รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

อรุณี เจริญราช. แคลคูลัส เล่ม 3. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2533.

ภาษาอังกฤษ

Balanis, C. A. Advanced engineering electromagnetics. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Beeckman, P. A. Prediction of the Fresnel region field of a compact antenna test range with serrated edges. IEE Proceedings Part H. 133 (April 1986) : 108-114.

Burden, R. L., and Faires, J. D. Numerical Analysis. 5th ed. Boston: PWS Publishing Co., 1993.

Chu, T. S., and Turrin R. H. Depolarization Properties of Offset Reflector Antennas. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-21 (May 1973) : 339-345.

Clarricoats, P. J. B. Some recent advances in microwave reflector antennas. Proceedings of the IEE 126 (January 1979) : 9-25.

________., Olver, A. D., Kishk, A. A., and Shafai, L. Microwave Horns and Feeds. New York: IEEE Press, 1994.

________., and Poulton, G. T. High-Efficiency Microwave Reflector Antennas - A Review. Proceedings of the IEEE 65 (October 1977) : 1470-1504.

Collin, R. E. Antennas and Radiowave Propagation. Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1985.

Duan, D. W., and Rahmat-Samii, Y. A Generalized Diffraction Synthesis Tehnique for High Performance Reflector Antennas. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-43 (January 1995) : 27-40.

________., Rahmat-Samii, Y., and Mahon, J. P. Scattering from a Circular Disk: A Comparative Study of PTD and GTD Techniques. Proceedings of the IEEE 79 (October 1991) : 1472-1480.

Felsen, L. B., and Marcuvitz, N. Radiation and Scattering of Waves. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1973.

Franceschetti, G., and Mohsen, A. Recent developments in the analysis of reflector antennas. A Review. IEE Proceedings Part H. 133 (February 1986) : 65-76.

Fresnel-Integral Approximation. IEEE Antennas and Propagation Magazine 37 (April 1995) : 99-100.

Ishimaru, A. Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering. Singapore: Prentice-Hall International Inc., 1991.

James, G. L. An Approximation to the Fresnel Integral. Proceedings of the IEEE 67 (April 1979) : 677-678.

_______. Reflector Antenna Radiation Pattern Analysis by Equivalent Edge Currents. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-21 (January 1973) : 19-24.

Kauffman, J. F., Croswell, W. F., and Jowers, L. J. Analysis of the Radiation Patterns of Reflector Antennas. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-24 (January 1976) : 53-65.

Keller, J. B. Geometrical Theory of Diffraction. Journal of the Optical Society of America 52 (February 1962) : 116-130.

Kildal, P. S. The Effects od Subreflector Diffraction on the Aperture Efficiency of a Conventional Cassegrain Antenna-An Analytical Approach. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-31 (November 1983) : 903-909.

Knott, E. F.. and Thomas, B. A. Comparison of Three High-Frequency Diffraction Techniques. Proceedings of the IEEE 62 (November 1974) : 1468-1474.

Kouyoumjian, R. G., and Pathak, P. H. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for and Edge in a Perfectly Conducting Surface. Proceedings of the IEEE 62 (November 1974) : 1448-1461.

Ludwig, A.C. The definition of cross polarization. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-21 (January 1973) : 116-119.

Mentzer, C. A., and Peters, L. A GTD Analysis of the Far-Out Sidelobes of Cassegrain Antennas. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-23 (September 1975) : 702-709.

Michaeli, A. Equivalent Edge Currents for Arbitrary Aspects of Observation. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-32 (March 1984) : 252-258.

Narasimhan, M. S., and Prasad, K. M. GTD Analysis of the Near-Field Patterns of a Prime-Focus Symmetric Paraboidal Reflector Antenna. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-29 (November 1981) : 959-961.

Rudge, A. W. Offset-Parabolic-Reflector Antennas: A Review. Proceedings of the IEEE 66 (December 1978) : 1592-1618.

Rusch, W. V. T. The Current State of the Reflector Antenna Art. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-32 (April 1984) : 313-329.

Ryan, C. E., and Peters, L. Evaluation Edge-Diffracted Fields Including Equivalent Currents for the Caustic Regions. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-17 (May 1969) : 292-299.

Sanad, M. S. A., and Shafai, L. An Extended Aperture Integration Method for Reflector Antennas. IEEE AP-S Symposium, Philadelphia 2 (June 1986) : 647-650.

Shore, R. A., and Yaghjian, A. D. Application of Incremental Length Diffraction Coefficients to Calculate the Pattern Effects of the Rim and Surface Cracks of a Reflector Antenna. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-41 (January 1993) : 1-11.

Silver, S. Microwave Antenna Theory and Design. New York: McGraw-Hill Book Co., 1949.

Sletten, C. J. Reflector and Lens Antennas. Artech House Co., 1991.

Struik, D. J. Lectures on Differential Geometry. London: Addison-Wesley Publishing Co., 1961.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์เวกเตอร์ ฟังก์ชันเบสเซล และเอกลักษณ์ของฟังก์ชันเบสเซล

<u>พีชคณิตเวกเตอร์</u>

ถ้า $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดที่ตั้งฉากกันที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบแกนพิกัดคือ $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ และ $\hat{u}_3$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันตามกฎมือขวา ดังนั้น $\vec{A} = A_1\hat{u}_1 + A_2\hat{u}_2 + A_3\hat{u}_3$, $\vec{B} = B_1\hat{u}_1 + B_2\hat{u}_2 + B_3\hat{u}_3$ และ $\vec{C} = C_1\hat{u}_1 + C_2\hat{u}_2 + C_3\hat{u}_3$ และพีชคณิตเวกเตอร์เป็นดังนี้

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1)\hat{u}_1 + (A_2 \pm B_2)\hat{u}_2 + (A_3 \pm B_3)\hat{u}_3 \tag{ก.1}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{ก.2}$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{u}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{u}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{u}_3 \tag{ก.3}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta \tag{ก.4}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \tag{ก.5}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{ก.6}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \tag{ก.7}$$

<u>เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ และเคิร์ลในระบบพิกัดที่ตั้งฉากกัน</u>

ถ้าตัวแปรของระบบพิกัด (coordinate variables) ที่ตั้งฉากกันคือ v_1, v_2, v_3 และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ของระบบพิกัดคือ $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันตามกฎมือขวา และสัมประสิทธิ์ของเมตริก (metric coefficients) เป็น h_1, h_2, h_3, $\Omega = h_1h_2h_3$ และ Φ เป็นปริมาณสเกลาร์ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรของระบบพิกัด และ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดที่ตั้งฉากกัน ดังนั้น

เกรเดียนต์ของ Φ

$$\nabla\Phi = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial v_i} \tag{ก.8}$$

เกรเดียนต์ของของ $\bar{A}$

$$\nabla\bar{A} = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial\bar{A}}{\partial v_i} \tag{ก.9}$$

ไดเวอร์เจนซ์ของ $\bar{A}$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial v_i} = \sum_i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}A_i\right) \tag{ก.10}$$

ลาปลาเซียนของ Φ

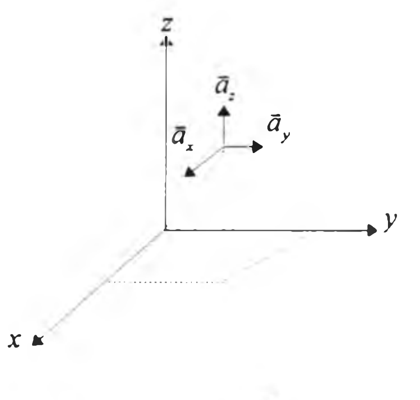
$$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi = \sum_i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}\right) \tag{ก.11}$$

ลาปลาเซียนของ $\bar{A}$

$$\nabla^2\bar{A} = \nabla\cdot\nabla\bar{A} = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\sum_j \frac{\hat{u}_j}{h_j}\frac{\partial\bar{A}}{\partial v_j}\right) = \sum_i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i^2}\frac{\partial\bar{A}}{\partial v_i}\right) \tag{ก.12}$$

การดำเนินการต่าง ๆ ข้างต้นเป็นการดำเนินการสำหรับในระบบพิกัดที่ตั้งฉากกัน แต่ระบบพิกัดที่ตั้งฉากกันที่นำมาใช้ส่วนใหญ่คือ ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม ดังนั้นในภาคผนวกนี้จะกล่าวเพียงระบบพิกัดทั้งสามดังนี้

1. ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ดังรูป ก.1 ตัวแปรของระบบพิกัด $v_1, v_2, v_3 = x, y, z$ สัมประสิทธิ์ของเมตริก $h_1, h_2, h_3 = 1,1,1$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบแกนพิกัด $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3 = \bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ ดังนั้น



รูป ก.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\bar{a}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{a}_z \tag{ก.13}$$

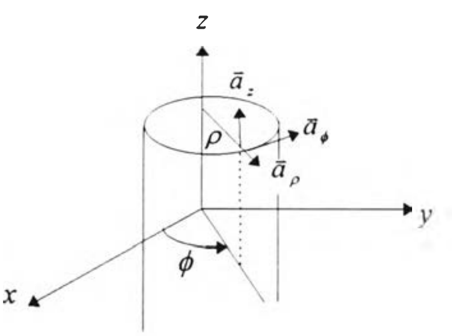
$$\nabla\cdot\bar{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (ก.14)$$

$$\nabla\times\bar{A}=\bar{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\bar{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\bar{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (ก.15)$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (ก.16)$$

$$\nabla^2\bar{A}=\bar{a}_x\nabla^2A_x+\bar{a}_y\nabla^2A_y+\bar{a}_z\nabla^2A_z \qquad (ก.17)$$

2. **ระบบพิกัดทรงกระบอก** ดังรูป ก.2 ตัวแปรของ**ระบบพิกัด** $v_1,v_2,v_3=\rho,\phi,z$ สัมประสิทธิ์ของเมตริก $h_1,h_2,h_3=1,\rho,1$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบแกนพิกัด $\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3=\bar{a}_\rho,\bar{a}_\phi,\bar{a}_z$ ดังนั้น



รูป ก.2 ระบบพิกัดทรงกระบอก

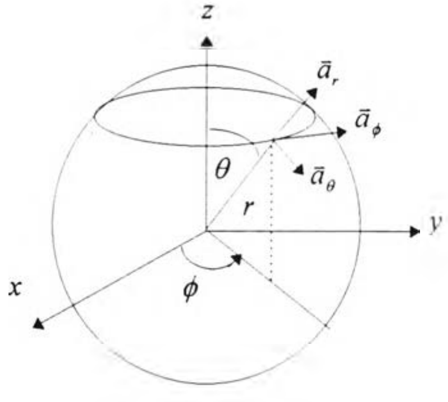
$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bar{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\bar{a}_\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{a}_z \qquad (ก.18)$$

$$\nabla\cdot\bar{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho A_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (ก.19)$$

$$\nabla\times\bar{A}=\bar{a}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)+\bar{a}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\bar{a}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho A_\phi-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right) \qquad (ก.20)$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (ก.21)$$

3. **ระบบพิกัดทรงกลม** ดังรูป ก.3 ตัวแปรของระบบพิกัด $v_1, v_2, v_3 = r, \theta, \phi$ สัมประสิทธิ์ของเมตริก $h_1, h_2, h_3 = 1, r, r\sin\theta$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบแกนพิกัด $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3 = \vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi$ ดังนั้น



รูป ก.3 ระบบพิกัดทรงกลม

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{a}_\phi \qquad (ก.23)$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 A_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}A_\theta\sin\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \qquad (ก.24)$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{\vec{a}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}A_\phi\sin\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \frac{\vec{a}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}rA_\phi\right) + \frac{\vec{a}_\phi}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rA_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \qquad (ก.25)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \qquad (ก.26)$$

<u>เอกลักษณ์เวกเตอร์</u>

ถ้า Φ, Ψ เป็นปริมาณสเกลาร์ และ $\vec{A}$, $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ เอกลักษณ์เวกเตอร์มีดังนี้

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi \qquad (ก.27)$$

$$\nabla\cdot(\Psi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\Psi + \Psi\nabla\cdot\vec{A} \qquad (ก.28)$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A} \qquad (ก.29)$$

$$\nabla\times(\Psi\vec{A}) = \nabla\Psi\times\vec{A} + \Psi\nabla\times\vec{A} \qquad (ก.30)$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \qquad (\text{ก}.31)$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \qquad (\text{ก}.32)$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi \qquad (\text{ก}.33)$$

$$\nabla\cdot\nabla\vec{A}=\nabla^2\vec{A} \qquad (\text{ก}.34)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0 \qquad (\text{ก}.35)$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0 \qquad (\text{ก}.36)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \qquad (\text{ก}.37)$$

<u>เอกลักษณ์ไดแอดิก</u>

ถ้า Ψ เป็นปริมาณสเกลาร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ และ $\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{C}}$ เป็นปริมาณแบบไดแอดิก เอกลักษณ์ไดแอดิกมีดังนี้

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\overline{\overline{C}})=-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\overline{\overline{C}})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\overline{\overline{C}} \qquad (\text{ก}.38)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\overline{\overline{C}})=\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\overline{\overline{C}})-(\vec{A}\cdot\vec{B})\overline{\overline{C}} \qquad (\text{ก}.39)$$

$$\nabla(\Psi\vec{A})=\Psi\nabla\vec{A}+\vec{A}\nabla\Psi \qquad (\text{ก}.40)$$

$$\nabla\cdot(\Psi\overline{\overline{C}})=\Psi\nabla\cdot\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{C}}\cdot\nabla\Psi \qquad (\text{ก}.41)$$

$$\nabla\times(\Psi\overline{\overline{C}})=\Psi\nabla\times\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{C}}\times\nabla\Psi \qquad (\text{ก}.42)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{\overline{C}})=\nabla(\nabla\cdot\overline{\overline{C}})-\nabla^2\overline{\overline{C}} \qquad (\text{ก}.43)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\overline{C}})=0 \qquad (\text{ก}.44)$$

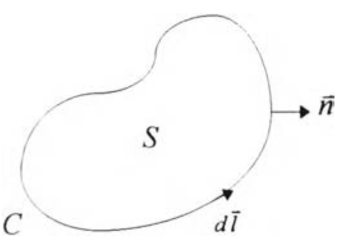
$$\vec{A}\cdot\overline{\overline{C}}=\left(\overline{\overline{C}}\right)^T\cdot\vec{A} \qquad (\text{ก}.45)$$

$$\bar{A}\times\overline{\overline{C}} = -\left[\left(\overline{\overline{C}}\right)^{T}\times\bar{A}\right]^{T} \quad (ก.46)$$

$$\left(\overline{\overline{C}}\right)^{T}\cdot(\bar{A}\times\overline{\overline{B}}) = -\left(\bar{A}\times\overline{\overline{C}}\right)^{T}\cdot\overline{\overline{B}} \quad (ก.46)$$

<u>ทฤษฎีอินทิกรัล</u>

ถ้าให้ Φ และ $\bar{A}$ เป็นปริมาณสเกลาร์และเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์อันดับแรกต่อเนื่องในปริมาตร V และบนพื้นผิว S และมีเส้นวงปิด C ล้อมรอบ S ดังรูป ก.4 แล้ว



รูป ก.4 พื้นผิว S กับเส้นวงปิด C

ทฤษฎีเกรเดียนต์ (gradient theorem)

$$\int_V \nabla\Phi dV = \oint_S \hat{n}\Phi dS \quad (ก.33)$$

ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divegence theorem)

$$\int_V (\nabla\cdot\bar{A})dV = \oint_S (\hat{n}\cdot\bar{A})dS \quad (ก.34)$$

ทฤษฎีเคิร์ล (curl theorem)

$$\int_V (\nabla\times\bar{A})dV = \oint_S (\bar{n}\times\bar{A})dS \quad (ก.35)$$

ทฤษฎีของสโตก (Stokes' theorem)

$$\int_S \hat{n}\cdot(\nabla\times\bar{A})dS = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l} \quad (ก.37)$$

โดยที่ $\hat{n}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S ดังรูป ก.4

<u>การแปลงระบบพิกัด</u>

การแปลงระบบพิกัดมีความสำคัญมากในการวิเคราะห์ระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนคลื่น เนื่องจากในระบบสายอากาศชนิดนี้ประกอบไปด้วย สายอากาศป้อนกำลังคลื่น จานสะท้อน ซึ่งมีระบบพิกัดแตกต่างกัน ดังนั้นจำเป็นต้องมีการแปลงระบบพิกัดเพื่อให้อยู่ในระบบพิกัดเดียวกันหรือหาความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด ซึ่งในภาคผนวกนี้ได้กล่าวถึงการแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก และจากระบบพิกัดทรงกระบอกไปเป็นระบบพิกัดทรงกลม และจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกลม โดยที่ระบบพิกัดทั้งสามเป็นดังรูป ก.1 ก.2 และ ก.3 ไว้ดังนี้

1. การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนกับระบบพิกัดทรงกระบอก ตัวแปรของระบบพิกัดมีความสัมพันธ์กันดังสมการ (ก.38)

$$x = \rho\cos\phi,\ \ y = \rho\sin\phi \text{ และ } z = z \qquad \text{(ก.38)}$$

สำหรับในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ได้เป็น

$$\bar{A} = A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z \qquad \text{(ก.39)}$$

โดยที่ $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และ A_x, A_y, A_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในทิศทาง $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ ตามลำดับ และในทำนองเดียวกันในระบบพิกัดทรงกระบอกก็สามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ได้เป็น

$$\bar{A} = A_\rho\bar{a}_\rho + A_\phi\bar{a}_\phi + A_z\bar{a}_z \qquad \text{(ก.40)}$$

โดยที่ $\bar{a}_\rho, \bar{a}_\phi, \bar{a}_z$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบพิกัดทรงกระบอก และ A_ρ, A_ϕ, A_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในทิศทาง $\bar{a}_\rho, \bar{a}_\phi, \bar{a}_z$ ตามลำดับ และจากรูป ก.1 และ ก.2 จะพบว่า

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \bar{a}_\rho\cos\phi - \bar{a}_\phi\sin\phi \\ \bar{a}_y &= \bar{a}_\rho\sin\phi + \bar{a}_\phi\cos\phi \\ \bar{a}_z &= \bar{a}_z \end{aligned} \qquad \text{(ก.41)}$$

จากสมการ (ก.41) สามารถหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนกับระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นดังสมการ (ก.42) และ (ก.43)

$$\begin{aligned} A_\rho &= \bar{A}\cdot\bar{a}_\rho = A_x(\bar{a}_x\cdot\bar{a}_\rho) + A_y(\bar{a}_y\cdot\bar{a}_\rho) + A_z(\bar{a}_z\cdot\bar{a}_\rho) = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\ A_\phi &= \bar{A}\cdot\bar{a}_\phi = A_x(\bar{a}_x\cdot\bar{a}_\phi) + A_y(\bar{a}_y\cdot\bar{a}_\phi) + A_z(\bar{a}_z\cdot\bar{a}_\phi) = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \\ A_z &= \bar{A}\cdot\bar{a}_z = A_x(\bar{a}_x\cdot\bar{a}_z) + A_y(\bar{a}_y\cdot\bar{a}_z) + A_z(\bar{a}_z\cdot\bar{a}_z) = A_z \end{aligned} \qquad \text{(ก.42)}$$

$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_x) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_x) = A_\rho\cos\phi - A_\phi\sin\phi$$
$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_y) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_y) = A_\rho\sin\phi + A_\phi\cos\phi \qquad (ก.43)$$
$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_z) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_z) = A_z$$

จากสมการ (ก.42) และ (ก.43) เมื่อเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (ก.44)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (ก.44)$$

2. การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดทรงกระบอกไปเป็นระบบพิกัดทรงกลม

ในระบบพิกัดทรงกระบอกกับระบบพิกัดทรงกลม ตัวแปรของระบบพิกัดมีความสัมพันธ์กันดังสมการ (ก.45)

$$\rho = r\sin\theta, \quad z = r\cos\theta \qquad (ก.45)$$

ในทำนองเดียวกับการแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก จากรูป ก.2 และ ก.3 พบว่า

$$\vec{a}_\rho = \vec{a}_r\sin\theta + \vec{a}_\theta\cos\theta$$
$$\vec{a}_\phi = \vec{a}_\phi \qquad (ก.46)$$
$$\vec{a}_z = \vec{a}_r\cos\theta - \vec{a}_\theta\sin\theta$$

จากสมการ (ก.46) สามารถหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกกับระบบพิกัดทรงกลมได้เป็น

$$A_r = \vec{A}\cdot\vec{a}_r = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_r) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_r) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_r) = A_\rho\sin\theta + A_z\cos\theta$$
$$A_\theta = \vec{A}\cdot\vec{a}_\theta = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_\theta) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_\theta) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_\theta) = A_\rho\cos\theta - A_z\sin\theta \qquad (ก.47)$$
$$A_\phi = \vec{A}\cdot\vec{a}_\phi = A_\rho(\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_\phi) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_\phi) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_\phi) = A_\phi$$

$$A_\rho = \vec{A}\cdot\vec{a}_\rho = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_\rho) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_r) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_r) = A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta$$
$$A_\phi = \vec{A}\cdot\vec{a}_\phi = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_\phi) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_\phi) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_\phi) = A_\phi \qquad (ก.48)$$
$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z) = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta$$

จากสมการ (ก.42) และ (ก.43) เมื่อเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad \text{(ก.49)}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \quad \text{(ก.50)}$$

3. การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกลม

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนกับระบบพิกัดทรงกลม ตัวแปรของระบบพิกัดมีความสัมพันธ์กันดังสมการ (ก.51)

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi \ \text{และ}\ z = r\cos\theta \quad \text{(ก.51)}$$

ในทำนองเดียวกับการแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก จากรูป ก.1 และ ก.3 พบว่า

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= \vec{a}_r \sin\theta\cos\phi + \vec{a}_\theta \cos\theta\cos\phi - \vec{a}_\phi \sin\phi \\ \vec{a}_y &= \vec{a}_r \sin\theta\sin\phi + \vec{a}_\theta \cos\theta\sin\phi + \vec{a}_\phi \cos\phi \\ \vec{a}_z &= \vec{a}_r \cos\theta - \vec{a}_\theta \sin\theta \end{aligned} \quad \text{(ก.52)}$$

จากสมการ (ก.52) สามารถหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนกับระบบพิกัดทรงกลม ได้เป็น

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A}\cdot\vec{a}_r = A_x(\vec{a}_x\cdot\vec{a}_r) + A_y(\vec{a}_y\cdot\vec{a}_r) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_r) = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= \vec{A}\cdot\vec{a}_\theta = A_x(\vec{a}_x\cdot\vec{a}_\theta) + A_y(\vec{a}_y\cdot\vec{a}_\theta) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_\theta) = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \\ A_\phi &= \vec{A}\cdot\vec{a}_\phi = A_x(\vec{a}_x\cdot\vec{a}_\phi) + A_y(\vec{a}_y\cdot\vec{a}_\phi) + A_z(\vec{a}_z\cdot\vec{a}_\phi) = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \end{aligned} \quad \text{(ก.53)}$$

$$\begin{aligned} A_x &= \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x) = A_r\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi \\ A_y &= \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_y) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y) = A_r\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi \\ A_z &= \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r(\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z) + A_\theta(\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z) + A_\phi(\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z) = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \end{aligned} \quad \text{(ก.54)}$$

จากสมการ (ก.53) และ (ก.54) เมื่อเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (ก.55)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \qquad (ก.56)$$

<u>สมการของเบสเซลและฟังก์ชันเบสเซล</u>

สมการของเบสเซลอันดับ ν มีรูปแบบดังสมการ (ก.57)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\nu^2)y = 0 \qquad (ก.57)$$

ซึ่งเมื่อหาผลเฉลยของสมการ (ก.57) จะได้

$$y(x) = A_1 J_\nu(x) + B_1 J_{-\nu}(x) \qquad (ก.58)$$

หรือ

$$y(x) = A_1 J_\nu(x) + B_1 Y_\nu(x) \qquad (ก.59)$$

เมื่อ ν ไม่เป็นจำนวนเต็มหรือไม่เท่ากับศูนย์ และถ้า $\nu = n$ เป็นจำนวนเต็มหรือเท่ากับศูนย์ ผลเฉลยของสมการ (ก.57) จะเป็นดังสมการ (ก.60)

$$y(x) = A_1 J_n(x) + B_1 Y_n(x) \qquad (ก.60)$$

โดยที่ A_1 และ B_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง และ

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)!} \qquad (ก.61)$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m-\nu}}{m!(m-\nu)!} \qquad (ก.62)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \qquad (ก.63)$$

$$m! = \Gamma(m+1) \tag{ก.64}$$

และ $J_\nu(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν และ $Y_\nu(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับที่ ν และ $\Gamma(x)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (gamma function) และสำหรับในกรณี $\nu = n$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อพิจารณาสมการ (ก.62) และ (ก.64) จะพบว่า

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{ก.65}$$

และถ้าอาร์กิวเมนต์ (argument) ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับจำนวนเต็มมีค่าเป็นจำนวนลบ จากสมการ (ก.61) จะพบว่า

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{ก.66}$$

การประยุกต์ใช้งานฟังก์ชันเบสเซลบางครั้ง อาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันเบสเซลมีค่าเล็กมากหรือใหญ่มาก ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้ ฟังก์ชันเบสเซลสามารถหาค่าโดยประมาณได้จากใช้วิธีเชิงเส้นกำกับ (asymptotic method) เป็นดังนี้

$$J_0(x) \overset{x\to 0}{\cong} 1 \tag{ก.67}$$

$$Y_0(x) \overset{x\to 0}{\cong} \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \tag{ก.68}$$

โดยที่ $\gamma = 1.781$ และ

$$J_\nu(x) \overset{x\to 0,\ \nu>0}{\cong} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \tag{ก.69}$$

$$Y_\nu(x) \overset{x\to 0,\ \nu>0}{\cong} -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \tag{ก.70}$$

$$J_\nu(x) \overset{x\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \tag{ก.71}$$

$$Y_\nu(x) \overset{x\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \tag{ก.72}$$

นอกจากฟังก์ชันเบสเซลที่กล่าวไว้ข้างต้น นักคณิตศาสตร์ได้ตั้งฟังก์ชันชุดใหม่ขึ้นมาจากฟังก์ชันเบสเซลโดยเรียกว่า ฟังก์ชันฮันเกล (Hankel function) ซึ่งมีสัญลักษณ์เป็น $H_\nu^{(1)}(x)$ และ $H_\nu^{(2)}(x)$ และถูกกำหนดดังสมการ (ก.73) และ (ก.74)

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + jY_\nu(x) \tag{ก.73}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - jY_\nu(x) \tag{ก.74}$$

โดย $H_\nu^{(1)}(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันฮันเกลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν และ $H_\nu^{(2)}(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันฮันเกลชนิดที่สองอันดับที่ ν ดังนั้นผลเฉลยของสมการเบสเซลอันดับที่ ν เขียนได้ใหม่เป็น

$$y(x) = A_2 H_\nu^{(1)}(x) + B_2 H_\nu^{(2)}(x) \tag{ก.75}$$

และถ้าอาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันฮันเกลมีค่าใหญ่มาก ค่าประมาณของฟังก์ชันฮันเกลจากวิธีเชิงเส้นกำกับเป็น

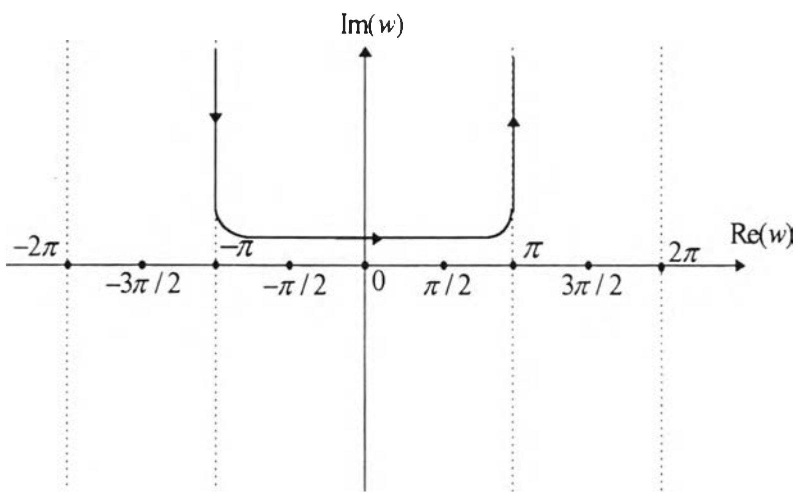
$$H_\nu^{(1)}(x) \overset{x\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)} \tag{ก.76}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \overset{x\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)} \tag{ก.77}$$

<u>เอกลักษณ์ต่าง ๆ ของฟังก์ชันเบสเซล</u>

ฟังก์ชันเบสเซลมีเอกลักษณ์ต่าง ๆ มากมาย สำหรับในภาคผนวกนี้จะกล่าวไว้เพียงบางเอกลักษณ์ที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้คือ

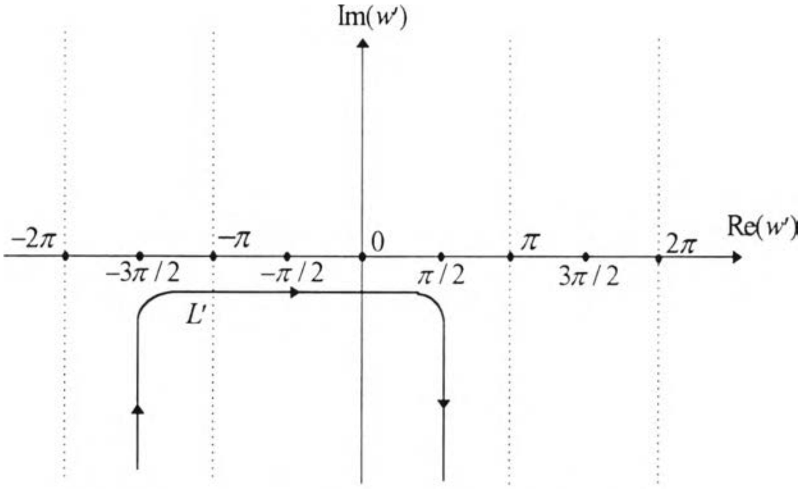
$$J_\nu(x)Y_\nu'(x) - Y_\nu(x)J_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x} \tag{ก.78}$$



รูป ก.5 เส้นทางการอินทิเกรตของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งในระนาบเชิงซ้อน w

ต้นฉบับ หน้าขาดหาย

$$J_\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_L e^{jx\cos w'+j\nu(w'-\frac{\pi}{2})}dw' \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L'} e^{jx\cos w'-j\nu(w'+\frac{\pi}{2})}dw'\end{cases} \tag{ก.82}$$



รูป ก.7 เส้นทาง L' ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งในระนาบเชิงซ้อน w'

เนื่องจาก $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ และ $\int_a^b Af(x)dx=-\int_{-a}^{-b}Af(-x)dx$ ดังนั้น $\int_a^b Af(x)dx=\int_{-b}^{-a}Af(-x)dx$ โดยที่ A เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง และจากคุณสมบัติการอินทิเกรตข้างต้น เมื่อพิจารณาสมการ (ก.80) และ (ก.81) พบว่า

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+j\infty}^{\frac{3\pi}{2}-j\infty}Ae^{jx\cos w}dw=\int_{-\frac{3\pi}{2}-j\infty}^{+\frac{\pi}{2}-j\infty}Ae^{jx\cos(-w)}dw=\int_{-\frac{3\pi}{2}-j\infty}^{+\frac{\pi}{2}-j\infty}Ae^{jx\cos w}dw$$

ดังนั้น

$$\int_L Ae^{jx\cos w}dw=\int_{L'}Ae^{jx\cos w}dw \tag{ก.83}$$

จากทั้งหมดข้างต้นเป็นการสรุปสูตรทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ อันประกอบด้วย สูตรต่าง ๆ ในการวิเคราะห์เวกเตอร์ การประมาณฟังก์ชันเบสเซล และเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของฟังก์ชันเบสเซลเป็นต้น

ภาคผนวก ข.

รัศมีความโค้งหลักของรังสีสะท้อนและรังสีเลี้ยวเบน

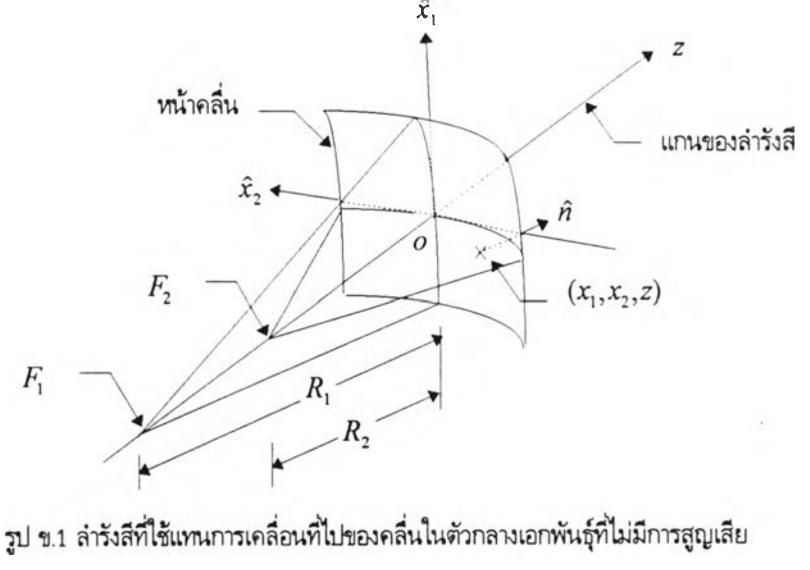
<u>คุณสมบัติของลำรังสีในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสีย</u>

กรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตสมมุติ การเคลื่อนที่ของคลื่นในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสียด้วยการส่งผ่านพลังงานในลำรังสีที่มีทิศทางการเคลื่อนที่ตามแกนของรังสี oz ซึ่งตั้งฉากกับหน้าคลื่นดังรูป ข.1 ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมของคลื่นในลักษณะของรังสีสามารถพิจารณาจากการแปรเปลี่ยนของลำรังสี ซึ่งดูได้จากการแปรเปลี่ยนของหน้าคลื่นเมื่อลำรังสีเคลื่อนที่ไป โดยแทนบริเวณเล็ก ๆ ของหน้าคลื่นรอบจุด o ด้วยสมการกำลังสองดังสมการ (ข.1)

$$z = -\frac{1}{2}\bar{x}\cdot Q(o)\bar{x} \qquad (ข.1)$$

โดยที่ $\bar{x} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีซึ่งมีทิศตั้งฉากกับแกนของรังสี และ Q คือเมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีที่กำหนดด้วยเมตริกซ์สมมาตรขนาด 2×2 และเครื่องหมายลบในสมการ (ข.1) เป็นการกำหนดว่าความโค้งของลำรังสีเป็นบวกเมื่อลำรังสีลู่ออกดังรูป ข.1 โดยมีเวกเตอร์ตั้งฉากที่มีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้งของลำรังสีที่จุด (x_1, x_2, z) เกิดจากการดำเนินการเกรเดียนต์กับสมการพื้นผิว $z + \frac{1}{2}\bar{x}\cdot Q(o)\bar{x} = 0$ เป็นดังสมการ (ข.2)

$$\bar{n} = \hat{z} + Q(o)\bar{x} \qquad (ข.2)$$



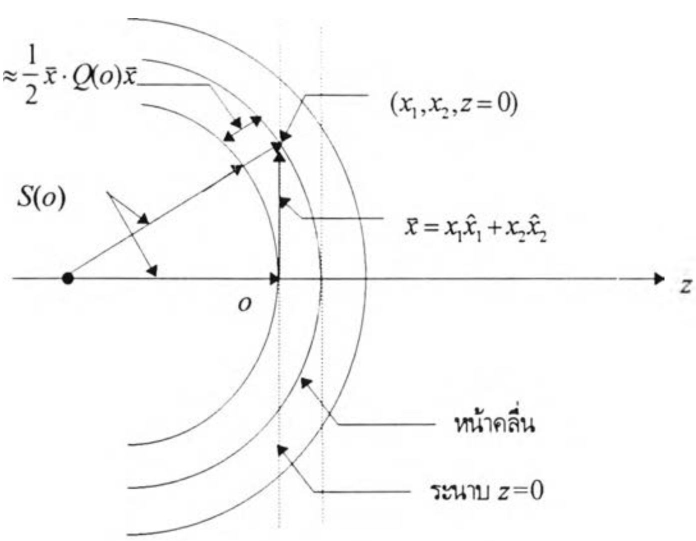
รูป ข.1 ลำรังสีที่ใช้แทนการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสีย

โดยที่ $\hat{z}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแกนของลำรังสี oz และถ้า $\hat{x}_1$ และ $\hat{x}_2$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ใช้บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีในทิศทางหลัก (principal direction) ที่ทำให้รังสีในระนาบหลัก (pricipal planes) ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย $\hat{x}_1$ กับ $\hat{z}$ และ $\hat{x}_2$ กับ $\hat{z}$ ลู่เข้าตัดแกนของลำรังสีที่จุด F_1 และ F_2 ตามลำดับ ระยะที่รังสีตัดแกนของลำรังสีในแต่ละระนาบหลัก R_1, R_2 เรียกว่า รัศมีความโค้งหลัก (principal radii of curvature) ซึ่งเป็นรัศมีความโค้งมากที่สุดและน้อยที่สุดของลำรังสี ดังนั้นเมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีในทิศทางหลักที่จุด o จะเป็นดังสมการ (ข.3)

$$Q(o) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{ข.3}$$

และเมื่อพิจารณาจุด z ใด ๆ ที่อ้างอิงกับแกนของรังสี เมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีในทิศทางหลักที่จุดนั้นจะเป็น

$$Q(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 + z} \end{bmatrix} \tag{ข.4}$$



รูป ข.2 การประมาณเฟสบนหน้าคลื่นที่จุด $(x_1, x_2, z=0)$

เนื่องจากรังสีที่พุ่งออกจากหน้าคลื่นในบริเวณเล็ก ๆ รอบจุด o มีทิศทางเกือบขนานกับแกนของรังสี ดังนั้นเฟสของคลื่นที่จุด $(x_1, x_2, z=0)$ สามารถหาได้โดยบวก $\frac{1}{2}k\bar{x}\cdot Q(o)\bar{x}$ เพิ่มเข้าไปในเฟสที่จุด o โดยไม่คิดพจน์ที่มีกำลังมากกว่าสอง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากรูป ข.2 และในลักษณะคล้าย ๆ กันเฟสของคลื่นที่จุด $\bar{r} = (x_1, x_2, z)$ ใด ๆ เมื่อ $\bar{x} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2$

อยู่ในบริเวณใกล้ ๆ แกนของลำรังสี สามารถหาได้โดยบวก $kz+\frac{1}{2}k\bar{x}\cdot Q(z)\bar{x}$ เพิ่มเข้าไปในเฟสที่จุด o ดังนั้นเฟสของคลื่นที่จุด $\bar{r}=(x_1,x_2,z)$ ใด ๆ เป็น $kS(\bar{r})$ โดยที่

$$S(\bar{r})=S(o)+z+\frac{1}{2}\bar{x}\cdot Q(z)\bar{x} \tag{ข.5}$$

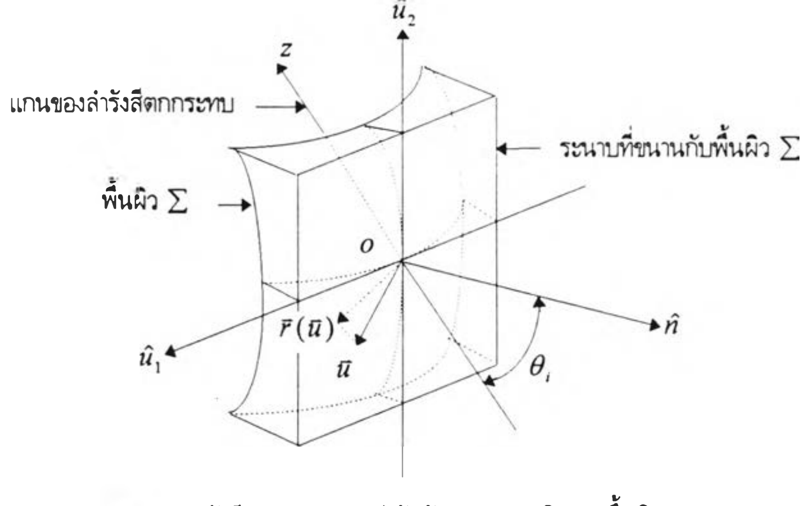
จากที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นถึงลักษณะสมบัติของลำรังสี เช่น เฟสที่ตำแหน่งใด ๆ จากจุดอ้างอิง o และค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้ในการบอกตำแหน่งบนหน้าคลื่น โดยการประมาณหน้าคลื่นของลำรังสีรอบ ๆ จุดอ้างอิง o ด้วยสมการกำลังสอง คุณสมบัติของรังสีเหล่านี้เป็นคุณสมบัติที่สำคัญในการนำไปใช้ศึกษาพฤติกรรมของคลื่น เช่น การสะท้อน และการเลี้ยวเบนเพื่อหาค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของลำรังสีสะท้อนและลำรังสีเลี้ยวเบนเมื่อมีลำรังสีมาตกกระทบที่พื้นผิวหรือที่ขอบ ดังกล่าวไว้ในหัวข้อถัดไป

<u>รัศมีความโค้งหลักของรังสีสะท้อน</u>

ในการหาสนามไฟฟ้าโดยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตนั้น สนามไฟฟ้าสะท้อนในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสียสามารถหาได้ดังสมการ (ข.6) ซึ่งมีตัวประกอบการลดทอนเป็นฟังก์ชันของรัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อน และเนื่องจากเราพิจารณาคลื่นที่เคลื่อนที่ไปในลักษณะของรังสี ดังนั้นในการหารัศมีความโค้งหลักของคลื่นสะท้อนสามารถใช้ลักษณะสมบัติของลำรังสีที่กล่าวไว้ข้างต้นมาวิเคราะห์ได้ดังนี้

$$\bar{E}^r(s)=\left[-\bar{E}_i(Q_R)+2(\bar{E}_i(Q_R)\cdot\hat{n})\hat{n}\right]\sqrt{\frac{\rho_1^r\rho_2^r}{(\rho_1^r+s)(\rho_2^r+s)}}e^{-jks} \tag{ข.6}$$

โดยที่ ρ_1^r,ρ_2^r คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดสะท้อน



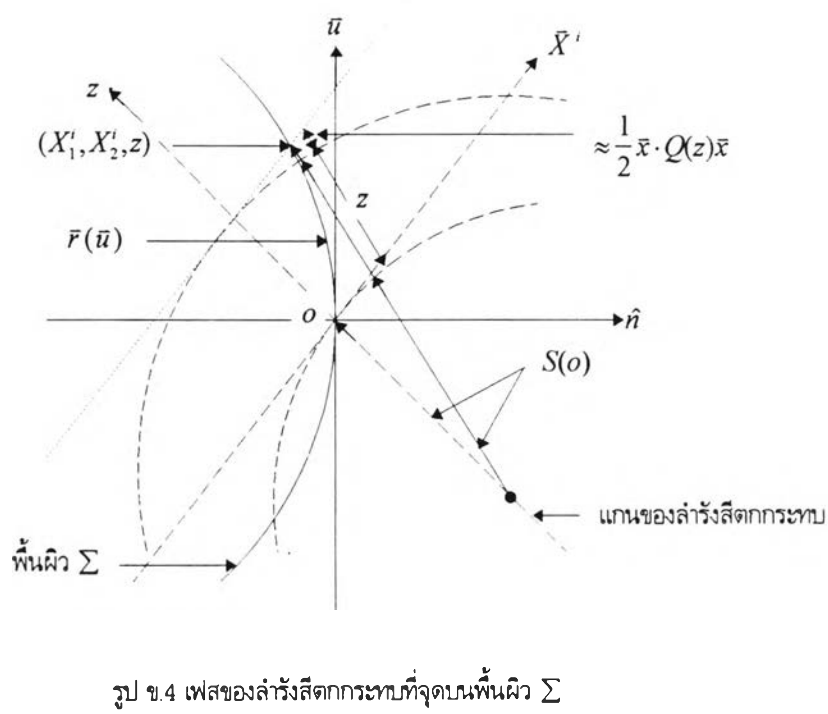
รูป ข.3 ลำรังสีตกกระทบและค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของพื้นผิว Σ

โดยสมมุติให้ o เป็นจุดที่ลำรังสีตกกระทบพบกับพื้นผิว Σ และมี oz เป็นแกนของลำรังสีตกกระทบดังรูป ข.3 โดยที่ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นผิวและมีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้ง (พุ่งเข้าหาลำรังสีตกกระทบ) และทำมุมกับแกนของลำรังสีตกกระทบเป็นมุม θ_i และถ้า $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ใช้บอกตำแหน่งตามขวางในทิศทางหลักของพื้นผิว Σ จากคุณสมบัติของลำรังสี เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับพื้นผิว Σ ได้โดยองค์ประกอบตามแนวแกนของพื้นผิว Σ ใกล้ ๆ จุด o ถูกประมาณด้วยสมการกำลังสองขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ ที่จุดนั้น ดังนั้นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของพื้นผิว Σ อ้างอิงกับจุด o เป็นดังสมการ (ข.7)

$$\bar{r}(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u} \cdot C\bar{u})\hat{n} \tag{ข.7}$$

โดยที่ $\bar{u} = u_1\hat{u}_1 + u_2\hat{u}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของพื้นผิว Σ และ C คือ เมตริกซ์ความโค้งของพื้นผิว Σ ในทิศทางหลัก และถ้ารัศมีความโค้งหลักของพื้นผิว Σ ที่จุด o เป็น R_1, R_2 ตามลำดับ ดังนั้นเมตริกซ์ความโค้งของพื้นผิว Σ ในทิศทางหลักที่จุด o เป็น

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{ข.8}$$



รูป ข.4 เฟสของลำรังสีตกกระทบที่จุดบนพื้นผิว Σ

จากคุณสมบัติของรังสีในหัวข้อที่แล้ว เฟสของลำรังสีตกกระทบที่จุดบนพื้นผิว Σ ที่จุด $\bar{r}=(X_1', X_2', z)$ คือ $kS(\bar{r})$ (ดังพิจารณาได้จากรูป ข.4) โดยที่

$$S(\bar{r}) = S(o) + z + \frac{1}{2}\bar{X}' \cdot Q'(z)\bar{X}' \tag{ข.9}$$

และ $\bar{X}' = X_1'\hat{X}_1' + X_2'\hat{X}_2' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีตกกระทบ และ $Q'(z)$ คือ เมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีตกกระทบในทิศทางหลักที่จุด z อ้างอิงกับแกนของลำรังสีตกกระทบเป็นดังสมการ (ข.10)

$$Q'(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho_1' + z} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho_2' + z} \end{bmatrix} \tag{ข.10}$$

เมื่อพิจารณา $\bar{r}(\bar{u})$ ในระบบพิกัด $(\bar{X}', \hat{z})$ ของลำรังสีตกกระทบ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{r}(\bar{u})$ บน $\bar{X}'$ คือ

$$\bar{X}' = \left[\bar{r}(\bar{u}) \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] = \left[\left(\bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u} \cdot C\bar{u})\hat{n}\right) \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] = \left[\bar{u} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] - O(|\bar{u}|^2)$$

และถ้าไม่คิดพจน์ $O(|\bar{u}|^2)$ ซึ่งมีกำลังมากกว่าหนึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= \left[\left(u_1\hat{u}_1 + u_2\hat{u}_2\right) \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} u_1\hat{u}_1 \cdot \hat{X}_1' + u_2\hat{u}_2 \cdot \hat{X}_1' \\ u_1\hat{u}_1 \cdot \hat{X}_2' + u_2\hat{u}_2 \cdot \hat{X}_2' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{X}_1' \cdot \hat{u}_1 & \hat{X}_1' \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{X}_2' \cdot \hat{u}_1 & \hat{X}_2' \cdot \hat{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \Theta\bar{u} \end{aligned} \tag{ข.11}$$

ในทำนองเดียวกัน องค์ประกอบของ $\bar{r}(\bar{u})$ บน $\hat{z}$ คือ

$$\begin{aligned} z &= \bar{r}(\bar{u}) \cdot \hat{z} = \bar{u} \cdot \hat{z} - \frac{1}{2}(\bar{u} \cdot C\bar{u})\hat{n} \cdot \hat{z} \\ &= \left(u_1\hat{u}_1 \cdot \hat{z} + u_2\hat{u}_2 \cdot \hat{z}\right) + \frac{1}{2}\bar{u} \cdot C\bar{u}\cos\theta_i \\ &= \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \cdot \hat{z} \\ \hat{u}_2 \cdot \hat{z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{u} \cdot C\bar{u}\cos\theta_i \\ &= \bar{v} \cdot \bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u} \cdot C\bar{u}\cos\theta_i \end{aligned} \tag{ข.12}$$

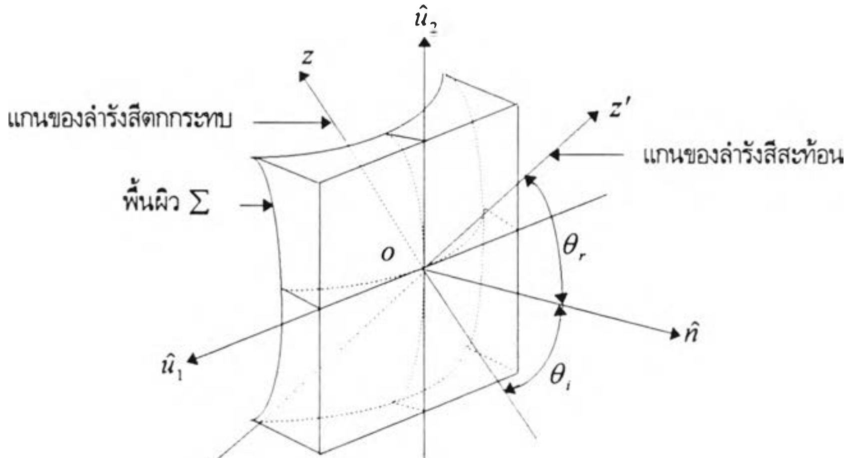
โดยที่ Θ' คือ เมตริกซ์ภายฉายของ $\bar{u}$ บนระนาบ $z=0$ ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย $\hat{X}_1', \hat{X}_2'$ และ $\bar{v} = v_1\hat{u}_1 + v_2\hat{u}_2$ คือเวกเตอร์ภาพฉายของ $\hat{z}$ บนระนาบที่ขนานกับพื้นผิว Σ ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย u_1, u_2 โดยที่ $v_i = \hat{z}\cdot\hat{u}_i$ และเมื่อแทนสมการ (ข.11) และ (ข.12) ลงในสมการ (ข.9) จะได้

$$S(\bar{r}) = S(o) + \bar{v}\cdot\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u}\cdot C\bar{u}\cos\theta_i + \frac{1}{2}(\Theta\bar{u})\cdot Q'(z)(\Theta\bar{u}) \qquad \text{(ข.13)}$$

เนื่องจาก $\bar{u}\cdot C\bar{u} = \bar{u}^T C\bar{u}$ และ $(\Theta'\bar{u})\cdot Q'(z)(\Theta'\bar{u}) = (\Theta'\bar{u})^T Q'(z)(\Theta'\bar{u})$ ทำให้สมการ (ข.13) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S(\bar{r}) &= S(o) + \bar{v}\cdot\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u}^T C\bar{u}\cos\theta_i + \frac{1}{2}(\Theta\bar{u})^T Q'(z)(\Theta\bar{u}) \\ &= S(o) + \bar{v}\cdot\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u}^T C\bar{u}\cos\theta_i + \frac{1}{2}\bar{u}^T\Theta^T Q'(z)\Theta\bar{u} \\ &= S(o) + \bar{v}\cdot\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u}^T(C\cos\theta_i + \Theta^T Q'(z)\Theta)\bar{u} \end{aligned} \qquad \text{(ข.14)}$$

ดังนั้นเฟสที่จุด $\bar{r} = (X_1', X_2', z)$ ของลำรังสีตกกระทบเท่ากับ $kS(\bar{r}) = kS(o) + k\bar{v}\cdot\bar{u} + \frac{1}{2}k\bar{u}^T(C\cos\theta_i + \Theta'^T Q'(z)\Theta')\bar{u}$ ซึ่งประกอบด้วยพจน์กำลังหนึ่งและพจน์กำลังสองขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ สำหรับพจน์กำลังหนึ่งขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ มีเฟสเป็น $k\bar{v}\cdot\bar{u}$ ซึ่งเท่ากับ $\bar{\kappa}\cdot\bar{u}$ โดย $\bar{\kappa}$ คือ ภาพฉายของ $k\hat{z}$ บนระนาบที่ขนานกับพื้นผิว Σ ดังนั้นเฟสที่จุด $\bar{r} = (X_1', X_2', z)$ เนื่องจากพจน์กำลังหนึ่งจะขึ้นอยู่กับ $\bar{\kappa}$ และสำหรับพจน์กำลังสองขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ มีเฟสเป็น $\frac{1}{2}k\bar{u}^T(C\cos\theta_i + \Theta'^T Q'(z)\Theta')\bar{u}$ ดังนั้นเฟสที่จุด $\bar{r} = (X_1', X_2', z)$ เนื่องจากพจน์กำลังสองจะขึ้นอยู่กับ $\Gamma = C\cos\theta_i + \Theta'^T Q'(z)\Theta'$



รูป ข.5 แกนของลำรังสีสะท้อน

ลำรังสีสะท้อนสามารถกำหนดได้เช่นเดียวกับลำรังสีตกกระทบ โดยเลือกให้เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อน $\bar{x}' = x_1'\hat{x}_1' + x_2'\hat{x}_2'$ และแกนของลำรังสีสะท้อนเป็นภาพเสมือนของลำรังสีตกกระทบ ดังนั้นแกนของลำรังสีสะท้อน

oz' เป็นดังรูป ข.5 และเวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์บอกตำแหน่งในทิศทางหลัก $\vec{X}' = X_1'\hat{X}_1' + X_2'\hat{X}_2'$ เป็นดังสมการ (ข.15)

$$\hat{x}_{1,2}^r = \hat{X}_{1,2}' - 2(\hat{X}_{1,2}' \cdot \hat{n})\hat{n} \qquad (ข.15)$$

เช่นเดียวกับลำรังสีตกกระทบ เมื่อพิจารณา $\vec{r}(\vec{u})$ ในระบบพิกัด $(\vec{x}^r, \hat{z}')$ ของลำรังสีสะท้อน พบว่า

$$\vec{x}^r = \vec{r}(\vec{u}) \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1^r \\ \hat{x}_2^r \end{bmatrix} = \Theta^r \vec{u} \qquad (ข.16)$$

โดยที่ $\Theta^r = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^r \cdot \hat{u}_1 & \hat{x}_1^r \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{x}_2^r \cdot \hat{u}_1 & \hat{x}_2^r \cdot \hat{u}_2 \end{bmatrix}$ ซึ่งเมื่อแทน $\hat{x}_1^r, \hat{x}_2^r$ ในสมการ (ข.15) ลงไปจะได้ $\Theta^r = \begin{bmatrix} \hat{X}_1' \cdot \hat{u}_1 & \hat{X}_1' \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{X}_2' \cdot \hat{u}_1 & \hat{X}_2' \cdot \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \Theta'$ เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$ และ

$$z' = \vec{r}(\vec{u}) \cdot \hat{z}' = \vec{v}' \cdot \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}^T C \vec{u} \cos\theta_r \qquad (ข.17)$$

โดยที่ Θ' คือ เมตริกซ์ภาพฉายของ $\vec{u}$ บนระนาบ $z' = 0$ ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย $\hat{x}_1^r, \hat{x}_2^r$ และ $\vec{v}' = v_1'\hat{u}_1 + v_2'\hat{u}_2$ คือเวกเตอร์ภาพฉายของ $\hat{z}'$ บนระนาบที่ขนานกับพื้นผิว Σ ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย u_1, u_2 โดยที่ $v_i' = \hat{z}' \cdot \hat{u}_i$ และเมื่อแทนสมการ (ข.16) และ (ข.17) ลงในสมการ (ข.9) จะได้

$$\begin{aligned} S'(\vec{r}) &= S(o) + z' + \frac{1}{2}\vec{x}^r \cdot Q^r(z')\vec{x}^r \\ &= S(o) + \vec{v}' \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}^T(-C\cos\theta_r + \Theta'^T Q^r(z')\Theta')\vec{u} \end{aligned} \qquad (ข.18)$$

ดังนั้นเฟสที่จุด $\vec{r} = (x_1^r, x_2^r, z')$ ของลำรังสีสะท้อนเป็น $k'S'(\vec{r}) = k'S(o) + k'\vec{v}' \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}k'\vec{u}^T(-C\cos\theta_r + \Theta'^T Q^r(z')\Theta')\vec{u}$ ซึ่งประกอบด้วยพจน์กำลังหนึ่งและพจน์กำลังสองขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ สำหรับพจน์กำลังหนึ่งขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ มีเฟสเป็น $k\vec{v}' \cdot \vec{u}$ จะเท่ากับ $\vec{\kappa}' \cdot \vec{u}$ โดย $\vec{\kappa}'$ คือ ภาพฉายของ $k\hat{z}'$ บนระนาบที่ขนานกับพื้นผิว Σ ดังนั้นเฟสที่จุด $\vec{r} = (x_1^r, x_2^r, z')$ เนื่องจากพจน์กำลังหนึ่งจะขึ้นอยู่กับ $\vec{\kappa}'$ และสำหรับพจน์กำลังสองขององค์ประกอบตามขวางของพื้นผิว Σ มีเฟสเป็น $\frac{1}{2}k\vec{u}^T(-C\cos\theta_r + \Theta'^T Q^r(z')\Theta')\vec{u}$ ดังนั้นเฟสที่จุด $\vec{r} = (x_1^r, x_2^r, z')$ เนื่องจากพจน์กำลังสองจะขึ้นอยู่กับ $\Gamma' = C\cos\theta_r + \Theta'^T Q^r(z')\Theta'$

และเนื่องจากเฟสของลำรังสีตกกระทบและลำรังสีสะท้อนที่จุดบนพื้นผิว Σ ต้องเท่ากันตามเงื่อนไขการเท่ากันของเฟส (phase matching condition) ดังนั้น $kS(\vec{r}) = k'S'(\vec{r})$ และถ้าการสะท้อนเกิดขึ้นในบริเวณที่เป็นตัวกลางสารเอกพันธุ์แล้ว $k = k'$ และการเท่ากันของเฟสต้องสอดคล้องทั้งพจน์กำลังหนึ่งและพจน์กำลังสอง ดังนั้นเมื่อเทียบพจน์กำลังหนึ่งจะได้

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}' \cdot \vec{u} \qquad (ข.19)$$

เนื่องจาก $\bar{v} = v_1\hat{u}_1 + v_2\hat{u}_2$ และ $\bar{v}' = v_1'\hat{u}_1 + v_2'\hat{u}_2$ ทำให้สมการ (ข.19) เขียนได้ใหม่เป็น

$$u_1\hat{z}\cdot\hat{u}_1 + u_2\hat{z}\cdot\hat{u}_2 = u_1\hat{z}'\cdot\hat{u}_1 + u_2\hat{z}'\cdot\hat{u}_2 \tag{ข.20}$$

หรือ

$$u_1\sin\theta_i\cos\phi + u_2\sin\theta_i\sin\phi = u_1\sin\theta_r\cos\phi + u_2\sin\theta_r\sin\phi \tag{ข.21}$$

โดยที่ ϕ คือ มุมที่เวกเตอร์ภาพฉายของ $\hat{z}$ และ $\hat{z}'$ บนระนาบที่ขนานกับพื้นผิว Σ ทำกับ $\hat{u}_1$ ดังนั้นสมการ (ข.21) จะเป็นจริงเมื่อ $\sin\theta_i = \sin\theta_r$ ซึ่งจะได้ $\theta_i = \theta_r$ หรือ $\theta_i = \pi - \theta_r$ แต่เนื่องจากมุมที่กำหนดในการวิเคราะห์ดังรูป ข.5 กำหนดให้มีค่าไม่เกิน $\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\theta_i = \theta_r$ ซึ่งสอดคล้องกับกฎของสเนลล์ และเมื่อเทียบพจน์กำลังสองจะได้

$$C\cos\theta_i + \Theta^T Q(z)\Theta = -C\cos\theta_r + \Theta'^T Q'(z')\Theta' \tag{ข.22}$$

เนื่องจาก $\theta_i = \theta_r$ และ $\Theta' = \Theta = \Theta$ ดังนั้น

$$\Theta^T Q'(z')\Theta = \Theta^T Q(z)\Theta + 2C\cos\theta_i \tag{ข.23}$$

หรือ

$$Q'(z') = Q(z) + 2\cos\theta_i(\Theta^T)^{-1}C\Theta^{-1} \tag{ข.24}$$

และเมื่อพิจารณาที่จุดใกล้ ๆ จุดตกกระทบ o มาก ๆ $(z' = z \to 0)$ เมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีสะท้อนที่จุดนั้นจะประมาณเท่ากับที่จุดตกกระทบ o ดังสมการ (ข.25)

$$Q'(0) = Q(0) + 2\cos\theta_i(\Theta^T)^{-1}C\Theta^{-1} \tag{ข.25}$$

ซึ่งเมื่อแทนสมการ (ข.10) และ $\Theta = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2 \\ \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2 \end{bmatrix}$ ลงในสมการ (ข.25) จะได้

$$\begin{aligned} Q'(0) &= \begin{bmatrix} 1/\rho_1^i & 0 \\ 0 & 1/\rho_2^i \end{bmatrix} + 2\cos\theta_i \begin{bmatrix} \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 \\ \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2 & \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2 \\ \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\rho_1^i & 0 \\ 0 & 1/\rho_2^i \end{bmatrix} + \frac{2\cos\theta_i}{|\Theta|^2} \begin{bmatrix} \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2 & -\hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 \\ -\hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2 & \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_2 & -\hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_2 \\ -\hat{X}_2^i\cdot\hat{u}_1 & \hat{X}_1^i\cdot\hat{u}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{ข.26}$$

โดยที่

$$Q_{11}^{r} = \frac{1}{\rho_1^i} + \frac{2\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{22}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{21}^2}{R_2}\right) \qquad (ข.27)$$

$$Q_{12}^{r} = Q_{21}^{r} = -\frac{2\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{22}\Theta_{12}}{R_1} + \frac{\Theta_{21}\Theta_{11}}{R_2}\right) \qquad (ข.28)$$

$$Q_{22}^{r} = \frac{1}{\rho_2^i} + \frac{2\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{12}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{11}^2}{R_2}\right) \qquad (ข.29)$$

และ

$$\Theta_{jk} = \hat{X}_j^{r} \cdot \hat{u}_k \qquad (ข.30)$$

เมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีสะท้อนในสมการ (ข.26) เป็นเมตริกซ์สมมาตรแต่ไม่เป็นเมตริกซ์ทแยงมุม เนื่องจากเวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนตามสมการ (ข.15) ไม่ใช่เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางในทิศทางหลัก สำหรับการหาเมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีสะท้อนในทิศทางหลักที่ซึ่งประกอบด้วยความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนในแนวทแยงมุมนั้นสามารถหาได้โดยใช้วิธีการแปลงระบบพิกัดดังนี้

โดยกำหนดให้ระบบพิกัดใหม่ของลำรังสีสะท้อนมี $\bar{X}^{r} = X_1^{r}\hat{X}_1^{r} + X_2^{r}\hat{X}_2^{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนในทิศทางหลัก และมีแกนของลำรังสีสะท้อน oz' เหมือนเดิม ดังนั้นเฟสที่จุด $\bar{r} = (X_1^{r}, X_2^{r}, z')$ จะเป็น $k'S^{r}(\bar{r})$ โดยที่

$$S^{r}(\bar{r}) = S(o) + z' + \frac{1}{2}\bar{X}^{r} \cdot Q_{dia}^{r}(z')\bar{X}^{r} \qquad (ข.31)$$

โดยที่ $Q_{dia}^{r}(z') = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1^{r} + z'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2^{r} + z'} \end{bmatrix}$ และ ρ_1^{r}, ρ_2^{r} คือ รัศมีความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนที่จุดตกกระทบ o และเนื่องจากเฟสที่จุดเดียวกันของลำรังสีสะท้อนไม่ขึ้นอยู่กับระบบพิกัดที่ใช้ ดังนั้น $k'S^{r}(\bar{r}) = k'S^{r}(\bar{r})$ ซึ่งเมื่อแทนสมการ (ข.18) และ (ข.31) ลงไปจะได้

$$\bar{x}^{rT} Q^{r}(z')\bar{x}^{r} = \bar{X}^{rT} Q_{dia}^{r}(z')\bar{X}^{r} \qquad (ข.32)$$

จากสมการ (ข.32) ถ้ากำหนดให้ $\bar{x}^{r} = P\bar{X}^{r}$ โดยที่ P เป็นเมตริกซ์ออร์โทโกนัล ซึ่งมีคุณสมบัติคือ $P^{T} = P^{-1}$ และพิจารณาที่จุดใกล้ ๆ จุดตกกระทบ o มาก ๆ พบว่า

$$\bar{x}^{rT} Q^{r}(0)\bar{x}^{r} = (P\bar{X}^{r})^{T} Q^{r}(0)(P\bar{X}^{r}) = \bar{X}^{rT}(P^{T}Q^{r}(0)P)\bar{X}^{r} \qquad (ข.33)$$

ดังนั้นที่จุดใกล้ ๆ จุดตกกระทบ o มาก ๆ $Q_{dia}(0) = P^T Q(0) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1^r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2^r} \end{bmatrix}$ ซึ่งจากแคลคูลัส (อรุณี, 2533) ความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อน $\frac{1}{\rho_1^r}, \frac{1}{\rho_2^r}$ ที่จุดตกกระทบ o คือ รากของสมการ $\det\left(Q(0) - \frac{1}{\rho_i^r} I\right) = 0$ ซึ่งเป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ของสมการ $Q(0)x^r = \frac{1}{\rho_i^r} x^r$ และ $P = [\Pi_1 \quad \Pi_2]$ เป็น เมตริกซ์ออร์โทโกนัลที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ค่าเจาะจง Π_1, Π_2 ซึ่งหาได้จากสมการ $\left(Q(0) - \frac{1}{\rho_i^r} I\right)\Pi_i = 0$ ดังนั้นความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนสามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - \frac{1}{\rho^r} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} - \frac{1}{\rho^r} \end{vmatrix} = 0$$

หรือ
$$\left(\frac{1}{\rho^r}\right)^2 - (Q_{11} + Q_{22})\left(\frac{1}{\rho^r}\right) + \left(Q_{11}Q_{22} - (Q_{22})^2\right) = 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1,2}^r} &= \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{11} + Q_{22})^2 - 4\left(Q_{11}Q_{22} - (Q_{22})^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4(Q_{22})^2} \end{aligned} \tag{ข.34}$$

เมื่อแทนสมการ (ข.27) (ข.28) และ (ข.29) ลงในสมการ (ข.34) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1,2}^r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i}\right) + \frac{\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{\Theta_{22}^2 + \Theta_{12}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{12}^2 + \Theta_{11}^2}{R_2}\right) \pm \\ \frac{1}{2}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i}\right)^2 + \frac{4\cos\theta_i}{|\Theta|^2}\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i}\right)\left(\frac{\Theta_{22}^2 - \Theta_{12}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{12}^2 - \Theta_{11}^2}{R_2}\right) \\ &+ \frac{4\cos^2\theta_i}{|\Theta|^4}\left[\left(\frac{\Theta_{22}^2 + \Theta_{12}^2}{R_1} + \frac{\Theta_{12}^2 + \Theta_{11}^2}{R_2}\right)^2 - \frac{4|\Theta|^2}{R_1 R_2}\right] \end{aligned}\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{ข.35}$$

และเมตริกซ์ $P = [\Pi_1 \quad \Pi_2]$ สามารถหาได้ดังนี้ โดยสำหรับ Π_1 หาได้จาก $\left(Q(0) - \frac{1}{\rho_1^r} I\right)\Pi_1 = 0$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} Q_{11}-1/\rho_1^r & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22}-1/\rho_1^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}=0$$

ซึ่งจะได้

$$\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)p_{11}+Q_{12}p_{21}=0$$
$$Q_{12}p_{11}+\left(Q_{22}-1/\rho_1^r\right)p_{21}=0$$

และถ้าให้ $p_{11}=t$ จะได้ $p_{21}=-\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)t}{Q_{12}}$ ดังนั้น $\Pi_1=\begin{bmatrix} t \\ -\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)t}{Q_{12}} \end{bmatrix}$ เพื่อให้ Π_1 เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราจะเลือก t ซึ่ง $\left|\Pi_1\right|=1$ นั่นคือ $t=\dfrac{Q_{12}}{\sqrt{(Q_{12})^2+(Q_{11}-1/\rho_1^r)^2}}$ ดังนั้น

$$\Pi_1=\begin{bmatrix} \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}} \\ -\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}} \end{bmatrix} \tag{ข.36}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

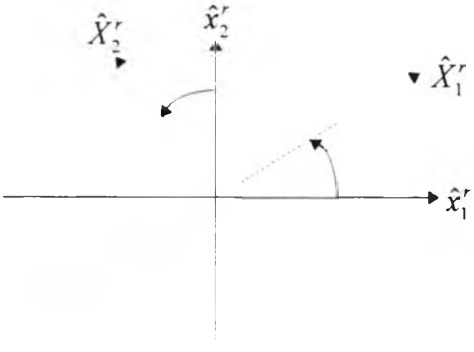
$$\Pi_2=\begin{bmatrix} \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}} \\ -\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}} \end{bmatrix} \tag{ข.37}$$

ดังนั้นเมตริกซ์ $P=\left[\Pi_1 \quad \Pi_2\right]$ เป็นดังสมการ (ข.38)

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}} & \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}} \\ -\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_1^r\right)}} & -\dfrac{\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}{\sqrt{\left(Q_{12}\right)^2+\left(Q_{11}-1/\rho_2^r\right)}} \end{bmatrix} \tag{ข.38}$$

จากการแปลงระบบพิกัด เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนระบบพิกัดใหม่ $\hat{X}_1^r, \hat{X}_2^r$ จะเกิดจากการหมุนไปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนระบบพิกัดเดิม $\hat{x}_1^r, \hat{x}_2^r$ ดังรูป ข.6 ซึ่งจะพบว่า

$$\hat{X}_1^r = \left(\hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_1^r\right)\hat{x}_1^r + \left(\hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_2^r\right)\hat{x}_2^r$$
$$\hat{X}_2^r = \left(\hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_1^r\right)\hat{x}_1^r + \left(\hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_2^r\right)\hat{x}_2^r \qquad \text{(ข.39)}$$



รูป ข.6 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่บอกตำแหน่งตามขวางในระบบพิกัดเดิมกับในระบบพิกัดใหม่

และเนื่องจากเวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนกำหนดได้โดย

$$\bar{X} = x_1^r\hat{x}_1^r + x_2^r\hat{x}_2^r = X_1^r\hat{X}_1^r + X_2^r\hat{X}_2^r \qquad \text{(ข.40)}$$

ดังนั้น

$$x_1^r = \bar{X}\cdot\hat{x}_1^r = X_1^r(\hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_1^r) + X_2^r(\hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_1^r)$$
$$x_2^r = \bar{X}\cdot\hat{x}_2^r = X_1^r(\hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_2^r) + X_2^r(\hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_2^r)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_1^r & \hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_1^r \\ \hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_2^r & \hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_2^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^r \\ X_2^r \end{bmatrix} \qquad \text{(ข.41)}$$

และเนื่องจาก $\bar{x}^r = P\bar{X}^r$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^r \\ X_2^r \end{bmatrix} \qquad \text{(ข.42)}$$

เมื่อเทียบสมการ (ข.41) กับ (ข.42) จะพบว่า $\Pi_1 = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_1^r \\ \hat{X}_1^r \cdot \hat{x}_2^r \end{bmatrix}$ และ $\Pi_2 = \begin{bmatrix} \hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_1^r \\ \hat{X}_2^r \cdot \hat{x}_2^r \end{bmatrix}$ ดังนั้นเมื่อแทนลงในสมการ (ข.39) จะได้

$$\hat{X}_1^r = \frac{Q_{12}^r \hat{x}_1^r - (Q_{11}^r - 1/\rho_1^r)\hat{x}_2^r}{\sqrt{(Q_{12}^r)^2 + (Q_{11}^r - 1/\rho_1^r)}}$$
$$\hat{X}_2^r = \frac{Q_{12}^r \hat{x}_1^r - (Q_{11}^r - 1/\rho_2^r)\hat{x}_2^r}{\sqrt{(Q_{12}^r)^2 + (Q_{11}^r - 1/\rho_2^r)}} \quad \text{(ข.43)}$$

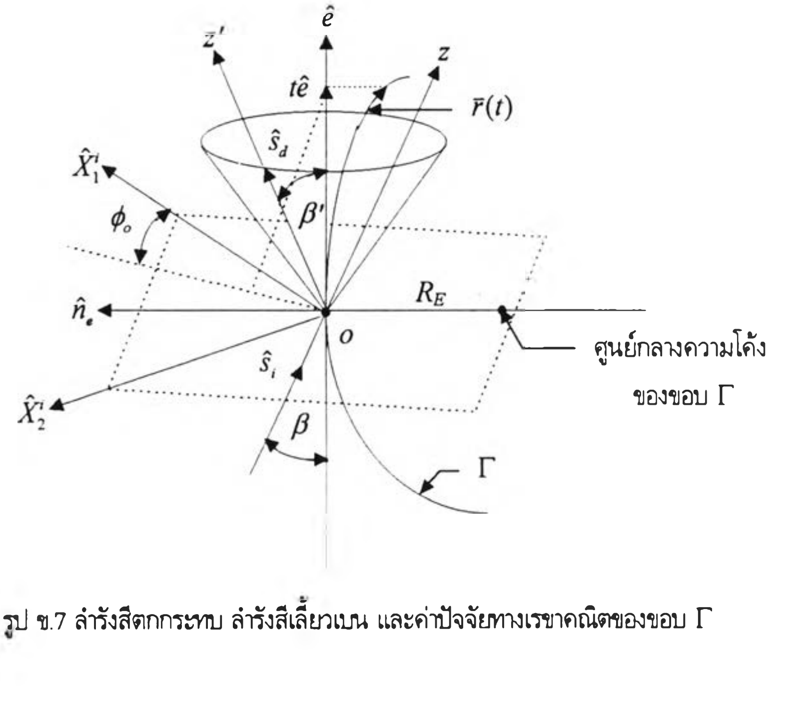
จากที่กล่าวมาข้างต้น เราพบว่า Π_1, Π_2 เป็นเวกเตอร์ที่ใช้กำหนดทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ใช้บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีสะท้อนในทิศทางหลัก และความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนสามารถหาได้จากการหาค่าเจาะจงของสมการ $Q^r(0)x^r = \frac{1}{\rho_i^r} x^r$ ซึ่งจะได้ความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนเป็นดังสมการ (ข.35)

<u>รัศมีความโค้งหลักของรังสีเลี้ยวเบน</u>

จากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต สนามไฟฟ้าเลี้ยวเบนในตัวกลางเอกพันธุ์ที่ไม่มีการสูญเสียสามารถหาได้ดังสมการ (ข.44) ซึ่งประกอบด้วยตัวประกอบการลดทอนเป็นฟังก์ชันของรัศมีความโค้งหลักของลำรังสีเลี้ยวเบนหรือระยะระหว่างจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่งกับลำดับที่สอง ระยะตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนสามารถหาได้โดยใช้คุณสมบัติของลำรังสีเช่นเดียวกับการหารัศมีความโค้งหลักของลำรังสีสะท้อนดังนี้

$$\vec{E}^d(s) = \vec{E}^i(Q_D) \cdot \tilde{D} \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s(\rho_2^d + s)}} e^{-jks} \quad \text{(ข.44)}$$

โดยที่ ρ_2^d คือ ระยะระหว่างจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับหนึ่งกับจุดตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับสอง



รูป ข.7 ลำรังสีตกกระทบ ลำรังสีเลี้ยวเบน และค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของขอบ Γ

สมมุติให้ o เป็นจุดที่ลำรังสีตกกระทบพบกับขอบ Γ และมี oz เป็นแกนของลำรังสีตกกระทบดังรูป ข.7 โดยมี $\hat{e}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สัมผัสกับขอบ Γ ที่จุด o ทำมุมกับแกนของลำรังสีตกกระทบเป็นมุม β และ $\hat{n}_e$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากศูนย์กลางความโค้งตั้งฉากกับขอบ Γ ที่จุด o และจากคุณสมบัติของลำรังสี จุดบนขอบ Γ ใกล้ ๆ จุด o สามารถกำหนดได้ด้วยเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่อ้างอิงกับจุด o เป็น

$$\bar{r}(t) = t\hat{e} - \frac{1}{2}\left(t\hat{e} \cdot Q^{\Gamma} t\hat{e}\right)\hat{n}_e \qquad \text{(ข.45)}$$

จากสมการ (ข.45) Q^{Γ} คือ ความโค้งของขอบ Γ ที่จุด o และถ้า R_E คือ รัศมีความโค้งของขอบ Γ ที่จุด o ความโค้งของขอบ Γ ที่จุด o $Q^{\Gamma} = \frac{1}{R_E}$ ดังนั้นสมการ (ข.45) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\bar{r}(t) = t\hat{e} - \frac{t^2}{2R_E}\hat{n}_e \qquad \text{(ข.46)}$$

จากคุณสมบัติของลำรังสี เฟสของลำรังสีตกกระทบที่จุดบนขอบ Γ ที่จุด $\bar{r}(t) = (X_1', X_2', z)$ คือ $kS(\bar{r})$ โดยที่

$$S(\bar{r}) = S(o) + z + \frac{1}{2}\bar{X}' \cdot Q'(z)\bar{X}' \qquad \text{(ข.47)}$$

และ $\bar{X}' = X_1'\hat{X}_1' + X_2'\hat{X}_2' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งตามขวางของลำรังสีตกกระทบ และ $Q'(z)$ คือ เมตริกซ์ความโค้งของลำรังสีตกกระทบในทิศทางหลักที่จุด z อ้างอิงกับแกนของลำรังสีตกกระทบเป็นดังสมการ (ข.48)

$$Q'(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1' + z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2' + z} \end{bmatrix} \qquad \text{(ข.48)}$$

และเมื่อพิจารณา $\bar{r}(t)$ ในระบบพิกัด $(\bar{X}', \hat{s}_i)$ ของลำรังสีตกกระทบ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{r}(t)$ บน $\bar{X}'$ คือ

$$\bar{X}' = \left[\bar{r}(t) \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] = \left[\left(t\hat{e} - \frac{t^2}{2R_E}\hat{n}_e\right) \cdot \begin{Bmatrix} \hat{X}_1' \\ \hat{X}_2' \end{Bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} t(\hat{e} \cdot \hat{X}_1') \\ t(\hat{e} \cdot \hat{X}_2') \end{bmatrix} - O(t^2)$$

ถ้าไม่คิดพจน์ $O(t^2)$ ซึ่งมีกำลังมากกว่าหนึ่งจะได้

$$\bar{X}' = t\bar{w} \qquad \text{(ข.49)}$$

โดยที่ $\bar{w}=(\hat{e}\cdot\hat{X}_1')\hat{X}_1'+(\hat{e}\cdot\hat{X}_2')\hat{X}_2'$ เป็นเวกเตอร์ภาพฉายของ $\hat{e}$ บนระนาบ $z=0$ ซึ่งเป็นระนาบที่ประกอบด้วย $\hat{X}_1',\hat{X}_2'$ และในทำนองเดียวกัน องค์ประกอบของ $\bar{r}(t)$ บนแกนของลำรังสีตกกระทบคือ

$$\begin{aligned} z=\bar{r}(t)\cdot\hat{s}_i &= t(\hat{e}\cdot\hat{s}_i)-\frac{t^2}{2R_E}\hat{n}_e\cdot\hat{s}_i \\ &= t\cos\beta-\frac{t^2}{2R_E}\hat{n}_e\cdot\hat{s}_i \end{aligned} \tag{ข.50}$$

โดยที่ $\hat{s}_i$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแนวแกนของลำรังสีตกกระทบ และเมื่อแทนสมการ (ข.49) และ (ข.50) ลงในสมการ (ข.47) จะได้

$$S(\bar{r})=S(o)+t\cos\beta-\frac{1}{2}qt^2 \tag{ข.51}$$

โดยที่ $q=\dfrac{\hat{n}_e\cdot\hat{s}_i}{R_E}-\bar{w}\cdot Q(z)\bar{w}$ และจากรูป ข.7 เวกเตอร์ภาพฉาย $\bar{w}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{w}=\sin\beta\cos\phi_o\hat{X}_1'+\sin\beta\sin\phi_o\hat{X}_2'=\begin{bmatrix}\sin\beta\cos\phi_o\\ \sin\beta\sin\phi_o\end{bmatrix} \tag{ข.52}$$

ดังนั้น

$$\bar{w}\cdot Q(z)\bar{w}=\sin^2\beta\left(\frac{\cos^2\phi_o}{\rho_1^i+z}+\frac{\sin^2\phi_o}{\rho_2^i+z}\right)=\frac{\sin^2\beta}{R} \tag{ข.53}$$

โดยที่ $\dfrac{1}{R}=\dfrac{\cos^2\phi_o}{\rho_1^i+z}+\dfrac{\sin^2\phi_o}{\rho_2^i+z}$ และถ้าลำรังสีตกกระทบเป็นคลื่นทรงกลม $\rho_1^i=\rho_2^i=\rho^i$ สมการ (ข.53) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\bar{w}\cdot Q(z)\bar{w}=\frac{\sin^2\beta}{\rho^i+z} \tag{ข.54}$$

เมื่อพิจารณาลำรังสีเลี้ยวเบนซึ่งกำหนดให้แกนของลำรังสี oz' อยู่ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{s}_d$ ที่ทำมุม β' กับ $\hat{e}$ ซึ่งจุดตัดของลำรังสีลำดับที่หนึ่งอยู่ที่จุด o บนขอบ Γ และจุดตัดของลำรังสีลำดับที่สองอยู่ที่ $-\rho_2^d\hat{s}_d$ ดังนั้นเฟสของลำรังสีเลี้ยวเบนที่จุด $\bar{r}(t)$ ในระบบพิกัด $(\bar{X}^d,\hat{s}_d)$ ของลำรังสีเลี้ยวเบนคือ $kS'(\bar{r})$ โดยที่

$$S'(\bar{r})=s(o)+z'+\frac{1}{2}\bar{X}^d\cdot Q^d(z)\bar{X}_d=s(o)+t\cos\beta'-\frac{1}{2}q't^2 \tag{ข.55}$$

โดยที่ $q' = \frac{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_d}{R_E} - \bar{w}' \cdot Q^d(z')\bar{w}'$ และ $Q^d(z') = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_2^d + z'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2^d + z'} \end{bmatrix}$ ดังนั้น

$$\bar{w}' \cdot Q^d(z')\bar{w}' = \frac{\sin^2 \beta'}{\rho_2^d + z'} \tag{ข.56}$$

จากเงื่อนไขการเท่ากันของเฟส เฟสของลำรังสีตกกระทบกับลำรังสีเลี้ยวเบนเนื่องจากพจน์กำลังหนึ่งขององค์ประกอบในแนวขนานของขอบต้องเท่ากัน ดังนั้น $k\cos\beta = k\cos\beta'$ ซึ่งจะได้ $\beta = \beta'$ และเฟสของลำรังสีตกกระทบกับลำรังสีเลี้ยวเบนเนื่องจากพจน์กำลังสองขององค์ประกอบในแนวขนานของขอบต้องเท่ากัน ดังนั้น $kq = kq'$ ซึ่งจะได้

$$\frac{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_i}{R_E} - \frac{\sin^2 \beta}{R + z} = \frac{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_d}{R_E} - \frac{\sin^2 \beta'}{\rho_2^d + z'} \tag{ข.57}$$

เมื่อพิจารณาที่จุดใกล้ ๆ จุดเลี้ยวเบน o บนขอบ Γ มาก ๆ $(z = z' \to 0)$ จะพบว่า

$$\frac{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_i}{R_E} - \frac{\sin^2 \beta}{R} = \frac{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_d}{R_E} - \frac{\sin^2 \beta}{\rho_2^d} \tag{ข.58}$$

หรือ

$$\frac{1}{\rho_2^d} = \frac{1}{R} - \frac{\hat{n}_e \cdot (\hat{s}_i - \hat{s}_d)}{R_E \sin^2 \beta} \tag{ข.59}$$

ซึ่งถ้าลำรังสีตกกระทบเป็นคลื่นทรงกลม

$$\frac{1}{\rho_2^d} = \frac{1}{\rho^i} - \frac{\hat{n}_e \cdot (\hat{s}_i - \hat{s}_d)}{R_E \sin^2 \beta} \tag{ข.60}$$

สมการ (ข.59) เป็นสมการที่นำไปใช้หารัศมีความโค้งหลักของลำรังสีเลี้ยวเบนที่จุดเลี้ยวเบนที่ขอบหรือระยะระหว่างจุดตัดของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่หนึ่ง (จุดเลี้ยวที่ขอบ) กับจุดตัดของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่สอง ซึ่งจะขึ้นอยู่กับรัศมีความโค้งของขอบที่จุดเลี้ยวเบน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกตั้งฉากกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน เวกเตอร์ในทิศทางตามแกนของลำรังสีตกกระทบและลำรังสีสะท้อน และมุมที่แกนของลำรังสีตกกระทบทำกับเวกเตอร์ที่ขนานกับขอบที่จุดนั้น

ภาคผนวก ค.

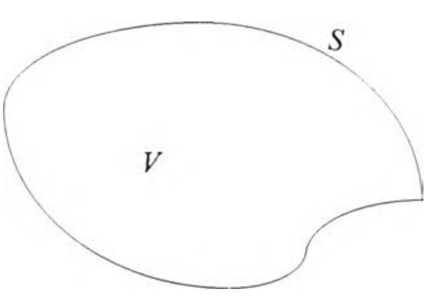
การหากรีนฟังก์ชันของสมการเชิงอนุพันธ์

กรีนฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันซึ่งแสดงถึงผลตอบของระบบเชิงกายภาพแบบเชิงเส้นที่ถูกกระตุ้นด้วยแหล่งกำเนิดแบบเดลต้าฟังก์ชัน และมีเงื่อนไขขอบเขตที่จำเป็นซึ่งขึ้นอยู่กับแต่ละระบบที่พิจารณา การหากรีนฟังก์ชันนั้นสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การหากรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunctions) การหากรีนฟังก์ชันในรูปของผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ (homogeneous equation) หรือการหากรีนฟังก์ชันในรูปอินทิกรัล โดยแต่ละวิธีมีข้อจำกัดแตกต่างกัน ดังนั้นในภาคผนวกนี้จะอธิบายรายละเอียดของวิธีการทั้ง 3 เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารูปลิ่มที่ระบบสมการอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์

<u>การหากรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจง</u>

การหากรีนฟังก์ชันโดยการกระจายกรีนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงนี้เป็นการหากรีนฟังก์ชันสำหรับกรณีที่บริเวณที่พิจารณาเป็นบริเวณปิด ดังนั้นเมื่อพิจารณาบริเวณปิด V ที่ถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว S ดังรูป ค.1 กรีนฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นสอดคล้องกับสมการ (ค.1)

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\bar{r},\bar{r}') = -\delta(\bar{r}-\bar{r}') \qquad \text{ในบริเวณ } V \tag{ค.1}$$



รูป ค.1 บริเวณปิด V ที่ถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว S

และมีเงื่อนไขขอบเขตบนพื้นผิว S สอดคล้องกับเงื่อนไขอย่างใดอย่างหนึ่งขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาคือ $G=0$ หรือ $\dfrac{\partial G}{\partial n}=0$ หรือ $G+h\dfrac{\partial G}{\partial n}=0$

เนื่องจากฟังก์ชันใด ๆ สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจง ดังนั้นกรีนฟังก์ชันสามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงเป็น

$$G(\bar{r},\bar{r}') = \sum_n A_n \Phi_n(\bar{r}) \tag{ค.2}$$

โดยที่ A_n คือ สัมประสิทธิ์ของการกระจาย และ $\Phi_n(\bar{r})$ คือ ฟังก์ชันเจาะจง โดย $\sum_n$ แทนการกระจายอนุกรมซึ่งเป็นผลรวมชั้นเดียว (single summation) สำหรับกรณี 1 มิติ และเป็นผลรวม 2 ชั้น (double summation) สำหรับกรณี 2 มิติ และเป็นผลรวม 3 ชั้น (triple summation) สำหรับกรณี 3 มิติ และเช่นเดียวกันเดลต้าฟังก์ชันก็สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงได้เป็น

$$\delta(\bar{r}-\bar{r}') = \sum_n B_n \Phi_n(\bar{r}) \tag{ค.3}$$

โดยที่ B_n คือ สัมประสิทธิ์ของการกระจายสามารถหาได้โดยคูณทั้งสองด้านของสมการ (ค.3) ด้วย $\Phi_m(\bar{r})$ แล้วอินทิเกรตบน V และจากคุณสมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชันเจาะจงคือ

$$\int_V \Phi_n(\bar{r})\Phi_m(\bar{r})dV = 0 \qquad \text{เมื่อ } n \neq m \tag{ค.4}$$

ดังนั้น

$$B_n = \frac{\int_V \delta(\bar{r}-\bar{r}')\Phi_n(\bar{r})dV}{\int_V [\Phi_n(\bar{r})]^2 dV} = \frac{\Phi_n(\bar{r}')}{\int_V [\Phi_n(\bar{r})]^2 dV} \tag{ค.5}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (ค.3) จะได้

$$\delta(\bar{r}-\bar{r}') = \sum_n \frac{\Phi_n(\bar{r})\Phi_n(\bar{r}')}{\int_V [\Phi_n(\bar{r})]^2 dV} = \sum_n \Phi_n^*(\bar{r})\Phi_n^*(\bar{r}') \tag{ค.6}$$

โดยที่ $\Phi_n^*(\bar{r}) = \dfrac{\Phi_n(\bar{r})}{\sqrt{\int_V [\Phi_n(\bar{r})]^2 dV}}$ คือ ฟังก์ชันเจาะจงปรับบรรทัดฐานแล้ว (normalized eigenfunctions) เมื่อแทนสมการ (ค.2) และ (ค.3) ลงในสมการ (ค.1) จะได้

$$\sum_n (\nabla^2 + k^2) A_n \Phi_n(\bar{r}) = -\sum_n B_n \Phi_n(\bar{r}) \tag{ค.7}$$

เนื่องจาก $(\nabla^2 + k_n^2) A_n \Phi_n(\bar{r}) = 0$ โดยที่ k_n^2 คือ ค่าเจาะจง (eigenvalues) ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (ค.7) จะได้

$$\sum_n (\nabla^2 + k^2) A_n \Phi_n(\bar{r}) = \sum_n (k^2 - k_n^2) A_n \Phi_n(\bar{r}) = -\sum_n B_n \Phi_n(\bar{r})$$

ดังนั้น $(k^2 - k_n^2) A_n = -B_n$ และสมการ (ค.2) เขียนใหม่เป็น

$$G(\bar{r},\bar{r}') = \sum_n \frac{\Phi_n^*(\bar{r})\Phi_n^*(\bar{r}')}{k_n^2 - k^2} \quad (ค.8)$$

และเมื่อพิจารณากรณี 2 มิติ เช่น ในระบบพิกัดทรงกระบอก กรีนฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นสอดคล้องกับสมการ (ค.9)

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi} + k^2\right] G(\rho,\phi;\rho',\phi') = -\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')}{\rho} \quad (ค.9)$$

ถ้าในทิศทาง ϕ อยู่ในบริเวณปิดที่มีเงื่อนไขขอบเขตในบริเวณนั้น กรีนฟังก์ชันในกรณีนี้สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$G(\rho,\phi;\rho',\phi) = \sum_n \Phi_n^*(\phi)\Phi_n^*(\phi')G_n(\rho;\rho') \quad (ค.10)$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (ค.9) และจากสมการ (ค.6) $\delta(\phi-\phi') = \sum_n \Phi_n^*(\phi)\Phi_n^*(\phi')$ จะได้

$$-\frac{1}{\Phi_n^*(\phi)}\frac{\partial^2\Phi_n^*(\phi)}{\partial\phi^2} = \nu_n^2 = \frac{\rho^2}{G_n(\rho;\rho')}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + k^2 + \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\right]G_n(\rho;\rho')$$

โดยที่ ν_n^2 คือ ค่าเจาะจงซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตในทิศทาง ϕ และ

$$\frac{\partial^2\Phi_n^*(\phi)}{\partial\phi^2} + \nu_n^2\Phi_n^*(\phi) = 0$$

ส่วน $G_n(\rho;\rho')$ สอดคล้องกับ

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + k^2 - \frac{\nu_n^2}{\rho^2}\right]G_n(\rho;\rho') = -\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}$$

ซึ่งหาได้โดยการกระจาย $G_n(\rho;\rho')$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจง หรืออยู่ในรูปของผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ หรืออยู่ในรูปอินทิกรัลขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวในหัวข้อถัดไป

<u>การหากรีนฟังก์ชันในรูปผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์</u>

การหากรีนฟังก์ชันในหัวข้อที่แล้วเป็นการหากรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมอนันต์ซึ่งสามารถหากรีนฟังก์ชันได้ทั้งในกรณี 1 มิติ 2 มิติ หรือ 3 มิติก็ได้ แต่ใช้ได้กับในกรณีที่เป็นบริเวณปิดเท่านั้น สำหรับในกรณีที่เป็นบริเวณเปิดหรือบริเวณปิด

สามารถหากรีนฟังก์ชันได้ในรูปผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ แต่วิธีการนี้สามารถใช้ได้กับกรณี 1 มิติเท่านั้น และเพื่อแสดงให้เห็นถึงรายละเอียดของวิธีการนี้ พิจารณากรีนฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองในรูปทั่วไปดังสมการ (ค.11)

$$\left[\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}\left(f(z)\frac{d}{dz}\right)+q(z)\right]G(z,z')=-\frac{\delta(z-z')}{f(z)} \tag{ค.11ก}$$

หรือ

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz}\right)\frac{d}{dz}+q(z)\right]G(z,z')=-\frac{\delta(z-z')}{f(z)} \tag{ค.11ข}$$

สำหรับในกรณี $z>z'$ และ $z<z'$ นั้น เดลตาฟังก์ชันซึ่งเป็นฟังก์ชันกระตุ้นของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นศูนย์ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (ค.11ข) ลดรูปลงเป็นสมการเอกพันธุ์ดังสมการ (ค.12)

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz}\right)\frac{d}{dz}+q(z)\right]G(z,z')=0 \tag{ค.12}$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$G(z,z')=Ay_1(z) \qquad \text{เมื่อ } z>z' \tag{ค.13}$$

และ

$$G(z,z')=By_2(z) \qquad \text{เมื่อ } z<z' \tag{ค.14}$$

โดยที่ A และ B หาได้จากเงื่อนไขตามคุณสมบัติของกรีนฟังก์ชันคือ

1. กรีนฟังก์ชันต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ z รวมทั้งที่ $z=z'$ โดยที่ z' เป็นค่าที่ถูกกำหนดไว้
2. จากสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (ค.11ข) อนุพันธ์อันดับสองของกรีนฟังก์ชันเป็นเดลตาฟังก์ชัน ดังนั้นอนุพันธ์อันดับแรกของกรีนฟังก์ชันจะไม่ต่อเนื่องที่ $z=z'$ ความไม่ต่อเนื่องของอนุพันธ์อันดับแรกของกรีนฟังก์ชันสามารถหาได้จากการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ภายในช่วงเล็ก ๆ ของจุดที่เกิดความไม่ต่อเนื่อง
3. กรีนฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันสมมาตรเทียบกับ z และ z' กล่าวคือ $G(z,z')=G(z',z)$

จากคุณสมบัติข้อแรก กรีนฟังก์ชันต้องต่อเนื่องที่ $z=z'$ ดังนั้น

$$Ay_1(z')-By_2(z')=0 \tag{ค.15}$$

และจากคุณสมบัติข้อสอง เมื่ออินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์จาก $z'-\varepsilon$ ถึง $z'+\varepsilon$ โดยที่ ε มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จะได้

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon}\left[\frac{d}{dz}\left(f(z)\frac{d}{dz}\right)+f(z)q(z)\right]G(z,z')dz=-\int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon}\frac{\delta(z,z')}{f(z)}f(z)dz$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon}\left[\frac{d}{dz}\left(f(z)\frac{d}{dz}\right)+f(z)q(z)\right]G(z,z')dz=-1 \qquad \text{(ค.16)}$$

เนื่องจาก $f(z), q(z)$ และ $G(z,z')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $z=z'$ ดังนั้น $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon}[f(z)q(z)]G(z,z')dz=0$ ทำให้

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(z)\frac{dG(z,z')}{dz}\right]_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon}=-$$

และจากสมการ (ค.13) และ (ค.14) $G'(z,z')=Ay_1'(z')$ เมื่อ $z=z'+\varepsilon$ และ $G'(z,z')=By_2'(z')$ เมื่อ $z=z'-\varepsilon$ ดังนั้น

$$Ay_1'(z')-By_2'(z')=-\frac{1}{f(z')} \qquad \text{(ค.17)}$$

โดยที่ $y_1'(z)=dy_1/dz$ และ $y_2'(z)=dy_2/dz$ และจากสมการ (ค.15) และ (ค.17) ทำให้ A และ B เป็นดังสมการ (ค.18)

$$A=\frac{y_2(z')}{f(z')\Delta(z')} \qquad \text{(ค.18ก)}$$

$$B=\frac{y_1(z')}{f(z')\Delta(z')} \qquad \text{(ค.18ข)}$$

โดยที่ $\Delta(z')=\begin{vmatrix} y_1(z') & y_2(z') \\ y_1'(z') & y_2'(z') \end{vmatrix}=y_1(z')y_2'(z')-y_1'(z)y_2(z')$ เรียกว่า ตัวกำหนดวรอนสกี (Wronski determinant) หรือวรอนสเกียน (Wronskian) ของ y_1 และ y_2 และเมื่อแทน A และ B ลงไปในสมการ (ค.13) และ (ค.14) จะได้กรีนฟังก์ชันเป็นดังสมการ (ค.19)

$$G(z,z')=\begin{cases}\dfrac{y_1(z)y_2(z')}{f(z')\Delta(z')} & , \; z>z' \\[2ex] \dfrac{y_2(z)y_1(z')}{f(z')\Delta(z')} & , \; z<z'\end{cases} \qquad \text{(ค.19)}$$

สังเกตว่าทั้งเศษและส่วนของกรีนฟังก์ชันประกอบด้วยผลคูณของ y_1 กับ y_2 และอนุพันธ์ของ y_1 กับ y_2 ดังนั้นค่าคงที่ A และ B จะถูกตัดทิ้งมีเพียงฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ที่จำเป็น และ $f(z')$ กับ $\Delta(z')$ เป็นฟังก์ชันของ z' ซึ่งเป็นค่าที่กำหนดไว้ ทำให้ $f(z')$ กับ $\Delta(z')$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดังสมการ (ค.11ข) เป็น

$$G(z,z') = \begin{cases} \dfrac{y_1(z)y_2(z')}{D} & , \ z > z' \\ \dfrac{y_2(z)y_1(z')}{D} & , \ z < z' \end{cases} \tag{ค.20}$$

โดยที่ $D = f(z')\Delta(z') =$ ค่าคงที่ มีข้อสังเกตว่าผลเฉลยที่ได้ครอบคลุมทั้งในบริเวณเปิดและบริเวณปิด ซึ่งขึ้นอยู่กับผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์และอนุพันธ์ของผลเฉลยในแต่ละบริเวณ

การหากรีนฟังก์ชันในรูปอินทิกรัล

จากข้างต้นได้แสดงการหากรีนฟังก์ชันไว้ 2 รูปแบบ แต่สำหรับในบริเวณเปิดกรีนฟังก์ชันสามารถหาได้โดยอยู่ในรูปอินทิกรัลซึ่งมีความสัมพันธ์กับการแปลงฟูริเยร์ โดยทำการประยุกต์วิธีการหากรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงดังนี้

สำหรับในบริเวณเปิด กรีนฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการคลื่นใน 1 มิติเป็นดังสมการ (ค.21)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)G(z;z') = -\delta(z-z') \tag{ค.21}$$

โดยที่เงื่อนไขขอบเขตสอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงานคือ

$$G(z=\infty;z') = G(z=-\infty;z') = 0 \tag{ค.22}$$

เมื่อให้กรีนฟังก์ชันอยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันค่าเจาะจงดังสมการ (ค.23)

$$G(z;z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \psi_n(z) \tag{ค.23}$$

จะทำให้

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_n^2\right)\psi_n(z) = 0 \tag{ค.24}$$

โดยที่ k_n^2 คือ ค่าเจาะจงที่ได้จากเงื่อนไขการแผ่พลังงาน

$$\psi_n(z=\infty) = \psi_n(z=-\infty) = 0 \tag{ค.25}$$

จากสมการ (ค.24) และ (ค.25) ผลเฉลยของฟังก์ชันเจาะจงเป็นคลื่นจร (traveling waves) แทนที่จะเป็นคลื่นนิ่ง (standing waves) ดังนั้น

$$\psi_n(z) = \begin{cases} Ae^{-jk_n z} & , \ z > z' \\ Be^{jk_n z} & , \ z < z' \end{cases} \tag{ค.26}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (ค.23) จะได้

$$G(z;z') = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Ae^{-jk_n z} & , \ z > z' \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Be^{jk_n z} & , \ z < z' \end{cases} \tag{ค.27}$$

จากการหากรีนฟังก์ชันในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเจาะจงพบว่า A_n เป็นฟังก์ชันของ z' และ k_n ดังนั้นเมื่อพิจารณากรณี $z > z'$ ถ้าให้ $A_n A = \frac{g(k_n;z')}{2\pi}$ และจากสมการ (ค.27) จะได้

$$G(z;z') = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n;z')e^{-jk_n z} \qquad , \ z > z' \tag{ค.28}$$

จากสมการ (ค.28) กรีนฟังก์ชันอยู่ในรูปของคลื่นระนาบที่มีขนาดเท่ากับ $g(k_n;z')$ โดยมีค่าคงที่การแผ่กระจายคลื่นเท่ากับ k_n และเป็นฟังก์ชันแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete functions) ดังนั้นเมื่อพิจารณากรีนฟังก์ชันเป็นสเปกตรัมของคลื่นระนาบ ตัวดำเนินการจะเปลี่ยนจากผลรวมไปเป็นการอินทิเกรตดังสมการ (ค.29)

$$G(z;z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(h;z')e^{-jhz}dh \tag{ค.29}$$

สมการ (ค.29) มีรูปแบบเช่นเดียวกับการแปลงฟูริเยร์ ดังนั้นคู่การแปลงกลับฟูริเยร์เป็น

$$g(h;z') = \int_{-\infty}^{\infty} G(z;z')e^{+jhz}dh \tag{ค.30}$$

และมีคุณสมบัติของการแปลงฟูริเยร์ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)e^{jhz}dh = -h^2 g(h;z') \tag{ค.31}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z-z')e^{jhz}dz = e^{jhz'} \tag{ค.32}$$

การหากรีนฟังก์ชันในรูปอินทิกรัลข้างต้นเป็นการพิจารณาสมการคลื่นในกรณี 1 มิติ และถ้าเป็นกรณี 2 มิติ กรีนฟังก์ชันก็สามารถแสดงอยู่ในรูปของการแปลงฟูริเยร์เช่นเดียวกับในกรณี 1 มิติ โดยคุณสมบัติที่ใช้เป็นไปตามคุณสมบัติการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติ ซึ่งอาจนำไปใช้กับปัญหาการแผ่พลังงานจากบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (source free) ไปยังบริเวณย่านสนามไกลซึ่งเป็นบริเวณเปิดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการแผ่พลังงาน

จากการหากรีนฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นพบว่า กรีนฟังก์ชันสามารถอยู่ในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งในแต่ละรูปแบบมีข้อจำกัดในการหาดังได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้กรีนฟังก์ชัน กรีนฟังก์ชันอาจแสดงได้หลายรูปแบบ ซึ่งในปัญหาจริง ๆ อาจต้องรวมทั้ง 3 วิธีเพื่อหากรีนฟังก์ชันในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้งานได้ดีที่สุด

ภาคผนวก ง.

ความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเมื่อการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง z อยู่ในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-jk_z z}$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

การคำนวณหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถแยกพิจารณาตัวดำเนินการ ∇ ออกเป็น 2 ส่วนคือ ตัวดำเนินการในทิศทาง z (∇_z) กับตัวดำเนินการในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทาง z (∇_t) เนื่องจากตัวดำเนินการ ∇ มีคุณสมบัติแบบเชิงเส้น ซึ่งในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial \rho}\bar{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\bar{a}_\phi \qquad (ง.1)$$

$$\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z \qquad (ง.2)$$

และ

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z \qquad (ง.3)$$

สมมุติว่าสนามไฟฟ้า $\bar{E} = \bar{E}_t + \bar{E}_z$ และสนามแม่เหล็ก $\bar{H} = \bar{H}_t + \bar{H}_z$ โดยที่ $\bar{E},\bar{H}$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่สอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ในบริเวณที่ปราศจากแหล่งกำเนิด ดังนั้น

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \qquad (ง.4)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} \qquad (ง.5)$$

และ $E_t, \bar{H}_t$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศที่ตั้งฉากกับทิศทาง z และ $E_z, \bar{H}_z$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง z ซึ่งเมื่อแทนสมการ (ง.3) ลงในสมการ (ง.4) จะได้

$$(\nabla_t + \nabla_z)\times(\bar{E}_t + \bar{E}_z) = -j\omega\mu(\bar{H}_t + \bar{H}_z) \qquad (ง.6)$$

หรือ

$$\nabla_t \times \bar{E}_z + \nabla_z \times \bar{E}_t = -j\omega\mu\bar{H}_t \qquad (ง.7)$$

เนื่องจาก $\nabla_z \times \bar{E}_z = 0$ และ $\nabla_t \times \bar{E}_t$ ทำให้เกิดองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในทิศทาง z ในทำนองเดียวกันเมื่อแทนสมการ (ง.3) ลงในสมการ (ง.5)

$$\nabla_t \times \bar{H}_z + \nabla_z \times \bar{H}_t = j\omega\varepsilon\bar{E}_t \qquad (ง.8)$$

เมื่อคูณสมการ (ง.7) ด้วย $j\omega\varepsilon$ และแทน $\bar{E}_t$ ในสมการ (ง.8) ลงในสมการ (ง.7) จะได้

$$k^2\bar{H}_t = j\omega\varepsilon\nabla_t \times \bar{E}_z + \nabla_z \times (\nabla_t \times \bar{H}_z) + \nabla_z \times (\nabla_z \times \bar{H}_t) \tag{ง.9}$$

และถ้าสมมุติว่า E และ H มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง z อยู่ในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-jk_z z}$ พจน์ต่าง ๆ ในสมการ (ง.9) จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla_z \times (\nabla_t \times \bar{H}_z) &= \frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z \times \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\bar{a}_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\bar{a}_\phi\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial H_z}{\partial z}\bar{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial H_z}{\partial z}\bar{a}_\rho \\ &= -jk_z\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\bar{a}_\phi + \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\bar{a}_\rho\right) \\ &= -jk_z\nabla_t H_z\end{aligned} \tag{ง.10}$$

และ

$$\begin{aligned}\nabla_z \times (\nabla_z \times \bar{H}_t) &= \frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z \times \left(-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\bar{a}_\rho + \frac{\partial H_\rho}{\partial z}\bar{a}_\phi\right) \\ &= -\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2}\bar{a}_\phi - \frac{\partial^2 H_\rho}{\partial z^2}\bar{a}_\rho \\ &= (-jk_z)^2\left(-H_\phi\bar{a}_\phi - H_\rho\bar{a}_\rho\right) \\ &= k_z^2 H_t\end{aligned} \tag{ง.11}$$

เมื่อแทนสมการ (ง.10) และ (ง.11) ลงในสมการ (ง.9) จะได้

$$k^2\bar{H}_t = -jk_z\nabla_t H_z + k_z^2\bar{H}_t + j\omega\varepsilon\nabla_t \times \bar{E}_z \tag{ง.12}$$

หรือ

$$\bar{H}_t = \frac{-jk_z\nabla_t H_z}{k^2 - k_z^2} + \frac{j\omega\varepsilon\nabla_t \times \bar{E}_z}{k^2 - k_z^2} \tag{ง.13}$$

เนื่องจาก $\nabla_t \times \bar{E}_z = -\bar{a}_z \times \nabla_t E_z$ เมื่อแทนลงในสมการ (ง.13)

$$\bar{H}_t = -\frac{jk_z\nabla_t H_z}{k^2 - k_z^2} - \frac{j\omega\varepsilon\bar{a}_z \times \nabla_t E_z}{k^2 - k_z^2} \tag{ง.14}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อคูณสมการ (ง.8) ด้วย $j\omega\mu$ และแทน $\bar{H}_t$ ในสมการ (ง.7) ลงในสมการ (ง.8) จะได้

$$\vec{E}_t = -\frac{jk_z \nabla_t E_z}{k^2 - k_z^2} + \frac{j\omega\mu \hat{a}_z \times \nabla_t H_z}{k^2 - k_z^2} \qquad (ง.15)$$

จากสมการ (ง.14) และ (ง.15) พบว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในบริเวณปราศจากแหล่งกำเนิดที่มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง z อยู่ในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-jk_z z}$ สามารถหาได้ถ้าเราทราบเพียงองค์ประกอบในทิศทาง z ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

ภาคผนวก จ.

การประมาณค่าฟังก์ชันทรานซิชัน

ในการวิเคราะห์หาสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบโดยทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตนั้น สนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบขึ้นอยู่กับ สนามตกกระทบที่จุดขอบ สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่ขอบแบบไดแอดิก และตัวประกอบการลดทอน โดยในสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่ขอบแบบไดแอดิกประกอบด้วยฟังก์ชันทรานซิชัน (transition function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เกิดขึ้นจากการใช้กรรมวิธี steepest descent แบบดัดแปลงของ Pauli-Clemmow (Pauli-Clemmow modified mothod of steepest descent) กับในกรณีที่ขั้วอยู่ใกล้กับจุดอานม้าเป็นดังสมการ (จ.1)

$$F[X] = 2j\sqrt{X}e^{jX}\int_{\sqrt{X}}^{\infty} e^{-j\tau^2}d\tau \qquad \text{(จ.1)}$$

จากสมการ (จ.1) ฟังก์ชันทรานซิชันอยู่ในรูปอินทิกรัลที่มีขอบเขตบนเป็นอนันต์ ทำให้ในการหาค่าแม่นตรงเป็นไปได้ยาก แต่ถ้ากำหนดให้ $\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}t$ และใช้สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) พบว่า สำหรับ $X \geq 0$

$$\begin{aligned} F[X] &= j\sqrt{2\pi X}e^{jX}\int_{\sqrt{2X/\pi}}^{\infty} e^{-j\frac{\pi t^2}{2}}dt \\ &= j\sqrt{2\pi X}e^{jX}\left[\int_{\sqrt{2X/\pi}}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt - j\int_{\sqrt{2X/\pi}}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt\right] \end{aligned} \qquad \text{(จ.2)}$$

เนื่องจาก

$$\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt = \int_0^{\sqrt{2X/\pi}}\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt + \int_{\sqrt{2X/\pi}}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt = 0.5 \qquad \text{(จ.3)}$$

$$\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt = \int_0^{\sqrt{2X/\pi}}\sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt + \int_{\sqrt{2X/\pi}}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt = 0.5 \qquad \text{(จ.4)}$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (จ.3) และ (จ.4) ลงในสมการ (จ.2) จะได้

$$F[X] = j\sqrt{2\pi X}e^{jX}\left[(0.5 - j0.5) - \left\{C(\sqrt{2X/\pi}) - jS(\sqrt{2X/\pi})\right\}\right] \qquad \text{(จ.5)}$$

โดยที่ $C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$ และ $S(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$ คือ โคไซน์เฟรส์แนลอินทิกรัลและไซน์เฟรส์แนลอินทิกรัลตามลำดับ ซึ่งกำหนดอยู่ในรูปเฟรส์แนลอินทิกรัลดังสมการ (จ.6)

$$f(x)=C(x)-jS(x)=\int_0^x e^{-j\frac{\pi t^2}{2}}\,dt \qquad (จ.6)$$

โดยที่ $x=\sqrt{2X/\pi}$ หรือ $X=\pi x^2/2$ และสำหรับ $X<0$ $F[X]$ เท่ากับค่าสังยุคของ $F[|X|]$

เฟรส์แนลอินทิกรัล $f(x)$ ในสมการ (จ.6) สามารถหาค่าได้โดยใช้การประมาณของ Boersma, 1960 (C. J. Slentten, 1989) ดังสมการ (จ.7)

$$\begin{aligned} f(x) &\approx e^{-jX}\sqrt{X/4}\sum_{n=1}^{12}(a_n+jb_n)(X/4)^n \qquad , 0\le X<4 \\ &\approx (1-j)/2+e^{-jX}\sqrt{4/X}\sum_{n=1}^{12}(c_n+jd_n)(4/X)^n \qquad , X\ge 4 \end{aligned} \qquad (จ.7)$$

โดยที่ a_n, b_n, c_n และ d_n คือ ค่าคงที่ของ Boersma ซึ่งมีค่าดังนี้

$a_1 = 1.595769140$ $a_2 = -0.000001702$ $a_3 = -6.808568854$ $a_4 = -0.000576361$
$a_5 = 6.920691902$ $a_6 = -0.016898657$ $a_7 = -3.050485660$ $a_8 = -0.075752419$
$a_9 = 0.850663781$ $a_{10} = -0.025639041$ $a_{11} = -0.150230960$ $a_{12} = 0.034404779$

$b_1 = -0.000000033$ $b_2 = 4.255387524$ $b_3 = -0.000092810$ $b_4 = -7.780020400$
$b_5 = -0.009520895$ $b_6 = 5.075161298$ $b_7 = -0.138341947$ $b_8 = -1.363729124$
$b_9 = -0.403349276$ $b_{10} = 0.702222016$ $b_{11} = -0.216195929$ $b_{12} = 0.019547031$

$c_1 = 0.000000000$ $c_2 = -0.024933975$ $c_3 = 0.000003936$ $c_4 = 0.005770956$
$c_5 = 0.000689892$ $c_6 = -0.009497136$ $c_7 = 0.011948809$ $c_8 = -0.006748873$
$c_9 = 0.000246420$ $c_{10} = 0.002102967$ $c_{11} = -0.001217930$ $c_{12} = 0.000233939$

$d_1 = 0.199471140$ $d_2 = 0.000000023$ $d_3 = -0.009351341$ $d_4 = 0.000023006$
$d_5 = 0.004851466$ $d_6 = 0.001903218$ $d_7 = -0.017122914$ $d_8 = 0.029064067$
$d_9 = -0.027928955$ $d_{10} = 0.016497308$ $d_{11} = -0.005598515$ $d_{12} = 0.000838386$

จากข้างต้นเป็นการประมาณค่าทรานซิชันฟังก์ชันในรูปแบบหนึ่งที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันทรานซิชันในรูปแบบอื่นสามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน An Approximation to the Fresnel Integral (G. L. James, 1979) และ Fresnel-Integral Approximation (1995)

ภาคผนวก ฉ.

การตรวจสอบอัลกอริทึมของกรรมวิธีเชิงเลข

การตรวจสอบอัลกอริทึมของกรรมวิธีเชิงเลข

จากการวิเคราะห์หาขีดจำกัดเกี่ยวกับสมรรถนะของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิก เช่น แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล และอัตราขยายนั้นต้องใช้วิธีการเชิงเลขในการประมาณค่าอินทิเกรชัน 2 ชั้น โดยในที่นี้ได้นำเอาวิธีการของซิมป์สัน (Simpson method) มาใช้ในการประมาณ ดังนั้นเพื่อให้ผลของการประมาณเชิงเลขมีความถูกต้อง และอยู่ในเกณฑ์ที่เชื่อถือได้ อัลกอริทึมของการอินทิเกรตที่ใช้ต้องทดสอบเพื่อหาค่าเหมาะสมในการแบ่งส่วนย่อยของการอินทิเกรต ซึ่งในที่นี้ได้ทำการตรวจสอบโดยทำการอินทิเกรตสนามที่มีการกระจายสม่ำเสมอทั้งขนาดและเฟสบนระนาบหน้าจานที่มีขนาดเท่ากับภาพฉายของจานสะท้อนที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 10λ เพื่อหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลดังสมการ (ฉ.1)

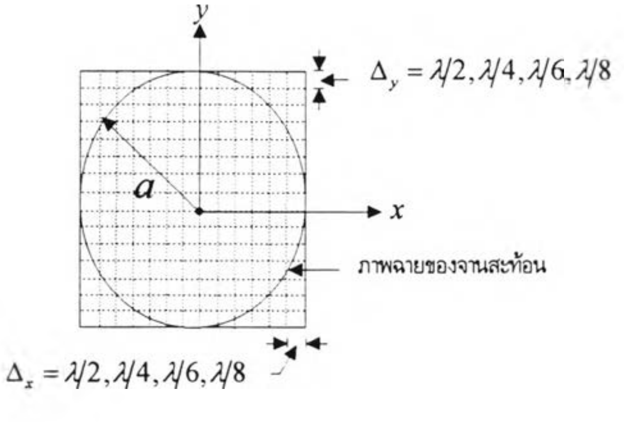
$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}\left[\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\bar{a}_\theta + \left(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi\right)\cos\theta\,\bar{a}_\phi\right] \qquad (ฉ.1)$$

โดยที่

$$f_x(k_x,k_y) = \iint_{S_a} E_{ax}(x,y,0)e^{jk_x x + jk_y y}dxdy$$

$$f_y(k_x,k_y) = \iint_{S_a} E_{ay}(x,y,0)e^{jk_x x + jk_y y}dxdy$$

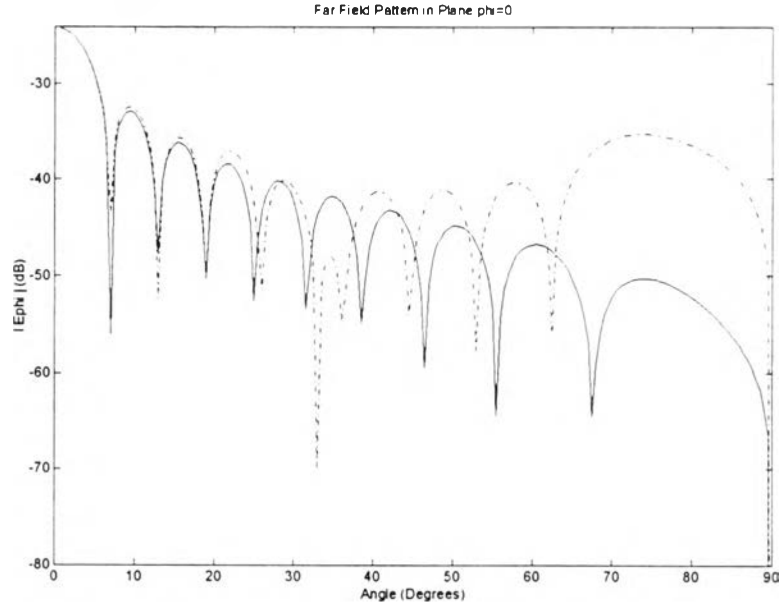
และ $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ และ $k_y = k\sin\theta\sin\phi$ และ $\bar{E}_a = E_o\bar{a}_y$ ภายในบริเวณภาพฉายของจานสะท้อนและเป็นศูนย์ภายนอกบริเวณภาพฉาย โดยแบ่งส่วนย่อยของการอินทิเกรตเป็น $\lambda/2$, $\lambda/4$, $\lambda/6$ และ $\lambda/8$ ดังรูป ฉ.1



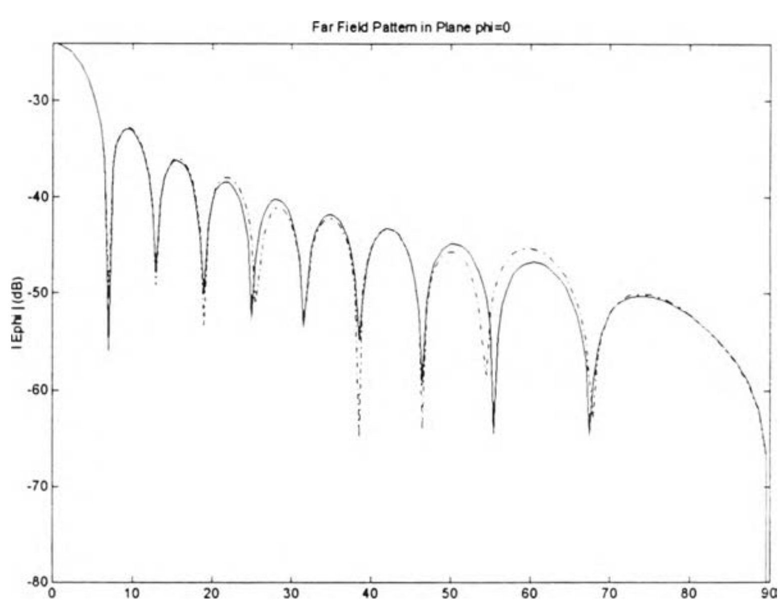
รูป ฉ.1 การแบ่งส่วนย่อยของสนามบนระนาบหน้าจานเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล
โดยวิธีการของซิมป์สัน ซึ่งแบ่งส่วนย่อยของการอินทิเกรตเป็น $\lambda/2$, $\lambda/4$, $\lambda/6$ และ $\lambda/8$

และเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงดังสมการ (ฉ.2) (R.E. Collin, 1985)

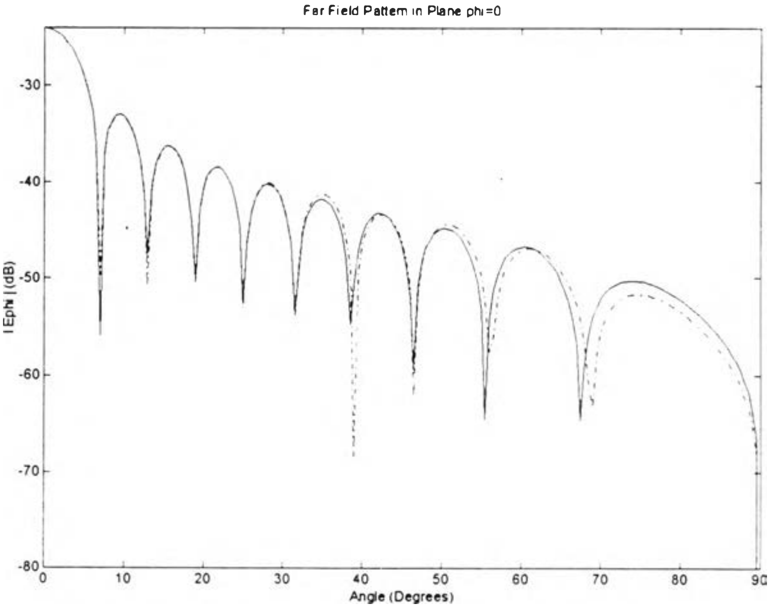
$$\bar{E}(r,\theta,\phi) = jk\frac{e^{-jkr}}{2\pi r}E_o 2\pi a^2\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\sin\phi\bar{a}_\theta + \frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\cos\theta\cos\phi\bar{a}_\phi\right] \qquad (ฉ.2)$$



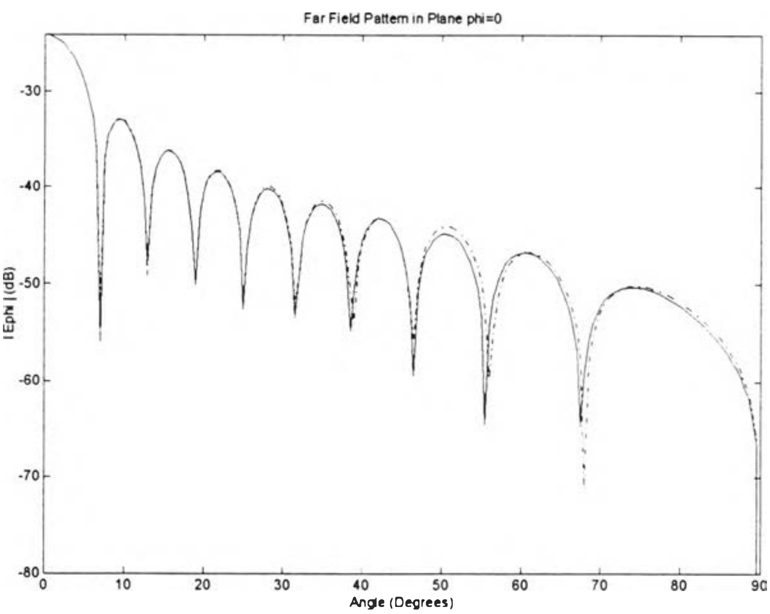
รูป ฉ.2 การประมาณการอินทิเกรต 2 ชั้นเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยวิธีการของซิมป์สัน ซึ่งแบ่งส่วนย่อยเท่ากับ $\lambda/2$ (-·-·-·-·-) เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (————)



รูป ฉ.3 การประมาณการอินทิเกรต 2 ชั้นเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยวิธีการของซิมป์สัน ซึ่งแบ่งส่วนย่อยเท่ากับ $\lambda/4$ (-·-·-·-·-) เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (————)



รูป ฉ.4 การประมาณการอินทิเกรต 2 ชั้นเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยวิธีการของซิมป์สัน ซึ่งแบ่งส่วนย่อยเท่ากับ $\lambda/6$ (-·-·-·-·-) เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (————)



รูป ฉ.5 การประมาณการอินทิเกรต 2 ชั้นเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยวิธีการของซิมป์สัน ซึ่งแบ่งส่วนย่อยเท่ากับ $\lambda/8$ (-·-·-·-·-) เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (————)

จากรูป ฉ.2 พบว่า การแบ่งส่วยย่อยเท่ากับ $\lambda/2$ สามารถประมาณค่าอินทิกรัล 2 ชั้นในการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานได้แม่นยำภายในช่วงตำแหน่งเชิงมุมประมาณ 20 องศา และจากรูป ฉ.3 พบว่า การแบ่งส่วยย่อยเท่ากับ $\lambda/4$ สามารถประมาณค่าอินทิกรัล 2 ชั้นในการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานได้แม่นยำภายในช่วงตำแหน่งเชิงมุมประมาณ 45 องศา และจากรูป ฉ.4 พบว่า การแบ่งส่วยย่อยเท่ากับ $\lambda/6$ สามารถประมาณค่าอินทิกรัล 2 ชั้นในการคำนวณหาแบบรูปการแผ่

พลังงานได้แม่นยำภายในช่วงตำแหน่งเชิงมุมประมาณ 60 องศา และการแบ่งส่วนย่อยเท่ากับ $\lambda/8$ ในรูป ฉ.5 สามารถประมาณค่าอินทิกรัล 2 ชั้นในการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงในเกณฑ์ที่เชื่อถือได้ถึงตำแหน่งเชิงมุม 90 องศา ดังนั้นในการใช้อัลกอริทึมในการอินเกรต 2 ชั้นโดยวิธีการของซิมป์สันเพื่อคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานเพื่อให้ครอบคลุมถึงตำแหน่งเชิงมุมไกล ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกการแบ่งส่วนย่อยบนระนาบหน้าจานเป็น $\lambda/8$

จากการตรวจสอบอัลกอริทึมของกรรมวิธีเชิงเลขที่ใช้ในการอินทิเกรต 2 ชั้นข้างต้น พบว่า การคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของระบบสายอากาศชนิดจานสะท้อนเดี่ยวรูปพาราโบลิกนั้น เราสามารถปรับการแบ่งส่วนย่อยเพื่อทำให้การคำนวณเร็วขึ้นได้ขึ้นอยู่กับการนำไปประยุกต์ใช้งานว่าแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการนั้น ต้องการความแม่นยำถึงตำแหน่งเชิงมุมเท่าไร

ประวัติผู้เขียน

นายศุภเชษฐ์ เพิ่มพูนวัฒนาสุข เกิดวันที่ 18 มีนาคม พ.ศ. 2515 ที่อำเภอคลองสาน จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2536 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อพ.ศ. 2537 โดยได้รับทุนการวิจัยจากโครงการศิษย์ก้นกุฏิ ซึ่งเป็นโครงการความร่วมมือในการพัฒนาการศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์ระดับบัณฑิตศึกษาระหว่างจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยกับสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สวทช.)

พ.ศ. 2538 ได้นำเสนอผลงานวิจัยที่เป็นส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ในการประชุมทางวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 18 ณ โรงแรมแอมบาสเดอร์ซิตี้ จอมเทียน พัทยา จังหวัดชลบุรี