่มีขอบในบริเวณที่เป็นตัวกลางเอกพันธุ์ดังรูป 3.12 สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนจากจุดขอบสามารถหาได้เช่นเดียวกับสนามไฟฟ้าเนื่องจากการสะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนในหัวข้อกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต ดังนั้น

$$\vec{E}^d(s) = \vec{E}^d(O')\sqrt{\frac{\rho_1^d \rho_2^d}{(\rho_1^d + s)(\rho_2^d + s)}}e^{-jks} \tag{3.91}$$

โดยที่ $\vec{E}^d(O')$ คือ สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดอ้างอิง O' ใด ๆ

ρ_1^d , ρ_2^d คือ รัศมีความโค้งหลักของสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบน หรือระยะตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบน (caustic of diffracted field) ลำดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ

s คือ ระยะตามแนวรังสีการเลี้ยวเบนจากจุดอ้างอิง O' ใด ๆ

จากสมการ (3.91) สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดอ้างอิง O' ดังนั้นจากรูป 3.12 ถ้าเลือกให้จุดอ้างอิง O' อยู่ที่จุดขอบ Q_D ซึ่งเป็นจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่ง เนื่องจากลำรังสีเลี้ยวเบนที่พุ่งออกจากจุดเลี้ยวเบนมีลักษณะเป็นกรวยที่มีจุดยอดของกรวยหรือจุดตัดของลำรังสีอยู่ที่จุดขอบนั้นตามเงื่อนไขการเลี้ยวเบน จากรูป 3.12 เมื่อจุดอ้างอิง O' อยู่ที่จุดขอบ Q_D ระยะตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่งเป็นศูนย์ ($\rho_1^d = 0$) และสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดขอบต้องมีค่าจำกัดเมื่อ $\rho_1^d \to 0$ และสมมุติว่ามีความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าตกกระทบที่จุดขอบเช่นเดียวกับสนามไฟฟ้าเนื่องจากการสะท้อนที่จุดสะท้อนที่มีความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าตกกระทบที่จุดสะท้อนในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต ดังนั้น

$$\vec{E}^d(Q_D) = \lim_{\rho_1^d \to 0} \vec{E}^d(O')\sqrt{\rho_1^d} = \vec{E}^i(Q_D)\cdot \tilde{D} \tag{3.92}$$

โดยที่ $\tilde{D}$ คือ สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิก (dyadic diffraction coefficient) ซึ่งคล้ายกับสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิกในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต และเมื่อแทนสมการ (3.92) ลงในสมการ (3.91) สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ตำแหน่งใด ๆ เมื่อจุดอ้างอิงอยู่ที่จุดขอบเป็นดังสมการ (3.93)

$$\vec{E}^d(s) = \lim_{\rho_1^d \to 0}\left[\vec{E}^d(O')\sqrt{\rho_1^d}\sqrt{\frac{\rho_2^d}{(\rho_1^d+s)(\rho_2^d+s)}}e^{-jks}\right] = \vec{E}^i(Q_D)\cdot\tilde{D}\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s(\rho_2^d+s)}}e^{-jks} \tag{3.93}$$

โดยที่ $\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s(\rho_2^d+s)}}$ เรียกว่า ตัวประกอบการลดทอน และ ρ_2^d คือ ระยะระหว่างจุดขอบหรือจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่งกับจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่สองซึ่งสามารถหาได้ดังแสดงในภาคผนวก ข. เป็นดังสมการ (3.94)

$$\frac{1}{\rho_2^d} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{\hat{n}_e\cdot(\hat{s}_i - \hat{s}_d)}{R_E \sin^2\beta_i} \tag{3.94}$$

โดยที่ ρ_e^i คือ รัศมีความโค้งของหน้าคลื่นตกกระทบในระนาบตกกระทบ

R_E คือ รัศมีความโค้งของขอบที่จุดเลี้ยวเบน

$\hat{n}_e$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับขอบที่จุดเลี้ยวเบนและมีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้ง

$\hat{s}_i$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบ

$\hat{s}_d$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเลี้ยวเบน

β_i คือ มุมตกกระทบซึ่งเท่ากับมุมระหว่าง $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $\hat{e}$

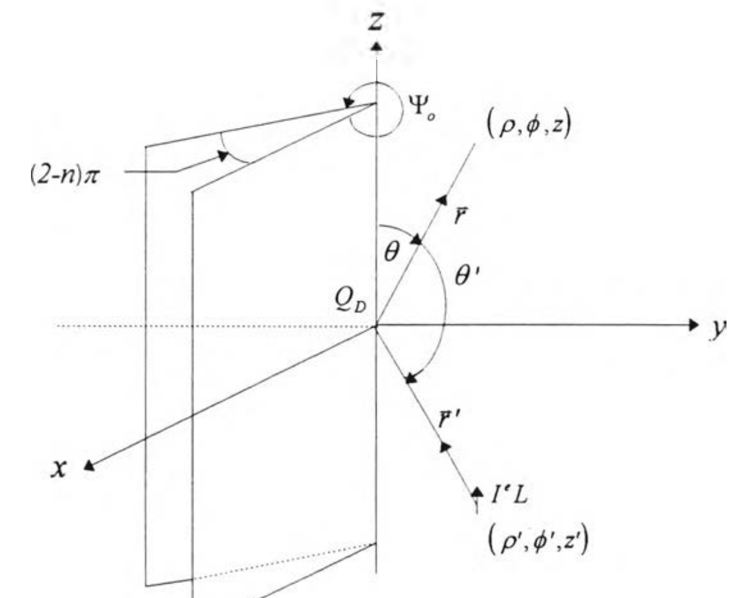
จากสมการ (3.94) ρ_2^d ขึ้นอยู่กับรัศมีความโค้งของคลื่นตกกระทบ มุมระหว่างรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนที่ทำกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกตั้งฉากกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน มุมตกกระทบ และรัศมีความโค้งของขอบที่จุดเลี้ยวเบน

สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกในสมการ (3.93) โดยปกติสามารถหาได้จากปัญหาที่รู้จักกันดี (canonical problems) ที่ซึ่งมีลักษณะทางเรขาคณิตง่าย ๆ และใกล้เคียงกับจุดที่เกิดการเลี้ยวเบนในปัญหาที่กำลังพิจารณา สำหรับในการศึกษาผลกระทบเนื่องจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบที่เป็นสันตรง (straight edge) หรือเป็นมุม (corner) สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกหาได้จากการวิเคราะห์ปัญหารูปลิ่มตัวนำ (conducting wedge) ซึ่งถูกกระตุ้นด้วยสายอากาศไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางตัวในทิศทาง z และถูกกระตุ้นด้วยไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่วางตัวในทิศทาง z โดยในกรณีที่ถูกกระตุ้นด้วยสายอากาศไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางตัวในทิศทาง z ที่จุด (ρ',ϕ',z') ดังรูป 3.13 สนามไฟฟ้าที่จุดสังเกต (ρ,ϕ,z) สามารถหาได้โดยใช้เฮิรตซ์เวกเตอร์ (Hertz vectors) $\bar{\Pi}^e$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ดังสมการ (3.95)

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\bar{\Pi}^e = -\frac{\bar{J}_s}{j\omega\varepsilon} \qquad (3.95)$$

โดยที่ $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ และเนื่องจากถูกกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากวางตัวในทิศทาง z ดังนั้นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $\bar{J}_s$ เป็นดังสมการ (3.96)

$$\bar{J}_s = I^e L\delta(\bar{r}-\bar{r}')\bar{a}_z \qquad (3.96)$$



รูป 3.13 รูปลิ่มตัวนำมีความยาวอนันต์ตามแกน z ถูกกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมาก ($L << \lambda$)

เนื่องจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าอยู่ในทิศทาง z ดังนั้นสมการ (3.95) ลดรูปลงเป็น

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\Pi_z^e = -\frac{I^e L\delta(\bar{r}-\bar{r}')}{j\omega\varepsilon} \qquad (3.97)$$

และเขียนอยู่ในรูปของกรีนฟังก์ชันได้ดังสมการ (3.98)

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G^s(\bar{r},\bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \tag{3.98}$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)G^s(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z') = -\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{\rho} \tag{3.99}$$

โดยที่ $\Pi_z^e = \frac{I^e L}{j\omega\varepsilon}G^s(\bar{r},\bar{r}')$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบดีริชเลต์ (Dirichlet boundary condition) คือ $E_\rho^e\big|_{\phi=0,\Psi_o} = \frac{\partial^2\Pi_z^e}{\partial\rho\partial z}\bigg|_{\phi=0,\Psi_o} = 0$ และ $E_z^e\big|_{\phi=0,\Psi_o} = \frac{\partial^2\Pi_z^e}{\partial z^2}\bigg|_{\phi=0,\Psi_o} = 0$ ดังนั้น $\Pi_z^e = 0$ บนพื้นผิวรูปลิ่มตัวนำ หรือจะได้

$$G^s(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z') = 0 \qquad \text{ที่ } \phi = 0 \text{ และ } \phi = \Psi_o \tag{3.100}$$

การหากรีนฟังก์ชันของสมการ (3.99) ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตดังสมการ (3.100) สำหรับบริเวณปิด (close region) ทำได้โดยกระจายกรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงที่ปรับบรรทัดฐานแล้ว (normalized eigenfunctions) $\Phi_m(\phi)$ ดังสมการ (3.101)

$$G^s(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z') = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(\rho,z,\rho',z')\Phi_m(\phi)\Phi_m(\phi') \tag{3.101}$$

เมื่อแทนสมการ (3.101) ลงในสมการ (3.99) และเนื่องจาก $\delta(\phi-\phi') = \sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(\phi)\Phi_m(\phi')$ ดังนั้น

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\Phi_m(\phi)\Phi_m(\phi')\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)G_m + \frac{G_m\Phi_m(\phi')}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi_m(\phi)}{\partial\phi^2}\right] = -\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(z-z')}{\rho}\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(\phi)\Phi_m(\phi') \tag{3.102}$$

คูณสมการ (3.102) ด้วย $\frac{\rho^2}{G_m\Phi_m(\phi)\Phi_m(\phi')}$ จะได้

$$\frac{\rho^2}{G_m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 + \frac{\delta(\rho-\rho')\delta(z-z')}{\rho}\right)G_m = v_m^2 = -\frac{1}{\Phi_m(\phi)}\frac{\partial^2\Phi_m(\phi)}{\partial\phi^2} \tag{3.103}$$

สมการ (3.103) สามารถแยกพิจารณาออกเป็น 2 สมการดังนี้

$$\frac{\partial^2 \Phi_m(\phi)}{\partial \phi^2} + \nu_m^2 \Phi_m(\phi) = 0 \qquad (3.104ก)$$

และ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \frac{\nu_m^2}{\rho^2}\right) G_m = -\frac{\delta(\rho - \rho')\delta(z - z')}{\rho} \qquad (3.104ข)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.104ก) สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปคือ

$$\Phi_m(\phi) = C_1 \cos(\nu_m \phi) + C_2 \sin(\nu_m \phi) \qquad (3.105)$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (3.100) $\Phi_m(0) = 0$ และ $\Phi_m(\Psi_o) = 0$ ดังนั้น

$$\Phi_m(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \qquad (3.106ก)$$

$$\Phi_m(\Psi_o) = C_1 \cos(\nu_m \Psi_o) + C_2 \sin(\nu_m \Psi_o) = 0 \qquad (3.106ข)$$

จากสมการ (3.106ก) $C_1 = 0$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.106ข) C_2 ต้องไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\sin(\nu_m \Psi_o) = 0$ เป็นจริงเมื่อ

$$\nu_m = \frac{m\pi}{\Psi_o} \qquad \text{โดยที่ } m = 0,1,2,\ldots \qquad (3.107)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.104ก) คือ

$$\Phi_m(\phi) = C_2 \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\right) \qquad (3.108)$$

และเมื่อทำการปรับบรรทัดฐานโดยกำหนดว่า $\int_0^{\Psi_o} [\Phi_m(\phi)]^2 d\phi = 1$ จะได้ $C_2 = \sqrt{\frac{2}{\Psi_o}}$ ทำให้ฟังก์ชันค่าเจาะจงที่ถูกปรับบรรทัดฐานแล้วเป็นดังสมการ (3.109)

$$\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\Psi_o}} \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\right) \qquad (3.109)$$

เมื่อแทนสมการ (3.109) ลงในสมการ (3.101) จะได้

$$G^{s}(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z')=\frac{2}{\Psi_o}\sum_{m=1}^{\infty}G_m(\rho,z;\rho',z')\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right) \tag{3.110}$$

จากสมการ (3.104ข) เมื่อพิจาณากรีนฟังก์ชันในบริเวณเปิด (open region) ตามทิศทาง z ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน (radiation condition) คือ $G_m(\rho,z=\infty;\rho',z')=0$ และ $G_m(\rho,z=-\infty;\rho',z')=0$ ดังนั้นจากภาคผนวก ค. กรีนฟังก์ชันสามารถหาได้โดยทำการแปลงฟูริเยร์สมการ (1.15ข) โดยใช้คุณสมบัติของการแปลงฟูริเยร์คือ

$$G_m(\rho,z;\rho',z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g_m(\rho,h)e^{-jhz}dh \tag{3.111}$$

ซึ่งมีคู่การแปลงกลับฟูริเยร์เป็น

$$g_m(\rho,h)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_m(\rho,z;\rho',z')e^{jhz}dz \tag{3.112}$$

และ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 G_m(\rho,z;\rho',z')}{\partial z^2}e^{jhz}dz=-h^2g_m(\rho,h) \tag{3.113}$$

จะได้

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+k^2-h^2-\frac{v_m^2}{\rho^2}\right)g_m(\rho,h)=-\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}e^{jhz'} \tag{3.114ก}$$

หรือ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+k^2-h^2-\frac{v_m^2}{\rho^2}\right)g'_m(\rho,h)=-\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{3.114ข}$$

โดยที่ $g'_m(\rho,h)=g_m(\rho,h)e^{-jhz'}$ และผลเฉลยของสมการ (3.114ข) ในบริเวณ $\rho>\rho'$ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน กล่าวคือสนามไฟฟ้าที่ระยะอนันต์มีค่าเป็นศูนย์ดังนั้น $g'_m(\rho,h)=0$ เมื่อ $\rho\to\infty$ และในบริเวณ $\rho<\rho'$ สนามไฟฟ้าต้องมีปริมาณจำกัดในทุก ๆ ตำแหน่งรวมทั้งที่ $\rho=0$

จากภาคผนวก ค. ผลเฉลยของสมการ (3.114ข) สามารถหาได้โดยทำการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ดังสมการ (3.115)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+k^2-h^2-\frac{v_m^2}{\rho^2}\right)g'_m(\rho,h)=0 \tag{3.115}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.115) สามารถแสดงได้ 2 รูปแบบคือ

$$g'_m = A_m^1 H_{\nu_m}^{(1)}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right) + A_m^2 H_{\nu_m}^{(2)}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right)$$

โดยที่ $H_{\nu_m}^{(1)}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)$ คือ ฟังก์ชันฮันเกล (Hankel function) ชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν_m และ $H_{\nu_m}^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)$ คือ ฟังก์ชันฮันเกลชนิดที่สองอันดับที่ ν_m

หรือ
$$g'_m = B_m^1 J_{\nu_m}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right) + B_m^2 Y_{\nu_m}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right)$$

โดยที่ $J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) ชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν_m และ $Y_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับที่ ν_m

สำหรับในบริเวณ $\rho > \rho'$ $g'_m(\rho,h) = 0$ เมื่อ $\rho \to \infty$ และสนามในบริเวณนี้มีลักษณะเป็นคลื่นจรที่เคลื่อนที่ออกไป (outward travelling wave) ดังนั้น

$$g_m'^{(1)} = A_m^2 H_{\nu_m}^{(2)}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right) \qquad \text{เมื่อ } \rho > \rho' \tag{3.116ก}$$

และสำหรับในบริเวณ $\rho < \rho'$ $g'_m(\rho,h)$ ต้องมีปริมาณจำกัดที่ $\rho = 0$ แต่เนื่องจาก $Y_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)$ มีค่าเป็นอนันต์ที่ $\rho = 0$ ดังนั้น

$$g_m'^{(2)} = B_m^1 J_{\nu_m}\left(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho\right) \qquad \text{เมื่อ } \rho < \rho' \tag{3.116ข}$$

จากภาคผนวก ค. ตัวกำหนดวรอนสกี $\Delta(\rho')$ ของผลเฉลยดังสมการ (3.116ก) และ (3.116ข) เป็นดังสมการ (3.117)

$$\Delta(\rho') = A_m^2 H_{\nu_m}^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') B_m^1 J'_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') - A_m^2 H_{\nu_m}'^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') B_m^1 J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') \tag{3.117}$$

เนื่องจาก $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jY_n(x)$ และ $H_n'^{(2)}(x) = J'_n(x) - jY'_n(x)$ ดังนั้น

$$\Delta(\rho') = -jA_m^2 B_m^1 \sqrt{k^2-h^2}\left[J'_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') Y_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') - J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') Y'_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')\right] \tag{3.118}$$

และจาก $J_n(x)Y'_n(x) - Y_n(x)J'_n(x) = \dfrac{2}{\pi x}$ สมการ (3.118) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta(\rho') = -jA_m^2 B_m^1 \sqrt{k^2-h^2}\left[\frac{-2}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\,\rho'}\right] = \frac{2jA_m^2 B_m^1}{\rho'} \tag{3.119}$$

จากภาคผนวก ค. ผลเฉลยของสมการ (3.114ข) คือ

$$g'_m(\rho,h)=\begin{cases}-\dfrac{j\pi}{2}H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho).J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') & ,\rho>\rho' \\ -\dfrac{j\pi}{2}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') & ,\rho<\rho'\end{cases} \quad (3.120ก)$$

หรือ

$$g_m(\rho,h)=\begin{cases}-\dfrac{j\pi}{2}H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{jhz'} & ,\rho>\rho' \\ -\dfrac{j\pi}{2}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{jhz'} & ,\rho<\rho'\end{cases} \quad (3.120ข)$$

ซึ่งเมื่อทำการแปลงฟูริเยร์กลับจะได้

$$G_m(\rho,z;\rho',z')=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}-\dfrac{j\pi}{2}H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh & ,\rho>\rho' \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}-\dfrac{j\pi}{2}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh & ,\rho<\rho'\end{cases} \quad (3.121)$$

แทนสมการ (3.121) ลงในสมการ (3.110) จะได้

$$G^s(\rho,\phi,z,\rho',\phi',z')=\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\Psi_o}\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{j\pi}{2}H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh \\ \qquad ,\rho>\rho' \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\Psi_o}\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{j\pi}{2}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh \\ \qquad ,\rho<\rho'\end{cases}$$

เมื่อพิจารณากรณีที่แหล่งกำเนิดไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากวางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ $(r'\to\infty)$ สนามไฟฟ้าที่จุดสังเกต (ρ,ϕ,z) ใด ๆ สอดคล้องกับกรีนฟังก์ชันในกรณีที่ $\rho<\rho'$ ดังสมการ (3.122)

$$G^s(\rho,\phi,z,\rho',\phi',z')=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\Psi_o}\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{j\pi}{2}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh$$

(3.122)

สมการ (3.122) อยู่ในรูปอินทิรัลที่มีขอบเขตอนันต์ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ แต่เนื่องจากในกรณีแหล่งกำเนิดไดโพลไฟฟ้าวางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ $(r'\to\infty)$ การหาค่าสมการ (3.122) สามารถทำได้โดยใช้กรรมวิธีการประมาณที่เรียกว่า เทคนิคจุดอานม้า (saddle point techniques) มาประมาณค่าอินทิรัลที่มีขอบเขตอนันต์ดังสมการ (3.123) ได้ดังนี้

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')e^{-jh(z-z')}dh \quad (3.123)$$

เมื่อ $r' \to \infty$ ($\rho' \to \infty$) ดังนั้น $H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho')$ สามารถประมาณได้ดังสมการ (3.124)

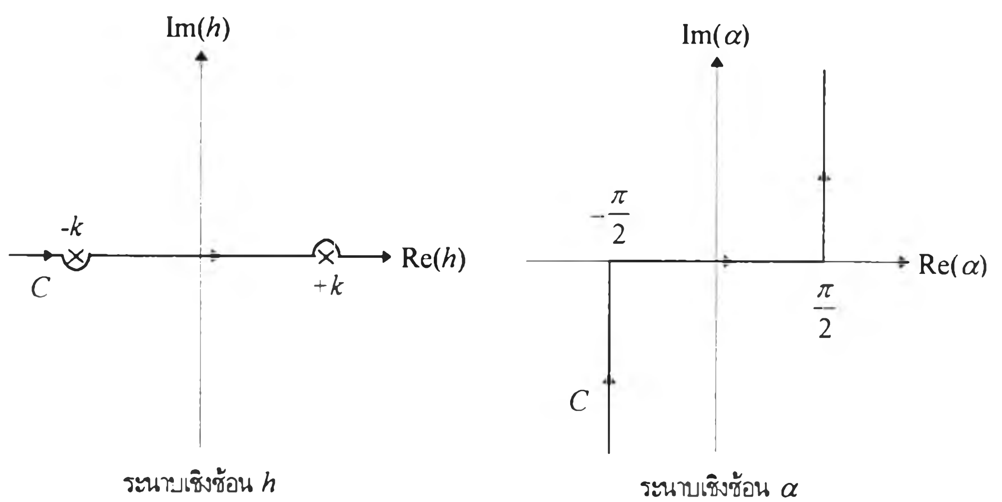
$$H^{(2)}_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho') \overset{\rho'\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho'}}\,\frac{e^{-j\sqrt{k^2-h^2}\rho' + j(2\nu_m+1)\frac{\pi}{4}}}{(k^2-h^2)^{1/4}} \tag{3.124}$$

แทนสมการ (3.124) ลงในสมการ (3.123) จะได้

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} A(h)e^{-j\sqrt{k^2-h^2}\rho' + jhz'}\,dh \tag{3.125}$$

โดยที่ $A(h) = J_{\nu_m}(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)\sqrt{\frac{2}{\pi\rho'}}\,\frac{e^{j(2\nu_m+1)\frac{\pi}{4}}}{(k^2-h^2)^{1/4}}e^{-jhz}$ ซึ่งมีขั้ว (pole) ในระนาบเชิงซ้อน h อยู่ที่ $\pm k$ ถ้าให้ $\theta_c = \frac{\pi}{2} - \theta'$ เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลม $z' = r'\cos\theta' = r'\sin\theta_c$ และ $\rho' = r'\sin\theta' = r'\cos\theta_c$ และแปลง h ไปอยู่ในระนาบเชิงซ้อน α โดยให้ $h = k\sin\alpha$ สมการ (3.125) จะเป็น

$$\begin{aligned} I &= \int_C A(k\sin\alpha)e^{-jkr'\cos\alpha\cos\theta_c + jkr'\sin\alpha\sin\theta_c}\,k\cos\alpha\,d\alpha \\ &= \int_C A(k\sin\alpha)k\cos\alpha\,e^{-jkr'\cos(\alpha+\theta_c)}d\alpha \end{aligned} \tag{3.126}$$



รูป 3.14 เส้นทาง C ในระนาบเชิงซ้อน h และในระนาบเชิงซ้อน α

โดยมีเส้นทาง C เป็นดังรูป 3.14 และจากเทคนิคจุดอานม้า (Ishimaru, 1991) เมื่อ $kr' \to \infty$ และ $f(\alpha) = -j\cos(\alpha+\theta_c)$ อินทิกรัลในสมการ (3.126) สามารถประมาณเป็น

$$I \cong A(k\sin\alpha_s)k\cos\alpha_s\sqrt{\frac{2}{kr'|f''(\alpha_s)|}}e^{kr'f(\alpha_s)+j\gamma} \tag{3.127}$$

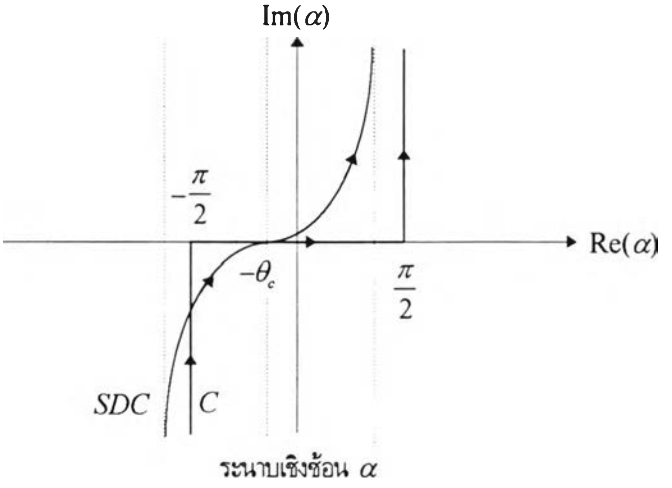
โดยที่ α_s คือ ค่า α ที่ทำให้เกิดจุดอานม้า (saddle point) ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ $\frac{df}{d\alpha}=0$ ดังสมการ (3.128)

$$\frac{df(\alpha_s)}{d\alpha} = j\sin(\alpha_s+\theta_c)=0 \tag{3.128}$$

ดังนั้น $\alpha_s=-\theta_c$ และ γ คือ มุมที่เส้นทาง steepest descent ทำกับแกนส่วนจริงของ α ซึ่งต้องเลือกให้ $\left[e^{j2\gamma}f''(\alpha_s)\right]$ เป็นจำนวนจริงลบ และเนื่องจาก $f''(\alpha_s)=j\cos(0)=j$ และ $f(\alpha_s)=-j\cos(0)=-j$ ดังนั้น

$$2\gamma+\frac{\pi}{2}=\pm\pi \tag{3.129}$$

ซึ่งจะได้ γ เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ หรือ $-\frac{3\pi}{4}$ ขึ้นอยู่กับเส้นทาง steepest descent โดย $\gamma=\frac{\pi}{4}$ ถ้าเส้นทาง steepest descent เริ่มจากจตุภาค (quadrant) ที่ 3 มายังจตุภาคที่ 1 หรือจากจตุภาคที่ 2 มายังจตุภาคที่ 4 และ $\gamma=-\frac{3\pi}{4}$ ถ้าเส้นทาง steepest descent เริ่มจากจตุภาคที่ 1 มายังจตุภาคที่ 3 หรือจากจตุภาคที่ 4 มายังจตุภาคที่ 2 สำหรับในกรณีนี้เส้นทาง steepest descent เป็นดังรูป 1.5 ซึ่งเริ่มจากจตุภาคที่ 3 มายังจตุภาคที่ 1 ดังนั้น $\gamma=\frac{\pi}{4}$ และเนื่องจาก $\theta_c=\frac{\pi}{2}-\theta'$ ดังนั้นสมการ (3.127) จะเป็น



รูป 3.15 เส้นทาง steepest descent ในระนาบเชิงซ้อน α

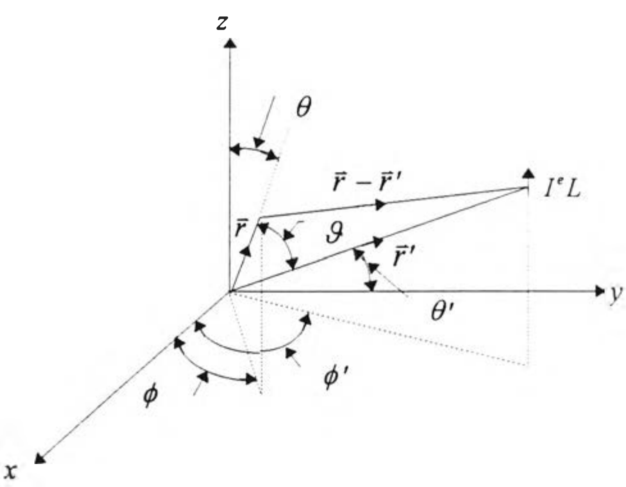
$$
\begin{aligned}
I &\cong A(-k\cos\theta')k\sin\theta'\sqrt{\frac{2}{kr'}}e^{-jkr'+j\frac{\pi}{4}} \\
&= J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')\sqrt{\frac{2}{\pi\rho'}}\frac{e^{j(2\nu_m+1)\frac{\pi}{4}+jkz\cos\theta'}}{\sqrt{k\sin\theta'}}k\sin\theta'\sqrt{\frac{2\pi}{kr'}}e^{-jkr'+j\frac{\pi}{4}} \\
&= 2J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')\sqrt{\frac{1}{\rho' r'\sin\theta'}}\sin\theta' e^{j(\nu_m+1)\frac{\pi}{2}+jkz\cos\theta'-jkr'} \\
&= 2J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{j(\nu_m+1)\frac{\pi}{2}+jkz\cos\theta'}\frac{e^{-jkr'}}{r'}
\end{aligned} \tag{3.130}
$$

เมื่อแทนลงในสมการ (3.122) จะได้

$$
G^s(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi_o}\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta'+j\nu_m\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-jkr'}}{r'} \tag{3.131}
$$

เนื่องจาก $\bar{\Pi}^e = \Pi_z^e\bar{a}_z = \frac{I^e L}{j\omega\varepsilon}G^s(\bar{r},\bar{r}')\bar{a}_z$ และ $\bar{E}^e = \nabla(\nabla\cdot\bar{\Pi}^e) + k^2\bar{\Pi}^e$ ดังนั้น

$$
E_z^e = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Pi_z^e = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\frac{I^e L}{j\omega\varepsilon}G^s(\bar{r},\bar{r}') \tag{3.132}
$$



รูป 3.16 ไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากเมื่อวางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ

เมื่อแทนสมการ (3.131) ลงในสมการ (3.132) สนามไฟฟ้าในทิศทางตามแกน z ที่จุดสังเกตใด ๆ รอบรูปลิ่มตัวนำที่ถูกกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ เป็นดังสมการ (3.133)

$$E_z^e = \left[\left(jk\cos\theta' \right)^2 + k^2 \right] \frac{I^e L}{j\omega\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi_o} \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o} \phi \right) \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o} \phi' \right) J_{v_m}(k\rho \sin\theta') e^{jkz\cos\theta' + jv_m \frac{\pi}{2}} \frac{e^{-jkr'}}{r'}$$
$$= -j\omega\mu I^e L \sin^2\theta' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi_o} \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o} \phi \right) \sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o} \phi' \right) J_{v_m}(k\rho \sin\theta') e^{jkz\cos\theta' + jv_m \frac{\pi}{2}} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \quad (3.133)$$

และเมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าที่มาจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางตัวอยู่ในทิศทาง z ดังสมการ (3.96) และอยู่ที่ตำแหน่งไกลมากดังรูป 3.16 สามารถหาได้จากศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก (magnetic vector potential) ดังสมการ (3.134)

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{I^e e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} dz \quad (3.134)$$

จากสมการ (3.134) พจน์ $|\bar{r}-\bar{r}'| = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta \right]^{1/2}$ โดยที่ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{r}$ กับ $\bar{r}'$ เป็นดังสมการ (3.135)

$$\cos\vartheta = \frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{rr'} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \quad (3.135)$$

เมื่อ $r' \to \infty$ พจน์ $|\bar{r}-\bar{r}'| \approx r' - r\cos\vartheta + O(1/r')$ และเนื่องจากไดโพลไฟฟ้ามีความยาวสั้นมากเมื่อเทียบกับระยะทางจากไดโพลไปยังจุดสังเกต ดังนั้นพจน์ $|\bar{r}-\bar{r}'|$ ซึ่งเป็นตัวหารในสมการ (3.134) อาจถือได้ว่ามีค่าคงตัวเท่ากับ r' ตลอดช่วงการอินทิเกรต และไดโพลไฟฟ้ามีขนาดสั้นมากเมื่อเทียบกับความยาวคลื่นที่ใช้งานทำให้เฟสที่ปรากฏที่ปลายด้านหนึ่งต่างกับเฟสที่ปรากฏที่อีกปลายด้านหนึ่งน้อยมาก ดังนั้นพจน์ $I^e e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}$ ซึ่งเป็นตัวตั้งในสมการ (3.134) สามารถประมาณว่ามีค่าคงตัวเท่ากับ $I^e e^{-jk(r'-r\cos\vartheta)}$ ตลอดช่วงการอินทิเกรต ซึ่งจากการประมาณดังกล่าวทำให้ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็กในสมการ (3.134) เป็น

$$A_z = \frac{\mu I^e L e^{-jkr' + jkr\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\right]}}{4\pi r'} = \frac{\mu I^e L e^{-jkr' + jkz\cos\theta' + jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}}{4\pi r'} \quad (3.136)$$

จากสมการ (3.136) และ $\bar{E} = -j\omega\bar{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\bar{A})$ ดังนั้นสนามไฟฟ้าเนื่องจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากในทิศตามแนวแกน z ที่จุดสังเกตใด ๆ เป็นดังสมการ (3.137)

$$E_z^i = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z \quad (3.137)$$

และเมื่อแทนสมการ (3.136) ลงในสมการ (3.137) จะได้

$$E_z^i = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left[\left(jk\cos\theta' \right)^2 + k^2 \right] A_z = -\frac{j\omega\mu I^e L \sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'} e^{jkz\cos\theta' + jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')} \quad (3.138)$$

สมการ (3.138) แสดงถึงสนามไฟฟ้าเนื่องจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่จุดสังเกต (r,θ,ϕ) เมื่อ $r' \to \infty$ และถ้าให้ $E_o = -\dfrac{j\omega\mu I^e L\sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'}$ สมการ (3.138) บ่งบอกว่าสนามไฟฟ้าเนื่องจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่จุดสังเกต (r,θ,ϕ) เมื่อ $r' \to \infty$ ประพฤติตัวเป็นคลื่นระนาบที่มีขนาด E_o ตกกระทบในทิศทาง (θ',ϕ') และเมื่อจุดสังเกตอยู่ที่จุดกำเนิด $r=0$ ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการเลี้ยวเบน สนามไฟฟ้าเนื่องจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่ตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบน Q_D เมื่อ $r' \to \infty$ เป็นดังสมการ (3.139)

$$E_z^i(Q_D) = -\frac{j\omega\mu I^e L\sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'} \tag{3.139}$$

เมื่อแทนสมการ (3.139) ลงในสมการ (3.133) จะได้

$$E_z^e = E_z^i(Q_D)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi}{\Psi_o}\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta'+j\nu_m\frac{\pi}{2}} \tag{3.140ก}$$

หรือ
$$E_z^e = E_z^i(Q_D)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi}{\Psi_o}J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta'+j\nu_m\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos[\nu_m(\phi-\phi')]-\cos[\nu_m(\phi+\phi')]}{2}\right] \tag{3.140ข}$$

จากภาคผนวก ก. ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν_m สามารถเขียนอยู่ในรูปอินทิกรัลตามเส้นทางในระนาบเชิงซ้อน w ดังสมการ (3.141)

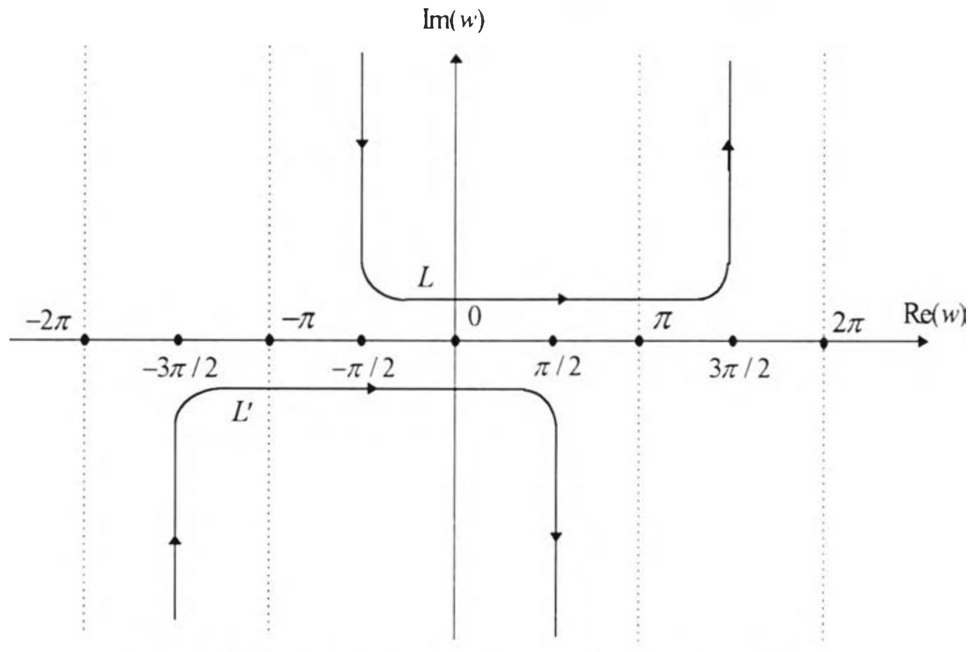
$$J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta') = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_L e^{j\left[k\rho\sin\theta'\cos w+\nu_m\left(w-\frac{\pi}{2}\right)\right]}dw \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L'} e^{j\left[k\rho\sin\theta'\cos w-\nu_m\left(w+\frac{\pi}{2}\right)\right]}dw \end{cases} \tag{3.141}$$

โดยที่ L และ L' เป็นเส้นทางการอินทิเกรตดังรูป 3.17 เนื่องจาก $\cos[\nu_m(\phi\pm\phi')] = \dfrac{e^{j\nu_m(\phi\pm\phi')}+e^{-j\nu_m(\phi\pm\phi')}}{2}$ และจากรูป 3.13 $\Psi_o = n\pi$ ดังนั้น $\nu_m = \dfrac{m\pi}{\Psi_o} = \dfrac{m}{n}$ ทำให้เขียนสมการ (3.140ข) ใหม่ได้เป็น

$$E_z^e = E_z^i(Q_D)\left[\begin{array}{l} \left\{\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw+\dfrac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\right\} \\ -\left\{\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw+\dfrac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\right\} \end{array}\right]e^{jkz\cos\theta'} \tag{3.142ก}$$

หรือ

$$E_z^e = E_z(Q_D)\left[\begin{array}{l} \left\{\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=0}^{\infty} e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw + \dfrac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\right\} \\ -\left\{\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=0}^{\infty} e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw + \dfrac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\right\} \end{array}\right] e^{jkz\cos\theta'} \quad (3.142ข)$$



รูป 3.17 เส้นทาง L และ L' ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งในระนาบเชิงซ้อน w

และจากคุณสมบัติของอนุกรมอนันต์

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{-m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} x^{-m} \quad (3.143ก)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^{-m} = \frac{x^{-1}}{1-x^{-1}} \quad (3.143ข)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} x^{m} \quad (3.143ค)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^{m} = \frac{x}{1-x} \quad (3.143ง)$$

ดังนั้น

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{j\frac{m}{n}(\phi\pm\phi'+w)} = \frac{e^{j\frac{\phi\pm\phi'+w}{n}}}{1-e^{j\frac{\phi\pm\phi'+w}{n}}} = \frac{e^{j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}}}{e^{-j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}} - e^{j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}}} = \frac{\cos\left[\dfrac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right] + j\sin\left[\dfrac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]}{-2j\sin\left[\dfrac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]} \quad (3.144)$$

$$= -\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right] - \frac{1}{2}$$

และ

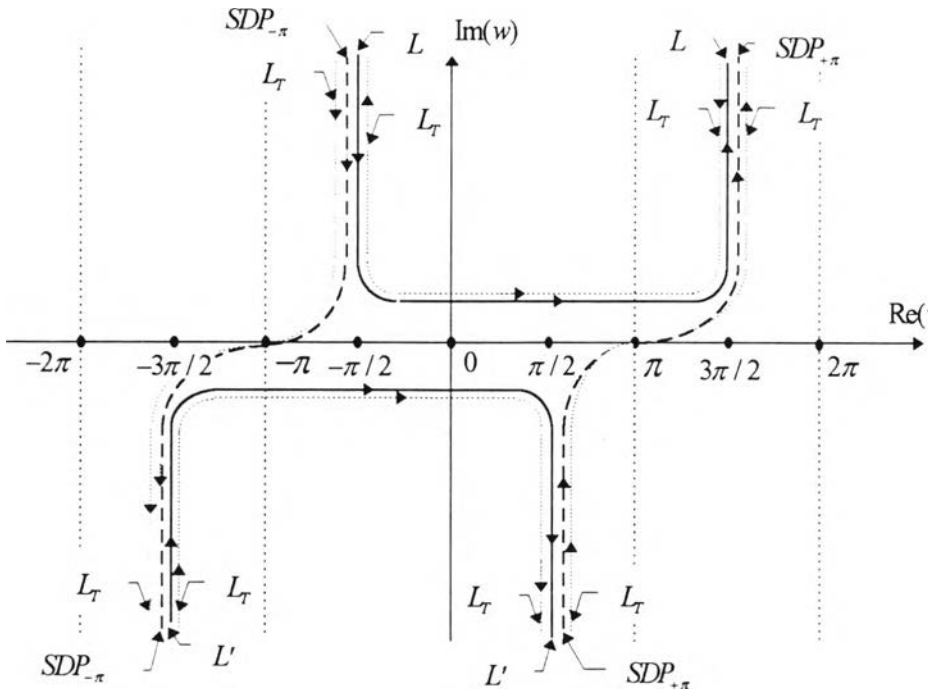
$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-j\frac{m}{n}(\phi\pm\phi'+w)} = \frac{e^{-j\frac{\phi\pm\phi'+w}{n}}}{1-e^{-j\frac{\phi\pm\phi'+w}{n}}} = \frac{e^{-j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}}}{e^{j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}}-e^{-j\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}}} = \frac{\cos\left[\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]-j\sin\left[\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]}{2j\sin\left[\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]} \tag{3.145}$$

$$=\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi\pm\phi'+w}{2n}\right]-\frac{1}{2}$$

ซึ่งเมื่อแทนสมการ (3.144) และ (3.145) ลงในสมการ (3.142ข) จะได้

$$E_z^e = E_z(Q_D)\frac{1}{2\pi n}\left[\begin{array}{l}\left\{\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(-\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]+\frac{1}{2}\right)dw+\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]-\frac{1}{2}\right)dw\right\} \\ -\left\{\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(-\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]+\frac{1}{2}\right)dw+\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]-\frac{1}{2}\right)dw\right\}\end{array}\right] e^{jkz\cos\theta'} \tag{3.146}$$

และจากภาคผนวก ก. $\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}A dw = \int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}A dw$ โดยที่ A คือ ค่าคงที่ใด ๆ และถ้ากำหนดให้ $\int_{L'-L} f(w)dw = \int_{L'} f(w)dw - \int_L f(w)dw$ สมการ (3.146) เขียนใหม่เป็น



รูป 3.18 เส้นทาง steepest descent $SDP_{\pm\pi}$ เส้นทางวงปิด L_T และเส้นทาง L และ L' ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง

$$E_z^e = E_z^i(Q_D)\left[\frac{1}{4\pi jn}\left\{\int_{L'-L}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw - \int_{L'-L}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw\right\}\right]e^{jkz\cos\theta'}$$

(3.147)

อินทิกรัลตามเส้นทาง $L'-L$ ในสมการ (3.147) สามารถหาได้โดยใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิว (residue theorem) และทฤษฎีบทของโคชี (Cauchy's theorem) ซึ่งเมื่อพิจารณาเส้นทางวงปิด L_T ในระนาบเชิงซ้อน w ดังรูป 3.18 พบว่า เส้นทางวงปิด L_T เกิดจากผลรวมของเส้นทาง $L' + SDP_{+\pi} - L + SDP_{-\pi}$ โดยที่ $SDP_{\pm\pi}$ คือ เส้นทาง steepest descent ที่ผ่านจุดอานม้าซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ $\frac{dh_{1,2}}{dw} = 0$ ดังสมการ (3.148)

$$\frac{dh_{1,2}(w_s)}{dw} = -j\sin(w_s) = 0 \tag{3.148}$$

ซึ่งจะได้ $w_s = \pm\pi$ เป็นจุดอานม้าในระนาบเชิงซ้อน w และเมื่อกำหนดให้อินทิกรัลตามเส้น $L'-L$ ในสมการ (3.147) เป็น

$$\int_{L'-L} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw \tag{3.149ก}$$

และ

$$\int_{L'-L} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw \tag{3.149ข}$$

โดยที่ $H_1(w) = \cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]$ และ $H_2(w) = \cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]$ และ $h_1(w) = h_2(w) = j\cos w$ ดังนั้นเมื่อใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิวและทฤษฎีบทของโคชี อินทิกรัลในสมการ (3.149ก) และ (3.149ข) จะเป็น

$$\int_{L'-L} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw = \oint_{L_T} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw - \int_{SDP_{\pm\pi}} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw \tag{3.150}$$

โดยที่ $\int_{SDP_{\pm\pi}} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw = \int_{SDP_{+\pi}} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw + \int_{SDP_{-\pi}} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw$ และประกอบด้วยส่วนที่เป็นอินทิกรัลวงปิด L_T และส่วนที่เป็นอินทิกรัลตามเส้นทาง steepest descent $SDP_{\pm\pi}$ โดยส่วนที่เป็นอินทิกรัลวงปิด L_T สามารถหาได้โดยใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิวดังสมการ (3.151)

$$\begin{aligned}\oint_{L_T} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw &= \oint_{L_T}\cot\left[\frac{\phi\mp\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw = \oint_{L_T}\frac{N_{1,2}(w)}{D_{1,2}(w)}dw \\ &= 2\pi j\sum_{P_{1,2}}\mathrm{Res}(w = w_{P_{1,2}})\end{aligned} \tag{3.151}$$

โดยที่ $N_{1,2}(w) = \cos\left[\frac{\phi\mp\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}$ และ $D_{1,2}(w) = \sin\left[\frac{\phi\mp\phi'+w}{2n}\right]$ ซึ่งมีขั้วเกิดขึ้นเมื่อ $D_{1,2}(w) = 0$ ดังสมการ (3.152)

$$D_{1,2}(w_{P_{1,2}}) = \sin\left[\frac{\phi \mp \phi' + w_{P_{1,2}}}{2n}\right] = 0 \tag{3.152}$$

ซึ่งจะได้ $\left[\frac{\phi \mp \phi' + w_{P_{1,2}}}{2n}\right] = \pi N$ หรือ $w_{P_{1,2}} = -(\phi \mp \phi') + 2n\pi N$ และเนื่องจาก $w_{P_{1,2}}$ เป็นจำนวนจริงที่อยู่ภายในเส้นทางวงปิด L_T ดังนั้น $w_{P_{1,2}}$ มีค่าอยู่บนแกนส่วนจริงของ w ภายในเส้นทางวงปิด L_T ทำให้ $-\pi \le w_{P_{1,2}} \le \pi$ ดังรูป 3.18 และเนื่องจาก $\frac{N_{1,2}(w)}{D_{1,2}(w)}$ มีโพลเชิงเดียว (simple pole) ดังนั้นค่าเรซิดิวที่ขั้วภายในวงปิด L_T คือ

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(w = w_{P_{1,2}}) &= \frac{N_{1,2}(w = w_{P_{1,2}})}{D'_{1,2}(w = w_{P_{1,2}})} = \frac{\cos\left[\frac{\phi \mp \phi' + w_{P_{1,2}}}{2n}\right] e^{jk\rho \sin\theta' \cos w_{P_{1,2}}}}{\frac{1}{2n}\cos\left[\frac{\phi \mp \phi' + w_{P_{1,2}}}{2n}\right]} \\
&= \frac{\cos(\pi N) e^{jk\rho \sin\theta' \cos[-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N]}}{\frac{1}{2n}\cos(\pi N)} \\
&= 2n e^{jk\rho \sin\theta' \cos[-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N]}
\end{aligned} \tag{3.153}$$

และเมื่อแทนสมการ (3.153) ลงในสมการ (3.151) จะได้

$$\oint_{L_T} H_{1,2}(w) e^{k\rho \sin\theta' h_{1,2}(w)} dw = 2\pi j \cdot 2n e^{jk\rho \sin\theta' \cos[-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N]} U\left[\pi - \left|-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N\right|\right] \tag{3.154}$$

โดยที่ $U(t)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) ซึ่งกำหนดดังสมการ (3.155)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ \frac{1}{2} & , t = 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \tag{3.155}$$

ฟังก์ชันขั้นบันไดกำหนดขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับ $-\pi \le w_{P_{1,2}} \le \pi$ หรือ $\left|-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N\right| \le \pi$ กล่าวคือ อินทิกรัลในสมการ (3.154) เกิดขึ้นจากขั้วภายในวงปิด L_T เท่านั้นซึ่งจะมีค่าเมื่อ $\left|-(\phi \mp \phi') + 2n\pi N\right| \le \pi$ โดยที่ขั้วภายนอกวงปิด L_T ไม่ถูกรวมเข้าไป และสำหรับกรณี $N = 0$ จะได้

$$\oint_{L_T} H_{1,2}(w) e^{k\rho \sin\theta' h_{1,2}(w)} dw = 4\pi j n e^{jk\rho \sin\theta' \cos(\phi \mp \phi')} U\left[\pi - \left|-(\phi \mp \phi')\right|\right] \tag{3.156}$$

ซึ่งเมื่อแทนสมการ (3.156) ลงในสมการ (3.147) จะได้

$$E_z^e = E_z^i(Q_D)\begin{bmatrix} \left\{\dfrac{1}{4\pi jn}\oint_{L_T} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw - \dfrac{1}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw\right\} \\ -\left\{\dfrac{1}{4\pi jn}\oint_{L_T} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw - \dfrac{1}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw\right\} \end{bmatrix} e^{jkz\cos\theta'}$$

$$= E_z^i(Q_D)\begin{bmatrix} \left\{e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}U[\pi-|\phi-\phi'|] - \dfrac{1}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw\right\} \\ -\left\{e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi+\phi')}U[\pi-|\phi+\phi'|] - \dfrac{1}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw\right\} \end{bmatrix} e^{jkz\cos\theta'} \qquad (3.157)$$

จากสมการ (3.157) พจน์ $E_z^i(Q_D)e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')+jkz\cos\theta'}U[\pi-|\phi-\phi'|]$ แสดงถึงสนามไฟฟ้าจากไดโพลไฟฟ้าที่วางอยู่ไกลมากมายังจุดสังเกต (ρ,ϕ,z) ซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบขนาด $E_z^i(Q_D)$ ตกกระทบในทิศทาง (ϕ',θ') หรือเรียกว่า สนามไฟฟ้าตกกระทบตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (incident geometrical optics fields)

และพจน์ $-E_z^i(Q_D)e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi+\phi')+jkz\cos\theta'}U[\pi-|\phi+\phi'|]$ แสดงถึงสนามไฟฟ้าจากภาพเสมือนของไดโพลไฟฟ้าตามทฤษฎีภาพเสมือน (image thoery) ที่วางอยู่ไกลมากมายังจุดสังเกต (ρ,ϕ,z) ซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบขนาด $E_z^i(Q_D)$ ตกกระทบในทิศทาง $(-\phi',\theta')$ หรือเรียกว่า สนามไฟฟ้าสะท้อนตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (reflected geometrical optics fields)

และพจน์ $-E_z^i(Q_D)\dfrac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw$ และพจน์ $E_z^i(Q_D)\dfrac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pm\pi}} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการสร้างขึ้นจากจุดอานม้าทุก ๆ จุดตามเส้นทาง steepest descent ซึ่งจากสมการ (3.148) มีจุดอานม้าบนเส้นทาง steepest descent ในระนาบเชิงซ้อน w เพียง 2 จุดคือที่ $w_s = \pm\pi$ และจากแนวความคิดของ Keller พจน์ทั้ง 4 นี้ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าเลี้ยวเบนจากขอบของรูปลิ่มที่จุดกำเนิดไปสู่บริเวณเงาและบริเวณอื่น ๆ ซึ่งเมื่อขั้วอยู่ไกลจากจุดอานม้าพจน์ทั้ง 4 สามารถหาได้โดยใช้กรรมวิธี steepest descent มาประมาณค่าในย่านความถี่สูง ($k \to \infty$) ดังนี้

$$\int_{SDP_\pi} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw \overset{k\rho\sin\theta'\to\infty}{\cong} H_1(w_s=\pi)\sqrt{\frac{2\pi}{k\rho\sin\theta'|h_1''(w_s=\pi)|}}e^{k\rho\sin\theta' h_1(w_s=\pi)+j\gamma} \qquad (3.158)$$

โดยที่ γ คือ มุมที่เส้นทาง steepest descent SDP_π ทำกับแกนส่วนจริงของ w ซึ่งต้องเลือกให้ $[e^{j2\gamma}h_1''(w_s=\pi)]$ เป็นจำนวนจริงลบ และเนื่องจาก $h_1''(w_s=\pi) = -j\cos(\pi) = j$ ดังนั้น

$$2\gamma + \frac{\pi}{2} = \pm\pi$$

ซึ่งจะได้ γ เท่ากับ $\dfrac{\pi}{4}$ หรือ $-\dfrac{3\pi}{4}$ ขึ้นอยู่กับเส้นทาง steepest descent โดย $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ ถ้าเส้นทาง steepest descent เริ่มจากจตุภาคที่ 3 มายังจตุภาคที่ 1 หรือจากจตุภาคที่ 2 มายังจตุภาคที่ 4 และ $\gamma = -\dfrac{3\pi}{4}$ ถ้าเส้นทาง steepest descent

เริ่มจากจตุภาคที่ 1 มายังจตุภาคที่ 3 หรือจากจตุภาคที่ 4 มายังจตุภาคที่ 2 สำหรับเส้นทาง steepest descent SDP_{π} ดังรูป 3.18 เริ่มจากจตุภาคที่ 3 มายังจตุภาคที่ 1 ดังนั้น $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ ทำให้สมการ (1.68) เป็น

$$\int_{SDP_{\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw \overset{k\rho\sin\theta'\to\infty}{\cong} \cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{k\rho\sin\theta'}}e^{-jk\rho\sin\theta'+j\frac{\pi}{4}} \tag{3.159}$$

และจะได้

$$-E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw = -E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}}\cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]\sqrt{\frac{1}{\rho\sin\theta'}}e^{-jk\rho\sin\theta'+jkz\cos\theta'} \tag{3.160}$$

จากกฎของการเลี้ยวเบน $\theta' = \pi - \theta$ ดังนั้น $\rho\sin\theta' = \rho\sin\theta = r\sin^2\theta$ และ $z\cos\theta' = -z\cos\theta$ และ $r = \rho\sin\theta + z\cos\theta$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.160) จะได้

$$-E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw = -E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \tag{3.161}$$

เช่นเดียวกับสมการ (3.158) เมื่อทำอินทิกรัลตามเส้นทาง steepest descent $SDP_{-\pi}$ ค่าของ $h_1''(w_s = -\pi) = j$ และเนื่องจากเส้นทาง steepest descent $SDP_{-\pi}$ เริ่มจากจตุภาคที่ 1 มายังจตุภาคที่ 3 ดังรูป 3.18 ทำให้ γ ที่สอดคล้องคือ $\gamma = -\dfrac{3\pi}{4}$ ดังนั้น

$$\int_{SDP_{-\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw \overset{k\rho\sin\theta'\to\infty}{\cong} \cot\left[\frac{-\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{k\rho\sin\theta'}}e^{-jk\rho\sin\theta'-j\frac{3\pi}{4}} \tag{3.162}$$

เนื่องจาก $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$ และ $e^{-j\frac{3\pi}{4}} = e^{-j\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = -e^{j\frac{\pi}{4}}$ ดังนั้น

$$-E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{-\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw = -E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}}\cot\left[\frac{\pi-(\phi-\phi')}{2n}\right]\sqrt{\frac{1}{\rho\sin\theta'}}e^{-jk\rho\sin\theta'+jkz\cos\theta'} \tag{3.163}$$

จากกฎของการเลี้ยวเบน $\theta' = \pi - \theta$ ดังนั้น $\rho\sin\theta' = \rho\sin\theta = r\sin^2\theta$ และ $z\cos\theta' = -z\cos\theta$ และ $r = \rho\sin\theta + z\cos\theta$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.163) จะได้

$$-E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_-\pi}H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw=-E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi-\phi')}{2n}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \quad (3.164)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_\pi}H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw=E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi+\phi')}{2n}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \quad (3.165)$$

และ

$$E_z^i(Q_D)\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_-\pi}H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw=E_z^i(Q_D)\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi+\phi')}{2n}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \quad (3.166)$$

สมการ (3.161) (3.164) (3.165) และ (3.166) เป็นพจน์ที่ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบจากรูปลิ่มตัวนำอนันต์เมื่อถูกกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ และเนื่องจากสนามไฟฟ้าที่มาจากไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากที่วางอยู่ที่ตำแหน่งไกล ๆ มีลักษณะเป็นคลื่นระนาบที่มีขนาดเท่ากับ $E_z^i(Q_D)$ ดังนั้นเหมือนกับว่าสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบจากรูปลิ่มตัวนำในกรณีนี้เกิดจากมีคลื่นระนาบตกกระทบที่จุดกำเนิดซึ่งเป็นจุดที่เกิดการเลี้ยวเบนในทิศทาง (ϕ',θ') และเมื่อรวมพจน์ทั้ง 4 เข้าด้วยกัน สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตามแนวแกน z เป็นดังสมการ (3.167)

$$E_z^d=E_z^i(Q_D)\left[\begin{array}{l}-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi-\phi')}{2n}\right]\\+\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi+\phi')}{2n}\right]+\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi+\phi')}{2n}\right]\end{array}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \quad (3.167)$$

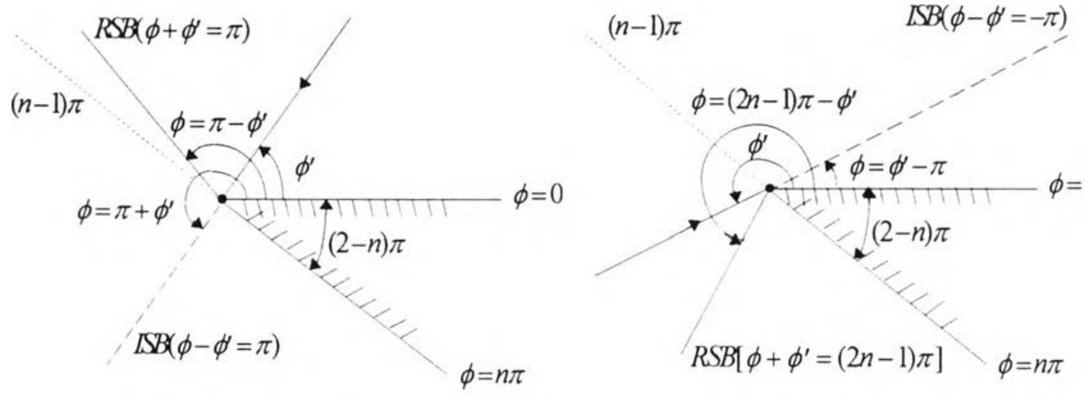
และเนื่องจาก $\cot A+\cot B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$ ดังนั้นสมการ (3.167) เขียนใหม่เป็น

$$E_z^d=E_z^i(Q_D)\left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\phi-\phi'}{n}\right)}\right\}-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\phi+\phi'}{n}\right)}\right\}\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}$$

(3.168)

สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตามแนวแกน z ตามสมการ (3.167) นั้นมีค่าเมื่อขั้วไม่อยู่ใกล้จุดอานม้าหรือมีค่าเมื่อจุดสังเกตไม่อยู่ใกล้ ๆ กับขอบเขตเงาของการตกกระทบ (incident shadow boundaries, ISB) และการ

สะท้อน (reflection shadow boundaries, RSB) ดังรูป 3.19 เนื่องจากที่บริเวณใกล้ ๆ กับขอบเขตเงาทั้งสอง ค่าของสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตามแนวแกน z มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์



ก) กรณีที่ $\phi' \le (n-1)\pi$ ข) กรณีที่ $\phi' \ge (n-1)\pi$

รูป 3.19 ขอบเขตเงาของการตกกระทบและการสะท้อน

ในกรณีที่ขั้วอยู่ใกล้กับจุดอานม้าหรือจุดสังเกตอยู่ใกล้ ๆ กับขอบเขตเงาทั้งสองนั้น สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบซึ่งเกิดจากอินทิกรัลตามเส้นทาง $SDP_{\pm\pi}$ ในสมการ (3.157) หาได้โดยใช้กรรมวิธี steepest descent ชนิดดัดแปลงของ Pauli-Clemmow (L. B. Felsen and N. Marcuvitz, 1973) ซึ่งต่างกับกรรมวิธี steepest descent ตรงที่เพิ่มฟังก์ชันที่ชดเชยความไม่ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบเขตเงาทั้งสองดังนี้

$$\int_{SDP_\pi} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw \overset{k\rho\sin\theta'\to\infty}{\cong} H_{1,2}(w_s=\pi)\sqrt{\frac{2\pi}{k\rho\sin\theta'\left|h''_{1,2}(w_s=\pi)\right|}}F\left[kLa^{+}(\phi\mp\phi')\right]e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w_s=\pi)+j\frac{\pi}{4}}$$

และ

$$\int_{SDP_{-\pi}} H_{1,2}(w)e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w)}dw \overset{k\rho\sin\theta'\to\infty}{\cong} H_{1,2}(w_s=-\pi)\sqrt{\frac{2\pi}{k\rho\sin\theta'\left|h''_{1,2}(w_s=-\pi)\right|}}F\left[kLa^{-}(\phi\mp\phi')\right]e^{k\rho\sin\theta' h_{1,2}(w_s=-\pi)+j\frac{3\pi}{4}}$$

ดังนั้นจะได้

$$-\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_\pi} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2n}\right]F\left[kLa^{+}(\phi-\phi')\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \qquad (3.169ก)$$

$$-\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{-\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi-\phi')}{2n}\right]F\left[kLa^{-}(\phi-\phi')\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \qquad (3.169ข)$$

$$\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_\pi} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi+(\phi+\phi')}{2n}\right]F\left[kLa^{+}(\phi+\phi')\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \qquad (3.169ค)$$

$$\frac{e^{jkz\cos\theta'}}{4\pi jn}\int_{SDP_{-\pi}} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\frac{\pi-(\phi+\phi')}{2n}\right]F\left[kLa^{-}(\phi+\phi')\right]\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \qquad (3.169ง)$$

โดยที่ $F[kLa^{\pm}(\phi\mp\phi')] = 2j\sqrt{kLa^{\pm}(\phi\mp\phi')}\,e^{jkLa^{\pm}(\phi\mp\phi')}\int_{\sqrt{kLa^{\pm}(\phi\mp\phi')}}^{\infty} e^{-j\tau^2}d\tau$ คือ ฟังก์ชันทรานซิชัน (transition function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่บ่งบอกการแยกกันของขั้วกับจุดอานม้าและเป็นฟังก์ชันที่ชดเชยความไม่ต่อเนื่องที่เกิดขึ้นที่ขอบเขตเงาทั้งสอง และค่าปัจจัย L ในฟังก์ชันทรานซิชันคือ ค่าปัจจัยทางระยะทาง (distance parameter) สำหรับในกรณีนี้คลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบ $L = \rho\sin\theta = r^2\sin\theta$ แต่ถ้าคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนมีหน้าคลื่นใด ๆ ค่าปัจจัยทางระยะทางหาได้โดยพิจารณาความไม่ต่อเนื่องของสนามที่ขอบเขตเงาของการตกกระทบและการสะท้อน ซึ่ง R. G. Kouyoumjian และ P. H. Pathak (1974) ได้กำหนดเป็นดังสมการ (3.170ก-ข)

$$L^i = \frac{s(\rho_e^i + s)\rho_1^i\rho_2^i\sin^2\theta}{\rho_e^i(\rho_1^i + s)(\rho_2^i + s)} \tag{3.170ก}$$

$$L^r = \frac{s(\rho_e^r + s)\rho_1^r\rho_2^r\sin^2\theta}{\rho_e^r(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)} \tag{3.170ข}$$

โดยที่ ρ_1^i, ρ_2^i คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบน

ρ_e^i คือ รัศมีความโค้งของหน้าคลื่นตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบนในระนาบการตกกระทบ

ρ_1^r, ρ_2^r คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดเลี้ยวเบน

ρ_e^r คือ รัศมีความโค้งของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดเลี้ยวเบนในระนาบการสะท้อน

s คือ ระยะทางจากจุดเลี้ยวเบนมายังจุดสังเกต

และ $a^{\pm}(\phi\mp\phi')$ ในฟังก์ชันทรานซิชันกำหนดดังสมการ (1.81)

$$a^{+}(\phi\mp\phi') = 1+\cos[(\phi\mp\phi') - 2n\pi N^{+}] = 2\cos^2\left[\frac{(\phi\mp\phi') - 2n\pi N^{+}}{2}\right] \tag{3.171ก}$$

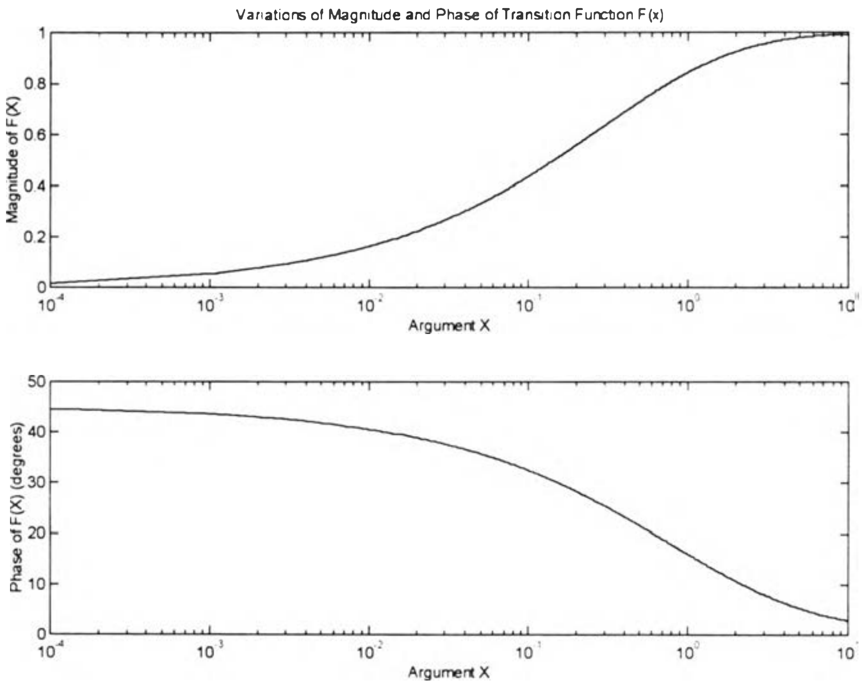
$$a^{-}(\phi\mp\phi') = 1+\cos[(\phi\mp\phi') - 2n\pi N^{-}] = 2\cos^2\left[\frac{(\phi\mp\phi') - 2n\pi N^{-}}{2}\right] \tag{3.171ข}$$

โดยที่ N^+ และ N^- เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ (3.172ก) และ (3.172ข) มากที่สุด

$$2n\pi N^{+} - (\phi\mp\phi') = +\pi \tag{3.172ก}$$

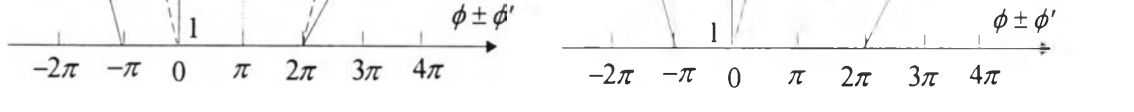
$$2n\pi N^{-} - (\phi\mp\phi') = -\pi \tag{3.172ข}$$

ฟังก์ชันทรานซิชันข้างต้นสามารถหาค่าโดยประมาณได้ดังแสดงในภาคผนวก จ. ซึ่งขนาดและเฟสของฟังก์ชันทรานซิชันจากการประมาณเป็นดังรูป 3.20



รูป 3.20 ขนาดและเฟสของฟังก์ชันทรานซิชัน

สำหรับรูปลิ่มที่ $1 \le n \le 2$ (exterior wedge) ค่าของ N^+ และ N^- ที่สอดคล้องกับสมการ (3.172ก) และ (3.172ข) คือ $N^+ = 0$ หรือ 1 และ $N^- = -1, 0$ หรือ 1 และค่าของ n, $-2\pi \le \phi \pm \phi' \le 4\pi$, N^+ และ N^- มีความสัมพันธ์กันดังรูป 3.21ก สำหรับ $N^- = -1, 0$ หรือ 1 และดังรูป 3.21ข สำหรับ $N^+ = 0$ หรือ 1



ก) N^- ข) N^+

รูป 3.21 ความสัมพันธ์ของ N^+, N^-, n และ $\phi \pm \phi'$ สำหรับรูปลิ่มที่ $1 \le n \le 2$

จากสมการ (3.169ก-ง) สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตามแนวแกน z สำหรับในกรณีที่ขั้วอยู่ใกล้หรือไกลจากจุดอานม้าเป็น

$$E_z^d = E_z^i(Q_D)\begin{bmatrix} \{C^+(\xi^-,n,\theta)F[kL'a^+(\xi^-)] + C^-(\xi^-,n,\theta)F[kL'a^-(\xi^-)]\} \\ -\{C^+(\xi^+,n,\theta)F[kL'a^+(\xi^+)] + C^-(\xi^+,n,\theta)F[kL'a^-(\xi^+)]\} \end{bmatrix}\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \tag{3.173}$$

โดยที่ $C^{\mp}(\xi,n,\theta) = -\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\dfrac{\pi \pm \xi}{2n}\right]$ และ $\xi = \xi^{\mp} = \phi \mp \phi'$

ในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบจากรูปลิ่มตัวนำเมื่อกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากข้างต้น สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบจากรูปลิ่มตัวนำเมื่อกระตุ้นด้วยไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากสามารถหาได้โดยใช้เฮิรตซ์เวกเตอร์ $\bar{\Pi}^m$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ดังสมการ (3.174)

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\bar{\Pi}^m = -\frac{\bar{M}_s}{j\omega\mu} \tag{3.174}$$

โดยความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก $\bar{M}_s$ เป็นดังสมการ (3.175)

$$\bar{M}_s = I^m L\delta(\bar{r} - \bar{r}')\bar{a}_z \tag{3.175}$$

เนื่องจากความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กอยู่ในทิศทาง z ดังนั้นสมการ (3.174) ลดรูปลงเป็น

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\Pi_z^m = -\frac{I^m L\delta(\bar{r} - \bar{r}')}{j\omega\mu} \tag{3.176}$$

และเขียนอยู่ในรูปของกรีนฟังก์ชันได้ดังสมการ (3.177)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)G^h(\rho,\phi,z;\rho',\phi',z') = -\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{\rho} \tag{3.177}$$

โดยที่ $\Pi_z^m = \dfrac{I^m L}{j\omega\mu}G^h(\bar{r},\bar{r}')$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์ (Neumann boundary condition) คือ $\left.\dfrac{\partial H_\rho^m}{\partial\phi}\right|_{\phi=0,\Psi_o} = 0$ และ $\left.\dfrac{\partial H_z^m}{\partial\phi}\right|_{\phi=0,\Psi_o} = 0$ และเนื่องจาก $\bar{H}^m = \nabla(\nabla\cdot\bar{\Pi}^m) + k^2\bar{\Pi}^m$ ดังนั้น $\dfrac{\partial\Pi_z^m}{\partial\phi} = 0$ บนพื้นผิวรูปลิ่มตัวนำ และจะได้

$$\frac{\partial G^h(\rho,\phi,z,\rho',\phi',z')}{\partial\phi} = 0 \qquad \text{ที่ } \phi = 0 \text{ และ } \phi = \Psi_o \tag{3.178}$$

ซึ่งเมื่อหากรีนฟังก์ชันเช่นเดียวกับในกรณีกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากจะได้

$$G^h(\rho,\phi,z,\rho',\phi',z') = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \frac{1}{2\Psi_o}\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)J_{v_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta'+jv_m\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-jkr'}}{r'} \quad (3.179)$$

โดยที่ $\varepsilon_m = \begin{cases}1 & , m=0\\ 2 & , m\neq 0\end{cases}$ และเนื่องจาก $\bar{\Pi}^m = \Pi_z^m\bar{a}_z = \frac{I^m L}{j\omega\mu}G^h(\bar{r},\bar{r}')\bar{a}_z$ และ $\bar{H}^m = \nabla(\nabla\cdot\bar{\Pi}^m) + k^2\bar{\Pi}^m$ ดังนั้น

$$H_z^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Pi_z^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\frac{I^m L}{j\omega\mu}G^h(\bar{r},\bar{r}') \quad (3.180)$$

เมื่อแทนสมการ (3.179) ลงในสมการ (3.180) สนามแม่เหล็กในทิศทางตามแกน z ที่จุดสังเกตใด ๆ รอบรูปลิ่มตัวนำที่ถูกกระตุ้นด้วยไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่วางอยู่ที่ตำแหน่งไกลมากเป็น

$$H_z^m = -j\omega\varepsilon I^m L\sin^2\theta'\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m\frac{1}{2\Psi_o}\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)J_{v_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta'+jv_m\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-jkr'}}{r'} \quad (3.181)$$

และสนามแม่เหล็กที่มาจากไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่วางตัวอยู่ในทิศทาง z ดังสมการ (3.175) อยู่ที่ตำแหน่งไกลมากสามารถหาได้จากศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (electric vector potential) ดังสมการ (3.182)

$$F_z = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{I^m e^{-jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dz \approx \frac{\varepsilon I^m L e^{-jkr'+jkz\cos\theta'+jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}}{4\pi r'} \quad (3.182)$$

จากสมการ (3.182) และ $\bar{H} = -j\omega\bar{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\bar{F})$ สนามแม่เหล็กเนื่องจากไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่วางตัวในทิศทาง z ที่จุดสังเกตใด ๆ เป็น

$$H_z^i = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left[(jk\cos\theta')^2 + k^2\right]F_z = -\frac{j\omega\varepsilon I^m L\sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'}e^{jkz\cos\theta'+jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')} \quad (3.183)$$

สมการ (3.183) แสดงถึงสนามแม่เหล็กเนื่องจากไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่จุดสังเกต (r,θ,ϕ) เมื่อ $r'\to\infty$ และถ้าให้ $H_o = -\frac{j\omega\varepsilon I^m L\sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'}$ สมการ (3.183) บ่งบอกว่าสนามแม่เหล็กเนื่องจากไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่จุดสังเกต (r,θ,ϕ) เมื่อ $r'\to\infty$ ประพฤติตัวเป็นคลื่นระนาบที่มีขนาด H_o ตกกระทบในทิศทาง (θ',ϕ') และเมื่อจุดสังเกตอยู่ที่จุดกำเนิด $r=0$ ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการเลี้ยวเบน สนามแม่เหล็กเนื่องจากไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากที่ตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบน Q_D เมื่อ $r'\to\infty$ เป็นดังสมการ (3.184)

$$H_z^i(Q_D) = -\frac{j\omega\varepsilon I^m L\sin^2\theta' e^{-jkr'}}{4\pi r'} \quad (3.184)$$

เมื่อแทนสมการ (3.184) ลงในสมการ (3.181) จะได้

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \frac{2\pi}{\Psi_o}\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\Psi_o}\phi'\right)J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta' + j\nu_m\frac{\pi}{2}} \quad (3.185\text{ก})$$

หรือ

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \frac{2\pi}{\Psi_o}J_{\nu_m}(k\rho\sin\theta')e^{jkz\cos\theta' + j\nu_m\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos[\nu_m(\phi-\phi')] + \cos[\nu_m(\phi+\phi')]}{2}\right] \quad (3.185\text{ข})$$

เนื่องจากฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν_m เขียนอยู่ในรูปอินทิกรัลตามเส้นทางในระนาบเชิงซ้อน w ดังสมการ (3.141) และ $\cos[\nu_m(\phi \pm \phi')] = \dfrac{e^{j\nu_m(\phi\pm\phi')} + e^{-j\nu_m(\phi\pm\phi')}}{2}$ และ $\nu_m = \dfrac{m\pi}{\Psi_o} = \dfrac{m}{n}$ ดังนั้นเขียนสมการ (3.185ข) ใหม่ได้เป็น

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L \frac{1}{2}e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw + \frac{1}{2\pi n}\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw \\ +\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_{-L} \frac{1}{2}e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw + \frac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\end{array}\right\} \\ +\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_L \frac{1}{2}e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw + \frac{1}{2\pi n}\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw \\ +\dfrac{1}{2\pi n}\displaystyle\int_{-L} \frac{1}{2}e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw + \frac{1}{2\pi n}\int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-j\frac{m}{n}(\phi-\phi'+w)}dw\end{array}\right\}\end{array}\right]e^{jkz\cos\theta'} \quad (3.186)$$

เมื่อใช้คุณสมบัติของอนุกรมอนันต์ดังสมการ (3.144) และ (3.145) จะได้

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\frac{1}{2\pi n}\left[\begin{array}{l}\left\{\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(-\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]\right)dw + \int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]\right)dw\right\} \\ +\left\{\displaystyle\int_L e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(-\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]\right)dw + \int_{L'} e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}\left(\frac{1}{2j}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]\right)dw\right\}\end{array}\right]e^{jkz\cos\theta'}$$

(3.187)

ถ้ากำหนดให้ $\int_{L'-L} f(w)dw = \int_{L'} f(w)dw - \int_L f(w)dw$ สมการ (3.187) เขียนใหม่เป็น

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\left[\frac{1}{4\pi jn}\left\{\int_{L'-L}\cot\left[\frac{\phi-\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw + \int_{L'-L}\cot\left[\frac{\phi+\phi'+w}{2n}\right]e^{jk\rho\sin\theta'\cos w}dw\right\}\right]e^{jkz\cos\theta'}$$

(3.188)

อินทิกรัลตามเส้นทาง $L'-L$ ในสมการ (3.188) สามารถหาได้โดยใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิว (residue theorem) เช่นเดียวกับในกรณีกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากซึ่งจะได้

$$H_z^m = H_z^i(Q_D)\begin{bmatrix} \left\{e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}U\left[\pi-|\phi-\phi'|\right]-\dfrac{1}{4\pi jn}\displaystyle\int_{SDP_{\pm\pi}} H_1(w)e^{k\rho\sin\theta' h_1(w)}dw\right\} \\ +\left\{e^{jk\rho\sin\theta'\cos(\phi+\phi')}U\left[\pi-|\phi+\phi'|\right]-\dfrac{1}{4\pi jn}\displaystyle\int_{SDP_{\pm\pi}} H_2(w)e^{k\rho\sin\theta' h_2(w)}dw\right\}\end{bmatrix}e^{jkz\cos\theta'} \quad (3.189)$$

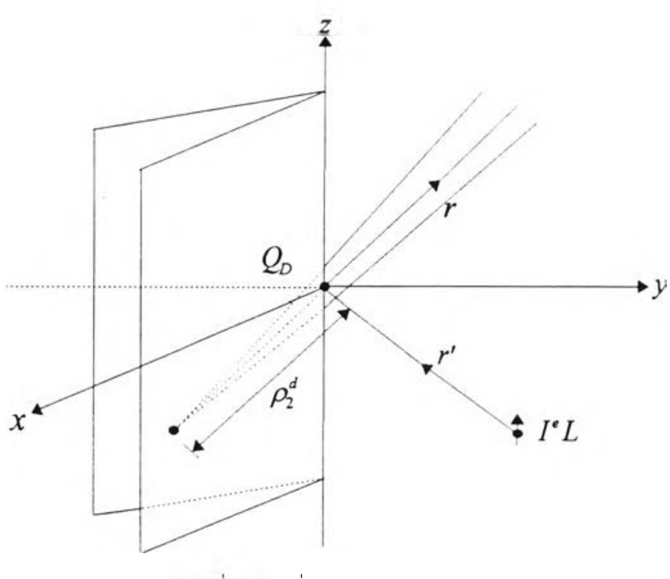
และสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตามแนวแกน z เป็น

$$H_z^d = H_z^i(Q_D)\begin{bmatrix} \left\{C^+(\xi^-,n,\theta)F\left[kL'a^+(\xi^-)\right]+C^-(\xi^-,n,\theta)F\left[kL'a^-(\xi^-)\right]\right\} \\ +\left\{C^+(\xi^+,n,\theta)F\left[kL'a^+(\xi^+)\right]+C^-(\xi^+,n,\theta)F\left[kL'a^-(\xi^+)\right]\right\}\end{bmatrix}\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \quad (3.190)$$

โดยที่ $C^{\pm}(\xi,n,\theta) = -\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\dfrac{\pi\pm\xi}{2n}\right]$ และ $\xi = \xi^{\mp} = \phi \mp \phi'$ และจากสมการ (3.93) เมื่อพิจารณาองค์ประกอบในแนว z จะได้

$$E_z^d = E_z^i(Q_D)D_s\sqrt{\frac{\rho_2^d}{r(\rho_2^d+r)}}e^{-jkr} \quad (3.191)$$

และเนื่องจากรูปลิ่มตัวนำที่ทำการวิเคราะห์มีขอบเป็นสันตรงยาวอนันต์ตามแนวแกน z และไดโพลไฟฟ้าขนาดสั้นมากวางอยู่ที่ตำแหน่งไกลมาก ดังนั้นจากทฤษฎีภาพเสมือน $\rho_2^d = r' \to \infty$ ดังรูป 3.22 ทำให้



รูป 3.22 ระยะตัดกันของรังสีของรูปลิ่มตัวนำที่มีขอบเป็นสันตรงยาวอนันต์ตามทฤษฎีภาพเสมือน

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.192) กับ (3.173) พบว่า

$$D_s(\xi,n,\theta)=\begin{bmatrix} \{C^{+}(\xi^{-},n,\theta)F[kL^{'}a^{+}(\xi^{-})]+C^{-}(\xi^{-},n,\theta)F[kL^{'}a^{-}(\xi^{-})]\} \\ -\{C^{+}(\xi^{+},n,\theta)F[kL^{'}a^{+}(\xi^{+})]+C^{-}(\xi^{+},n,\theta)F[kL^{'}a^{-}(\xi^{+})]\} \end{bmatrix} \tag{3.193}$$

โดยที่ $C^{\pm}(\xi,n,\theta)=-\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\theta}\cot\left[\dfrac{\pi\pm\xi}{2n}\right]$ และ $\xi=\xi^{\mp}=\phi\mp\phi'$ และ D_s เรียกว่า สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบดีริชเลต์หรือสำหรับโพลาไรเซชันแบบอ่อน (soft polarization) ในทำนองเดียวกัน

$$H_z^d=\lim_{\rho_2^d\to\infty}H_z^i(Q_D)D_h\sqrt{\frac{\rho_2^d}{r(\rho_2^d+r)}}e^{-jkr}=H_z^i(Q_D)D_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \tag{3.194}$$

และเมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.194) กับสมการ (3.190) พบว่า

$$D_h(\xi,n,\theta)=\begin{bmatrix} \{C^{+}(\xi^{-},n,\theta)F[kL^{'}a^{+}(\xi^{-})]+C^{-}(\xi^{-},n,\theta)F[kL^{'}a^{-}(\xi^{-})]\} \\ +\{C^{+}(\xi^{+},n,\theta)F[kL^{'}a^{+}(\xi^{+})]+C^{-}(\xi^{+},n,\theta)F[kL^{'}a^{-}(\xi^{+})]\} \end{bmatrix} \tag{3.195}$$

โดย D_h เรียกว่า สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์หรือสำหรับโพลาไรเซชันแบบแข็ง (hard polarization)

จากข้างต้นเป็นการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้า (TM^z) และไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมาก (TE^z) ซึ่งสามารถนำมาใช้หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดจากคลื่นมีโพลาไรเซชันแบบใด ๆ (arbitrary polarization) ตกกระทบบนรูปลิ่มตัวนำได้โดยรวมสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดจากการกระตุ้นทั้ง 2 กรณีเข้าด้วยกัน ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดจากคลื่นมีโพลาไรเซชันแบบใด ๆ ตกกระทบบนรูปลิ่มตัวนำเป็น

$$\vec{H}=\vec{H}^e+\vec{H}^m \tag{3.196ก}$$

$$\vec{E}=\vec{E}^e+\vec{E}^m \tag{3.196ข}$$

โดยที่ e และ m ที่กำกับไว้ในสมการ (3.196ก-ข) แสดงถึงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่มาจากการกระตุ้นด้วยไดโพลไฟฟ้าและไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากตามลำดับ และเมื่อพิจารณาองค์ประกอบของสนามในทิศทาง z พบว่า $H_z=H_z^m$ เนื่องจาก $\vec{H}^e=j\omega\varepsilon\nabla\times\vec{\Pi}^e=j\omega\varepsilon\nabla\times\Pi_z^e\vec{a}_z$ ทำให้ $H_z^e=0$ และ $E_z=E_z^e$ เนื่องจาก $\vec{E}^m=-j\omega\mu\nabla\times\vec{\Pi}^m=-j\omega\mu\nabla\times\Pi_z^m\vec{a}_z$ ทำให้ $E_z^m=0$ และจากการวิเคราะห์ข้างต้น H_z^m,E_z^e ประกอบด้วยสนามที่มาจากสองส่วนคือ สนามตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตกับสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบ ดังนั้น

$$H_z=H_z^m=H_z^{GO}+H_z^d=H_z^{GO}+H_z^iD_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \tag{3.197ก}$$

$$E_z = E_z^t = E_z^{GO} + E_z^d = E_z^{GO} + E_z^i D_s \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \tag{3.197ข}$$

จากภาคผนวก ง. เมื่อทราบองค์ประกอบในทิศทาง z ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-jk_z z}$ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางตั้งฉากกับ z เป็น

$$\vec{H}_t = -\frac{jk_z \nabla_t H_z}{k^2 - k_z^2} - \frac{j\omega\varepsilon \vec{a}_z \times \nabla_t E_z}{k^2 - k_z^2} \tag{3.198ก}$$

$$\vec{E}_t = -\frac{jk_z \nabla_t E_z}{k^2 - k_z^2} + \frac{j\omega\mu \vec{a}_z \times \nabla_t H_z}{k^2 - k_z^2} \tag{3.198ข}$$

เนื่องจาก H_z, E_z ในสมการ (3.197ก-ข) มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง z อยู่ในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-jk\cos\theta z}$ ดังนั้น

$$\vec{H}_t = -\frac{jk\cos\theta \nabla_t H_z}{k^2 \sin^2\theta} - \frac{j\omega\varepsilon \vec{a}_z \times \nabla_t E_z}{k^2 \sin^2\theta} \tag{3.199ก}$$

$$\vec{E}_t = -\frac{jk\cos\theta \nabla_t E_z}{k^2 \sin^2\theta} + \frac{j\omega\mu \vec{a}_z \times \nabla_t H_z}{k^2 \sin^2\theta} \tag{3.199ข}$$

และเนื่องจาก ∇ เป็นตัวดำเนินการแบบเชิงเส้น ดังนั้นเมื่อแทน H_z, E_z ลงในสมการ (3.199ก-ข) สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในทิศทางตั้งฉากกับ z เป็น

$$\vec{H}_t^d = -\frac{jk\cos\theta \nabla_t H_z^d}{k^2 \sin^2\theta} - \frac{j\omega\varepsilon \vec{a}_z \times \nabla_t E_z^d}{k^2 \sin^2\theta} \tag{3.200ก}$$

$$\vec{E}_t^d = -\frac{jk\cos\theta \nabla_t E_z^d}{k^2 \sin^2\theta} + \frac{j\omega\mu \vec{a}_z \times \nabla_t H_z^d}{k^2 \sin^2\theta} \tag{3.200ข}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\nabla_t E_z^d &= \nabla_t\left(E_z^i D_s \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\right) = \nabla_t\left(E_z^i D_s \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(E_z^i D_s \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right)\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(E_z^i D_s \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right)\vec{a}_\phi \\
&= E_z^i D_s(-jk\sin^{3/2}\theta)\frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}}{\sqrt{\rho}}\vec{a}_\rho + O\left(\frac{1}{\sqrt{k\rho}}\right)
\end{aligned} \tag{3.201ก}$$

$$\nabla_t H_z^d = \nabla_t\left(H_z^i D_h \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\right) = \nabla_t\left(H_z^i D_h \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(H_z^i D_h \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right)\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(H_z^i D_h \frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\rho}}\right)\vec{a}_\phi \qquad (3.201ข)$$

$$= H_z^i D_h(-jk\sin^{3/2}\theta)\frac{e^{-jk\rho\sin\theta - jkz\cos\theta}}{\sqrt{\rho}}\vec{a}_\rho + O\left(\frac{1}{\sqrt{k\rho}}\right)$$

จากสมการ (3.201ก-ข) เมื่อ $k\rho$ มีค่าใหญ่เพียงพอ สามารถละเลยพจน์ $O\left(\frac{1}{\sqrt{k\rho}}\right)$ ได้ ดังนั้น

$$\nabla_t E_z^d \approx E_z^i D_s(-jk\sin\theta)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho \qquad (3.202ก)$$

$$\nabla_t H_z^d \approx H_z^i D_h(-jk\sin\theta)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho \qquad (3.202ข)$$

ซึ่งเมื่อแทนสมการ (3.202ก-ข) ลงในสมการ (3.200ก-ข) จะได้

$$\vec{H}_t^d = -\frac{jk\cos\theta}{k^2\sin^2\theta}H_z^i(-jk\sin\theta)D_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho - \frac{j\omega\varepsilon\vec{a}_z}{k^2\sin^2\theta}\times\left(E_z^i(-jk\sin\theta)D_s\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho\right)$$
$$= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}H_z^i D_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho - \frac{1}{Z\sin\theta}E_z^i D_s\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\phi \qquad (3.203ก)$$

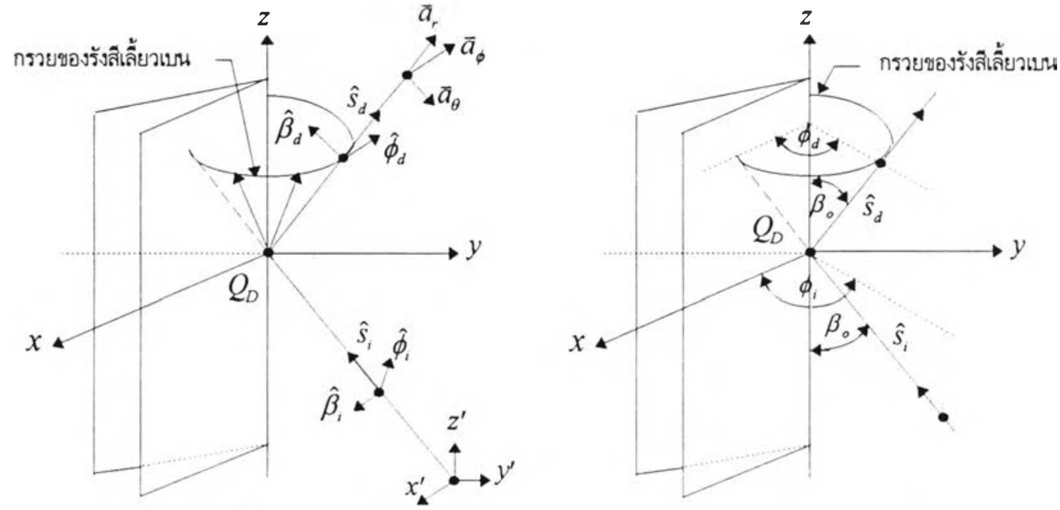
$$\vec{E}_t^d = -\frac{jk\cos\theta}{k^2\sin^2\theta}E_z^i(-jk\sin\theta)D_s\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho + \frac{j\omega\mu\vec{a}_z}{k^2\sin^2\theta}\times\left(H_z^i(-jk\sin\theta)D_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho\right)$$
$$= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}E_z^i D_s\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\rho + \frac{Z}{\sin\theta}H_z^i D_h\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\vec{a}_\phi \qquad (3.203ข)$$

และเพื่อสะดวกในการพิจารณาหาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดเลี้ยวเบน Q_D ใด ๆ ระบบพิกัดที่จุดขอบซึ่งประกอบด้วย ระบบพิกัดของรังสีตกกระทบ (s_i, β_i, ϕ_i) และระบบพิกัดของรังสีเลี้ยวเบน (s_d, β_d, ϕ_d) โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่จุดขอบทั้งสองคือ $(\hat{s}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\phi}_i)$ และ $(\hat{s}_d, \hat{\beta}_d, \hat{\phi}_d)$ ดังรูป 3.23 ถูกนำมาใช้ โดยที่ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดเป็น

$$\hat{\beta}_i = \hat{s}_i \times \hat{\phi}_i \qquad (3.204ก)$$

$$\hat{\beta}_d = \hat{s}_d \times \hat{\phi}_d \qquad (3.204ข)$$

$$\beta_i = \beta_d = \beta_o \qquad (3.204ค)$$



ก) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบ ข) พิกัดของรังสีของระบบพิกัดที่ขอบ

รูป 3.23 ระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนสำหรับรูปลิ่มตัวนำ

และมีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ) ที่ใช้ในการแก้ปัญหารูปลิ่มตัวนำข้างต้นดังนี้คือ

$$\hat{s}_i = -\bar{a}_{r'}, \quad \hat{\beta}_i = \bar{a}_{\theta'}, \quad \hat{\phi}_i = \bar{a}_{\phi'} \tag{3.205ก}$$

$$\hat{s}_d = \bar{a}_r, \quad \hat{\beta}_d = -\bar{a}_\theta, \quad \hat{\phi}_d = \bar{a}_\phi \tag{3.205ข}$$

$$s_i = r', \quad \beta_i = \pi - \theta', \quad \phi_i = \phi' \tag{3.205ค}$$

$$s_d = r, \quad \beta_d = \theta, \quad \phi_d = \phi \tag{3.205ง}$$

และเนื่องจากคลื่นที่แผ่กระจายจากไดโพลไฟฟ้าและไดโพลแม่เหล็กขนาดสั้นมากซึ่งวางอยู่ที่ตำแหน่งไกลมากที่มาตกกระทบมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบซึ่งไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางการเคลื่อนที่ ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตกกระทบสามารถแสดงในระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบได้เป็น

$$\bar{E}^i = E^i_{\beta_i}\hat{\beta}_i + E^i_{\phi_i}\hat{\phi}_i \tag{3.206ก}$$

$$\bar{H}^i = H^i_{\beta_i}\hat{\beta}_i + H^i_{\phi_i}\hat{\phi}_i \tag{3.206ข}$$

และ

$$\bar{H}^i = \frac{\hat{s}_i \times \bar{E}^i}{Z} \tag{3.206ค}$$

โดยที่ Z คือ อิมพีแดนซ์ลักษณะสมบัติของตัวกลางในบริเวณแผ่กระจายคลื่น และเมื่อแทนสมการ (3.206ค) ลงในสมการ (3.206ข) และใช้ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบดังสมการ (3.204ก) จะได้ $H^i_{\beta_i} = \frac{E^i_{\phi_i}}{Z}$ และ $H^i_{\phi_i} = -\frac{E^i_{\beta_i}}{Z}$ และจากความสัมพันธ์ของระบบพิกัดของรังสีตกกระทบกับระบบพิกัด (ρ,ϕ,z) จะได้

$$H_z^i = \vec{H}^i \cdot \vec{a}_z = -H_{\beta_i}^i \sin\beta_o = -\frac{E_{\phi_i}^i}{Z}\sin\beta_o \qquad (3.207ก)$$

$$E_z^i = \vec{E}^i \cdot \vec{a}_z = -E_{\beta_i}^i \sin\beta_o = H_{\phi_i}^i Z \sin\beta_o \qquad (3.207ข)$$

เนื่องจาก $\vec{a}_\rho = \vec{a}_r \sin\theta + \vec{a}_\theta \cos\theta = \hat{s}_d \sin\beta_o - \hat{\beta}_d \cos\beta_o$ และ $\vec{a}_\phi = \hat{\phi}_d$ ดังนั้นเมื่อแทนลงในสมการ (3.203ก-ข) จะได้

$$\vec{H}_t^d = \left[H_{\beta_i}^i D_h(\cos\beta_o \sin\beta_o \hat{s}_d - \cos^2\beta_o \hat{\beta}_d) - H_{\phi_i}^i D_s \hat{\phi}_d\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.208ก)$$

$$\vec{E}_t^d = \left[E_{\beta_i}^i D_s(\cos\beta_o \sin\beta_o \hat{s}_d - \cos^2\beta_o \hat{\beta}_d) - E_{\phi_i}^i D_h \hat{\phi}_d\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.208ข)$$

และ $\vec{a}_z = \vec{a}_r \cos\theta - \vec{a}_\theta \sin\theta = \hat{s}_d \cos\beta_o + \hat{\beta}_d \sin\beta_o$ ดังนั้น

$$H_z^d \vec{a}_z = H_z^i D_h \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \vec{a}_z = \left[-H_{\beta_i}^i D_h(\cos\beta_o \sin\beta_o \hat{s}_d + \sin^2\beta_o \hat{\beta}_d)\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.209ก)$$

$$E_z^d \vec{a}_z = E_z^i D_s \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \vec{a}_z = \left[-E_{\beta_i}^i D_s(\cos\beta_o \sin\beta_o \hat{s}_d + \sin^2\beta_o \hat{\beta}_d)\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.209ข)$$

จากสมการ (3.208ก-ข) และ (3.209ก-ข) ทำให้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบเป็น

$$\vec{H}^d = \vec{H}_t^d + H_z^d \vec{a}_z = \left[-H_{\beta_i}^i D_h \hat{\beta}_d - H_{\phi_i}^i D_s \hat{\phi}_d\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.210ก)$$

$$\vec{E}^d = \vec{E}_t^d + E_z^d \vec{a}_z = \left[-E_{\beta_i}^i D_s \hat{\beta}_d - E_{\phi_i}^i D_h \hat{\phi}_d\right] \frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \qquad (3.210ข)$$

และ

$$\vec{H}^d = \frac{\hat{s}_d \times \vec{E}^d}{Z} \qquad (3.210ค)$$

จากข้างต้น $\frac{1}{\sqrt{s_d}}$ คือ ตัวประกอบการลดทอนซึ่งเกิดจากการพิจารณารูปลิ่มตัวนำที่มีสันขอบตรงยาวอนันต์และคลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบ แต่สำหรับกรณีที่เป็นสันขอบโค้งตัวประกอบการลดทอนเป็น $\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d+s_d)}}$ ดังสมการ (3.93) ดังนั้นสำหรับในกรณีสันขอบโค้ง สมการ (3.210ก-ข) สามารถเขียนใหม่ในรูปของสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกได้เป็น

$$\bar{H}^d = \bar{H}^i(Q_D)\cdot \widetilde{D}_H \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d+s_d)}}e^{-jks_d} \tag{3.211ก}$$

$$\bar{E}^d = \bar{E}^i(Q_D)\cdot \widetilde{D}_E \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d+s_d)}}e^{-jks_d} \tag{3.211ข}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิก $\widetilde{D}_H = -D_h\hat{\beta}_i\hat{\beta}_d - D_s\hat{\phi}_i\hat{\phi}_d$ และ $\widetilde{D}_E = -D_s\hat{\beta}_i\hat{\beta}_d - D_h\hat{\phi}_i\hat{\phi}_d$ และสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบน D_s กับ D_h เป็นดังสมการ (3.193) และ (3.195) ซึ่งเขียนในระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนได้เป็น

$$D_s(\xi,n,\beta_o)=\begin{bmatrix} \{C^+(\xi^-,n,\beta_o)F[kL'a^+(\xi^-)]+C^-(\xi^-,n,\beta_o)F[kL'a^-(\xi^-)]\} \\ -\{C^+(\xi^+,n,\beta_o)F[kL'a^+(\xi^+)]+C^-(\xi^+,n,\beta_o)F[kL'a^-(\xi^+)]\} \end{bmatrix} \tag{3.212ก}$$

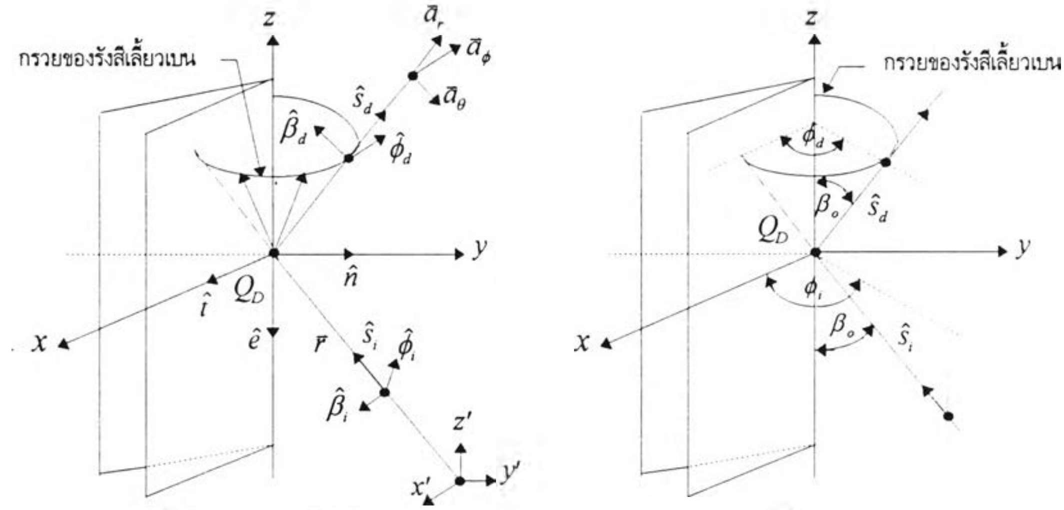
$$D_h(\xi,n,\beta_o)=\begin{bmatrix} \{C^+(\xi^-,n,\beta_o)F[kL'a^+(\xi^-)]+C^-(\xi^-,n,\beta_o)F[kL'a^-(\xi^-)]\} \\ +\{C^+(\xi^+,n,\beta_o)F[kL'a^+(\xi^+)]+C^-(\xi^+,n,\beta_o)F[kL'a^-(\xi^+)]\} \end{bmatrix} \tag{3.212ข}$$

โดยที่ $C^{\pm}(\xi,n,\beta_o) = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}\sin\beta_o}\cot\left[\frac{\pi\pm\xi}{2n}\right]$ และ $\xi=\xi^{\mp}=\phi_d\mp\phi_i$ และเมื่อพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกข้างต้นพบว่า สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกเป็นฟังก์ชันของมุม ϕ_i,ϕ_d,β_o และทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบ $\hat{s}_i,\hat{\phi}_i,\hat{\beta}_i$ และของรังสีเลี้ยวเบน $\hat{s}_d,\hat{\phi}_d,\hat{\beta}_d$ ซึ่งสามารถหาได้โดยพิจารณาจากเวกเตอร์พื้นผิวที่จุดขอบที่ประกอบด้วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับพื้นผิวที่จุดขอบซึ่งมีทิศพุ่งจากจุดขอบเข้าหาพื้นผิว $\hat{t}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดขอบ $\hat{e}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวที่จุดขอบ $\hat{n}$ ดังรูป 3.24 โดยกำหนดให้

$$\hat{e} = -\frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} \tag{3.213ก}$$

$$\hat{t} = \hat{e}\times\hat{n} \tag{3.213ข}$$

และ $\bar{r}'$ คือ อนุพันธ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งบนขอบ $\bar{r}$ ที่จุดขอบ



รูป 3.24 เวกเตอร์พื้นผิวที่จุดขอบ $\hat{t},\hat{e},\hat{n}$ ที่ใช้หามุมและทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบ

จากรูป 3.24 ทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบ $\hat{s}_i,\hat{\phi}_i,\hat{\beta}_i$ และของรังสีเลี้ยวเบน $\hat{s}_d,\hat{\phi}_d,\hat{\beta}_d$ และมุม β_o เป็นดังนี้

$$\hat{\phi}_i = \frac{\hat{e}\times\hat{s}_i}{\left|\hat{e}\times\hat{s}_i\right|} \qquad (2.214ก)$$

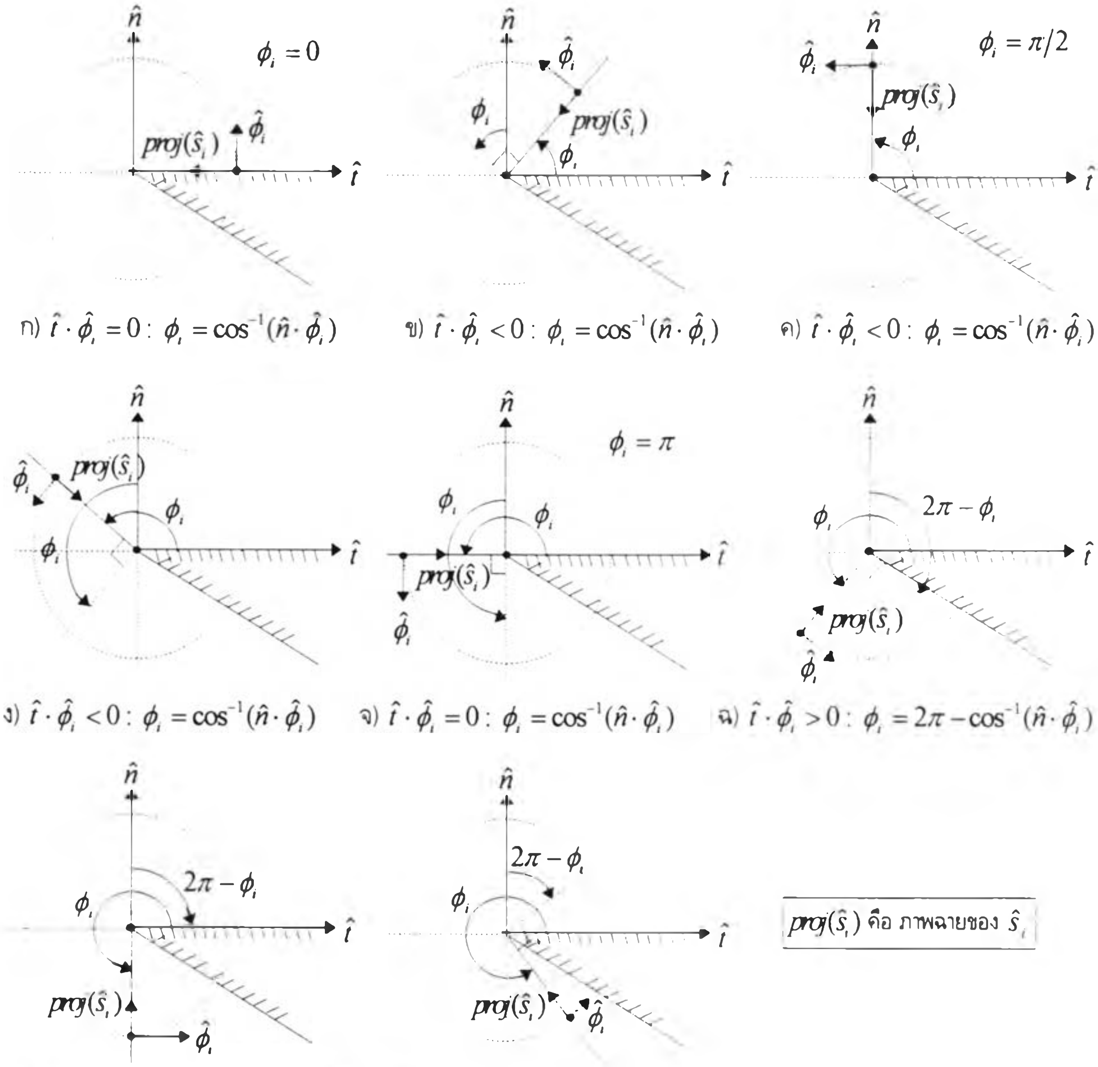
$$\hat{\beta}_i = \hat{s}_i \times \hat{\phi}_i \qquad (3.214ข)$$

$$\hat{\phi}_d = \frac{\hat{s}_d\times\hat{e}}{\left|\hat{s}_d\times\hat{e}\right|} \qquad (3.214ค)$$

$$\hat{\beta}_d = \hat{s}_d \times \hat{\phi}_d \qquad (3.214ง)$$

$$\sin\beta_o = \sqrt{1-(\hat{s}_i\cdot\hat{e})^2} \qquad (3.214จ)$$

และมุม ϕ_i,ϕ_d หาได้โดยพิจารณากรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการตกกระทบและการเลี้ยวเบนที่ขอบดังรูป 3.25 และ 3.26

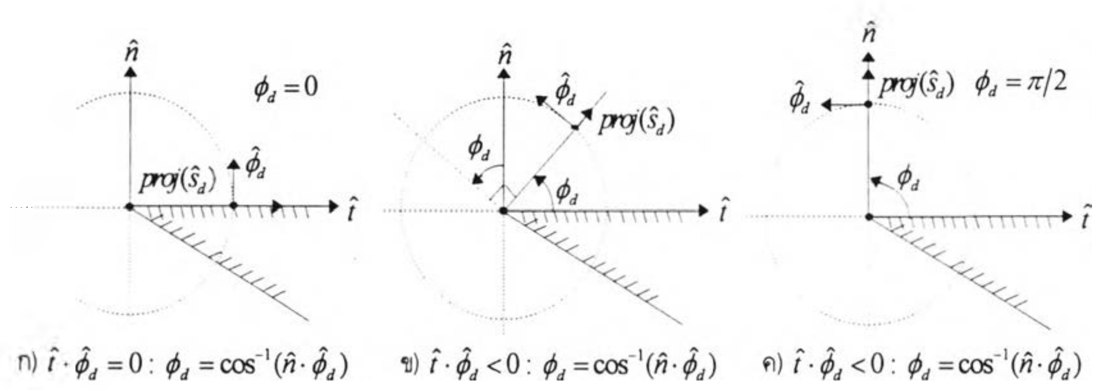


ก) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i = 0:\ \phi_i = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$ ข) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i < 0:\ \phi_i = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$ ค) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i < 0:\ \phi_i = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$

ง) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i < 0:\ \phi_i = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$ จ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i = 0:\ \phi_i = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$ ฉ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i > 0:\ \phi_i = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$

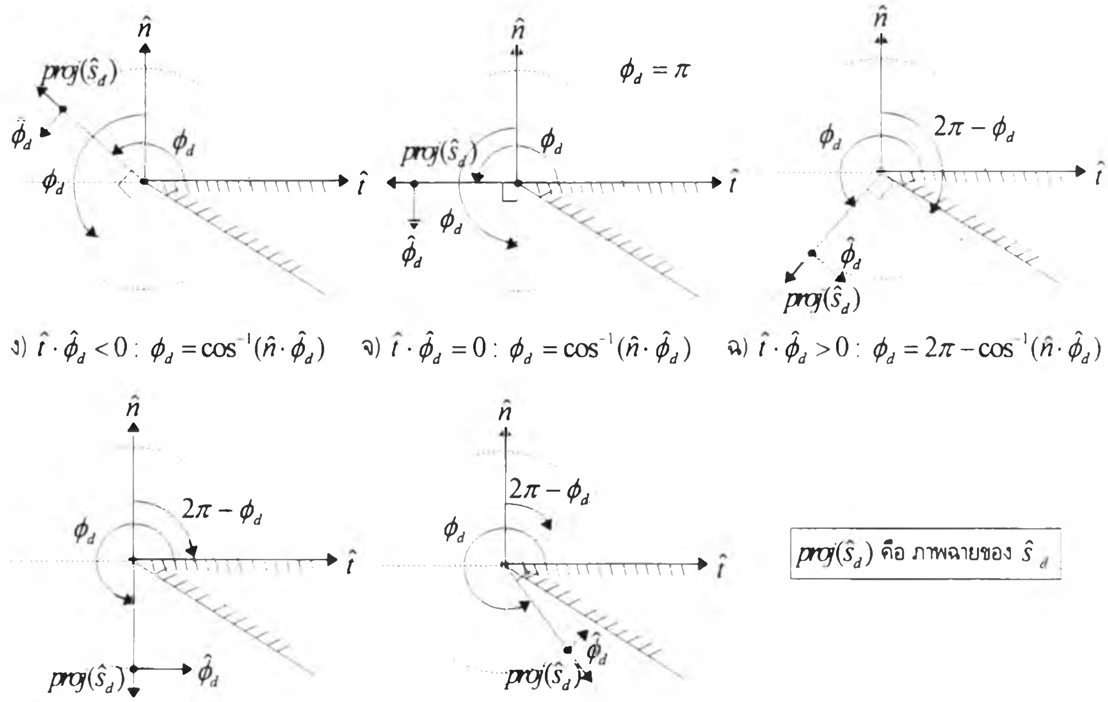
ช) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i > 0:\ \phi_i = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$ ซ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i > 0:\ \phi_i = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i)$

รูป 3.25 กรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการตกกระทบที่ขอบของรูปลิ่มตัวนำ



ก) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d = 0:\ \phi_d = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$ ข) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d < 0:\ \phi_d = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$ ค) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d < 0:\ \phi_d = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$

รูป 3.26 กรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของรูปลิ่มตัวนำ



ง) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d < 0$: $\phi_d = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$ จ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d = 0$: $\phi_d = \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$ ฉ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d > 0$: $\phi_d = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$

ช) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d > 0$: $\phi_d = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$ ซ) $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d > 0$: $\phi_d = 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d)$

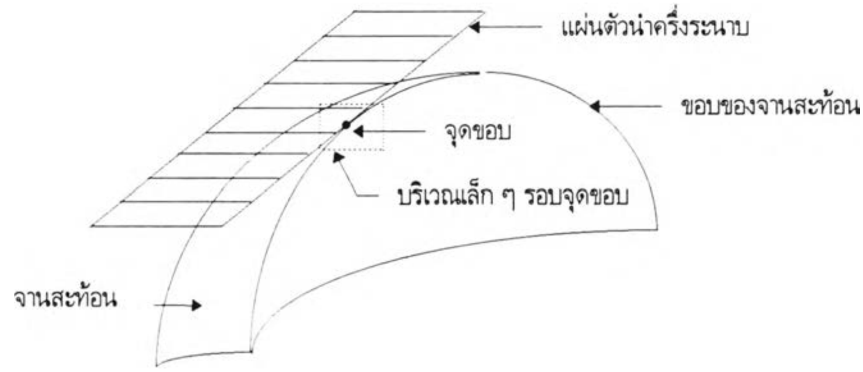
รูป 3.26 (ต่อ) กรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของรูปลิ่มตัวนำ

จากกรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการตกกระทบและการเลี้ยวเบนในรูป 3.25 และ 3.26 เมื่อพิจารณาค่าปัจจัยทดสอบ $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_i$ และ $\hat{t}\cdot\hat{\phi}_d$ พบว่า

$$\phi_i = \begin{cases} \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i) & , \ \hat{t}\cdot\hat{\phi}_i \le 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_i) & , \ \hat{t}\cdot\hat{\phi}_i > 0 \end{cases} \tag{3.215ก}$$

$$\phi_d = \begin{cases} \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d) & , \ \hat{t}\cdot\hat{\phi}_d \le 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}(\hat{n}\cdot\hat{\phi}_d) & , \ \hat{t}\cdot\hat{\phi}_d > 0 \end{cases} \tag{3.215ข}$$

จากการวิเคราะห์หาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบข้างต้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก โดยค่าประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกที่นำมาใช้ขึ้นอยู่กับลักษณะที่ขอบของจานสะท้อน ซึ่งเมื่อพิจารณาบริเวณเล็ก ๆ รอบจุดขอบของจานสะท้อนพบว่า บริเวณขอบโค้งที่จุดขอบของจานสะท้อนนั้นสามารถแทนได้ด้วยแผ่นตัวนำครึ่งระนาบ (conducting half plane) ที่ซึ่งสัมผัสกับพื้นผิวจานสะท้อนที่จุดขอบดังรูป 3.27 เนื่องจากมีลักษณะโครงสร้างคล้ายเคียงกันในช่วงบริเวณเล็ก ๆ ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกที่ใช้ในการหาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนสอดคล้องกับค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกของรูปลิ่มตัวนำที่ซึ่งมุมภายในของรูปลิ่มเป็นศูนย์หรือ $n = 2$



รูป 3.27 บริเวณเล็ก ๆ รอบจุดขอบโค้งที่จุดขอบของจานสะท้อน

และเมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $a^{\pm}(\xi)$ ในฟังก์ชันทรานซิชันของค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนในกรณี $n=2$ พบว่า ค่า N^- และ N^+ ที่สอดคล้องตามสมการ (3.172ก-ข) นั้นเป็นดังรูป 3.21 โดยในช่วง $-2\pi \le \xi < \pi$ $N^+=0$ ทำให้ค่าของ $a^+(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{-\xi}{2}\right) = 1+\cos\xi$ และในช่วง $\pi \le \xi < 4\pi$ $N^+=1$ ทำให้ค่าของ $a^+(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{4\pi-\xi}{2}\right) = 1+\cos\xi$ และสำหรับค่าของ N^- นั้น ในช่วง $-2\pi \le \xi < -\pi$ $N^-=-1$ ซึ่งทำให้ $a^-(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{-4\pi-\xi}{2}\right) = 1+\cos\xi$ และในช่วง $-\pi \le \xi < 2\pi$ $N^-=0$ ทำให้ $a^-(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{-\xi}{2}\right) = 1+\cos\xi$ และในช่วง $2\pi \le \xi < 4\pi$ $N^-=1$ ทำให้ $a^-(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{4\pi-\xi}{2}\right) = 1+\cos\xi$ ดังนั้นสำหรับในกรณี $n=2$ ฟังก์ชัน $a^{\pm}(\xi) = a(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ซึ่งเมื่อแทนลงในค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกจะได้

$$D_s(\xi, n=2, \beta_o) = \begin{bmatrix} F[kL^i a(\xi^-)]\{C^+(\xi^-, n=2, \beta_o) + C^-(\xi^-, n=2, \beta_o)\} \\ -F[kL^r a(\xi^+)]\{C^+(\xi^+, n=2, \beta_o) + C^-(\xi^+, n=2, \beta_o)\} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}$ ดังนั้น

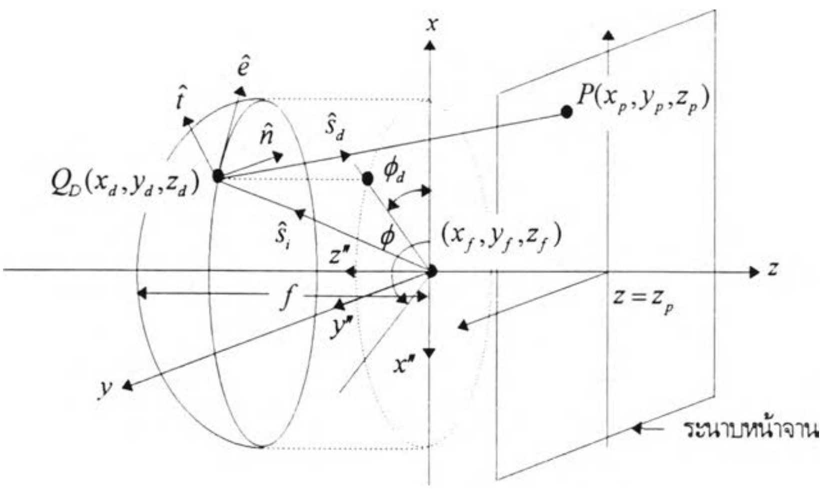
$$D_s(\xi, \beta_o) = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k}\sin\beta_o} \left[\frac{F[kL^i a(\xi^-)]}{\cos\left(\frac{\xi^-}{2}\right)} - \frac{F[kL^r a(\xi^+)]}{\cos\left(\frac{\xi^+}{2}\right)} \right] \qquad (3.216ก)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$D_h(\xi,\beta_o) = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k}\sin\beta_o}\left[\frac{F[kL'a(\xi^-)]}{\cos\left(\frac{\xi^-}{2}\right)} + \frac{F[kL'a(\xi^+)]}{\cos\left(\frac{\xi^+}{2}\right)}\right] \tag{3.216ข}$$

โดยที่ $a(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$ และ $\xi = \xi^{\mp} = \phi_d \mp \phi_i$

ค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกเป็นพจน์ที่บ่งบอกถึงโพลาไรเซชันที่เกิดขึ้นของสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบน ซึ่งแสดงอยู่ในระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบน สำหรับในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในวิทยานิพนธ์นี้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนที่ปรากฏในค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกนั้นแสดงอยู่ในพจน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ และ $\vec{a}_z$ ของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (xyz) ของระบบพิกัดของจานสะท้อน เนื่องจากเป็นการง่ายต่อการหาความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดต่าง ๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์ สำหรับการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรดังรูป 3.28 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดที่ขอบของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนที่จุดเลี้ยวเบนสามารถหาได้โดยพิจารณาจากเวกเตอร์พื้นผิวที่จุดขอบที่เกิดการเลี้ยวเบน Q_D ตามที่กำหนดในสมการ (3.213ก-ข) ดังนี้



รูป 3.28 ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร

จากรูป 3.28 สมมุติว่าสายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางอยู่ที่พิกัด (x_f, y_f, z_f) ในระบบพิกัดของจานสะท้อน และให้ $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ เป็นจุดบนขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกใด ๆ และ $P(x_p, y_p, z_p)$ เป็นจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจาน ดังนั้นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ แสดงอยู่ในระบบพิกัดของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกได้เป็น

$$\vec{r} = (x - x_f)\vec{a}_x + (y - y_f)\vec{a}_y + (z - z_f)\vec{a}_z \tag{3.217}$$

ในวิทยานิพนธ์นี้ศูนย์กลางเฟส (phase center) ของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นอยู่ที่จุดโฟกัสของจานสะท้อนรูปพาราโบลิก ดังนั้น $x_f = 0, y_f = 0$ และ $z_f = 0$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.217) จะได้

$$\bar{r} = x\bar{a}_x + y\bar{a}_y + z\bar{a}_z \tag{3.218}$$

และเนื่องจากขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกสามารถกำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$x = \frac{D}{2}\cos\phi$$
$$y = \frac{D}{2}\sin\phi$$

และ

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4f} - f = \frac{(D/2)^2}{4f} - f$$

โดยที่ f คือ ระยะโฟกัสของจานสะท้อนรูปพาราโบลิก ดังนั้นเมื่อแทนลงในสมการ (3.218) เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งของขอบที่จุดขอบเป็น

$$\bar{r}(\phi) = \frac{D}{2}\cos\phi\,\bar{a}_x + \frac{D}{2}\sin\phi\,\bar{a}_y + \left[\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right]\bar{a}_z \tag{3.219}$$

เมื่อแทนสมการ (3.219) ลงในสมการ (3.213ก) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ เป็น

$$\hat{e} = -\frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \sin\phi_d\bar{a}_x - \cos\phi_d\bar{a}_y \tag{3.220}$$

จากสมการ (3.220) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $\hat{e}$ มีทิศดังรูป 3.28 ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสพื้นผิวรูปพาราโบลิกที่จุดเลี้ยวเบนและมีทิศพุ่งจากจุดเลี้ยวเบนเข้าหาพื้นผิวสามารถหาได้ดังสมการ (3.213ข) โดยที่เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวรูปพาราโบลิกที่จุดเลี้ยวเบนกำหนดเป็นดังสมการ (3.221) ซึ่งมีทิศทางดังรูป 3.28

$$\hat{n} = \frac{-x_d\bar{a}_x - y_d\bar{a}_y + 2f\bar{a}_z}{\sqrt{x_d^2 + y_d^2 + 4f^2}} = \frac{-\frac{D}{2}\cos\phi_d\bar{a}_x - \frac{D}{2}\sin\phi_d\bar{a}_y + 2f\bar{a}_z}{\sqrt{(D/2)^2 + 4f^2}} \tag{3.221}$$

และสำหรับในระบบพิกัดที่ขอบ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบ $\hat{s}_i$ มีทิศพุ่งจากแหล่งกำเนิดไปยังจุดเลี้ยวเบนและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเลี้ยวเบน $\hat{s}_d$ มีทิศพุ่งจากจุดเลี้ยวเบนไปยังจุดสังเกตใด ๆ ดังนั้น

$$\hat{s}_i = \frac{\bar{s}_i}{s_i} = \frac{x_d\bar{a}_x + y_d\bar{a}_y + z_d\bar{a}_z}{\sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}} = \frac{\frac{D}{2}\cos\phi_d\bar{a}_x + \frac{D}{2}\sin\phi_d\bar{a}_y + \left[\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right]\bar{a}_z}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left[\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right]^2}} \tag{3.222}$$

$$\hat{s}_d = \frac{\bar{s}_d}{s_d} = \frac{(x_p - x_d)\bar{a}_x + (y_p - y_d)\bar{a}_y + (z_p - z_d)\bar{a}_z}{\sqrt{(x_p - x_d)^2 + (y_p - y_d)^2 + (z_p - z_d)^2}}$$

$$= \frac{\left(x_p - \frac{D}{2}\cos\phi_d\right)\bar{a}_x + \left(y_p - \frac{D}{2}\sin\phi_d\right)\bar{a}_y + \left[z_p - \left(\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right)\right]\bar{a}_z}{\sqrt{\left(x_p - \frac{D}{2}\cos\phi_d\right)^2 + \left(y_p - \frac{D}{2}\sin\phi_d\right)^2 + \left[z_p - \left(\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right)\right]^2}} \tag{3.223}$$

เมื่อแทนสมการ (3.220) (3.222) และ (3.223) ลงในสมการ (3.214ก-จ) และ (3.215ก-ข) ก็จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันและมุมของระบบพิกัดที่ขอบที่จุดเลี้ยวเบนของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบน

จากข้างต้นจุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ หรือ $\left(\frac{D}{2}\cos\phi_d, \frac{D}{2}\sin\phi_d, \frac{(D/2)^2}{4f} - f\right)$ เป็นจุดขอบที่สอดคล้องกฎของการเลี้ยวเบนดังสมการ (3.224)

$$\hat{s}_i \cdot \hat{e} = \hat{s}_d \cdot \hat{e} \tag{3.224}$$

โดยที่ $\hat{s}_i, \hat{s}_d$ และ $\hat{e}$ เป็นดังสมการ (3.222) (3.223) และ (3.220) ตามลำดับ และในการหาแก้หาค่า ϕ_d จากสมการ (3.224) ซึ่งเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ทำได้โดยกรรมวิธีเชิงเลข ซึ่งในที่นี้ใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสันมาคำนวณหาโดยใช้ฟังก์ชัน fsolve ในโปรมแกรม MATLAB และกำหนดให้มีการวนซ้ำมากที่สุด 60 รอบ ความแม่นยำของคำตอบอยู่ในเกณฑ์ 10^{10} และกำหนดให้คำตอบเริ่มต้นอยู่ในแต่ละจตุภาค และเมื่อแทนค่า ϕ_d ที่ได้ (อาจมีมากกว่าหนึ่งค่า) ลงในสมการต่าง ๆ ข้างต้นก็ทำให้ได้เวกเตอร์และมุมต่าง ๆ ซึ่งนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าปัจจัยอื่น ๆ ในค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกและตัวประกอบการลดทอนได้ดังนี้

โดยสมมุติว่าคลื่นที่แผ่กระจายมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นคลื่นทรงกลม รัศมีความโค้งหลักของคลื่นตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบน $\rho_1^i = \rho_2^i = s_i$ และรัศมีความโค้งของคลื่นตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบนในระนาบการตกกระทบ ρ_e^i ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตกกระทบ $\hat{s}_i$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $\hat{e}$ มีค่าเท่ากับ s_i ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.170ก) จะได้

$$L^i = \frac{s_d s_i \sin^2\beta_o}{(s_i + s_d)} \tag{3.225}$$

และจากสมการ (3.170ข) L^r เป็นฟังก์ชันของรัศมีความโค้งหลักของคลื่นสะท้อนที่จุดเลี้ยวเบน ρ_1^r, ρ_2^r และรัศมีความโค้งของคลื่นสะท้อนที่จุดเลี้ยวเบนในระนาบการสะท้อน ρ_e^r ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสะท้อน $\hat{s}_r$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $\hat{e}$ สำหรับ ρ_1^r, ρ_2^r สามารถหาได้ดังสมการ (3.89)

ในหัวข้อกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต และ ρ_e^r สามารถหาได้เช่นเดียวกับระยะตัดกันของรังสีเลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นในระนาบการเลี้ยวเบนดังสมการ (3.94) โดยแทน ρ_2^d ด้วย ρ_e^r และ $\hat{s}_d$ ด้วย $\hat{s}_r$ โดยที่ $\hat{s}_r = \hat{s}_i - 2(\hat{n}\cdot\hat{s}_i)\hat{n}$ ตามจากกฎการสะท้อนของสเนลล์ ดังนั้น

$$\frac{1}{\rho_e^r} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{\hat{n}_e\cdot(\hat{s}_i - \hat{s}_r)}{R_E \sin^2\beta_o} = \frac{1}{s_i} - \frac{2(\hat{n}_e\cdot\hat{n})(\hat{n}\cdot\hat{s}_i)}{R_E\sin^2\beta_o} \tag{3.226}$$

โดยที่ R_E คือ รัศมีความโค้งของขอบที่จุดเลี้ยวเบนและ $\hat{n}_e$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับขอบที่จุดเลี้ยวเบนและมีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้ง ซึ่งสามารถหาได้ดังสมการ (2.48) และ (2.50) ดังนั้น

$$L^r = \frac{s_d(\rho_e^r + s_d)\rho_1^r\rho_2^r\sin^2\beta_o}{\rho_e^r(\rho_1^r + s_d)(\rho_2^r + s_d)} \tag{3.227}$$

และฟังก์ชัน $a(\phi_d \mp \phi_i) = 2\cos^2\left(\frac{\phi_d \mp \phi_i}{2}\right)$ และระยะระหว่างจุดขอบหรือจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่งกับจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่สอง ρ_2^d ในตัวประกอบการลดทอนเป็น

$$\frac{1}{\rho_2^d} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{\hat{n}_e\cdot(\hat{s}_i - \hat{s}_d)}{R_E\sin^2\beta_o} \tag{3.228}$$

จากค่าปัจจัยต่าง ๆ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันของระบบพิกัดของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนข้างต้นเมื่อแทนลงในสมการ (3.211ข) จะได้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรมายังจุดสังเกต $P(x_p, y_p, z_p)$ ใด ๆ บนระนาบหน้าจานเป็น

$$\bar{E}^d(P) = \left[-\left(\bar{E}^i(Q_D)\cdot\hat{\beta}_i\right)D_s\hat{\beta}_d - \left(\bar{E}^i(Q_D)\cdot\hat{\phi}_i\right)D_h\hat{\phi}_d\right]\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d + s_d)}}e^{-jks_d} \tag{3.229ก}$$

และ

$$\bar{H}^d(P) = \frac{\hat{s}_d \times \bar{E}^d(P)}{Z} \tag{3.229ข}$$

โดยที่ $\bar{E}^i(Q_D)$ คือ สนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ ซึ่งในกรณีของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกคือ สนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมายังจุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ จากหัวข้อสายอากาศป้อนกำลังคลื่นจะได้

$$\bar{E}^i(Q_D) = \bar{E}^{feed}(x_d, y_d, z_d) = \begin{bmatrix} E_x^{feed} \\ E_y^{feed} \\ E_z^{feed} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o\cos\phi_o & -\sin\phi_o & \sin\theta_o\cos\phi_o \\ \cos\theta_o\sin\phi_o & \cos\phi_o & \sin\theta_o\sin\phi_o \\ -\sin\theta_o & 0 & \cos\theta_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} \tag{3.230}$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} E_{x''} \\ E_{y''} \\ E_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta''\cos\phi'' & \cos\theta''\cos\phi'' & -\sin\phi'' \\ \sin\theta''\sin\phi'' & \cos\theta''\sin\phi'' & \cos\phi'' \\ \cos\theta'' & -\sin\theta'' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_E(\theta'')\sin\phi'' \\ f_H(\theta'')\cos\phi'' \end{bmatrix} \frac{e^{-jk_0r''}}{r''}$$

และระบบพิกัด $x''y''z''$ เกิดจาก $\theta_o = \pi$ และ $\phi_o = 0$ และระบบพิกัด $x''y''z''$ มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัด $r''\theta''\phi''$ คือ $r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$, $\theta'' = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x''^2 + y''^2}}{z''}\right)$ และ $\phi'' = \tan^{-1}\left(\frac{y''}{x''}\right)$ โดย

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_o\cos\phi_o & \cos\theta_o\sin\phi_o & -\sin\theta_o \\ -\sin\phi_o & \cos\phi_o & 0 \\ \sin\theta_o\cos\phi_o & \sin\theta_o\sin\phi_o & \cos\theta_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}$$

จากสมการ (3.229ก-ข) สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรมายังจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจานแสดงอยู่ในพจน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{a}_x, \bar{a}_y$ และ $\bar{a}_z$ ของระบบพิกัดของจานสะท้อนซึ่งเกิดจากจุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ ที่สอดคล้องกับกฎของการเลี้ยวเบน และถ้าจุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ ที่ทำให้เกิดสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนไปยังจุดสังเกตบนระนาบหน้าจานมีหลายจุด สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรมายังจุดสังเกตบนระนาบหน้าจานเป็น

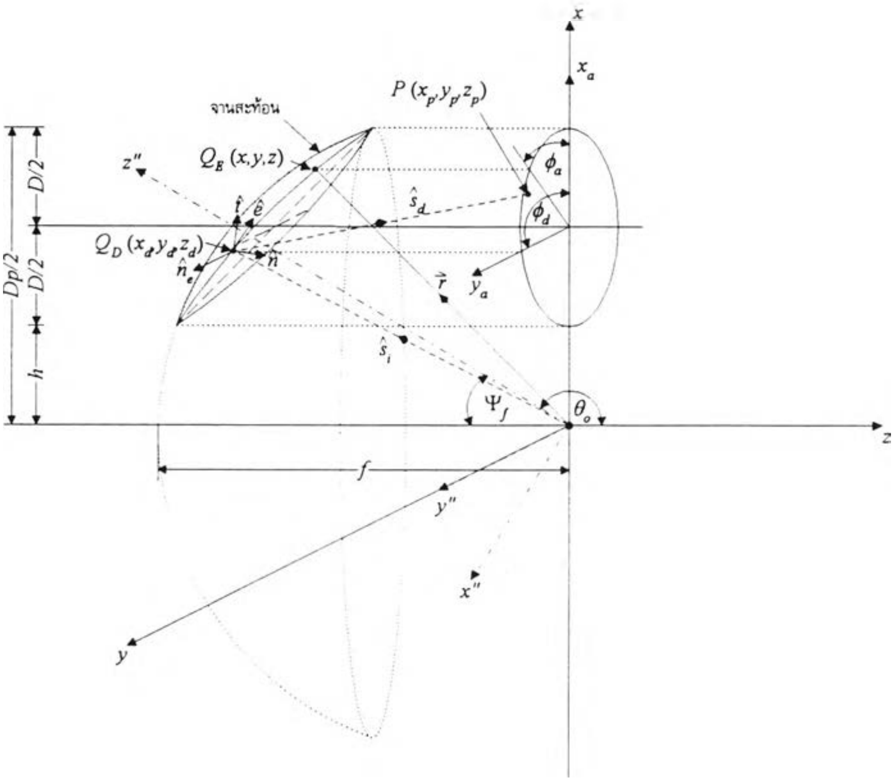
$$\bar{E}^d(P) = \sum_{n=1}^{m} \bar{E}_n^d(P) \tag{3.231ก}$$

$$\bar{H}^d(P) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\hat{s}_d^n \times \bar{E}_n^d(P)}{Z} \tag{3.231ข}$$

โดยที่ $\bar{E}_n^d(P) = \left[-\left(\bar{E}^i(Q_{Dn})\cdot\hat{\beta}_i^n\right)D_s^n\hat{\beta}_d^n - \left(\bar{E}^i(Q_{Dn})\cdot\hat{\phi}_i^n\right)D_h^n\hat{\phi}_d^n\right]\sqrt{\frac{\rho_2^{dn}}{s_d^n(\rho_2^{dn} + s_d^n)}}e^{-jks_d^n}$

ในทำนองเดียวกัน สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรมายังจุดสังเกต $P(x_p, y_p, z_p)$ ใด ๆ บนระนาบหน้าจานดังรูป 3.29 สามารถหาได้เช่นเดียวกับในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร โดยสมมุติว่าสายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางอยู่ที่พิกัด (x_f, y_f, z_f) ในระบบพิกัดของจานสะท้อน และให้ $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ เป็นจุดบนขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกใด ๆ และ $P(x_p, y_p, z_p)$ เป็นจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจาน และจากรูป 3.29 ขอบของจานสะท้อนของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรนั้นสามารถกำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$x = \frac{D}{2} + h + \frac{D}{2}\cos\phi_a$$
$$y = \frac{D}{2}\sin\phi_a$$



รูป 3.29 ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร

และ
$$z=\frac{x^2+y^2}{4f}-f=\frac{\left(\frac{D}{2}\cos\phi_a+\frac{D}{2}+h\right)^2+\left(\frac{D}{2}\sin\phi_a\right)^2}{4f}-f$$

โดยที่ f คือ ระยะโฟกัสของจานสะท้อนรูปพาราโบลิก ดังนั้นเวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งของขอบที่จุดขอบเป็น

$$\begin{aligned}\vec{r}&=x\vec{a}_x+y\vec{a}_y+z\vec{a}_z\\&=\left(\frac{D}{2}+h+\frac{D}{2}\cos\phi_a\right)\vec{a}_x+\frac{D}{2}\sin\phi_a\vec{a}_y+\left[\frac{\left(\frac{D}{2}+h+\frac{D}{2}\cos\phi_a\right)^2+\left(\frac{D}{2}\sin\phi_a\right)^2}{4f}-f\right]\vec{a}_z\end{aligned}\tag{3.232}$$

เมื่อแทนสมการ (3.232) ลงในสมการ (3.213ก) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ ดังรูป 3.29 เป็น

$$\hat{e}=-\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}=\frac{\frac{D}{2}\sin\phi_d\vec{a}_x-\frac{D}{2}\cos\phi_d\vec{a}_y+D\left(\frac{D}{2}+h\right)\sin\phi_d\vec{a}_z}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+D^2\left(\frac{D}{2}+h\right)^2\sin^2\phi_d}}\tag{3.233}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $\hat{e}$ ดังสมการ (3.233) มีทิศดังรูป 3.29 ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสพื้นผิวรูปพาราโบลิกที่จุดเลี้ยวเบนและมีทิศพุ่งจากจุดเลี้ยวเบนเข้าหาพื้นผิวสามารถหาได้ดังสมการ (3.213ข) โดยที่เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวรูปพาราโบลิกที่จุดเลี้ยวเบนกำหนดเป็นดังสมการ (3.234) ซึ่งมีทิศทางดังรูป 3.29

$$\hat{n}=\frac{-x_d\bar{a}_x-y_d\bar{a}_y+2f\bar{a}_z}{\sqrt{x_d^2+y_d^2+4f^2}}=\frac{-\left(\frac{D}{2}+h+\frac{D}{2}\cos\phi_d\right)\bar{a}_x-\frac{D}{2}\sin\phi_d\bar{a}_y+2f\bar{a}_z}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}+h+\frac{D}{2}\cos\phi_d\right)^2+\left(\frac{D}{2}\sin\phi_d\right)^2+4f^2}} \tag{3.234}$$

และสำหรับในระบบพิกัดที่ขอบ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบ $\hat{s}_i$ มีทิศพุ่งจากแหล่งกำเนิดไปยังจุดเลี้ยวเบนและเวกตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเลี้ยวเบน $\hat{s}_d$ มีทิศพุ่งจากจุดเลี้ยวเบนไปยังจุดสังเกตใด ๆ ดังนั้น

$$\hat{s}_i=\frac{\bar{s}_i}{s_i}=\frac{x_d\bar{a}_x+y_d\bar{a}_y+z_d\bar{a}_z}{\sqrt{x_d^2+y_d^2+z_d^2}} \tag{3.235}$$

$$\hat{s}_d=\frac{\bar{s}_d}{s_d}=\frac{(x_p-x_d)\bar{a}_x+(y_p-y_d)\bar{a}_y+(z_p-z_d)\bar{a}_z}{\sqrt{(x_p-x_d)^2+(y_p-y_d)^2+(z_p-z_d)^2}} \tag{3.236}$$

โดยที่

$$x_d=\frac{D}{2}+h+\frac{D}{2}\cos\phi_d$$

$$y_d=\frac{D}{2}\sin\phi_d$$

และ

$$z_d=\frac{x_d^2+y_d^2}{4f}-f=\frac{\left(\frac{D}{2}\cos\phi_d+\frac{D}{2}+h\right)^2+\left(\frac{D}{2}\sin\phi_d\right)^2}{4f}-f$$

ส่วนเวกเตอร์และค่าปัจจัยอื่น ๆ สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันกับที่กล่าวไว้ในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร ยกเว้นสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมายังจุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d,y_d,z_d)$ เกิดจากระบบพิกัด $x''y''z''$ ที่ซึ่ง $\theta_o=\pi-\psi_f$ และ $\phi_o=0$ โดยที่ ψ_f มุมที่แกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นทำกับแนวแกนของระบบสายอากาศดังรูป 3.29

จากข้างต้นเป็นการหาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรและแบบไม่สมมาตรมายังจุดสังเกตใด ๆ บนระนาบหน้าจาน เพื่อนำไปใช้ในการหาสนามในบริเวณย่านสนามไกลตามแผนภาพในรูป 3.1 ดังแสดงไว้หัวข้อขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกที่จะกล่าวต่อไป

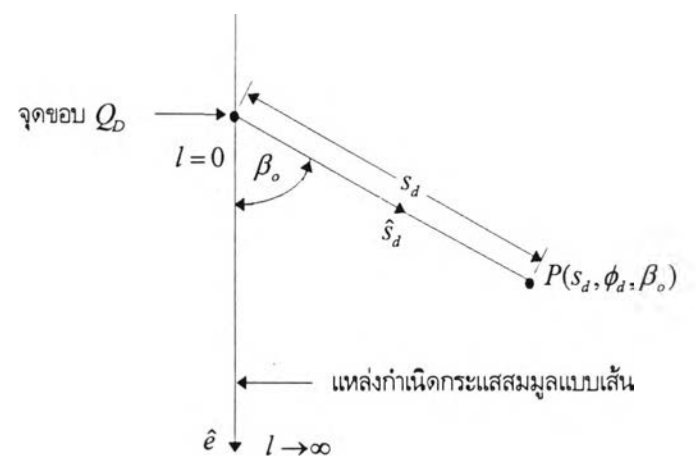
<u>กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ</u>

จากหัวข้อที่แล้วสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนสามารถคำนวณหาได้จากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตดังสมการ (3.237) และ (3.238)

$$\bar{E}^d(P)=\left[-\left(\bar{E}^i(Q_D)\cdot\hat{\beta}_i\right)D_s\hat{\beta}_d-\left(\bar{E}^i(Q_D)\cdot\hat{\phi}_i\right)D_h\hat{\phi}_d\right]\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d+s_d)}}e^{-jks_d} \tag{3.237}$$

$$\bar{H}^d(P)=\left[-\left(\bar{H}^i(Q_D)\cdot\hat{\beta}_i\right)D_h\hat{\beta}_d-\left(\bar{H}^i(Q_D)\cdot\hat{\phi}_i\right)D_s\hat{\phi}_d\right]\sqrt{\frac{\rho_2^d}{s_d(\rho_2^d+s_d)}}e^{-jks_d} \tag{3.238}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (3.237) และ (3.238) พบว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนนั้นไม่สามารถคำนวณหาค่าได้เมื่อ $s_d=0$ หรือเมื่อ $\rho_d<0$ และ $s_d=\left|\rho_2^d\right|$ ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการตัดกันรังสี (caustic point) เพื่อที่จะคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดดังกล่าวนั้น แนวความคิดเกี่ยวกับกระแสสมมูลที่ขอบ (equivalent edge current) (C. E. Ryan and L. Peter, 1969; A. Michaeli, 1984) สามารถนำมาประยุกต์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบในบริเวณรอบ ๆ จุดตัดกันของรังสีได้ โดยสมมุติว่า มีแหล่งกระแสไฟฟ้าสมมูลแบบเส้น (equivalent electric line source) และแหล่งกระแสแม่เหล็กสมมูลแบบเส้น (equivalent magnetic line source) ที่ให้กำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กออกมาเท่ากับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบไปยังจุดใด ๆ



รูป 3.30 แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าและแม่เหล็กสมมูลแบบเส้นที่วางตัวตามแนวสัมผัสกับขอบ

จากข้อสมมุติข้างต้น ถ้าให้จุดสังเกต $P(s_d,\phi_d,\beta_o)$ ใด ๆ เป็นจุดที่อยู่ในทิศทางที่ทำให้เกิดการตัดกันของรังสี (caustic direction) โดยกำหนดให้ $s_d<<\left|\rho_2^d\right|$ และสำหรับในย่านความถี่สูง $ks_d\to\infty$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าที่

แผ่พลังงานโดยแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าสมมูลแบบเส้นที่วางตัวตามแนวสัมผัสกับขอบและถูกกระตุ้นด้วยกระแสไฟฟ้าคงที่ J_o ดังรูป 3.30 พบว่า สนามไฟฟ้าตามแนวสัมผัส $\hat{e}$ ที่จุดสังเกต $P(s_d,\phi_d,\beta_o)$ เป็น (C. A. Balanis, 1989)

$$E_e^{eq} \overset{ks_d\to\infty}{\cong} -J_o(Zk\sin\beta_o)e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{8\pi k}}\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \tag{3.239}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาสนามแม่เหล็กที่แผ่พลังงานโดยแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กสมมูลแบบเส้นที่วางตัวตามแนวสัมผัสกับขอบและถูกกระตุ้นด้วยกระแสแม่เหล็กคงที่ M_o พบว่า สนามแม่เหล็กตามแนวสัมผัส $\hat{e}$ ที่จุดสังเกต $P(s_d,\phi_d,\beta_o)$ เป็น

$$H_e^{eq} \overset{ks_d\to\infty}{\cong} -M_o\left(\frac{k\sin\beta_o}{Z}\right)e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{8\pi k}}\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \tag{3.240}$$

จากข้างต้นเราจะพิจารณาเพียงองค์ประกอบตามแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของแหล่งกำเนิดกระแสสมมูลทั้งสอง เนื่องจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าสมมูลแบบเส้นที่วางตัวตามแนวสัมผัสไม่ให้กำเนิดสนามแม่เหล็กตามแนวสัมผัส และแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กสมมูลแบบเส้นที่วางตัวตามแนวสัมผัสไม่ให้กำเนิดสนามไฟฟ้าตามแนวสัมผัส ดังนั้นเมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนตามแนวสัมผัส $\hat{e}$ ที่จุดสังเกต $P(s_d,\phi_d,\beta_o)$ จากสมการ (3.237) และ (2.238) จะได้

$$\begin{aligned} E_e^d(P) &\overset{s_d<<\left|\rho_2^d\right|}{\cong} \vec{E}^d(P)\cdot\hat{e} = \left[-E_{\beta_i}(Q_D)D_s(\hat{\beta}_d\cdot\hat{e})\right]\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \\ &= E_{\beta_i}(Q_D)D_s\sin\beta_o\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \end{aligned} \tag{3.241}$$

$$\begin{aligned} H_e^d(P) &\overset{s_d<<\left|\rho_2^d\right|}{\cong} \vec{H}^d(P)\cdot\hat{e} = \left[-H_{\beta_i}^i(Q_D)D_h(\hat{\beta}_d\cdot\hat{e})\right]\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \\ &= H_{\beta_i}^i(Q_D)D_h\sin\beta_o\frac{e^{-jks_d}}{\sqrt{s_d}} \end{aligned} \tag{3.242}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.239) กับ (3.241) และ (3.240) กับ (3.242) พบว่า สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดขอบ Q_D ไปยังจุดสังเกต $P(s_d,\phi_d,\beta_o)$ แผ่พลังงานออกมาจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าสมมูล J_o ที่จุดขอบ Q_D ดังสมการ (3.243)

$$J_o(Q_D) = -E_{\beta_i}^i(Q_D)YD_s\sqrt{\frac{8\pi}{k}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{3.243}$$

และสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบที่จุดขอบ Q_D ไปยังจุดสังเกต $P(s_d, \phi_d, \beta_o)$ แผ่พลังงานออกมาจากแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กสมมูล M_o ที่จุดขอบ Q_D ดังสมการ (3.244)

$$M_o(Q_D) = -H'_{\beta_i}(Q_D) Z D_h \sqrt{\frac{8\pi}{k}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{3.244}$$

เนื่องจาก $\bar{E}' \cdot \hat{e} = E'_{\beta_i}(\hat{e} \cdot \hat{\beta}_i) = E'_{\beta_i} \sin\beta_o$ และ $\bar{H}' \cdot \hat{e} = H'_{\beta_i}(\hat{e} \cdot \hat{\beta}_i) = H'_{\beta_i} \sin\beta_o$ ดังนั้นเมื่อแทนลงในสมการ (3.243) และ (3.244) จะได้

$$J_o(Q_D) = -\left[\frac{\bar{E}'(Q_D) \cdot \hat{e}}{\sin\beta_o}\right] Y D_s \sqrt{\frac{8\pi}{k}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{3.245}$$

$$M_o(Q_D) = -\left[\frac{\bar{H}'(Q_D) \cdot \hat{e}}{\sin\beta_o}\right] Z D_h \sqrt{\frac{8\pi}{k}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{3.246}$$

และเนื่องจากทุก ๆ จุดบนขอบทำให้เกิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางการตัดกันของรังสี ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่แผ่พลังงานออกมาจากทุก ๆ จุดซึ่งเป็นแหล่งกระแสสมมูลมายังจุดตัดกันของรังสีสามารถหาได้โดยทำการอินทิเกรตแหล่งกระแสไฟฟ้า J_o และแม่เหล็กสมมูล M_o (Silver, 1949) ดังสมการ (3.247)

$$\bar{E}^d(P) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint \left[J_o\hat{e} - (J_o\hat{e} \cdot \hat{s}_d)\hat{s}_d + Y M_o \hat{e} \times \hat{s}_d \right] \frac{e^{-jks_d}}{s_d} dl \tag{3.247}$$

ในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในวิทยานิพนธ์นี้ ได้ทำการพิจารณาจุดที่เกิดการตัดกันของรังสีโดยตรวจสอบจากเงื่อนไข $\left|s_d + \rho_2^d\right| \le 10^{-10}$ ซึ่งถ้าเป็นตามเงื่อนไขนี้แสดงว่าจุดสังเกตที่คำนวณหาเป็นจุดการตัดกันของรังสี ดังนั้นในการคำนวณหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่จุดสังเกตนี้สามารถคำนวณหาโดยใช้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบข้างต้น

จากสมการ (3.247) เมื่อนำมาใช้กับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร สนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดการตัดกันของรังสีสามารถเขียนในรูปใหม่เป็น

$$\bar{E}^d(x_p, y_p, z_p) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint \left[J_o\hat{e} - (J_o\hat{e} \cdot \hat{s}_d)\hat{s}_d + Y M_o \hat{e} \times \hat{s}_d \right] \frac{e^{-jks_d}}{s_d} \left| d\bar{r}(\phi) \right| \tag{3.248}$$

โดยที่ $\bar{r}(\phi)$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร ซึ่งจากสมการ (2.44) จะได้

$$\bar{r}(\phi) = \frac{D}{2}\cos\phi\, \bar{a}_x + \frac{D}{2}\sin\phi\, \bar{a}_y + \left[\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right] \bar{a}_z \tag{3.249ก}$$

และ $\hat{e}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดขอบ ซึ่งจากสมการ (2.49) จะได้

$$\hat{e} = \sin\phi\vec{a}_x - \cos\phi\vec{a}_y \tag{3.249ข}$$

$$\hat{s}_d = \frac{\bar{s}_d}{s_d} = \frac{\left(x_p - \frac{D}{2}\cos\phi\right)\vec{a}_x + \left(y_p - \frac{D}{2}\sin\phi\right)\vec{a}_y + \left[z_p - \left(\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right)\right]\vec{a}_z}{\sqrt{\left(x_p - \frac{D}{2}\cos\phi\right)^2 + \left(y_p - \frac{D}{2}\sin\phi\right)^2 + \left[z_p - \left(\frac{(D/2)^2}{4f} - f\right)\right]^2}} \tag{3.249ค}$$

และแหล่งกระแสไฟฟ้า J_o และแม่เหล็กสมมูล M_o ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ϕ สามารถหาได้ดังสมการ (3.245) และ (3.246) และเนื่องจาก $|d\bar{r}(\phi)| = |\bar{r}'(\phi)|d\phi$ ดังนั้นสมการ (3.248) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\bar{E}^d(x_p, y_p, z_p) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[J_o\hat{e} - (J_o\hat{e}\cdot\hat{s}_d)\hat{s}_d + YM_o\hat{e}\times\hat{s}_d\right]\frac{e^{-jks_d}}{s_d}|\bar{r}'(\phi)|d\phi \tag{3.250}$$

โดยที่ $|\bar{r}'(\phi)| = \frac{D}{2}$ ในทำนองเดียวกันสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่จุดการตัดกันของรังสีของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรสามารถหาได้ดังสมการ (3.251)

$$\bar{E}^d(x_p, y_p, z_p) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi}\oint\left[J_o\hat{e} - (J_o\hat{e}\cdot\hat{s}_d)\hat{s}_d + YM_o\hat{e}\times\hat{s}_d\right]\frac{e^{-jks_d}}{s_d}|d\bar{r}(\phi_a)| \tag{3.251}$$

โดยที่ $\bar{r}(\phi_a)$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งขอบของจานสะท้อนรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร ซึ่งจากสมการ (2.51) จะได้

$$\bar{r}(\phi_a) = \left(\frac{D}{2} + h + \frac{D}{2}\cos\phi_a\right)\vec{a}_x + \frac{D}{2}\sin\phi_a\vec{a}_y + \left[\frac{\left(\frac{D}{2} + h + \frac{D}{2}\cos\phi_a\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\sin\phi_a\right)^2}{4f} - f\right]\vec{a}_z \tag{3.252}$$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางสัมผัสกับขอบที่จุดขอบ $\hat{e}$ หาได้จากสมการ (2.56) เป็น

$$\hat{e} = \frac{\frac{D}{2}\sin\phi_a\vec{a}_x - \frac{D}{2}\cos\phi_a\vec{a}_y + D\left(\frac{D}{2} + h\right)\sin\phi_a\vec{a}_z}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + D^2\left(\frac{D}{2} + h\right)^2\sin^2\phi_a}} \tag{3.253}$$

$$\hat{s}_d = \frac{\bar{s}_d}{s_d} = \frac{(x_p - x_d)\bar{a}_x + (y_p - y_d)\bar{a}_y + (z_p - z_d)\bar{a}_z}{\sqrt{(x_p - x_d)^2 + (y_p - y_d)^2 + (z_p - z_d)^2}} \quad (3.254)$$

โดยที่

$$x_d = \frac{D}{2} + h + \frac{D}{2}\cos\phi_a$$

$$y_d = \frac{D}{2}\sin\phi_a$$

และ

$$z_d = \frac{x_d^2 + y_d^2}{4f} - f = \frac{\left(\frac{D}{2}\cos\phi_a + \frac{D}{2} + h\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\sin\phi_a\right)^2}{4f} - f$$

และแหล่งกระแสไฟฟ้า J_o และแม่เหล็กสมมูล M_o เป็นฟังก์ชันของ ϕ_a สามารถหาได้ดังสมการ (3.245) และ (3.246) และเนื่องจาก $|d\bar{r}(\phi_a)| = |\bar{r}'(\phi_a)|d\phi_a$ ดังนั้นสมการ (3.251) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\bar{E}^d(x_p, y_p, z_p) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[J_o\hat{e} - (J_o\hat{e}\cdot\hat{s}_d)\hat{s}_d + YM_o\hat{e}\times\hat{s}_d\right]\frac{e^{-jks_d}}{s_d}|\bar{r}'(\phi_a)|d\phi_a \quad (3.255)$$

โดยที่ $|\bar{r}'(\phi_a)| = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + D^2\left(\frac{D}{2}+h\right)^2\sin^2\phi_a}$

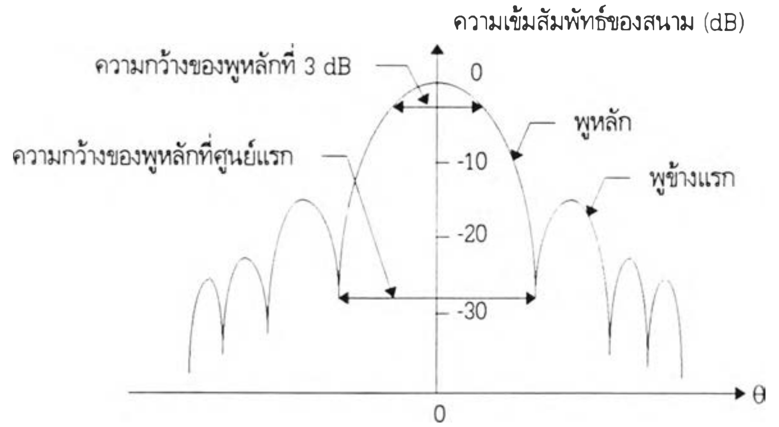
การวิเคราะห์ข้างต้นเป็นการนำเอากรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบมาใช้หาสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในบริเวณใกล้ ๆ จุดตัดกันของรังสี เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นในทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้

<u>ขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก</u>

สมรรถนะของระบบสายอากาศโดยทั่วไปสามารถพิจารณาได้จากค่าปัจจัยต่าง ๆ เช่น อิมพีแดนซ์ขาเข้า (input impedance) ความกว้างแถบความถี่ (bandwidth) อัตราขยาย (gain) แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล (radiation pattern) โพลาไรเซชัน และค่าปัจจัยอื่น ๆ ขึ้นอยู่กับการนำสายอากาศไปประยุกต์ใช้งาน สำหรับสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกนั้นเป็นระบบสายอากาศที่ถูกนำไปใช้งานอย่างมากในการสื่อสารดาวเทียมและในการสื่อสารด้วยไมโครเวฟ โดยใช้งานเป็นสายอากาศบนดาวเทียมและสายอากาศรับส่งสัญญาณของสถานีภาคพื้นดิน ซึ่งมีคุณลักษณะที่พึงประสงค์หลายประการ เช่น เมื่อใช้งานเป็นระบบสายอากาศบนดาวเทียม ระดับพูข้างของลำคลื่นที่ตำแหน่งเชิงมุมไกล ๆ นั้นเป็นค่าปัจจัยหนึ่งที่ต้องพิจารณา เนื่องจากถ้าระดับพูข้างไกล ๆ มีระดับสูงก็จะทำให้ไปรบกวนลำคลื่นหลักของระบบสายอากาศของดาวเทียมใกล้เคียงได้ และเมื่อใช้งานเป็นสายอากาศรับส่งสัญญาณของสถานีภาคพื้นดิน อัตราขยายของระบบสายอากาศถูกกำหนดตามมาตรฐาน CCIR และในการส่งสัญญาณได้มีการนำเทคนิคการใช้ความถี่ซ้ำ (frequency reuse) มาใช้งานโดยใช้โพลาไรเซชันที่ตั้งฉากกันมาเพิ่มช่องสัญญาณ ดังนั้นขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในวิทยานิพนธ์นี้จึงพิจารณาจากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล อัตราขยาย โพลาไรเซชันร่วม (co polarization) และโพลาไรเซชันไขว้ (cross polarization) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. <u>แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล</u>

แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเป็นค่าคุณลักษณะที่สำคัญของระบบสายอากาศซึ่งบ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่จุดห่างไกลจากระบบสายอากาศในทิศทางต่าง ๆ โดยแสดงอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มของสนามกับตำแหน่งเชิงมุมของจุดสังเกตที่ระยะสนามไกล ถ้าระบบสายอากาศวางตัวในระบบพิกัดทรงกลม สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ย่านสนามไกลของระบบสายอากาศถูกกำหนดเป็นฟังก์ชันของมุม θ และ ϕ ดังนั้นแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลแสดงได้ด้วยรูป 3 มิติที่ประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในระนาบของมุม θ หรือ ϕ ต่าง ๆ ซึ่งถ้าต้องการดูการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในระนาบ ϕ ใด ๆ แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลแสดงได้ด้วยรูป 2 มิติของความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มของสนามกับมุม θ ต่าง ๆ โดยที่ความเข้มของสนามถูกทำการปรับเทียบกับความเข้มสนามในทิศทางที่มีค่ามากที่สุดในหน่วยเดซิเบลและกำหนดให้ทิศทางของความเข้มสนามที่มีค่ามากที่สุดอยู่ในทิศทาง $\theta = 0$ ดังรูป 3.31



รูป 3.31 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศ

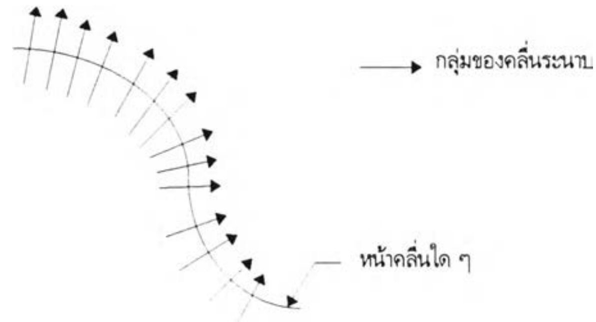
แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่นโดยทั่วไปมีลักษณะดังรูป 3.31 ซึ่งประกอบด้วยพูต่าง ๆ โดยพูที่มีความเข้มสนามที่มีค่ามากที่สุดอยู่เรียกว่า พูหลักหรือพูประธาน ส่วนพูอื่น ๆ นอกเหนือจากพูหลักเรียกว่า พูข้าง และตำแหน่งเชิงมุมที่แบ่งแยกพูต่าง ๆ ออกจากกันถูกเรียกว่า ตำแหน่งศูนย์ และความกว้างเชิงมุมที่ความเข้มสนามต่ำกว่าความเข้มสนามที่มีค่ามากที่สุด 3 เดซิเบลเรียกว่า ความกว้างของพูหลักที่ 3 เดซิเบล และความกว้างเชิงมุมที่ตำแหน่งศูนย์แรกเรียกว่า ความกว้างของพูหลักที่ศูนย์แรก

ในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศใด ๆ แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศเป็นค่าคุณลักษณะสำคัญที่ต้องคำนวณหา เนื่องจากองค์ประกอบต่าง ๆ ของแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลข้างต้นเป็นค่าปัจจัยที่ใช้กำหนดขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศและใช้ในการออกแบบระบบสายอากาศให้มีสมรรถนะสูงสุด

การหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศสามารถหาได้หลายวิธี เช่น การแก้สมการคลื่นโดยตรงหรือใช้ศักย์เวกเตอร์ การอินทิเกรตแหล่งกระแสบนพื้นผิวโดยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงกายภาพ การอินทิเกรตสนามบนช่องเปิด หรือกรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบ เป็นต้น

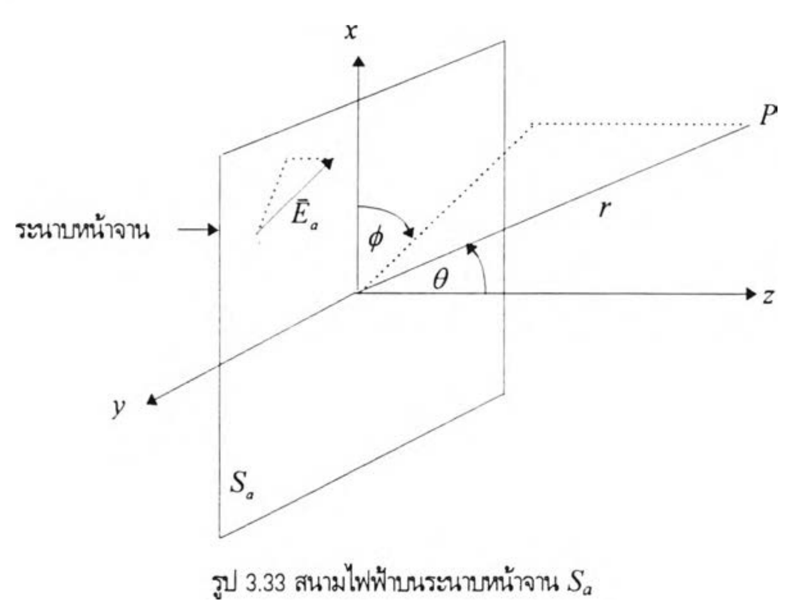
สำหรับการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่น สามารถหาได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงกายภาพ การอินเกรตสนามบนช่องเปิด หรือกรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ทำการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยกรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบบนระนาบ

หน้าจานตามแผนภาพขั้นตอนการวิเคราะห์ในรูป 3.1 เพราะว่าเป็นกรรมวิธีที่สามารถอธิบายให้เห็นพฤติกรรมทางกายภาพของคลื่นโดยใช้คุณสมบัติของการแปลงฟูริเยร์มาใช้อธิบายการแผ่พลังงานของคลื่นที่มีหน้าคลื่นใด ๆ ในลักษณะของกลุ่มของคลื่นระนาบในทิศทางต่าง ๆ หรือที่เรียกว่า สเปกตรัมคลื่นระนาบดังรูป 3.32 ซึ่งการมองเป็นสเปกตรัมคลื่นระนาบทำให้สามารถมองเห็นพฤติกรรมของคลื่นได้ง่ายเนื่องจากเป็นเพียงการรวมตัวกันในทิศทางต่าง ๆ ของคลื่นระนาบ



รูป 3.32 การแทนคลื่นที่มีหน้าคลื่นใด ๆ ด้วยกลุ่มของคลื่นระนาบในทิศทางต่าง ๆ

จากแผนภาพขั้นตอนการวิเคราะห์ในรูป 3.1 สนามบนระนาบหน้าจานเกิดจากสนามสะท้อนจากพื้นผิวจานสะท้อนและสนามเลี้ยวเบนจากขอบของจานสะท้อนมายังระนาบหน้าจานซึ่งมีหน้าคลื่นแบบใด ๆ และเมื่อหาผลการแปลงฟูริเยร์ทำให้สามารถมองได้ว่าบนระนาบหน้าจานประกอบด้วยสเปกตรัมของคลื่นระนาบ และเพื่อให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมคลื่นระนาบกับสนามบนระนาบหน้าจาน และการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากสเปกตรัมคลื่นระนาบสามารถอธิบายได้ดังนี้



รูป 3.33 สนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจาน S_a

สมมุติว่ามีสนามไฟฟ้า $\bar{E}_a$ บนระนาบหน้าจาน S_a ซึ่งอยู่บนระนาบ $z=0$ ดังรูป 3.33 เกิดขึ้นจากโดยแหล่งกำเนิดที่เหมาะสมในบริเวณ $z<0$ สำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก สนามไฟฟ้า $\bar{E}_a$ เกิดจากสนามที่สะท้อนจากพื้นผิวจานสะท้อนและสนามการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนซึ่งแผ่พลังงานออกไปในบริเวณ $z>0$ สอดคล้องกับสมการคลื่นดังนี้

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E}-k^2\bar{E}=-j\omega\mu\bar{J} \tag{3.256}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\times\nabla\times\bar{E}\equiv\nabla\nabla\cdot\bar{E}-\nabla^2\bar{E}$ และเนื่องจากในบริเวณ $z>0$ เป็นบริเวณเปิดและปราศจากแหล่งกำเนิด (source free) กล่าวคือ $\bar{J}$ และ ρ เป็นศูนย์ ดังนั้น $\nabla\cdot\bar{E}=0$ ทำให้สมการ (3.256) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla^2\bar{E}+k^2\bar{E}=0 \tag{3.257ก}$$

และ

$$\nabla\cdot\bar{E}=0 \tag{3.257ข}$$

เนื่องจากบริเวณที่พิจารณาเป็นบริเวณเปิด ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่เป็นผลเฉลยของสมการ (3.257ก-ข) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน จากภาคผนวก ค. สนามไฟฟ้าในบริเวณนี้สามารถหาได้โดยหาผลการแปลงฟูริเยร์ ซึ่งในภาคผนวก ค. ได้กล่าวไว้เพียงกรณีการแปลงฟูริเยร์ 1 ตัวแปร แต่จากนิยามของการแปลงฟูริเยร์ ถ้ามีฟังก์ชันของ x เป็น $w(x)$ เมื่อทำการแปลงฟูริเยร์จะได้

$$W(k_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}w(x)e^{jk_xx}dx \tag{2.258ก}$$

และมีคู่การแปลงกลับฟูริเยร์เป็น

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W(k_x)e^{-jk_xx}dk_x \tag{2.258ข}$$

ตัวแปร k_x และ x เป็นไปตามกฎเช่นเดียวกับเวลา t และความถี่เชิงมุม ω ในการวิเคราะห์ฟูริเยร์ของสัญญาณเชิงเวลา และในลักษณะคล้าย ๆ กัน ถ้ามี $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y ก็สามารถประยุกต์การแปลงฟูริเยร์สำหรับสองตัวแปรเป็น

$$U(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{jk_xx+jk_yy}dxdy \tag{3.259ก}$$

ซึ่งมีคู่การแปลงกลับฟูริเยร์เป็น

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(k_x,k_y)e^{-jk_xx-jk_yy}dk_xdk_y \tag{3.259ข}$$

ผลการแปลงฟูริเยร์ในสมการ (3.258ก-ข) และ (3.259ก-ข) มีคุณสมบัติดังนี้

$$\Im_x\left\{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\}=-jk_x\Im_x\{u(x,y)\} \tag{3.260ก}$$

$$\Im_x\left\{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right\}=(-jk_x)^2\Im_x\{u(x,y)\} \qquad (3.260\text{ข})$$

$$\Im_{yx}\left\{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right\}=(-jk_x)^2\Im_{yx}\{u(x,y)\} \qquad (3.260\text{ค})$$

$\Im$ ในสมการ (3.260ก-ค) คือ ตัวดำเนินการที่ใช้แทนการแปลงฟูริเยร์ และดรรชนีล่างของตัวดำเนินการ $\Im$ เป็นสัญลักษณ์ที่บ่งชี้ว่าเป็นการแปลงฟูริเยร์ที่เกิดขึ้นเทียบกับตัวแปรที่เป็นดรรชนีล่าง และเมื่อเขียนสมการ (3.257ก-ข) ใหม่เป็น

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\bar{E}(x,y,z)=0 \qquad (3.261\text{ก})$$

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}=0 \qquad (3.261\text{ข})$$

และจากคุณสมบัติในสมการ (3.260ก-ค) เมื่อทำการแปลงฟูริเยร์กับสมการ (3.261ก) เทียบกับ x และ y จะได้

$$\left(-jk_x\right)^2\Im_{yx}\{\bar{E}(x,y,z)\}+\left(-jk_y\right)^2\Im_{yx}\{\bar{E}(x,y,z)\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Im_{yx}\{\bar{E}(x,y,z)\}=0$$

หรือ
$$-k_x^2\bar{E}(k_x,k_y,z)-k_y^2\bar{E}(k_x,k_y,z)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\bar{E}(k_x,k_y,z)=0$$

ดังนั้น
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2-k_x^2-k_y^2\right)\bar{E}(k_x,k_y,z)=0 \qquad (3.262\text{ก})$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทำการแปลงฟูริเยร์กับสมการ (3.261ข) ก็จะได้

$$-jk_x\Im_{yx}\{E_x(x,y,z)\}-jk_y\Im_{yx}\{E_y(x,y,z)\}+\frac{\partial}{\partial z}\Im_{yx}\{E_z(x,y,z)\}=0$$

ดังนั้น
$$k_xE_x(k_x,k_y,z)+k_yE_y(k_x,k_y,z)+j\frac{\partial}{\partial z}E_z(k_x,k_y,z)=0 \qquad (3.262\text{ข})$$

โดยที่ $\bar{E}(k_x,k_y,z)$ เป็นผลการแปลงฟูริเยร์ของสนามไฟฟ้า $\bar{E}(x,y,z)$ เทียบกับ x และ y และเนื่องจากเวกเตอร์การแผ่กระจายคลื่น $\bar{k}=k_x\bar{a}_x+k_y\bar{a}_y+k_z\bar{a}_z$ ดังนั้น $|\bar{k}|^2=k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ หรือ $k_z^2=k^2-k_x^2-k_y^2$ ทำให้สมการ (3.262ก) กลายเป็น

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_z^2\right)\bar{E}(k_x,k_y,z)=0 \tag{3.263}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.263) อยู่ในรูปของ $e^{\pm jk_z z}$ และเนื่องจากสนามบนระนาบหน้าจานที่แผ่พลังงานออกไปในบริเวณ $z>0$ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน ดังนั้นสนามไฟฟ้าในบริเวณ $z>0$ ที่เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน z จากระนาบหน้าจานจะเป็นฟังก์ชันของ $e^{-jk_z z}$ ทำให้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.263) คือ

$$\bar{E}(k_x,k_y,z)=\bar{f}(k_x,k_y)e^{-jk_z z} \tag{3.264}$$

โดยที่ $\bar{f}(k_x,k_y)$ เรียกว่า สเปกตรัมคลื่นระนาบ เมื่อแทนสมการ (3.264) ลงในสมการ (3.262ข) จะได้

$$k_x f_x+k_y f_y+k_z f_z=0 \tag{3.265ก}$$

หรือ

$$\bar{k}\cdot\bar{f}=0 \tag{3.265ข}$$

จากสมการ (3.265ก) พบว่า มีเพียงสององค์ประกอบของ $\bar{f}$ ที่เป็นอิสระต่อกัน ผลนี้สอดคล้องกับข้อบังคับของสนามไฟฟ้าที่ทำให้ไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการแปลงกลับฟูริเยร์ของสมการ (3.264) จะได้ผลเฉลยของสนามไฟฟ้าในบริเวณ $z>0$ เป็นดังสมการ (3.266)

$$\bar{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(k_x,k_y)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}dk_x dk_y \tag{3.266}$$

โดยที่ $\bar{k}\cdot\bar{r}=k_x x+k_y y+k_z z$ และจากสมการ (3.247) อาจกล่าวได้ว่าสนามไฟฟ้าที่บริเวณ $z>0$ นั้นเกิดจากสเปกตรัมคลื่นระนาบ เนื่องจาก $\bar{f}(k_x,k_y)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ เป็นคลื่นระนาบที่มีเวกเตอร์เชิงขนาด $\bar{f}$ เคลื่อนที่ในทิศทางของเวกเตอร์ค่าคงตัวการแผ่กระจาย $\bar{k}$ และเมื่อพิจารณาค่าคงตัวการแผ่กระจายคลื่นในทิศทาง z พบว่า $k_z=\pm\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$ และสำหรับกรณี $k_x^2+k_y^2>k^2$ ค่าคงตัวการแผ่กระจายคลื่น k_z จะเป็นจำนวนจินตภาพแท้ดังสมการ (3.267)

$$k_z=-j\chi \tag{3.267}$$

โดยที่ $\chi=\sqrt{\left|k^2-k_x^2-k_y^2\right|}$ เพราะว่า ถ้า $k_z=j\chi$ จะทำให้ $\bar{f}(k_x,k_y)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}=\bar{f}(k_x,k_y)e^{-jk_x x-jk_y y+\chi z}$ มีค่าเป็นอนันต์เมื่อ z มีค่าเป็นอนันต์ ซึ่งไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน ดังนั้น k_z จึงเป็นดังสมการ (3.267) ซึ่งทำให้คลื่นระนาบในทิศทางที่สอดคล้องกับค่า $k_x^2+k_y^2>k^2$ นั้นลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลและจางหายไปในทิศทาง z คลื่นที่จางหายไปนี้เกิดขึ้นที่บริเวณใกล้ ๆ ระนาบหน้าจาน ทำให้มีเพียงคลื่นระนาบที่มาจากทิศทางที่สอดคล้องกับค่า $k_x^2+k_y^2\le k^2$ ที่สร้างสนามแผ่กระจายออกไปในบริเวณ $z>0$ และจากสมการ (3.266) ถ้า $z=0$ สนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y ที่ได้ก็คือสนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y บนระนาบหน้าจานดังนั้น

$$E_{ax}(x,y,0)=E_x(x,y,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(k_x,k_y)e^{-jk_xx-jk_yy}dk_xdk_y \tag{3.268ก}$$

และ

$$E_{ay}(x,y,0)=E_y(x,y,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_y(k_x,k_y)e^{-jk_xx-jk_yy}dk_xdk_y \tag{3.268ข}$$

สมการ (3.268ก-ข) เป็นผลการแปลงฟูริเยร์สองชั้น ดังนั้นจากสมการ (3.259ก) จะได้

$$f_x(k_x,k_y)=\iint_{S_a}E_{ax}(x,y,0)e^{jk_xx+jk_yy}dxdy \tag{3.269ก}$$

$$f_y(k_x,k_y)=\iint_{S_a}E_{ay}(x,y,0)e^{jk_xx+jk_yy}dxdy \tag{3.269ข}$$

โดยที่ $f_x(k_x,k_y), f_y(k_x,k_y)$ คือ สเปกตรัมคลื่นระนาบซึ่งเกิดจากสนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y บนระนาบหน้าจานมารวมกันในทิศทาง k_x และ k_y ตามลำดับ และเนื่องจากไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้าเป็นศูนย์ ดังนั้น $\bar{f}(k_x,k_y)$ ต้องสอดคล้องกับสมการ (3.265ข) ทำให้ $f_z(k_x,k_y)$ เป็นดังสมการ (3.270)

$$f_z(k_x,k_y)=\frac{-k_xf_x-k_yf_y}{\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}} \tag{3.270}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณ $z>0$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.266) ซึ่งอยู่ในรูปอินทิเกรชันที่มีขอบเขตอนันต์ทำให้ไม่สามารถหาค่าแม่นตรงได้ แต่เนื่องจากสนามที่ต้องการทราบส่วนใหญ่อยู่ในบริเวณย่านสนามไกลกล่าวคือ เมื่อระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดสังเกต r ดังรูป 3.33 มีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้นสามารถใช้เทคนิคการคำนวณค่าโดยประมาณที่เรียกว่า วิธีการเฟสคงตัว (method of stationary phase) มาใช้หาค่าโดยประมาณของสมการ (3.266) ได้ดังนี้

เมื่อพิจารณานิพจน์ของสมการ (3.266) พบว่า เมื่อค่า r มีค่ามาก ๆ ฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ มีการแกว่งอย่างมาก ดังนั้นการอินทิเกรตมีแนวโน้มหักล้างกัน แต่ไม่เกิดขึ้นเมื่อมีจุดซึ่ง $\bar{k}\cdot\bar{r}$ ที่เป็นฟังก์ชันของ k_x และ k_y ไม่เปลี่ยนแปลงในช่วงเล็ก ๆ ของ k_x และ k_y โดยที่จุดนั้นเรียกว่า จุดเฟสคงตัว (stationary phase point) ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\bar{k}\cdot\bar{r}$ เทียบกับ k_x และ k_y เป็นศูนย์ดังสมการ (3.271)

$$\frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_x}=0\,, \qquad \frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_y}=0 \tag{3.271}$$

ในบริเวณเล็ก ๆ รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว เฟสของฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ และการอินทิเกรตจุดต่าง ๆ บนระนาบ k_x - k_y ไม่เป็นศูนย์ และการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{f}(k_x,k_y)$ เป็นไปอย่างช้า ๆ ซึ่งสามารถประมาณได้ว่ามีค่า

เท่ากับที่จุดเฟสคงตัว ดังนั้นอินทิกรัลในสมการ (3.268ก-ข) เหลือเพียงส่วนของฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ และเนื่องจาก $\bar{k}\cdot\bar{r}$ เท่ากับ $k_x x+k_y y+k_z z$ และสำหรับในระบบพิกัดทรงกลม $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$ และ $z=r\cos\theta$ ดังนั้น

$$\bar{k}\cdot\bar{r}=r\left(k_x\sin\theta\cos\phi+k_y\sin\theta\sin\phi+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\cos\theta\right) \tag{3.272}$$

และจุดเฟสคงตัวสามารถหาได้จากแทน $\bar{k}\cdot\bar{r}$ ในสมการ (3.272) ลงไปในสมการ (3.271) จะได้

$$\frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_x}=\frac{\partial r\left(k_x\sin\theta\cos\phi+k_y\sin\theta\sin\phi+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\cos\theta\right)}{\partial k_x}=r\left(\sin\theta\cos\phi-\frac{k_x\cos\theta}{\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}}\right)=0$$

หรือ

$$k_x\cos\theta=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\sin\theta\cos\phi \tag{3.273ก}$$

และ

$$\frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_y}=\frac{\partial r\left(k_x\sin\theta\cos\phi+k_y\sin\theta\sin\phi+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\cos\theta\right)}{\partial k_y}=r\left(\sin\theta\sin\phi-\frac{k_y\cos\theta}{\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}}\right)=0$$

หรือ

$$k_y\cos\theta=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\sin\theta\sin\phi \tag{3.273ข}$$

จากสมการ (3.273ก-ข) k_x และ k_y ที่สอดคล้องที่ทำให้เกิดจุดเฟสคงตัว (k_x^s,k_y^s) คือ

$$k_x=k_x^s=k\sin\theta\cos\phi\ ,\qquad k_y=k_y^s=k\sin\theta\sin\phi \tag{3.274}$$

และเมื่อกระจาย $\bar{k}\cdot\bar{r}$ ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว (k_x^s,k_y^s) จะได้

$$\begin{aligned}\bar{k}\cdot\bar{r}&\cong kr+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{k}.\bar{r}}{\partial k_x^2}\bigg|_{\substack{k_x=k_x^s\\k_y=k_y^s}}(k_x-k_x^s)^2+\frac{\partial^2\bar{k}.\bar{r}}{\partial k_x\partial k_y}\bigg|_{\substack{k_x=k_x^s\\k_y=k_y^s}}(k_x-k_x^s)(k_y-k_y^s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{k}.\bar{r}}{\partial k_y^2}\bigg|_{\substack{k_x=k_x^s\\k_y=k_y^s}}(k_y-k_y^s)^2\\&=kr-(Au^2+Cuv+Bv^2)\end{aligned}$$

โดยที่ $u=k_x-k_x^s$, $v=k_y-k_y^s$, A, B และ C เป็นค่าคงที่กำหนดดังสมการ ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณของสนามไฟฟ้าในสมการ (3.266) เป็น

$$\bar{E}(r,\theta,\phi)\cong\frac{e^{-jkr}}{4\pi^2}\bar{f}(k\sin\theta\cos\phi,k\sin\theta\sin\phi)\iint_{\Delta S}e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \tag{3.275}$$

โดยที่ $\bar{f}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $\bar{f}$ ที่จุดเฟสคงที่ และ ΔS เป็นบริเวณเล็ก ๆ รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว ซึ่งก็คือจุดที่ $u,\ v=0$ ในระนาบ u-v และเนื่องจากค่าคงที่ $A,\ B$ และ C เป็นสัดส่วนกับ kr ซึ่งมีค่ามากเมื่อ r มีค่ามากดังนั้นฟังก์ชัน $e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}$ เกิดการแกว่งอย่างรวดเร็วเมื่อ u และ v ไม่เป็นศูนย์ ทำให้การอินทิเกรตบนระนาบ u-v ภายนอกบริเวณ ΔS จะถูกหักล้างจากการรวมกันทางเฟส และการอินทิเกรตของสมการ (3.275) สามารถขยายขอบเขตครอบคลุมระนาบ u-v ทั้งหมดได้ดังสมการ (3.276)

$$\iint_{\Delta S} e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \cong \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \qquad (3.276)$$

การคำนวณหาอินทิกรัลในสมการ (3.276) สามารถทำได้โดยกำหนดให้

$$Au^2+Cuv+Bv^2 = (\sqrt{A}u+\frac{Cv}{2\sqrt{A}})^2-\frac{Cv^2}{4A}+Bv^2$$

เมื่อให้ $w=\sqrt{A}u+\dfrac{Cv}{2\sqrt{A}}$ อินทิกรัลในสมการ (3.276) เขียนใหม่ได้เป็น

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jw^2}e^{j(4AB-C^2)v^2/4A}\frac{dw}{\sqrt{A}}dv$$

และจาก $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi(x-x_0)^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\xi}}e^{j\pi/4}$ ดังนั้น

$$I=\frac{1}{\sqrt{A}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jw^2}dw\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(4AB-C^2)v^2/4A}dv=\frac{2\pi e^{j\pi/2}}{\sqrt{4AB-C^2}}=\frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}}=\frac{j2\pi\ k}{r}\cos\theta \qquad (3.277)$$

โดยที่ $A=\dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{(k_x^s)^2}{k^3\cos^2\theta}\right)$, $B=\dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{(k_y^s)^2}{k^3\cos^2\theta}\right)$ และ $C=\dfrac{k_x^s k_y^s}{k^3\cos^2\theta}$ ซึ่งเมื่อแทนสมการ (3.277) ลงในสมการ (3.275) ทำให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณของสนามไฟฟ้าเป็นดังสมการ (3.278)

$$\bar{E}(r,\theta,\phi)\cong jk\frac{\cos\theta}{2\pi r}e^{-jkr}\bar{f}(k\sin\theta\cos\phi,k\sin\theta\sin\phi) \qquad (3.278)$$

โดยที่ θ และ ϕ เป็นมุมในระบบพิกัดทรงกลมดังแสดงในรูป 3.33 และจากสมการ (3.278) พบว่า แบบรูปการแผ่พลังงานบริเวณสนามไกลมีความสัมพันธ์กับ $\bar{f}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi)$ ซึ่งเกิดจากการแปลงฟูริเยร์ของสนามบนระนาบหน้าจานในทิศทางที่เกิดจุดเฟสคงตัวคือเมื่อ k_x เท่ากับ $k\sin\theta\cos\phi$ และ k_y เท่ากับ $k\sin\theta\sin\phi$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์ค่าคงตัวการแผ่กระจายเมื่อคลื่นแผ่กระจายไปยังจุดสังเกต (r,θ,ϕ) ใด ๆ

เนื่องจาก $\bar{k}\cdot\bar{f}=0$ ดังนั้น $\bar{f}$ ไม่มีองค์ประกอบในทิศทางของจุดสังเกตที่ซึ่งคือทิศทางของเวกเตอร์ค่าคงตัวการแผ่กระจาย $\bar{k}$ ดังนั้นสนามที่แผ่กระจายออกไปในบริเวณย่านสนามไกลจะเป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง (transverse electromagnetic waves) ซึ่งเมื่อพิจารณาสนามที่แผ่กระจายไปในทิศทางตามแนวแกน z พบว่า สนามไฟฟ้าจะมีเพียงองค์ประกอบในแนว x และ y ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ f_x และ f_y เนื่องจาก $f_z = 0$ สำหรับในทิศทางอื่น ๆ ของจุดสังเกตนั้นสามารถพิจารณาได้จากสมการ (3.278) ดังนี้

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{\cos\theta}{2\pi r}e^{-jkr}\left[f_x(k_x,k_y)\bar{a}_x + f_y(k_x,k_y)\bar{a}_y + f_z(k_x,k_y)\bar{a}_z\right] \qquad (3.279)$$

โดยที่ $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ และ $k_y = k\sin\theta\sin\phi$ และเมื่อแทน f_z จากสมการ (3.270) ลงในสมการ (3.279) จะได้

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{\cos\theta}{2\pi r}e^{-jkr}\left[f_x\bar{a}_x + f_y\bar{a}_y + \frac{-k\sin\theta\cos\phi f_x - k\sin\theta\sin\phi f_y}{\sqrt{k^2-(k\sin\theta\cos\phi)^2-(k\sin\theta\sin\phi)^2}}\bar{a}_z\right]$$

และเมื่อแสดงในระบบพิกัดทรงกลมจะได้

$$\begin{aligned}\bar{E}(r,\theta,\phi) &= jk\frac{\cos\theta}{2\pi r}e^{-jkr}\left[\begin{array}{l} f_x\left(\bar{a}_r\sin\theta\cos\phi + \bar{a}_\theta\cos\theta\cos\phi - \bar{a}_\phi\sin\phi\right) + \\ f_y\left(\bar{a}_r\sin\theta\sin\phi + \bar{a}_\theta\cos\theta\sin\phi + \bar{a}_\phi\cos\phi\right) + \\ \dfrac{-k\sin\theta\cos\phi f_x - k\sin\theta\sin\phi f_y}{k\cos\theta}\left(\bar{a}_r\cos\theta - \bar{a}_\theta\sin\theta\right)\end{array}\right] \\ &= jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left[f_x\left(\bar{a}_\theta\cos\phi - \bar{a}_\phi\sin\phi\cos\theta\right) + f_y\left(\bar{a}_\theta\sin\phi + \bar{a}_\phi\cos\phi\cos\theta\right)\right]\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left[\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\bar{a}_\theta + \left(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi\right)\cos\theta\,\bar{a}_\phi\right] \qquad (3.280ก)$$

เนื่องจากสนามในบริเวณย่านสนามไกลเป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง ดังนั้นสนามแม่เหล็กในบริเวณแผ่กระจายคลื่นย่านสนามไกลเป็น

$$\bar{H}(r,\theta,\phi) = \frac{\bar{a}_r \times \bar{E}(r,\theta,\phi)}{Z} \qquad (3.280ข)$$

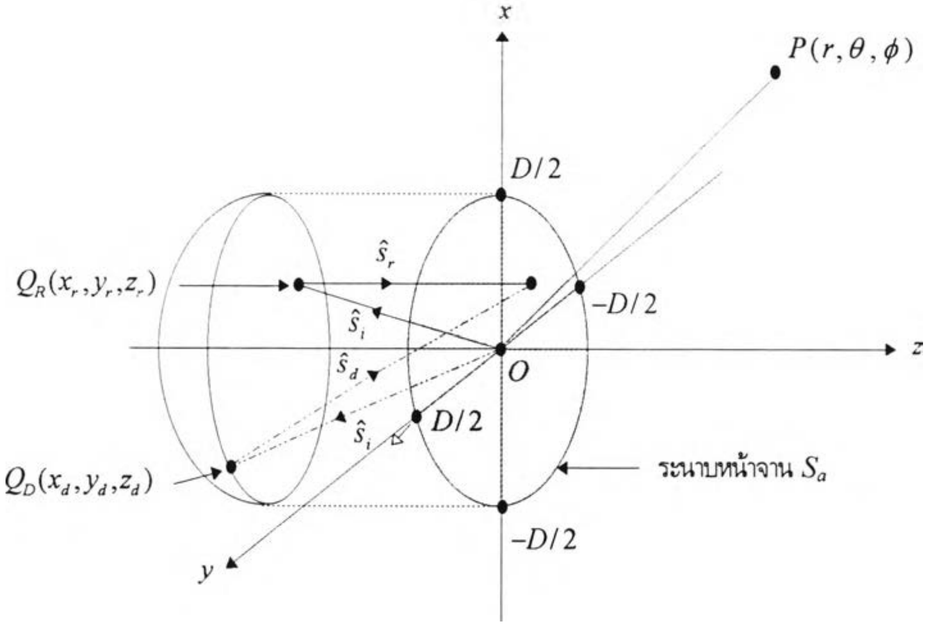
โดยที่ Z คือ อิมพีแดนซ์ลักษณะสมบัติของตัวกลางในบริเวณแผ่กระจายคลื่น

การหาสนามในย่านสนามไกลโดยกรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบข้างต้น สามารถนำมาใช้หาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกได้โดยกำหนดให้ระนาบหน้าจานเป็นระนาบที่วางอยู่ที่จุดโฟกัสของจานสะท้อน และสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานนั้นเกิดจากสนามไฟฟ้าสะท้อนจากพื้นผิวจานสะท้อนซึ่งหาได้ดังสมการ (3.88) ในหัวข้อกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตและสนามไฟฟ้าเลี้ยวเบนจากขอบของจานสะท้อน

ซึ่งหาได้ดังสมการ (3.231ก) ในหัวข้อทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตมายังตำแหน่งต่าง ๆ บนระนาบนี้ ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมบนระนาบหน้าจานเป็น

$$\bar{E}_a(x,y,0) = \bar{E}^r(x,y,0) + \bar{E}^d(x,y,0) \tag{3.281}$$

โดยที่ $\bar{E}^r(x,y,0)$ คือ สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนมายังระนาบหน้าจาน และ $\bar{E}^d(x,y,0) = \sum_{n=1}^{m} \bar{E}_n^d(x,y,0)$ คือ สนามไฟฟ้าที่เลี้ยวเบนจากขอบมายังระนาบหน้าจานซึ่งเกิดจากจุดเลี้ยวเบนทั้งหมด m จุดบนขอบจานสะท้อน



รูป 3.34 การหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากสนามบนระนาบหน้าจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตร

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้เลือกระนาบหน้าจานให้มีขนาดเท่ากับภาพฉายของจานสะท้อน S_a เนื่องจากสนามบนระนาบหน้าจานนี้เกิดจากสนามที่สะท้อนออกมาจากพื้นผิวสะท้อนกับสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อน และพิจารณากรณีที่สายอากาศป้อนกำลังคลื่นฦกวางที่ตำแหน่งโฟกัส สนามที่สะท้อนออกมาจากจานสะท้อนโดยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตจะเป็นคลื่นระนาบและมีเฉพาะในบริเวณภาพฉายนี้เท่านั้น ส่วนสนามที่มาจากการเลี้ยวเบนที่ขอบภายนอกบริเวณภาพฉายมีขนาดน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับสนามที่สะท้อนออกมาภายในบริเวณภาพฉาย ดังนั้นสนามไฟฟ้าในบริเวณย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรดังรูป 3.34 เป็น

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left[\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\bar{a}_\theta + \left(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi\right)\cos\theta\bar{a}_\phi\right] \tag{3.282}$$

โดยที่

$$f_x(k_x,k_y)=\int_{-D/2}^{D/2}\int_{-\sqrt{(D/2)^2-x^2}}^{\sqrt{(D/2)^2-x^2}} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}\,dydx \qquad (3.283ก)$$

$$f_y(k_x,k_y)=\int_{-D/2}^{D/2}\int_{-\sqrt{(D/2)^2-x^2}}^{\sqrt{(D/2)^2-x^2}} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}\,dydx \qquad (3.283ข)$$

และ $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ และ $k_y = k\sin\theta\sin\phi$

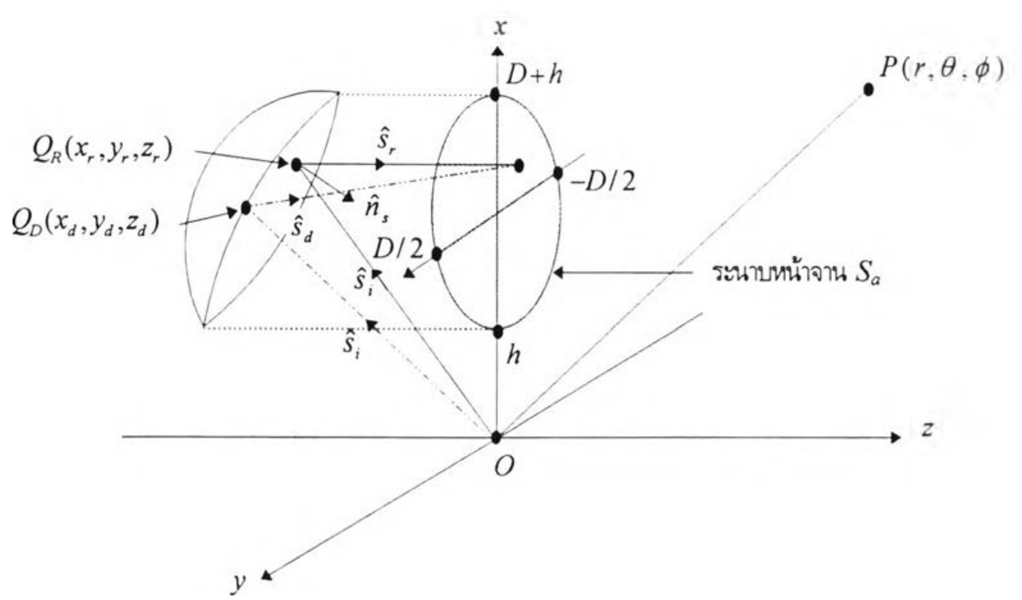
สมการ (3.283ก-ข) ไม่สามารถหาค่าแม่นตรงได้ ดังนั้นในการคำนวณหาค่าอินทิกรัลในสมการ (3.283ก-ข) จึงใช้กรรมวิธีเชิงเลข ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้วิธีการของซิมป์สัน (Simpson method) (R. L. Burden and J. D. Faires, 1993) มาประมาณค่าอินกรัลดังกล่าว และทำการเปลี่ยนขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นดังสมการ (3.284ก-ข)

$$f_x(k_x,k_y)=\int_{-D/2}^{D/2}\int_{-D/2}^{D/2} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}\,dydx \qquad (3.284ก)$$

$$f_y(k_x,k_y)=\int_{-D/2}^{D/2}\int_{-D/2}^{D/2} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}\,dydx \qquad (3.284ข)$$

โดยที่สนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานนั้นถูกกำหนดว่า สนามไฟฟ้าภายในภาพฉายของจานสะท้อนเป็นดังสมการ (3.281) และสนามไฟฟ้าภายนอกบริเวณภาพฉายของจานสะท้อนกำหนดให้เป็นศูนย์ และช่วงการแบ่งส่วนย่อยที่ใช้ในการอินทิเกรตเท่ากับ $\lambda/8$ ตามการตรวจสอบอัลกอริทึมในภาคผนวก ฉ. เพื่อให้แบบรูปการแผ่พลังงานมีความแม่นยำอยู่ในเกณฑ์ที่เชื่อถือได้ถึงตำแหน่งเชิงมุมเท่ากับ 90 องศา

ในทำนองเดียวกัน สนามไฟฟ้าในบริเวณย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรดังรูป 3.35 เป็น



รูป 3.35 การหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากสนามบนระนาบหน้าจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left|\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\bar{a}_\theta + \left(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi\right)\cos\theta\bar{a}_\phi\right| \tag{3.285}$$

โดยที่

$$f_x(k_x,k_y) = \int_h^{D+h}\int_{-\sqrt{(D/2)^2-[x-(D/2+h)]^2}}^{\sqrt{(D/2)^2-[x-(D/2+h)]^2}} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}dydx \tag{3.286ก}$$

$$f_y(k_x,k_y) = \int_h^{D+h}\int_{-\sqrt{(D/2)^2-[x-(D/2+h)]^2}}^{\sqrt{(D/2)^2-[x-(D/2-h)]^2}} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x-jk_y y}dydx \tag{3.286ข}$$

และ $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ และ $k_y = k\sin\theta\sin\phi$

การคำนวณค่าค่าอินกรัลในสมการ (3.286ก-ข) หาได้โดยใช้วิธีการของซิมป์สันมาประมาณ และทำการเปลี่ยนขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นดังสมการ (3.287ก-ข)

$$f_x(k_x,k_y) = \int_h^{D+h}\int_{-D/2}^{D/2} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}dydx \tag{3.287ก}$$

$$f_y(k_x,k_y) = \int_h^{D+h}\int_{-D/2}^{D/2} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x+jk_y y}dydx \tag{3.287ข}$$

โดยที่สนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานนั้นถูกกำหนดว่า สนามไฟฟ้าภายในภาพฉายของจานสะท้อนเป็นดังสมการ (3.281) ส่วนสนามไฟฟ้าภายนอกบริเวณภาพฉายของจานสะท้อนกำหนดให้เป็นศูนย์

2. <u>โพลาไรเซชันร่วมและโพลไรเซชันไขว้</u>

โพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้เป็นค่าคุณลักษณะที่สำคัญที่บ่งบอกถึงสมรรถนะของระบบสายอากาศที่ส่งสัญญาณแบบโพลาไรเซชันคู่ (dual polarization) โดยใช้ความถี่เดียวกันหรือที่เรียกว่า การใช้ความถี่ซ้ำ (frequency reuse) มาเพิ่มความจุช่องสัญญาณ เนื่องจากถ้าระดับโพลาไรเซชันไขว้ของช่องสัญญาณหนึ่งมีระดับสูงก็จะทำให้เกิดการรบกวนกับโพลาไรเซชันที่ต้องการหรือโพลาไรเซชันร่วมของอีกช่องสัญญาณหนึ่ง

การพิจารณาโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้นั้น Ludwig (1973) ได้ให้คำนิยามไว้ 3 แบบ ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้คำนิยามที่ 3 ของ Ludwig มาอธิบายโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ที่เกิดขึ้น

จากคำนิยามที่ 3 ของ Ludwig ถ้าแกน z เป็นแกนอ้างอิงในทิศทางแนวเล็ง (boresight direction) และจุดอ้างอิงอยู่ที่จุดศูนย์กลางเฟส และโพลาไรเซชันร่วมกำหนดโดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\theta = 0$ เป็นดังสมการ (3.288)

$$\left(\bar{a}_{cp}\right)_{\theta=0} = \cos\phi_{pol}\bar{a}_x + \sin\phi_{pol}\bar{a}_y \tag{3.288}$$

โดยที่ ϕ_{pol} คือ มุมการวางตัวของโพลาไรเซชันร่วมจากแกน x แล้วโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ในทิศทางอื่นที่ไม่ใช่ทิศทางแนวเล็งกำหนดโดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยดังสมการ (3.289) และ (3.290) ตามลำดับ

$$\bar{a}_{cp} = \cos(\phi - \phi_{pol})\bar{a}_\theta - \sin(\phi - \phi_{pol})\bar{a}_\phi \tag{3.289}$$

$$\vec{a}_{xp} = \sin(\phi - \phi_{pol})\vec{a}_\theta + \cos(\phi - \phi_{pol})\vec{a}_\phi \tag{3.290}$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมเป็น

$$E_{cp} = \vec{E}\cdot\vec{a}_{cp} = E_\theta \cos(\phi - \phi_{pol}) - E_\phi \sin(\phi - \phi_{pol}) \tag{3.291}$$

และสนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันไขว้เป็น

$$E_{xp} = \vec{E}\cdot\vec{a}_{xp} = E_\theta \sin(\phi - \phi_{pol}) + E_\phi \cos(\phi - \phi_{pol}) \tag{3.292}$$

โดยที่ E คือ สนามไฟฟ้าในบริเวณย่านสนามไกล สำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก สนามไฟฟ้าในบริเวณย่านสนามไกลหาได้ดังหัวข้อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล และโพลาไรเซชันร่วมของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกนี้พิจารณาจากโพลาไรเซชันร่วมของสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานซึ่งถ้าใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว y เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่น โพลาไรเซชันร่วมของสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานจะอยู่ในทิศ y ในทำนองเดียวกันถ้าใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว x เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่น โพลาไรเซชันร่วมของสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานจะอยู่ในทิศ x ดังนั้นสำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกที่ใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว y เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่น $(\phi_{pol} = \pi/2)$ สนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมและไขว้เป็น

$$E_{cp} = E_\theta \sin\phi + E_\phi \cos\phi \tag{3.293}$$

$$E_{xp} = -E_\theta \cos\phi + E_\phi \sin\phi \tag{3.294}$$

และสำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกที่ใช้สายอากาศที่มีโพลาไรเซชันในแนว x เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่น $(\phi_{pol} = 0)$ สนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมและไขว้เป็น

$$E_{cp} = E_\theta \cos\phi - E_\phi \sin\phi \tag{3.295}$$

$$E_{xp} = E_\theta \sin\phi + E_\phi \cos\phi \tag{3.296}$$

จากข้างต้นเป็นการนำค่านิยามที่ 3 ของ Ludwig มาพิจารณาโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ที่เกิดขึ้นในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก เพื่อดูระดับโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ในทิศทางต่าง ๆ โดยในวิทยานิพนธ์นี้ได้ดูโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ที่เกิดขึ้นในระนาบ $\phi = 0^\circ$, $\phi = 45^\circ$ และ $\phi = 90^\circ$ และผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบจานสะท้อนที่มีต่อโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ดังแสดงในบทผลการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลสำหรับการสื่อสารที่ใช้เทคนิคการใช้ความถี่ซ้ำ

3. <u>อัตราขยายและประสิทธิภาพต่าง ๆ</u>

อัตราขยายของสายอากาศเป็นค่าปัจจัยที่สำคัญในการออกแบบระบบสายอากาศใด ๆ รวมทั้งระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกเนื่องจากอัตราขยายของสายอากาศเป็นค่าปัจจัยที่บ่งบอกถึงความสามารถในการบีบรวมพลังงานที่แผ่กระจายออกมาจากสายอากาศให้พุ่งไปในทิศทางที่ต้องการได้มากน้อยเพียงใด ซึ่งสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนของความหนาแน่นของกำลังคลื่นที่แผ่พลังงานในทิศทางที่ต้องการเทียบกับความหนาแน่นของกำลังคลื่นจากแหล่งกำเนิดคลื่นแบบจุด (point source) ที่ถูกป้อนด้วยกำลังงานเดียวกับที่ป้อนให้ระบบสายอากาศนั้น ดังนั้นอัตราขยายของระบบสายอากาศ G ใด ๆ กำหนดได้ดังสมการ (3.297)

$$G(\theta,\phi)=\frac{P_{rad}(\theta,\phi)}{P_{in}/(4\pi)}=4\pi\frac{P_{rad}(\theta,\phi)}{P_{in}} \qquad (3.297)$$

โดยที่ P_{rad} คือ ความหนาแน่นของกำลังงานของคลื่นในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่แผ่พลังงานในทิศทางที่ต้องการ (θ,ϕ) มีหน่วยเป็น วัตต์ต่อสเตอเรเดียน และ P_{in} คือ กำลังที่ป้อนให้ระบบสายอากาศ มีหน่วยเป็น วัตต์

สำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก อัตราขยายของระบบสายอากาศเป็นค่าปัจจัยที่มีความสำคัญต่อการออกแบบ เนื่องจากในการออกแบบระบบสายอากาศชนิดนี้เพื่อใช้เป็นระบบสายอากาศภาคพื้นดิน อัตราขยายของระบบสายอากาศได้รับการกำหนดมาตรฐานโดยสถาบัน CCIR เพื่อลดปัญหาการเกิดสัญญาณรบกวนกับสัญญาณของดาวเทียมที่อยู่ในแนวมุมเงยที่ใกล้เคียงกัน โดยกำหนดค่าสูงสุดของอัตราขยายที่มุมต่าง ๆ ดังตาราง 3.2

ตาราง 3.2 อัตราขยายของระบบสายอากาศภาคพื้นดินตามมาตรฐานที่กำหนดโดยสถาบัน CCIR (Recommendation 465-2)

ขนาดสายอากาศ	อัตราขยาย (dBi)	มุมออฟเซต (องศา)
$D/\lambda<100$	$52-10\log(D/\lambda)-25\log\theta$ $10-10\log(D/\lambda)$	$100\lambda/D\leq\theta<48$ $48\leq\theta\leq180$
$D/\lambda\geq100$	$32-25\log\theta$ -10	$1\leq\theta<48$ $48\leq\theta\leq180$

<u>หมายเหตุ</u> θ คือ มุมระหว่างทิศทางที่ต้องการกับแนวเล็งหลัก

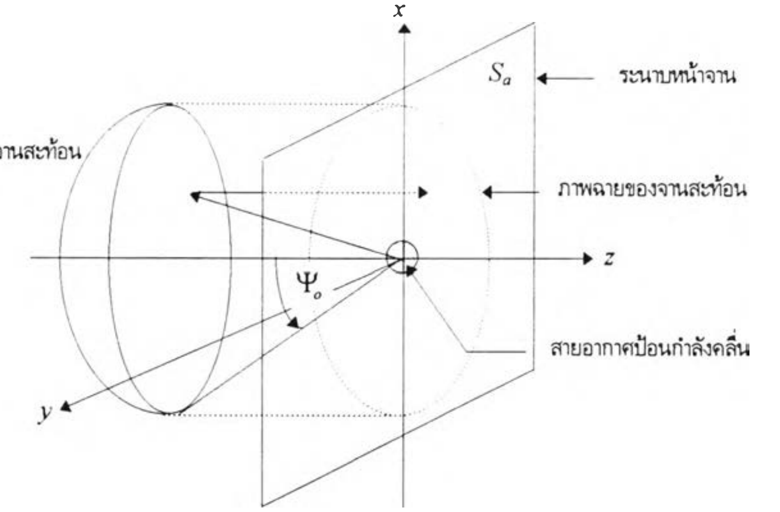
เมื่อพิจารณาระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกดังรูป 3.36 ซึ่งประกอบด้วยสายอากาศป้อนกำลังคลื่นและจานสะท้อนมีกลไกของการแผ่พลังงานดังนี้คือ เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นแผ่พลังงานไปตกกระทบบนพื้นผิวจานสะท้อนซึ่งเป็นตัวนำสมบูรณ์ก็จะทำให้เกิดการสะท้อนออกไปยังบริเวณระนาบหน้าจาน โดยที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานสามารถถูกมองได้ว่าเป็นสเปกตรัมของคลื่นระนาบที่เคลื่อนตัวออกไปในบริเวณย่านสนามไกล ดังนั้นในการหาอัตราขยายของระบบสายอากาศชนิดนี้สามารถพิจารณาได้จากการสูญเสียที่เกิดในแต่ละขั้นตอนของการแผ่พลังงานโดยเริ่มจากการสูญเสียภายในสายอากาศป้อนกำลังคลื่น ซึ่งถ้าสมมุติว่ากำลังที่ป้อนให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็น P_{in} ดังนั้นกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานออกไปจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่น P_T จะเป็น

$$P_T = \eta_f P_{in} \tag{3.298}$$

โดยที่ η_f คือ ประสิทธิภาพของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น และเนื่องจากจานสะท้อนถูกวางอยู่ในบริเวณย่านสนามไกลของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น ดังนั้นกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานออกไปจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นไปในบริเวณที่จานสะท้อนวางอยู่ซึ่งเป็นบริเวณย่านสนามไกล P_T สามารถหาได้ดังสมการ (3.299)

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_{feed} \times \vec{H}^*_{feed}\right)\cdot \vec{a}_{r_f} r_f^2 \sin\theta_f d\theta_f d\phi_f \\ &= \frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\vec{E}_{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)\right|^2 r_f^2 \sin\theta_f d\theta_f d\phi_f \end{aligned} \tag{3.299}$$

และเมื่อกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกส่งไปยังพื้นผิวจานสะท้อน พื้นผิวจานสะท้อนไม่สามารถรับกำลังที่ถูกส่งมาได้ทุกทิศทาง ซึ่งสำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรดังรูป 3.36 กำลังที่ส่งออกมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกรับโดยจานสะท้อนได้ถึงมุมกว้างเท่ากับ Ψ_o กำลังในมุมที่เกินมุมกว้างของจานสะท้อนย่อมหลุดเลยออกไปจากจานสะท้อนทำให้เกิดการสูญเสีย ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้เรียกว่า การล้นจาน (spillover) ซึ่งทำให้กำลังที่รับได้บนพื้นผิวจานสะท้อน P_r จะเป็น



รูป 3.36 ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกและระนาบหน้าจาน

$$P_r = \eta_s P_T \tag{3.300}$$

โดยที่ η_s คือ ประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจาน ซึ่งเป็นอัตราส่วนของกำลังที่จานสะท้อนรับได้ต่อกำลังทั้งหมดจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่น โดยกำลังที่จานสะท้อนรับได้ P_r ในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรที่มีมุมกว้างของจานสะท้อนเท่ากับ Ψ_o สามารถหาได้จากกำลังที่แผ่พลังงานมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นภายในกรวยที่มุมกว้างเท่ากับ $2\Psi_o$ ดังนั้น

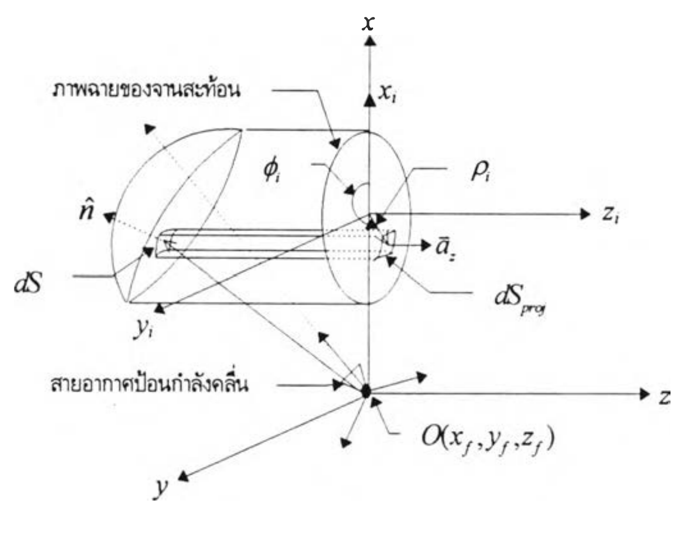
$$P_r = \frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left|\bar{E}_{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)\right|^2 r_f^2 \sin\theta_f \, d\theta_f d\phi_f \qquad (3.301)$$

สังเกตว่าสมการ (3.301) ใช้ได้กับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวแบบสมมาตรที่แกนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นพุ่งเข้าหาจานสะท้อนคลื่นและอยู่บนแกนเดียวกับแกนของจานสะท้อนเท่านั้น เนื่องจากกำลังที่ส่งออกมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกรับโดยจานสะท้อนได้เท่ากับมุม Ψ_o เท่ากันในทุกระนาบ แต่สำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวแบบไม่สมมาตรกำลังที่ส่งออกมาจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกรับโดยจานสะท้อนได้ไม่เท่ากันในแต่ละระนาบ ดังนั้นสำหรับระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร กำลังที่จานสะท้อนรับได้ P_r สามารถหาได้โดยอินทิเกรตกำลังเฉลี่ยบนพื้นผิวจานสะท้อนซึ่งจะได้

$$P_r = \frac{1}{2}\iint_S \mathrm{Re}\left[\bar{E}_{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)\times\bar{H}^*_{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)\right]\cdot\hat{n}dS \qquad (3.302)$$

โดยที่ $\hat{n}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งเข้าตั้งฉากกับพื้นผิวจานสะท้อน และ dS คือ พื้นที่เล็ก ๆ บนพื้นผิวจานสะท้อนซึ่งมีความสัมพันธ์กับพื้นที่เล็ก ๆ ของภาพฉายของจานสะท้อน dS_{proj} บนระนาบ $z=0$ เป็น

$$dS = \frac{dS_{proj}}{\left|\hat{n}\cdot\bar{a}_z\right|} \qquad (3.303)$$



รูป 3.37 การหากำลังที่จานสะท้อนรับได้โดยพิจารณาจากโดเมนภาพฉายของจานสะท้อน

และเนื่องจากภาพฉายของจานสะท้อนในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรเป็นวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ D ดังรูป 3.37 ดังนั้น $dS_{proj} = \rho_i d\rho_i d\phi_i$ ทำให้กำลังที่จานสะท้อนรับได้ P_r ของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตรเป็นดังสมการ (3.304)

$$P_r = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2} \mathrm{Re}\left[\bar{E}_{feed}(x_s, y_s, z_s) \times \bar{H}^*_{feed}(x_s, y_s, z_s)\right] \cdot \hat{n}\rho_i d\rho_i d\phi_i \qquad (3.304)$$

โดยที่ $x_s = D/2 + h + \rho_i \cos\phi_i$, $y_s = D/2 + h + \rho_i \sin\phi_i$ และ $z_s = \dfrac{x_s^2 + y_s^2}{4f} - f$ คือ ตำแหน่งบนพื้นผิวจานสะท้อนรูปพาราโบลิกที่สนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมาตกกระทบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และ $E_{feed}(x_s, y_s, z_s)$ คือ สนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมายังที่จุด (x_s, y_s, z_s)

และเมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าที่แผ่พลังงานออกมาจากพื้นผิวจานสะท้อนมายังระนาบหน้าจานพบว่า สนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานเกิดจากสนามไฟฟ้าที่สะท้อนออกมาจากพื้นผิวจานสะท้อนและสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อน ซึ่งมีการกระจายไม่คงที่ทั้งองค์ประกอบทางขนาดเนื่องมาจากตัวประกอบการลดทอนและทางเฟสเนื่องจากสนามไฟฟ้าที่มาจากการเลี้ยวเบน และยังมีองค์ประกอบในแนวโพลาไรเซชันไขว้เกิดขึ้นเนื่องจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้ และสนามไฟฟ้าที่มาจากการเลี้ยวเบน ทำให้เกิดการสูญเสียในอัตราขยายเมื่อเทียบกับในกรณีที่สนามไฟฟ้ามีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นและมีการกระจายอย่างคงที่ทั้งองค์ประกอบทางขนาดและทางเฟส (uniform distribution) การสูญเสียที่เกิดขึ้นนี้สามารถพิจารณาได้จากค่าปัจจัยที่เรียกว่า ประสิทธิภาพช่องเปิด (aperture efficiency) ซึ่งสามารถหาได้จากอัตราส่วนของความหนาแน่นของกำลังคลื่นในแนวโพลาไรเซชันร่วมตามแนวแกนของสายอากาศต่อสเตอเรเดียนกับความหนาแน่นของกำลังคลื่นตามแนวแกนของสายอากาศที่เกิดจากสนามไฟฟ้าบนระนาบที่มีการกระจายอย่างคงที่ทั้งองค์ประกอบทางขนาดและทางเฟส และมีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นที่แผ่พลังงานด้วยกำลังที่เท่ากัน และเนื่องจากสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานเกิดจากการสะท้อนออกมาจากพื้นผิวสะท้อนและจากการเลี้ยวเบนที่ขอบ ดังนั้น

$$\bar{E}_a(x,y,0) = \bar{E}^r(x,y,0) + \bar{E}^d(x,y,0) \qquad (3.305)$$

โดยที่ $\bar{E}^r(x,y,0)$ คือ สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนมายังระนาบหน้าจาน และ $\bar{E}^d(x,y,0) = \sum_{n=1}^{m} \bar{E}_n^d(x,y,0)$ คือ สนามไฟฟ้าที่เลี้ยวเบนจากขอบมายังระนาบหน้าจานซึ่งเกิดจากจุดเลี้ยวเบนทั้งหมด m จุดบนขอบ ในทำนองเดียวกันสนามแม่เหล็กบนระนาบหน้าจานจะเป็น

$$\bar{H}_a(x,y,0) = \bar{H}^r(x,y,0) + \bar{H}^d(x,y,0) \qquad (3.306)$$

โดยที่ $\bar{H}^r(x,y,0) = \dfrac{\hat{s}_r \times \bar{E}^r(x,y,0)}{Z}$ คือ สนามแม่เหล็กที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนมายังระนาบหน้าจาน และ $\bar{H}^d(x,y,0) = \sum_{n=1}^{m} \dfrac{\hat{s}_d^n \times \bar{E}_n^d(x,y,0)}{Z}$ คือ สนามแม่เหล็กที่เลี้ยวเบนจากขอบมายังระนาบหน้าจานซึ่งเกิดจากจุดเลี้ยวเบนทั้งหมด m จุดบนขอบ ดังนั้นกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงาน P_a จากระนาบหน้าจานเนื่องจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนระนาบหน้าจานดังสมการ (3.305) และ (3.306) จะเท่ากับ

$$P_a = \frac{1}{2}\iint_{S_a} \mathrm{Re}\left[\bar{E}_a(x,y,0) \times \bar{H}_a^*(x,y,0)\right] \cdot \bar{a}_z dS \qquad (3.307)$$

โดยที่ S_a คือ พื้นที่ทั้งหมดบนระนาบหน้าจาน ซึ่งในการเลือกขนาดระนาบหน้าจานอาจมีสนามไฟฟ้าบางส่วนหลุดออกนอกระนาบหน้าจานทำให้เกิดการสูญเสียเกิดขึ้น การสูญเสียที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า การสูญเสียเนื่องจากการล้นระนาบ ดังนั้นกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานจากระนาบหน้าจานมีความสัมพันธ์กับกำลังที่จานสะท้อนรับได้เป็นดังสมการ (3.308)

$$P_a = \eta_{sa} P_r \tag{3.308}$$

และจากหัวข้อแบบรูปการแผ่พลังงาน สนามไฟฟ้าที่แผ่พลังงานออกจากระนาบหน้าจานไปในบริเวณย่านสนามไกลจะเท่ากับ

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left|\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\bar{a}_\theta + \left(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi\right)\cos\theta\bar{a}_\phi\right| \tag{3.309}$$

โดยที่

$$f_x(k_x,k_y) = \iint_{S_a} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x + jk_y y}dxdy \tag{3.310ก}$$

$$f_y(k_x,k_y) = \iint_{S_a} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x + jk_y y}dxdy \tag{3.310ข}$$

และ $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ และ $k_y = k\sin\theta\sin\phi$ ซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง ดังนั้นความหนาแน่นของกำลังคลื่นที่แผ่พลังงานในทิศทางตามแนวแกนของสายอากาศต่อสเตอเรเดียนเป็น

$$\frac{r^2\left|\bar{E}(r,0,0)\right|^2}{2Z} = \frac{k^2}{8\pi^2 Z}\left|f_x\bar{a}_\theta + f_y\bar{a}_\phi\right|^2 \tag{3.311}$$

ถ้ากำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานจากระนาบหน้าจาน P_a เกิดจากสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานที่เป็นคลื่นระนาบและมีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นซึ่งสมมุติว่ามีโพลาไรเซชันอยู่ในทิศ $\bar{a}_u = \bar{a}_x\cos\phi_o + \bar{a}_y\sin\phi_o$ และมีการกระจายคงที่ทั้งองค์ประกอบทางขนาดและทางเฟส ซึ่งสามารถกำหนดเป็น $\bar{E}_{au} = E_{au}\bar{a}_u$ ดังนั้นกำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานจากระนาบหน้าจานในกรณีนี้เป็น

$$P_a = \frac{1}{2Z}\iint_{S_a}\left|\bar{E}_{au}\right|^2 dS = \frac{1}{2Z}\iint_{S_a}E_{au}^2 dS = \frac{E_{au}^2 S_a}{2Z}$$

ดังนั้น

$$\bar{E}_{au} = \left(\frac{2ZP_a}{S_a}\right)^{1/2}\bar{a}_u \tag{3.312}$$

และเมื่อทำการหาความหนาแน่นของกำลังคลื่นตามแนวแกนของสายอากาศต่อสเตอเรเดียนจากสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานดังสมการ (3.312) จะได้

$$P_u(\theta=0,\phi=0)=\frac{k^2}{8\pi^2 Z}\left|f_x\bar{a}_\theta+f_y\bar{a}_\phi\right|^2=\frac{k^2}{8\pi^2 Z}\left(\left|f_x\right|^2+\left|f_y\right|^2\right)=\frac{k^2}{4\pi^2}P_a S_a \quad (3.313)$$

เนื่องจาก

$$f_x=\iint_{S_a}E_{au}\cos\phi_o dxdy=\iint_{S_a}\left(\frac{2P_aZ}{S_a}\right)^{1/2}\cos\phi_o dxdy=\left(\frac{2P_aZ}{S_a}\right)^{1/2}S_a\cos\phi_o \quad (3.314ก)$$

$$f_y=\iint_{S_a}E_{au}\sin\phi_o dxdy=\iint_{S_a}\left(\frac{2P_aZ}{S_a}\right)^{1/2}\sin\phi_o dxdy=\left(\frac{2P_aZ}{S_a}\right)^{1/2}S_a\sin\phi_o \quad (3.314ข)$$

และถ้าสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานมีโพลาไรเซชันร่วมอยู่ในทิศทาง $\bar{a}_{cp}=\bar{a}_x\cos\phi_{pol}+\bar{a}_y\sin\phi_{pol}$ จากนิยามของโพลาไรเซชันร่วมข้างต้น สนามไฟฟ้าในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่บริเวณย่านสนามไกลจะเป็น

$$E_{cp}(\theta,\phi)=E_\theta\cos(\phi-\phi_{pol})-E_\phi\sin(\phi-\phi_{pol}) \quad (3.315)$$

โดยที่ E_θ, E_ϕ คือ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนว $\bar{a}_\theta,\bar{a}_\phi$ ของสมการ (3.309) ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการ (3.311) ความหนาแน่นของกำลังคลื่นที่แผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วมตามแนวแกนของสายอากาศต่อสเตอเรเดียนเป็น

$$P_{cp}(\theta=0,\phi=0)=\frac{r^2\left|E_{cp}(0,0)\right|^2}{2Z}=\frac{k^2\left|f_x\cos\phi_{pol}+f_y\sin\phi_{pol}\right|^2}{8\pi^2 Z} \quad (3.316)$$

จากค่านิยามของประสิทธิภาพของช่องเปิด และจากสมการ (3.313) และ (3.316) จะได้

$$\eta_A=\frac{P_{cp}(0,0)}{P_u(0,0)} \quad (3.317)$$

จากค่านิยามของประสิทธิภาพช่องเปิดพบว่า ค่าปัจจัยนี้บ่งบอกถึงการสูญเสียไว้ 3 อย่างคือ การสูญเสียเนื่องจากการกระจายของขนาดของสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานไม่คงที่ การสูญเสียเนื่องจากการกระจายของเฟสของสนามไฟฟ้าบนระนาบหน้าจานไม่คงที่ และการสูญเสียเนื่องจากการเกิดสนามไฟฟ้าในแนวโพลาไรเซชันไขว้บนระนาบหน้าจาน

จากการสูญเสียที่เกิดขึ้นทั้งหมดในขั้นตอนการแผ่พลังงานข้างต้นทำให้สามารถนำมาใช้หาอัตราขยายของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกในทิศทางที่ต้องการ (θ,ϕ) ได้ ซึ่งจากค่านิยามของอัตราขยายในสมการ (3.297)

$$G_{cp}(\theta,\phi)=\frac{4\pi P_{cp}(\theta,\phi)}{P_{in}} \quad (3.318)$$

จากสมการ (3.298) (3.300) และ (3.308) $P_{in}=\dfrac{P_a}{\eta_f\eta_s\eta_{sa}}$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.318) จะได้

$$G_{cp}(\theta,\phi)=\frac{4\pi\eta_f\eta_s\eta_{sa}P_{cp}(\theta,\phi)}{P_a} \tag{3.319}$$

และจากสมการ (3.313) กับ (3.318) $P_{cp}(0,0)=\frac{\eta_A k^2}{4\pi^2}P_a S_a$ ดังนั้น $P_a=\frac{4\pi^2 P_{cp}(0,0)}{\eta_A k^2 S_a}$ ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.319) จะได้

$$G_{cp}(\theta,\phi)=\frac{4\pi}{\lambda^2}\eta_f\eta_s\eta_{sa}\eta_A S_a\frac{P_{cp}(\theta,\phi)}{P_{cp}(0,0)} \tag{3.301}$$

จากสมการ (3.320) ถ้าไม่มีการสูญเสียใด ๆ เกิดขึ้นจะทำให้เกิดอัตราขยายสูงสุดเป็นดังสมการ (3.321)

$$G_{cp}^{\max}(\theta,\phi)=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_a\frac{P_{cp}(\theta,\phi)}{P_{cp}(0,0)} \tag{3.321}$$

ถ้าพิจารณาอัตราขยายในแนวแกนของสายอากาศ (θ=0 และ ϕ=0) จะได้

$$G_{cp}(0,0)=\frac{4\pi}{\lambda^2}\eta_f\eta_s\eta_{sa}\eta_A S_a \tag{3.322}$$

และเมื่อเขียนสมการ (3.320) ให้อยู่ในหน่วย dB จะได้

$$G_{cp}(\theta,\phi)=10\log\left(\frac{4\pi}{\lambda^2}S_a\right)+10\log(\eta)+10\log\left(\frac{P_{cp}(\theta,\phi)}{P_{cp}(0,0)}\right) \tag{3.323}$$

โดยที่ $\eta=\eta_f\eta_s\eta_{sa}\eta_A$ คือ ประสิทธิภาพของสายอากาศ

เมื่อสังเกตพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (3.323) พบว่า พจน์ $10\log\left(\frac{4\pi}{\lambda^2}S_a\right)$ บ่งบอกถึงอัตราขยายมากที่สุดในแนวแกนของสายอากาศ และพจน์ $-10\log(\eta)$ บ่งบอกถึงการสูญเสียที่เกิดขึ้นทั้งหมด ส่วนพจน์ $10\log\left(\frac{P_{cp}(\theta,\phi)}{P_{cp}(0,0)}\right)$ เป็นพจน์ที่ปรับบรรทัดฐานอัตราขยายในทิศทางที่ต้องการกับอัตราขยายในแนวแกน

จากที่กล่าวไว้ในหัวข้อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลได้เลือกระนาบหน้าจานมีขนาดเท่ากับภาพฉายของจานสะท้อน เนื่องจากสนามบนระนาบหน้าจานนี้เกิดจากสนามที่สะท้อนออกมาจากพื้นผิวสะท้อนกับสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อน และพิจารณากรณีที่สายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกวางที่ตำแหน่งโฟกัส สนามที่สะท้อนออกมาจากจานสะท้อนโดยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตจะเป็นคลื่นระนาบและมีเฉพาะในบริเวณภาพฉายนี้เท่านั้น ส่วนสนามที่มาจากการเลี้ยวเบนที่ขอบภายนอกบริเวณภาพฉายมีขนาดน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับสนามที่สะท้อนออกมาภายในบริเวณภาพฉาย

ดังนั้นในกรณีสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรดังรูป 3.36 อัตราขยายในทิศทางที่ต้องการ และประสิทธิภาพต่าง ๆ ของระบบสายอากาศสามารถหาได้ดังนี้

1. ประสิทธิภาพของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นถูกสมมุติให้มีค่าเป็น 1 เนื่องจากในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่นในที่นี้คิดว่าไม่มีการสูญเสียภายในสายอากาศป้อนกำลังคลื่น แต่ถ้าต้องการความถูกต้องมากขึ้นก็สามารถทำได้โดยทำการวิเคราะห์สายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่นำมาใช้ และหาประสิทธิภาพของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นนำมาคูณกับอัตราขยายที่คำนวณได้

2. ประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานสามารถคำนวณหาได้จากสมการ (3.300) โดยที่มุมกว้างของจานสะท้อน Ψ_o เป็นดังสมการ (2.6) และสายอากาศที่นำมาใช้เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยสายอากาศชนิดโคไซน์ฟังก์ชันกำลังต่าง ๆ สายอากาศชนิดไดโพลขนาดสั้นมาก และสายอากาศชนิดฮอยเกน ดังนั้นประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานสามารถคำนวณอยู่ในรูปแม่นตรงได้ดังนี้

จากหัวข้อสายอากาศป้อนกำลังคลื่น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\vec{E}^{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)=\begin{cases}\left[f_E(\theta_f)\sin(\phi_f-\phi_{pol})\vec{a}_{\theta_f}+f_H(\theta_f)\cos(\phi_f-\phi_{pol})\,\vec{a}_{\phi_f}\right]\dfrac{e^{-jkr_f}}{r_f} & ,\ 0\le\theta_f\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & ,\ \theta_f>\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \tag{3.324}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.299) และ (3.301) จะได้

$$\begin{aligned}P_r&=\frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left|\vec{E}_{feed}(r_f,\theta_f,\phi_f)\right|^2 r_f^2\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f\\&=\frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left(\left|f_E(\theta_f)\right|^2\sin^2(\phi_f-\phi_{pol})+\left|f_H(\theta_f)\right|^2\cos^2(\phi_f-\phi_{pol})\right)\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f\end{aligned} \tag{3.325}$$

$$P_T=\frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\left|f_E(\theta_f)\right|^2\sin^2(\phi_f-\phi_{pol})+\left|f_H(\theta_f)\right|^2\cos^2(\phi_f-\phi_{pol})\right)\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f \tag{3.326}$$

ดังนั้นจากสมการ (3.300) ประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรเป็น

$$\eta_s=\frac{P_r}{P_T}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left(\left|f_E(\theta_f)\right|^2\sin^2(\phi_f-\phi_{pol})+\left|f_H(\theta_f)\right|^2\cos^2(\phi_f-\phi_{pol})\right)\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\left|f_E(\theta_f)\right|^2\sin^2(\phi_f-\phi_{pol})+\left|f_H(\theta_f)\right|^2\cos^2(\phi_f-\phi_{pol})\right)\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f} \tag{3.327}$$

สำหรับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ ที่มีโพลาไรเซชันในแนว y_f นั้น $f_E(\theta_f)=\cos^{q_E}\theta_f$, $f_H(\theta_f)=\cos^{q_H}\theta_f$ และ $\phi_{pol}=0$ ดังนั้น

$$P_r = \frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left(\left|\cos^{q_E}\theta_f\right|^2 \sin^2\phi_f + \left|\cos^{q_H}\theta_f\right|^2 \cos^2\phi_f\right)\sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f$$
$$= \frac{1}{2Z}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\phi_f d\phi_f \int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{2\pi}\cos^2\phi_f d\phi_f \int_0^{\psi_o}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right| \quad (3.328)$$
$$= \frac{\pi}{2Z}\left[\int_0^{\psi_o}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right|$$

$$P_T = \frac{1}{2Z}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\phi_f d\phi_f \int_0^{\pi/2}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{2\pi}\cos^2\phi_f d\phi_f \int_0^{\pi/2}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right|$$
$$= \frac{\pi}{2Z}\left[\int_0^{\pi/2}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\pi/2}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right] \quad (3.329)$$

และสำหรับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ ที่มีโพลาไรเซชันในแนว x_f นั้น $f_E(\theta_f) = \cos^{q_E}\theta_f$, $f_H(\theta_f) = \cos^{q_H}\theta_f$ และ $\phi_{pol} = -\pi/2$ ดังนั้น

$$P_r = \frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Psi_o}\left(\left|\cos^{q_E}\theta_f\right|^2 \cos^2\phi_f + \left|\cos^{q_H}\theta_f\right|^2 \sin^2\phi_f\right)\sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f$$
$$= \frac{\pi}{2Z}\left[\int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right| \quad (3.330)$$

$$P_T = \frac{\pi}{2Z}\left[\int_0^{\pi/2}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\pi/2}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right| \quad (3.331)$$

จากสมการ (3.328) (3.329) (3.330) และ (3.331) ประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรเมื่อใช้ชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ ที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y_f หรือ x_f เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นดังสมการ (3.332)

$$\eta_s = \frac{\left[\int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\Psi_o}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right|}{\left[\int_0^{\pi/2}\cos^{2q_E}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f + \int_0^{\pi/2}\cos^{2q_H}\theta_f \sin\theta_f\, d\theta_f d\phi_f\right|} \quad (3.332)$$

เนื่องจาก $\int_0^{\theta}\cos^n\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{1-\cos^{n+1}\theta}{n+1}$ ดังนั้นสมการ (3.332) จะกลายเป็น

$$\eta_s = \frac{\dfrac{1-\cos^{2q_E+1}\Psi_o}{2q_E+1} + \dfrac{1-\cos^{2q_H+1}\Psi_o}{2q_H+1}}{\dfrac{1-\cos^{2q_E+1}(\pi/2)}{2q_E+1} + \dfrac{1-\cos^{2q_H+1}(\pi/2)}{2q_H+1}} = \frac{\dfrac{1-\cos^{2q_E+1}\Psi_o}{2q_E+1} + \dfrac{1-\cos^{2q_H+1}\Psi_o}{2q_H+1}}{\dfrac{1}{2q_E+1} + \dfrac{1}{2q_H+1}} \quad (3.333)$$

และสำหรับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นชนิดฮอยเกนนั้น $f_E(\theta_f) = f_H(\theta_f) = 1+\cos\theta_f$ ดังนั้น

$$P_r = \frac{\pi}{2Z}\left[\int_0^{\Psi_o}(1+\cos\theta_f)^2\sin\theta_f\,d\theta_f + \int_0^{\Psi_o}(1+\cos\theta_f)^2\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f\right|$$
$$= \frac{\pi}{Z}\left[\int_0^{\Psi_o}(1+2\cos\theta_f + \cos^2\theta_f)\sin\theta_f\,d\theta_f d\phi_f\right| \tag{3.334}$$
$$= \frac{\pi}{Z}\left[(1-\cos\Psi_o)+(1-\cos^2\Psi_o)+\frac{1-\cos^3\Psi_o}{3}\right]$$

$$P_T = \frac{\pi}{Z}\left[1-\cos(\pi/2)+1-\cos^2(\pi/2)+\frac{1-\cos^3(\pi/2)}{3}\right] = \frac{7\pi}{3Z} \tag{3.335}$$

ดังนั้นประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบสมมาตรเมื่อใช้สายอากาศชนิดฮอยเกนที่มีโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้นในแนว y_f และ x_f เป็นสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็น

$$\eta_s = \frac{(1-\cos\Psi_o)+(1-\cos^2\Psi_o)+\dfrac{1-\cos^3\Psi_o}{3}}{\dfrac{7}{3}} \tag{3.336}$$

สำหรับในระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกแบบไม่สมมาตร ประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานไม่สามารถคำนวณอยู่ในรูปแม่นตรงได้ แต่สามารถหาได้จากอัตราส่วนของสมการ (3.299) กับ (3.304) ได้เป็น

$$\eta_s = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_{feed}(x_s,y_s,z_s)\times\vec{H}^*_{feed}(x_s,y_s,z_s)\right]\cdot\hat{n}\rho_i d\rho_i d\phi_i}{\frac{1}{2Z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\vec{E}_{feed}(\theta_f,\phi_f)\right|^2 r_f^2\sin\theta_f d\theta_f d\phi_f} \tag{3.337}$$

โดยในพจน์ที่เป็นส่วนสามารถหาอยู่ในรูปแม่นตรงได้เช่นเดียวกับในสมการ (3.331) และ (3.316) เมื่อสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้เป็นสายอากาศชนิดโคไซน์กำลังต่าง ๆ และสายอากาศชนิดฮอยเกน ตามลำดับ การคำนวณหาค่าของสมการ (3.337) ในที่นี้ทำได้โดยใช้วิธีของซิมป์สันมาประมาณหาค่า

จากข้างต้นเราสมมุติว่า ประสิทธิภาพของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับหนึ่ง ดังนั้นจากสมการ (3.298) กำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานออกไปจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นไปในบริเวณที่จานสะท้อนวางอยู่ซึ่งเป็นบริเวณย่านสนามไกล P_T มีค่าเท่ากับกำลังที่ป้อนให้ระบบสายอากาศ ทำให้อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกสามารถหาได้ดังสมการ (3.338)

$$G_{cp}(\theta,\phi) = \frac{4\pi P_{cp}(\theta,\phi)}{P_T} \tag{3.338}$$

โดยที่กำลังทั้งหมดที่แผ่พลังงานออกไปจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่นไปในบริเวณที่จานสะท้อนวางอยู่ซึ่งเป็นบริเวณย่านสนามไกล P_T เป็นดังสมการ (3.331) หรือ (3.335) ขึ้นอยู่กับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้ และความหนาแน่นของกำลังคลื่นที่แผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วมตามแนวแกนของสายอากาศต่อสเตอเรเดียน P_{cp} เป็น

$$P_{cp}(\theta,\phi)=\frac{r^2\left|E_{cp}(\theta,\phi)\right|^2}{2Z} \tag{3.339}$$

โดยที่ $E_{cp}(\theta,\phi)$ คือ สนามไฟฟ้าในแนวโพลาไรเซชันร่วมย่านสนามไกลซึ่งหาได้จากหัวข้อโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ และเมื่อแทนสมการ (3.339) ลงในสมการ (3.338) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกจะเป็น

$$G_{cp}(\theta,\phi)=\frac{4\pi r^2\left|E_{cp}(\theta,\phi)\right|^2}{2ZP_T} \tag{3.340}$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกจะเป็น

$$G_{xp}(\theta,\phi)=\frac{4\pi r^2\left|E_{xp}(\theta,\phi)\right|^2}{2ZP_T} \tag{3.341}$$

ซึ่งเมื่อแทนอัตราขยายตามแนวแกนของสายอากาศที่ได้จากสมการ (3.340) ลงในสมการ (3.322) จะได้ประสิทธิภาพของสายอากาศเป็นดังสมการ (3.342)

$$\eta=\frac{G_{cp}(0,0)\lambda^2}{4\pi S_a} \tag{3.342}$$

จากเหตุผลที่กล่าวไว้ข้างต้น ระนาบหน้าจานมีขนาดเท่ากับขนาดภาพฉายของจานสะท้อน ดังนั้น $S_a=\frac{\pi D^2}{4}$ โดยที่ D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของภาพฉายของจานสะท้อน ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (3.342) ทำให้

$$\eta=\frac{G_{cp}(0,0)}{\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2} \tag{3.343}$$

และเมื่อแทนประสิทธิภาพเนื่องจากการล้นจานข้างต้นลงในสมการ (3.343) จะได้

$$\eta_{sa}\eta_A = \frac{G_{cp}(0,0)}{\eta_s\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2} \tag{3.344}$$

โดยในวิทยานิพนธ์นี้รวมเรียก $\eta_{sa}\eta_A$ ว่า ประสิทธิภาพช่องเปิด

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่เป็นตัวกำหนดขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ค่าปัจจัยดังกล่าวในการพิจารณาดูผลกระทบจากปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อนดังแสดงไว้ในบทผลการวิเคราะห์ที่จะกล่าวต่อไป