บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เดี่ยวและการพยากรณ์ร่วมในการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่มี และไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าจาก หนังสือ เอกสาร บทความ และงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง นำเสนอโดยแบ่งออกเป็น 5 ตอน ประกอบด้วย ตอนที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการพยากรณ์ ตอนที่ 2 วิธีการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลา ตอนที่ 3 วิธีการพยากรณ์ร่วม ตอนที่ 4 เกณฑ์ในการเปรียบเทียบความสามารถของวิธีการพยากรณ์ ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง รายละเอียดแต่ละตอนมีดังต่อไปนี้

ตอนที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการพยากรณ์

การพยากรณ์แบ่งเป็นกลุ่มใหญ่ ๆ ได้ 2 กลุ่ม คือ การพยากรณ์เชิงปริมาณ (quantitative forecasting) และการพยากรณ์เชิงคุณภาพ (qualitative forecasting) ดังภาพที่ 1

การพยากรณ์ (forecasting)

- การพยากรณ์เชิงปริมาณ (quantitative)
  - Time Series/ Projective
    - -naïve
    - -moving average
    - -classical decomposition
    - -exponential smoothing
    - -Box-Jenkins
  - Causal model
    - -regression analysis
    - -econometric
- การพยากรณ์เชิงคุณภาพ (qualitative)
  - -personal insight
  - -panel consensus
  - -market surveys
  - -historical analogy
  - -delphi techniques

ภาพที่ 1 การพยากรณ์เชิงปริมาณและการพยากรณ์เชิงคุณภาพ

การพยากรณ์เชิงปริมาณจำแนกตามแนวคิดออกได้เป็น 2 ประเภท คือ ประเภทที่ 1 มีแนวคิดว่าพฤติกรรมในอดีตเพียงพอที่จะพยากรณ์พฤติกรรมในอนาคตได้ หรือเรียกว่าการวิเคราะห์อนุกรมเวลา (time series) ซึ่งมีวิธีการพยากรณ์ ได้แก่ วิธีง่าย (naïve) วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (moving average) วิธีการแยกส่วนประกอบ (classical decomposition) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (exponential smoothing) และวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ (Box-Jenkins) ประเภทที่ 2 มีแนวคิดว่าพฤติกรรมของสิ่งที่จะพยากรณ์มีสิ่งอื่น ๆ ซึ่งมีความสัมพันธ์บางลักษณะ

กับสิ่งที่จะพยากรณ์เป็นตัวกำหนด หรือเรียกว่าโมเดลเชิงสาเหตุ (causal model) ได้แก่ วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (regression analysis) และวิธีการพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ (econometric forecasting)

วิธีการพยากรณ์มีมากมายหลายวิธี แต่ละวิธีมีคุณลักษณะ ข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน ไม่มีวิธีใดดีและสมบูรณ์ที่สุด (Makridakis, Wheelwright and Hyndman, 1998: ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) ดังนั้นจึงควรคำนึงถึงปัจจัยในการเลือกวิธีการพยากรณ์ ดังต่อไปนี้

1. ระยะเวลาการพยากรณ์ (time horizon or lead time) หมายถึง ระยะเวลาที่ผู้พยากรณ์จะพยากรณ์เหตุการณ์ที่สนใจแต่ละเหตุการณ์ล่วงหน้านับจากปัจจุบัน จะยาวนานเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับการนำค่าพยากรณ์นั้นไปใช้ ซึ่งแบ่งเป็น 4 ระยะ (O'Donovan, 1983; อัจฉรา จันทร์ฉาย, 2542) ดังนี้

1.1 ระยะใกล้ (immediate term) เป็นช่วงเวลาน้อยกว่า 1 เดือน

1.2 ระยะสั้น (short term) เป็นช่วงเวลาระหว่าง 1-3 เดือน

1.3 ระยะปานกลาง (medium term) เป็นช่วงเวลาระหว่าง 3 เดือน ถึง 2 ปี

1.4 ระยะยาว (long term) เป็นช่วงเวลามากกว่า 2 ปี

2. ลักษณะของข้อมูล (pattern of data) หมายถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลตามช่วงระยะเวลา เมื่อนำเอาข้อมูลที่ต้องการพยากรณ์มาพล๊อตกราฟ ข้อมูลจะแสดงรูปร่างลักษณะปรากฏออกมา ข้อมูลที่มีลักษณะต่าง ๆ ก็จะมีวิธีที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลแต่ละชนิดนั้น ๆ สามารถแบ่งลักษณะข้อมูลได้ 4 ประเภท (O'Donovan, 1983; Makridakis, Wheelwright and Hyndman, 1998) ดังนี้

2.1 ข้อมูลที่สม่ำเสมอตามแนวนอนหรือมีลักษณะคงที่ (horizontal data pattern: H) เป็นข้อมูลที่มีลักษณะของรูปแบบไม่เพิ่มขึ้นหรือลดลงไปในทางใดทางหนึ่ง คือข้อมูลที่เกิดขึ้นจะอยู่ในภาวะสมดุลรอบ ๆ ค่าเฉลี่ย ความน่าจะเป็นที่จะเกิดข้อมูลมากกว่าค่านี้มีเท่ากับความน่าจะเป็นที่จะเกิดข้อมูลน้อยกว่าค่านี้ วิธีที่เหมาะสมกับข้อมูลประเภทนี้ ได้แก่ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นต้น ดังภาพที่ 2ก

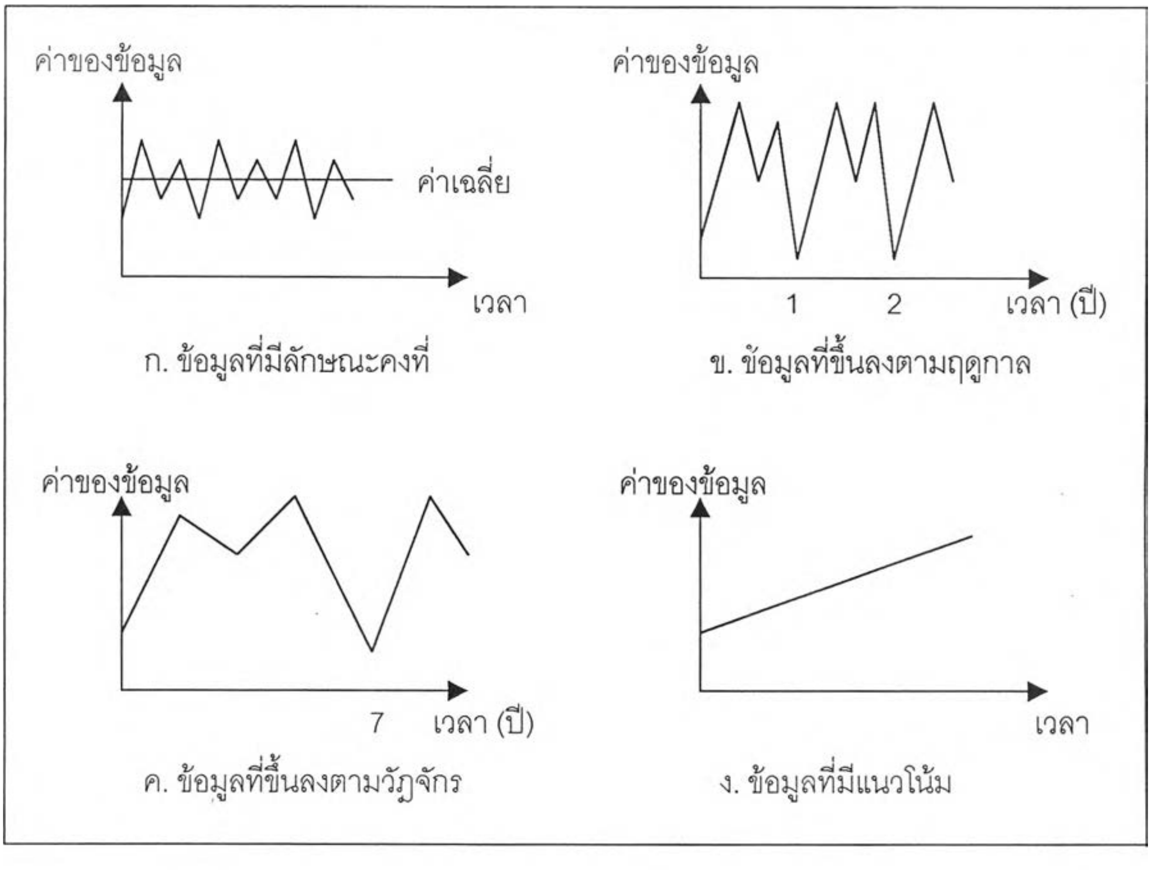
2.2 ข้อมูลที่ขึ้นลงตามฤดูกาล (seasonal data pattern: S) เป็นพฤติการที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ เช่น 1 วัน 1 สัปดาห์ 1 เดือน ฯลฯ โดยเกิดการเคลื่อนไหวขึ้นลงซ้ำกันในช่วงเวลาเดียวกันซึ่งจะแสดงการเปลี่ยนแปลงอันเกิดจากฤดูกาลในลักษณะของ

แบบ (pattern) ที่เกิดขึ้นซ้ำกันในแต่ละช่วง วิธีที่เหมาะสมกับข้อมูลประเภทนี้ ได้แก่ วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ ดังภาพที่ 2ข

2.3 ข้อมูลที่ขึ้นลงตามวัฏจักร (cyclical data pattern: C) มีลักษณะคล้ายฤดูกาลแต่ช่วงของวัฏจักรจะยาวกว่าฤดูกาลมาก วัฏจักรหนึ่งจะครอบคลุมระยะเวลาหลายปี ส่วนมากมักจะขึ้นลงตามวัฏจักรทางเศรษฐกิจ วิธีที่เหมาะสมกับข้อมูลประเภทนี้ ได้แก่ วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ ดังภาพที่ 2ค

2.4 ข้อมูลที่มีแนวโน้ม (trend data pattern: T) เป็นข้อมูลที่มีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอตามระยะเวลา ค่อนข้างมีแบบแผน อาจมีลักษณะเป็นเส้นตรง เส้นโค้ง หรือลักษณะอื่น ๆ วิธีที่เหมาะสมกับข้อมูลประเภทนี้ ได้แก่ วิธีการวิเคราะห์การถดถอย และวิธีการพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ เป็นต้น ดังภาพที่ 2ง

ลักษณะข้อมูลทั้ง 4 ประเภทนี้ บ่อยครั้งที่พบว่ามีหลายลักษณะปนกันอยู่ หรือบางครั้งก็มีเพียงลักษณะใดลักษณะหนึ่งเท่านั้น



ภาพที่ 2 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของข้อมูล

3. ความแม่นยำหรือความถูกต้อง (accuracy) ซึ่งวิธีการวัดความถูกต้องมี 2 แบบ คือ

3.1 วิธีทางสถิติที่มีการทดสอบนัยสำคัญได้ ได้แก่ การตรวจสอบความถูกต้องของพารามิเตอร์หรือสมการที่ใช้เป็นตัวแบบพยากรณ์ เช่น t-test, F-test ซึ่งใช้ในวิธีการวิเคราะห์การถดถอย

3.2 วิธีที่ไม่ได้มีการทดสอบนัยสำคัญ ได้แก่ ค่าเบี่ยงเบนสมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute deviation: MAD) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (mean square error: MSE) รากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (root mean square error: RMSE) และเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute percentage error: MAPE) เป็นต้น โดยวัดจากความแตกต่างของข้อมูลจริงกับค่าพยากรณ์

4. ค่าใช้จ่าย (cost) ซึ่งแบ่งได้ 3 ประเภท คือ ค่าใช้จ่ายในการพัฒนาหรือนำเอาวิธีมาใช้ ค่าใช้จ่ายในการเก็บข้อมูล และค่าใช้จ่ายในการพยากรณ์ วิธีที่มีค่าใช้จ่ายสูง ได้แก่ วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ และวิธีการพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ ส่วนวิธีที่เสียค่าใช้จ่ายน้อย ได้แก่ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

5. การนำไปประยุกต์ใช้ (application) การเลือกวิธีพยากรณ์ให้เหมาะสมกับสถานการณ์มีสิ่งสำคัญที่ควรพิจารณา คือ ความง่ายต่อการเข้าใจ และความง่ายต่อการวิเคราะห์ข้อมูล วิธีการพยากรณ์ที่มีความซับซ้อนมักมีความถูกต้องสูง แต่ผู้บริหารที่นำค่าพยากรณ์ไปใช้ในการตัดสินใจอาจจำเป็นต้องใช้วิธีที่มีความซับซ้อนน้อยกว่า และมีความถูกต้องน้อยกว่า ปัจจัยที่สำคัญอีกประการหนึ่ง คือ ความเข้าใจต่อการพยากรณ์ และความสามารถในการวิเคราะห์ ผู้ที่จะนำค่าพยากรณ์ไปใช้ควรจะเข้าใจวิธีพยากรณ์นั้น ๆ เป็นอย่างดี เข้าใจถึงความสามารถของวิธีนั้นและนำไปประยุกต์ใช้ได้ วิธีที่ง่ายต่อความเข้าใจและตีความ ได้แก่ วิธีหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ส่วนวิธีที่ยากต่อความเข้าใจและตีความ ได้แก่ วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ และวิธีการพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ เป็นต้น

จากปัจจัยในการเลือกวิธีการพยากรณ์ดังกล่าว สามารถเปรียบเทียบวิธีการพยากรณ์ ได้ดังตาราง 1 (O'Donovan, 1983)

ตาราง 1 การเปรียบเทียบวิธีการพยากรณ์

	วิธีการพยากรณ์						
	วิธีง่าย	การเฉลี่ยเคลื่อนที่	การแยกส่วนประกอบ	การปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล	บ๊อกซ์-เจนกินส์	การวิเคราะห์การถดถอย	การพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ
ระยะเวลาการพยากรณ์							
-ระยะใกล้	/		/	/	/		
-ระยะสั้น		/	/	/	/	/	/
-ระยะปานกลาง		/	/	/		/	/
-ระยะยาว			/	/		/	/
ลักษณะของข้อมูล							
-ลักษณะคงที่	/	/	/	/	/		
-ฤดูกาล			/	/	/	/	/
-วัฏจักร			/			/	/
-แนวโน้ม			/	/	/	/	/
ขนาดของข้อมูลที่ต้องการแนวโน้ม(S-ช่วงฤดูกาล)	น้อย	10	30 6(S)	10 2(S)	50 6(S)	30 6(S)	น้อย
ค่าใช้จ่าย							
-ต่ำ	/	/		/			
-ปานกลาง			/			/	
-สูง					/		/

ตอนที่ 2 วิธีการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลา

ข้อมูลอนุกรมเวลา หมายถึง ชุดของค่าสังเกตที่เก็บรวบรวมมาในช่วงระยะเวลาหนึ่ง ๆ ที่ผู้วิจัยต้องการศึกษา อาจวัดเป็นรายชั่วโมง รายวัน รายสัปดาห์ รายเดือน รายไตรมาส หรือรายปีก็ได้ เช่น ข้อมูลอนุกรมเวลาจำนวนครู ปีการศึกษา 2528-2541 ประกอบด้วยค่าสังเกตรวม 14 ค่าที่ได้จากการวัดอย่างต่อเนื่องเป็นรายปี

ข้อมูลอนุกรมเวลามีส่วนประกอบแบ่งออกเป็น 4 ส่วน (Sullivan and Claycombe, 1977; O’Donovan, 1983; Hanke and Reitsch. 1995; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539; กัลยา วานิชย์บัญชา, 2542) คือ

1. แนวโน้ม (trend: T) เป็นข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงในระยะเวลาที่นานพอที่จะเห็นแนวโน้มการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลา ซึ่งอาจจะเป็นแนวโน้มขึ้น (upward trend) หรือลง (downward trend) แนวโน้มมีหลายลักษณะ อาจเป็นแนวโน้มเส้นตรง (linear trend) หมายถึงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่าสังเกตเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยขนาดที่คงที่ แนวโน้มเส้นโค้งควอดราติก (quadratic trend) หมายถึงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่าสังเกตเพิ่มขึ้นแล้วลดลง ณ เวลาหนึ่ง แนวโน้มแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (exponential trend) หมายถึงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่าสังเกตเพิ่มด้วยเปอร์เซนต์ที่คงที่ หรือลักษณะอื่นก็ได้

2. อิทธิพลของฤดูกาล (seasonal: S) การเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลามีผลเนื่องจากฤดูกาล การเคลื่อนไหวจะเกิดซ้ำแล้วซ้ำอีกในช่วงเวลาหนึ่งส่วนใหญ่จะเป็น 1 ปี ปัจจัยที่ก่อให้เกิดอิทธิพลของฤดูกาลมีได้หลายปัจจัย เช่น สภาพอากาศ อุณหภูมิ วัฒนธรรม กำหนดการตามปฏิทินที่หน่วยงานกำหนดขึ้น อนุกรมเวลาที่ใช้ในการพิจารณาอิทธิพลของฤดูกาลมักจะเป็นอนุกรมเวลารายเดือน หรือรายไตรมาส ค่าวัดอิทธิพลของฤดูกาลขึ้นอยู่กับรูปแบบในการรวมตัวของแนวโน้มและฤดูกาล ถ้ารูปแบบเป็นแบบบวกจะเรียกว่าค่าวัดอิทธิพลของฤดูกาล (seasonal factor) หรือถ้ารูปแบบเป็นแบบคูณจะเรียกว่าค่าดัชนีฤดูกาล (seasonal index)

3. อิทธิพลของวัฏจักร (cyclical: C) อนุกรมเวลาที่เก็บรวบรวมในระยะยาวหลายปี การเคลื่อนไหวจะแสดงอิทธิพลของวัฏจักรที่มีลักษณะทำนองเดียวกันกับอิทธิพลของฤดูกาล โดยวัฏจักรหนึ่งจะครอบคลุมระยะเวลาหลายปี แต่ละช่วงจะมีการเคลื่อนไหวไม่แตกต่างกันมากนัก

4. เหตุการณ์ที่ผิดปกติหรือความผันแปรที่ไม่แน่นอน (irregular variation: I) เป็นการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาเฉพาะส่วนที่ไม่มีแบบแผนที่แน่นอน เหตุการณ์ที่ผิดปกตินี้จะเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยไม่อาจคาดการณ์มาก่อนล่วงหน้า ซึ่งอาจเป็นเรื่องเล็กน้อย เช่น การนัดหยุดงานของคนงาน ข่าวลือ ไปจนถึงเรื่องใหญ่ ๆ เช่น การเกิดสงคราม การเกิดแผ่นดินไหว เป็นต้น รวมถึงปัจจัยอื่น ๆ ที่ไม่ใช่เนื่องจากแนวโน้ม อิทธิพลของฤดูกาล และอิทธิพลของวัฏจักร

ข้อมูลอนุกรมเวลาแต่ละชุด ไม่จำเป็นต้องประกอบไปด้วยส่วนประกอบทั้ง 4 ส่วน และในกรณีที่เป็นข้อมูลรายปี จะไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล (กัลยา วาณิชย์บัญชา, 2542; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539)

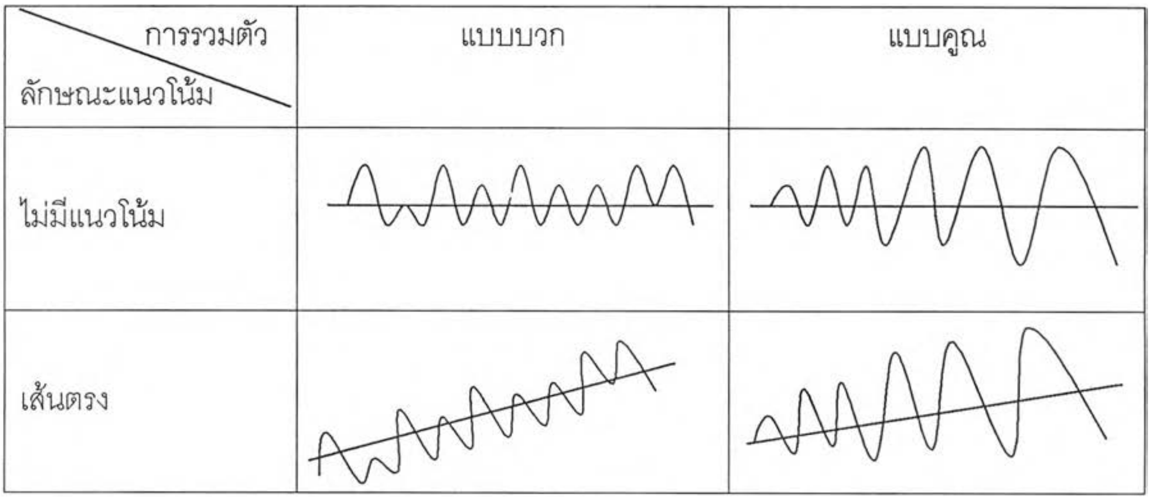
การรวมส่วนประกอบของอนุกรมเวลาเป็นได้ทั้งการรวมตัวแบบบวก (additive model) และการรวมตัวแบบคูณ (multiplicative model) ซึ่งรูปแบบการรวมตัวแบบบวกคือ

$$y = T + S + C + I$$

และรูปแบบการรวมตัวแบบคูณ คือ

$$y = T \times S \times C \times I$$

การรวมตัวแบบบวกลักษณะการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาเฉพาะในส่วนของอิทธิพลของฤดูกาลในแต่ละปีจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ถ้าเป็นการรวมตัวแบบคูณ อิทธิพลของฤดูกาลในแต่ละปีจะมีการแกว่งมากขึ้นหรือน้อยลง ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 การรวมตัวของแนวโน้มและฤดูกาลแบบบวกและแบบคูณ

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่มีและไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล มีวิธีการพยากรณ์เดี่ยว 8 วิธี คือ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (simple moving average: SMA) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (single exponential smoothing: SES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (Brown's double exponential smoothing: DES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (Holt's linear exponential smoothing: LES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 3 ครั้งตามแบบของบราวน์ (Brown's triple exponential smoothing: TES) วิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ (Holt-Winters smoothing: HWS) วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (regression analysis: REG) และวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ (Box-Jenkins: B-J) แต่ละวิธีมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (simple moving average: SMA) เป็นการปรับข้อมูลอนุกรมเวลาให้เรียบโดยการกำจัดอิทธิพลของเหตุการณ์ที่ผิดปกติ (I) ออกไป ซึ่งจะทำให้เห็นลักษณะที่แท้จริงของข้อมูล โดยการนำชุดของข้อมูลมาหาค่าเฉลี่ย แล้วใช้ค่าเฉลี่ยนั้นพยากรณ์ในช่วงเวลาถัดไป จำนวนข้อมูลที่เหมาะสมในการนำมาหาค่าเฉลี่ย คือจำนวนที่ทำให้ค่า

พยากรณ์มีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด หรือทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด วิธีนี้เหมาะกับข้อมูลที่มีลักษณะคงที่หรือสม่ำเสมอตามแนวนอน (horizontal) ใช้พยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาในระยะสั้นและระยะปานกลาง ข้อจำกัดของวิธีนี้ คือ ต้องใช้ข้อมูลล่าสุด การคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่จะต้องมีข้อมูลอย่างน้อย k ค่า และจะมีข้อมูลบางส่วนหายไป โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.กำหนดค่าคงที่ของจำนวนเทอมที่จะหาค่าเฉลี่ยหรือจำนวนข้อมูลที่ต้องการหาค่าเฉลี่ย (k)

2. คำนวณค่าพยากรณ์จากสูตร

$$F_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k+1}}{k}$$

และ $F_{t+m} = F_{t+1} \quad , m \geq 2$

เมื่อ Y_t = ค่าของข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+1} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+1

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m ,$m \geq 2$

k = จำนวนช่วงเวลาที่ใช้ในการเฉลี่ย

ข้อบกพร่องของวิธีนี้ คือ การให้น้ำหนักแก่ข้อมูลเท่ากันหมด ซึ่งในความเป็นจริงแล้วข้อมูลล่าสุดควรมีความสำคัญมากกว่า เพราะมีสถานการณ์สิ่งแวดล้อมคล้ายในอนาคตมากกว่า ดังนั้นจึงควรให้น้ำหนักแก่ข้อมูลล่าสุดมากกว่า ซึ่งวิธีแก้ไขข้อบกพร่องนี้ก็คือ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (exponential smoothing)

วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักโดยให้ความสำคัญแก่ข้อมูลล่าสุดมากที่สุด และความสำคัญจะลดลงเรื่อย ๆ แบบเรขาคณิต หรือแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล สำหรับข้อมูลที่มีระยะเวลาห่างไกลออกไป (Sullivan and Claycombe, 1977; Newbold and Bos, 1994; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) การกำหนดน้ำหนัก หรือค่าคงที่สำหรับปรับให้เรียบ (smoothing constant) ซึ่งมีตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไปขึ้นอยู่กับแต่ละวิธี จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เท่านั้น และวิธีนี้มักมีปัญหาในการกำหนดค่าเริ่มต้นว่าควรจะกำหนดโดยใช้ข้อมูลตัวแรกเป็นค่าเริ่มต้น หรือใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดคำนวณหาค่าเริ่มต้น ซึ่งไม่ปรากฏทางทฤษฎีว่ากำหนดแบบใดดีที่สุด โดยทั่วไปจึงต้องทำเปรียบเทียบกันว่ากำหนดแบบใดที่ให้ผลพยากรณ์ได้ถูกต้องที่สุด แต่ถ้าใช้โปรแกรมสำเร็จรูปปัญหานี้ก็จะไม่เกิดขึ้น เนื่องจากโปรแกรมสำเร็จรูปจะกำหนดค่าเริ่มต้นที่ดีที่สุดให้

2 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (single exponential smoothing: SES) วิธีนี้คล้ายกับวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (SMA) คือเพื่อกำจัดอิทธิพลของความผันแปรไม่แน่นอนไปจากข้อมูล แต่การกำหนดน้ำหนักของข้อมูลแต่ละเวลาต่างกัน คือข้อมูลล่าสุดจะได้รับการถ่วงน้ำหนักมากกว่าข้อมูลในอดีตตัวอื่น ๆ วิธีการกำหนดน้ำหนักให้กับข้อมูลหรือค่าสังเกต จากน้ำหนักทั้งหมด 1 จะกระจายให้กับค่าสังเกตในลักษณะที่ลดลงแบบเรขาคณิตหรือแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ดังนั้นค่าพยากรณ์ในอนาคต คือ ค่าพยากรณ์ในอดีตและปรับปรุงด้วยความผิดพลาดของการพยากรณ์ในอดีต

วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะคงที่ (horizontal) หรือเป็นข้อมูลที่ไม่มีแนวโน้ม และไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล ใช้พยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาในระยะสั้น ช่วงเวลาของการพยากรณ์ ทำได้ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า ข้อจำกัดของวิธีนี้คือ ต้องมีค่าสังเกตค่าล่าสุด โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าปรับน้ำหนัก (α) โดยที่ $0<\alpha<1$ และทำให้ SSE มีค่าต่ำสุด
2. กำหนดค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์
3. คำนวณค่าพยากรณ์ จากสูตร

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \dots$$

$$= \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$

และ $F_{t+m} = F_{t+1} \quad , m \geq 2$

เมื่อ Y_t = ค่าสังเกต/ข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+1} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+1

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m ,$m \geq 2$

α = ค่าปรับน้ำหนัก ; $0<\alpha<1$

การกำหนดค่าปรับน้ำหนัก (α) ควรมีค่าอยู่ระหว่าง .01 ถึง .30 จะใช้ได้ผลดี (Sullivan and Claycombe, 1977; Montogomery, Johnson and Gardiner, 1990; Makridakis, Wheelwright and Hyndman, 1998) แต่ในทางปฏิบัตินักวิจัยไม่จำเป็นต้องกำหนดน้ำหนักหรือค่าคงที่สำหรับปรับให้เรียบนี้เอง เนื่องจากโปรแกรมสำเร็จรูปจะกำหนดน้ำหนักที่เหมาะสมนี้ให้ โดยค่าน้ำหนักที่เหมาะสม คือ ค่าที่ทำให้ความคลาดเคลื่อน (SSE) มีค่าต่ำสุด จึงจะทำให้ค่าพยากรณ์ใกล้เคียงกับค่าจริง ถ้า α มีค่าใกล้ 1 แสดงว่าให้ความสำคัญแก่ข้อมูลล่าสุด (Y_t) มากกว่าข้อมูล ณ เวลา t-1, t-2,... แต่ถ้า α มีค่าใกล้ 0 แสดงว่าค่าพยากรณ์จะไม่คำนึงถึงความผิดพลาดในการพยากรณ์ ณ เวลาที่เพิ่งผ่านมานัก

3. วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (Brown's double exponential smoothing หรือ Brown's linear exponential smoothing: DES) วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ที่มีปัจจัยแนวโน้มเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอตามเวลา และไม่มีอิทธิพลของฤดูกาลมาเกี่ยวข้อง โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าปรับน้ำหนัก (α) โดยที่ $0<\alpha<1$ และทำให้ SSE มีค่าต่ำสุด
2. กำหนดค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์
3. คำนวณค่าพยากรณ์แบบเอ็กซ์โปเนนเชียลอย่างง่ายจากข้อมูล Y_t หรือค่าปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t โดย

$$F_t^{(1)} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_{t-1}^{(1)}$$

4. คำนวณค่าพยากรณ์แบบเอ็กซ์โปเนนเชียลอย่างง่ายจาก F_t หรือค่าปรับให้เรียบครั้งที่สองแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t โดย

$$F_t^{(2)} = \alpha F_t^{(1)} + (1-\alpha)F_{t-1}^{(2)}$$

5. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

$$a_t = 2F_t^{(1)} - F_t^{(2)}$$
$$= F_t^{(1)} + (1-(1-\alpha)^2)e_t$$
$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(F_t^{(1)} - F_t^{(2)}\right)$$
$$= b_{t-1} + \alpha^2 e_t$$

6. คำนวณค่าพยากรณ์ จากสูตร

$$F_{t+m} = a_t + b_t m \text{ , } m \geq 1$$

เมื่อ Y_t = ค่าสังเกต/ข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m, $m \geq 1$

α = ค่าปรับน้ำหนัก ; $0<\alpha<1$

a_t = ค่าแนวโน้ม ณ เวลา t

b_t = ค่าประมาณพารามิเตอร์ ณ เวลา t

$F_t^{(1)}$ = ค่าปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t

$F_t^{(2)}$ = ค่าปรับให้เรียบครั้งที่สองแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t

4. วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (Holt's linear exponential smoothing: LES) ลักษณะคล้ายกับวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

ตามแบบของบราวน์ (DES) ต่างกันแต่เพียงวิธีการของโฮลท์ มีค่าคงที่ปรับให้เรียบสำหรับแนวโน้ม โดยเฉพาะ ซึ่งจะมีผลให้ติดตามแนวโน้มได้ดีขึ้น โดยใช้พารามิเตอร์คนละตัว จึงทำให้วิธีของโฮลท์ มีพารามิเตอร์ 2 ตัว เหมาะกับข้อมูลที่มีแนวโน้มในรูปเส้นตรงที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอ ต้องมีข้อมูลอย่างน้อย 4 ตัว ใช้พยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาในระยะใกล้ ระยะสั้น และอาจใช้ใน ระยะปานกลางได้ โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าปรับน้ำหนัก 2 ค่า (α และ β) โดยที่ $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ และทำให้ SSE มีค่าต่ำสุด
2. กำหนดค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์
3. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

$$a_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

4. คำนวณค่าพยากรณ์ จากสูตร

$$F_{t+m} = a_t + b_t m \qquad , m \geq 1$$

เมื่อ Y_t = ค่าสังเกต/ข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m , $m\geq 1$

α = ค่าคงที่ปรับให้เรียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าพยากรณ์ ; $0<\alpha<1$

β = ค่าคงที่ปรับให้เรียบระหว่างค่าแนวโน้มจริงกับค่าพยากรณ์ของแนวโน้ม ; $0<\beta<1$

a_t , b_t = ค่าประมาณพารามิเตอร์ ณ เวลา t

5. วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 3 ครั้งตามแบบของบราวน์ (Brown's quadratic exponential smoothing หรือ Brown's triple exponential smoothing: TES) เป็นวิธี ที่ใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งแบบควอดราติก (quadratic) ซึ่งวิธีการจะคล้าย กับวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (DES) แต่เพิ่ม พารามิเตอร์เป็น 3 ตัวโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าปรับน้ำหนัก (α) โดยที่ $0<\alpha<1$ และทำให้ SSE มีค่าต่ำสุด
2. กำหนดค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์
3. คำนวณค่าปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t โดย

$$F_t^{(1)} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_{t-1}^{(1)}$$

4. คำนวณค่าปรับให้เรียบครั้งที่สองแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t โดย

$$F_t^{(2)} = \alpha F_t^{(1)} + (1-\alpha)F_{t-1}^{(2)}$$

5. คำนวณค่าปรับให้เรียบครั้งที่สามแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t โดย

$$F_t^{(3)} = \alpha F_t^{(2)} + (1-\alpha)F_{t-1}^{(3)}$$

6. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

$$a_t = 3F_t^{(1)} - 3F_t^{(2)} + F_t^{(3)}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\left((6-5\alpha)F_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)F_t^{(2)} + (4-3\alpha)F_t^{(3)}\right)$$

$$c_t = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}\left(F_t^{(1)} - 2F_t^{(2)} + F_t^{(3)}\right)$$

7. คำนวณค่าพยากรณ์ จากสูตร

$$F_{t+m} = a_t + b_t m + c_t m^2 \quad , m \geq 1$$

เมื่อ Y_t = ค่าสังเกต/ข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m , $m \geq 1$

α = ค่าน้ำหนักของการเฉลี่ย ; $0<\alpha<1$

a_t, b_t, c_t = ค่าประมาณพารามิเตอร์ ณ เวลา t

$F_t^{(1)}$ = ค่าปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t

$F_t^{(2)}$ = ค่าปรับให้เรียบครั้งที่สองแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t

$F_t^{(3)}$ = ค่าปรับให้เรียบครั้งที่สามแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t

6. วิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ (Holt-Winters smoothing: HWS) Winter (1960) ได้ปรับปรุงวิธีนี้มาจากวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (LES) เป็นวิธีที่เหมาะสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มและมีอิทธิพลของฤดูกาล ใช้พยากรณ์ระยะสั้นจนถึงระยะปานกลาง ข้อมูลไม่ควรเป็นรายปี เพราะจะทำให้ไม่สามารถแยกอิทธิพลของฤดูกาลได้ รูปแบบอาจจะเป็นทั้งแบบบวกและแบบคูณมีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 ตัว โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าปรับน้ำหนัก 3 ค่า (α, β และ γ) โดยที่ $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$ และทำให้ SSE มีค่าต่ำสุด
2. กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับการพยากรณ์ ซึ่งมี 2+s ค่า คือค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์ 1 ค่า ค่าเริ่มต้นของแนวโน้ม 1 ค่า และค่าเริ่มต้นของฤดูกาล s ค่า

เมื่อ s คือ คาบเวลาของฤดูกาลในแต่ละปี เช่น ข้อมูลรายเดือน ค่า s เท่ากับ 12 ข้อมูลรายไตรมาส ค่า s เท่ากับ 4 เป็นต้น

3. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

3.1 รูปแบบบวก

Level; $L_t = \alpha(y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$

Trend; $b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$

Seasonal; $S_t = \gamma(y_t - L_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$

3.2 รูปแบบคูณ

Level; $L_t = \alpha\dfrac{y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$

Trend; $b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$

Seasonal; $S_t = \gamma\dfrac{y_t}{L_t} + (1-\gamma)S_{t-s}$

4. คำนวณค่าพยากรณ์ จากสูตร

4.1 รูปแบบบวก

$$F_{t+m} = L_t + b_t m + S_{t-s+m} \qquad , m \geq 1$$

4.2 รูปแบบคูณ

$$F_{t+m} = (L_t + b_t m)S_{t-s+m} \qquad , m \geq 1$$

เมื่อ Y_t = ค่าสังเกต/ข้อมูล ณ เวลา t

F_{t+m} = ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t+m , $m \geq 1$

L_t , b_t , S_t = ค่าประมาณพารามิเตอร์ ณ เวลา t

α = ค่าปรับให้เรียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าพยากรณ์ ; $0<\alpha<1$

β = ค่าปรับให้เรียบระหว่างค่าแนวโน้มจริงกับค่าพยากรณ์ของแนวโน้ม ; $0<\beta<1$

γ = ค่าปรับให้เรียบระหว่างฤดูกาลจริงกับค่าพยากรณ์ของฤดูกาล ; $0<\gamma<1$

s = คาบเวลาของฤดูกาลในแต่ละปี

7. วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (regression analysis: REG) การวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ใช้หลักการวิเคราะห์การถดถอย มีตัวแปรอนุกรมเวลาเป็นตัวแปรตาม และมีตัวแปร

อิสระที่มีความหมายต่าง ๆ กันไป (ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) ในที่นี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงใน 2 ความหมาย ดังนี้

7.1 ตัวแปรเวลา (time variable) เป็นตัวแปรที่ใช้เมื่ออนุกรมเวลามีแนวโน้มโดยจะกำหนดตัวแปรเวลาเป็นตัวแปรอิสระที่มีค่าเป็นรหัส (coded value) แทนวัน เดือน ไตรมาส หรือปีที่เก็บรวบรวมข้อมูล รูปแบบแนวโน้มมีหลายแบบขึ้นอยู่กับลักษณะของอนุกรมเวลา แนวโน้มที่นิยมใช้ ได้แก่

แนวโน้มเส้นตรง $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$

แนวโน้มแบบ quadratic $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$

แนวโน้มแบบ exponential $Y_t = \beta_0 \beta_1^{t} \varepsilon_t$

การใช้ตัวแปรเวลาเป็นตัวแปรอิสระนั้น ไม่ว่ารูปแบบการถดถอยจะเป็นแบบใดต้องกำหนดค่าให้กับตัวแปรเวลา (t) โดยจะมีค่าเริ่มต้นเท่าใดก็ได้ แต่จะต้องเพิ่มขึ้นเท่า ๆ กัน ในแต่ละช่วงเวลา

7.2 ตัวแปรดัมมี่ (dummy variable) เป็นตัวแปรที่กำหนดขึ้นเพื่อบอกว่าค่าสังเกตในอนุกรมเวลาเกิดขึ้นในฤดูกาลใด ค่าตัวแปรดัมมี่จะเป็น 1 เมื่อค่าสังเกตอยู่ในฤดูกาลที่กำหนด ค่าตัวแปรดัมมี่จะเป็น 0 เมื่อค่าสังเกตไม่อยู่ในฤดูกาลที่กำหนด และตัวแปรดัมมี่จะมีน้อยกว่าจำนวนฤดูกาลอยู่ 1 ดังนี้

แบบบวก

รูปแบบฤดูกาล $Y_t = \beta_0 + \beta_2 x_{1t} + \beta_3 x_{2t} + \dots + \beta_L x_{(L-1)t} + \varepsilon_t$

รูปแบบแนวโน้มเส้นตรงและฤดูกาล $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x_{1t} + \beta_3 x_{2t} + \dots + \beta_L x_{(L-1)t} + \varepsilon_t$

เมื่อ β_0 = ค่าจุดตัด (y-intercept)

β_1 = ค่าอัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของ Y_t เมื่อ t เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

β_i = ค่าวัดอิทธิพลของฤดูกาลที่ i ,i= 2, 3,…,L

$$x_{it} = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อค่าสังเกต } t \text{ เป็นค่าในฤดูกาลที่ } i \\ 0 \text{ เมื่อค่าสังเกต } t \text{ ไม่เป็นค่าในฤดูกาลที่ } i \end{cases}$$

รูปแบบแนวโน้มเส้นโค้งและฤดูกาล

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 x_{1t} + \beta_4 x_{2t} + \dots + \beta_{L+1} x_{(L-1)t} + \varepsilon_t$$

แบบคูณ

รูปแบบฤดูกาล $Y_t = \beta_0 \beta_2^{x_{1t}} \beta_3^{x_{2t}} ... \beta_L^{x_{(L-1)t}} \varepsilon_t$

รูปแบบแนวโน้มเส้นตรงและฤดูกาล $Y_t = \beta_0 \beta_1^{t} \beta_2^{x_{1t}} \beta_3^{x_{2t}} ... \beta_L^{x_{(L-1)t}} \varepsilon_t$

สำหรับรูปแบบเป็นแบบคูณ ต้องแปลงให้อยู่ในรูปแบบบวก โดยการหาลอการิทึม (logarithm) คือ แปลง Y_t ให้เป็น $\ln Y_t$ หรือ Y_t' ดังนี้

รูปแบบฤดูกาล

$$\ln Y_t = (\ln \beta_0) + (\ln \beta_2) x_{1t} + ... + (\ln \beta_L) x_{(L-1)t} + (\ln \varepsilon_t)$$

$$Y_t' = \beta_0' + \beta_2' x_{1t} + ... + \beta_L' x_{(L-1)t} + \varepsilon_t'$$

รูปแบบแนวโน้มเส้นตรงและฤดูกาล

$$\ln Y_t = (\ln \beta_0) + (\ln \beta_1) t + (\ln \beta_2) x_{1t} + ... + (\ln \beta_L) x_{(L-1)t} + (\ln \varepsilon_t)$$

$$Y_t' = \beta_0' + \beta_1' t + \beta_2' x_{1t} + \beta_3' x_{2t} + ... + \beta_L' x_{(L-1)t} + \varepsilon_t'$$

เมื่อ β_0 = ค่าจุดตัด (y-intercept)

β_i = ค่าดัชนีฤดูกาลที่ i ,i= 2, 3,...,L

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อค่าสังเกต } t \text{ เป็นค่าในฤดูกาลที่ } i \\ 0 & \text{เมื่อค่าสังเกต } t \text{ ไม่เป็นค่าในฤดูกาลที่ } i \end{cases}$$

จากวิธีการพยากรณ์ดังกล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถแสดงการเปรียบเทียบโดยพิจารณาจากลักษณะแนวโน้มและฤดูกาล ได้ดังตาราง 2

ตาราง 2 การเปรียบเทียบลักษณะแนวโน้มและฤดูกาลของวิธีการพยากรณ์

วิธี	SMA	SES	DES	LES	TES	HWS	REG
แนวโน้ม	-	-	เส้นตรง	เส้นตรง	เส้นโค้ง	เส้นตรง	มี/ไม่มี
ฤดูกาล	-	-	-	-	-	มี	มี/ไม่มี

หมายเหตุ มีฤดูกาล หมายถึง วิธีที่ใช้สำหรับข้อมูลที่มีฤดูกาล

มี/ไม่มีแนวโน้ม หมายถึง วิธีที่ใช้สำหรับข้อมูลที่มีแนวโน้ม หรือไม่มีแนวโน้มก็ได้

มี/ไม่มีฤดูกาล หมายถึง วิธีที่ใช้สำหรับข้อมูลที่มีฤดูกาล หรือไม่มีฤดูกาลก็ได้

สำหรับวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์เป็นวิธีการวิเคราะห์อนุกรมเวลาโดยไม่ต้องมีการกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ ดังจะได้กล่าวถึงต่อไป

8. วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ (Box-Jenkins: B-J) เป็นการวิเคราะห์อนุกรมเวลาโดยการหารูปแบบที่เหมาะสมให้กับอนุกรมเวลา โดยใช้ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ (autocorrelation function) และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน (partial autocorrelation function) และรูปแบบที่เลือกจะอยู่ในกลุ่มของ ARMA(p,q) ดังนั้นผู้ใช้จะต้องมีความรู้เกี่ยวกับรูปแบบ ARMA(p,q) และต้องใช้ข้อมูลอย่างน้อย 50 ค่าในการวิเคราะห์ (Newbold and Granger, 1974; Thomopoulos, 1980) เพื่อนำมาพิจารณาหารูปแบบในการพยากรณ์ วิธีนี้จึงเป็นวิธีที่ค่อนข้างยุ่งยากสลับซับซ้อนและอาศัยประสบการณ์และความชำนาญในการวิเคราะห์ แต่วิธีนี้ก็ให้ค่าพยากรณ์ที่มีความถูกต้อง (accuracy) สูงกว่าวิธีอื่นในการพยากรณ์ระยะสั้น (Newbold and Granger, 1974; O'Donovan, 1983; Shearer, 1994; Hanke and Reitsch, 1995; Brockwell and Davis, 1996; วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล และคณะ, 2524; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539)

นอกจากนี้ยังแตกต่างจากวิธีอื่น ๆ ตรงที่วิธีนี้ไม่มีการกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ข้อมูลอนุกรมเวลาก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ข้อมูล เนื่องจากรูปแบบจะถูกกำหนดขึ้นจากขั้นตอนการวิเคราะห์ ดังนั้นผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานและเพื่อที่จะอธิบายกระบวนการของวิธีนี้ได้ง่ายขึ้น ผู้วิจัยจึงแบ่งการพยากรณ์ด้วยวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ ออกเป็น 4 ตอนดังนี้ คือ

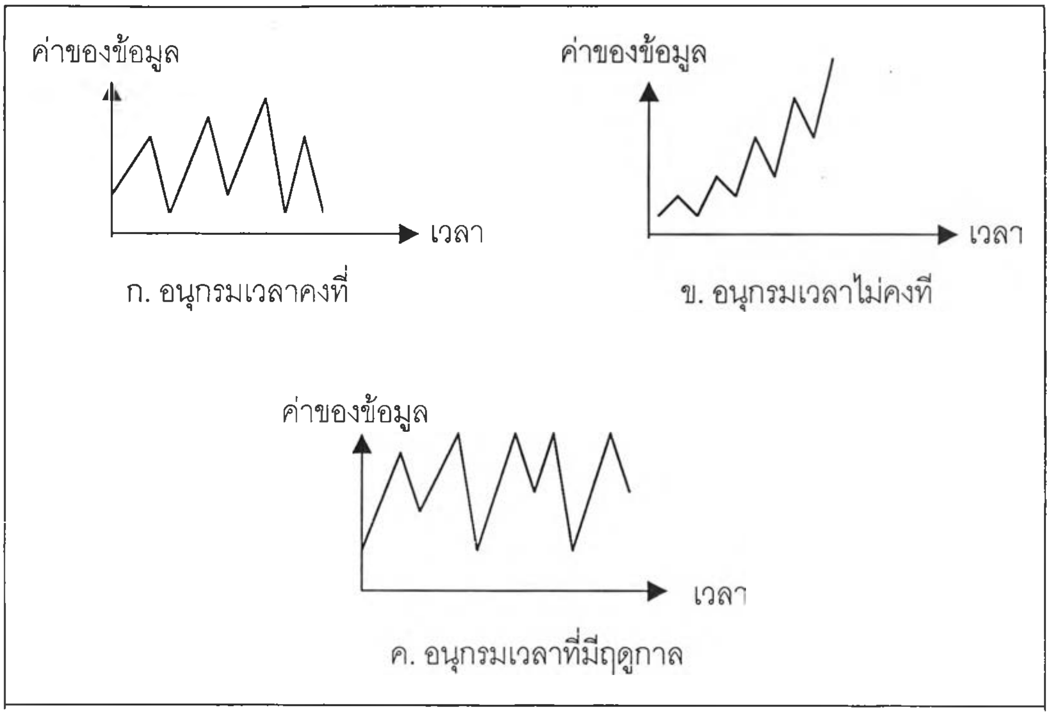
ตอนที่ 1 ประเภทของอนุกรมเวลา

อนุกรมเวลาในวิธีของบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ แยกออกเป็น 3 ประเภท คือ

1.1 อนุกรมเวลาคงที่ (stationary time series หรือ horizontal) เป็นอนุกรมเวลาที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวอยู่รอบ ๆ ค่าเฉลี่ยหรือมีค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนคงที่ และค่าความแปรปรวนร่วมของข้อมูลในเวลานั้นกับเวลาล้าหลังจะขึ้นอยู่กับ lag k อย่างเดียว (Kendall and Ord, 1991; Bowerman and o'connell, 1993; Newbold and Bos, 1994; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) ดังภาพที่ 4ก

1.2 อนุกรมเวลาไม่คงที่ (nonstationary time series) หมายถึง ข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวไม่แน่นอน เปลี่ยนแปลงไปตามระยะเวลา ดังภาพที่ 4ข

1.3 อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล (seasonal time series) หมายถึง ข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวซ้ำ ๆ กัน จนเป็นแบบแผนในช่วงเวลาเดียวกัน ดังภาพที่ 4ค



ภาพที่ 4 ลักษณะอนุกรมเวลาแบบคงที่ ไม่คงที่ และมีฤดูกาล

โดยปกติรูปแบบอนุกรมเวลาของบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ ที่ใช้ในการพยากรณ์จะต้องเป็นอนุกรมเวลาที่คงที่ (stationary) ถ้าหากว่าอนุกรมเวลาชุดใดไม่คงที่หรือมีแนวโน้ม จะต้องทำการแปลงข้อมูล (transformation) อนุกรมเวลานั้นให้คงที่ ซึ่งอาจทำได้โดยการหาผลต่าง (regular differencing) ลำดับต่าง ๆ ของข้อมูลจนกว่าอนุกรมเวลานั้นจะคงที่ หรือถ้าข้อมูลอนุกรมเวลานั้นมีฤดูกาลก็จะต้องกำจัดอิทธิพลของฤดูกาลออกไปโดยการหาผลต่างฤดูกาล (seasonal differencing) หรือบางครั้งถ้าความแปรปรวนไม่คงที่อาจต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของลอการิทึมฐานธรรมชาติ (natural logarithm) เพื่อทำให้อนุกรมเวลานั้นคงที่เสียก่อน แล้วจึงกำหนดรูปแบบของอนุกรมเวลา

ตอนที่ 2 ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ (autocorrelation function: ACF) และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน (partial autocorrelation function: PACF)

2.1 อัตตะสหสัมพันธ์ (autocorrelation) เป็นความสัมพันธ์ที่เกิดระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลาชุดเดียวกันที่อยู่ในช่วงเวลาแตกต่างกัน ซึ่งในข้อมูลอนุกรมเวลานักวิจัยสามารถสร้างตัวแปรใหม่ตัวหนึ่งจากตัวแปรอีกตัวหนึ่งได้ ตัวแปรที่สร้างขึ้นใหม่นี้ เรียกว่า ตัวแปรเวลาล้าหลัง (lag time variables: y_{t-k}) เมื่อ k เป็นเวลาที่แตกต่าง ดังตาราง 3

ตาราง 3 การสร้างตัวแปรเวลาล้าหลัง (lag time variables)

ช่วงเวลา t	ตัวแปรเริ่มต้น y_t	ตัวแปรเวลาล้าหลังที่ 1 y_{t-1}	ตัวแปรเวลาล้าหลังที่ 2 y_{t-2}	ตัวแปรเวลาล้าหลังที่ 3 y_{t-3}
1	10			
2	12	10		
3	9	12	10	
4	8	9	12	10
5	4	8	9	12
6	6	4	8	9
7	7	6	4	8
8	13	7	6	4

จากตาราง 3 สามารถสร้างตัวแปรเวลาล้าหลังที่1 (lag1: y_{t-1}) ตัวแปรเวลาล้าหลังที่2 (lag2: y_{t-2}) ตัวแปรเวลาล้าหลังที่3 (lag3: y_{t-3}) หรือตัวแปรเวลาล้าหลังที่k (lagk: y_{t-k}) ได้ เช่น ต้องการสร้างตัวแปรเวลาล้าหลังที่1 (lag1: y_{t-1}) จากค่าสังเกต y_t มีวิธีการสร้างคือ ค่าสังเกตในเวลา t=2 ของ lag1 ได้จากค่าสังเกต y_t เมื่อเวลา t=1 ค่าสังเกตในเวลา t=3 ของ lag1 ได้จากค่าสังเกต y_t เมื่อเวลา t=2 และค่าสังเกตในเวลา t=4 ของ lag1 ได้จากค่าสังเกต y_t เมื่อเวลา t=3 เช่นนี้เรื่อยไป และในทำนองเดียวกัน การสร้างตัวแปรเวลาล้าหลังที่2 (lag2: y_{t-2}) จากตัวแปรเวลาล้าหลังที่1 (lag1: y_{t-1}) มีวิธีการสร้างคือ ค่าสังเกตในเวลา t=3 ของ lag2 ได้จากค่าสังเกตเมื่อ t=2 ของ lag1 ค่าสังเกตในเวลา t=4 ของ lag2 ได้จากค่าสังเกตเมื่อ t=3 ของ lag1 เป็นต้น ดังนั้นจะเห็นว่าค่าสังเกตใน lag1(y_{t-1}) จะหายไป 1 ค่า ค่าสังเกตใน lag2 (y_{t-2}) จะหายไป 2 ค่า และค่าสังเกตใน lag3 (y_{t-3}) จะหายไป 3 ค่า เมื่อนักวิจัยสร้างตัวแปรเวลาล้าหลังได้แล้ว จึงนำมาคำนวณหาค่าความสัมพันธ์ระหว่าง y_t และ y_{t-k} เมื่อ k = 1, 2, 3, ... ซึ่งก็คือ ค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ (coefficient of autocorrelation: r_k) สามารถหาได้จากสูตร

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

เมื่อ r_k = สัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ ณ เวลาล้าหลัง k; $-1<r_k<1$

t = ช่วงเวลา

n = ช่วงเวลาสุดท้าย

y_t = ค่าของข้อมูล ณ เวลา t

$\bar{y}$ = ค่าเฉลี่ยของข้อมูล

k = เวลาล้าหลัง

โดยที่ $\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$

เมื่อ $\rho_k = 0$, r_k มีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวน $\sigma^2_{r_k}$ หรือ $r_k \sim N(0, \sigma^2_{r_k})$ ซึ่งจะประมาณ $\sigma^2_{r_k}$ ด้วย $S^2_{r_k}$ โดยค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ r_k คือ

$$S_{r_k} = \sqrt{\frac{1+2\sum_{j=1}^{k-1} r_j^2}{n}} \quad , k = 1,2,\ldots$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{n}}$$

การทราบลักษณะการแจกแจงของ r_k จะทำให้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ ρ_k ได้ นั่นคือการทดสอบ $H_0: \rho_k = 0$ กับ $H_1: \rho_k \neq 0$ จะใช้สถิติทดสอบ

$$Z = \frac{r_k}{s_{r_k}}$$

$$= \sqrt{n}\, r_k$$

ที่มีช่วงวิกฤติ $|Z| \geq z_{\alpha/2}$ ที่ระดับนัยสำคัญ α ในทำนองเดียวกันอาจจะใช้ตัวทดสอบสถิติ r_k ที่มีช่วงวิกฤติเป็น $|r_k| \geq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}}$ โดยทั่วไปการทดสอบจะทำที่ระดับนัยสำคัญ .05 จึงมีช่วงวิกฤตเป็น $|r_k| \geq \frac{1.96}{\sqrt{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$

ค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ (coefficient of autocorrelation: r_k) มีความหมายในทำนองเดียวกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient: r) คือเป็นค่าที่ใช้อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหมือนกัน แต่ต่างกันที่ r_k ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรตัวเดียวกันในช่วงเวลาที่ห่างกัน k ช่วงเวลา หรือก็คือเป็นค่าวัดสหสัมพันธ์ระหว่าง y_t และ y_{t-k} ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง –1 ถึง 1 ถ้า $|r_k|$ มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่าค่าสังเกตที่อยู่ห่างกัน k ช่วงเวลามีสหสัมพันธ์กันสูง แต่ถ้า $|r_k|$ มีค่าเข้าใกล้ 0 แสดงว่ามีสหสัมพันธ์กันต่ำ

ค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ มีความสำคัญมากในการช่วยกำหนดลักษณะของข้อมูล ถ้าข้อมูลได้มาจากการสุ่มอย่างสมบูรณ์ (completely random) ค่าสัมประสิทธิ์

อัตตะสหสัมพันธ์สำหรับช่วงเวลาที่ตามมา จะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ 0 แต่ถ้าข้อมูลประกอบด้วยอิทธิพลของฤดูกาลหรือวัฏจักร จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ที่ช่วงเวลาสูง เช่น lag 12, 24, ... จะมีค่าสูงมาก จึงเห็นได้ชัดว่าก่อนที่จะใช้วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ไม่จำเป็นต้องทราบลักษณะของข้อมูลเลย เพราะค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์จะช่วยกำหนดรูปแบบของข้อมูลอนุกรมเวลาให้

2.2 อัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน (partial autocorrelation) เป็นความสัมพันธ์ที่เกิดระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลาชุดเดียวกัน ระหว่าง y_t และ y_{t-k} เมื่อขจัด (partial out) อิทธิพลของเวลาล้าหลัง 1,2,3,...,k-1 ออกไป ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนตัวแรกจะเหมือนกับสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ตัวแรก ค่าความสัมพันธ์ของอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนระหว่าง y_t และ y_{t-k} คือ ค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน (coefficient of partial autocorrelation; r_{kk}) ซึ่งสามารถหาได้จากสูตร

$$r_{kk}=\begin{cases} r_1 & ,k=1 \\ \dfrac{r_k-\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}r_j} & ,k=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

เมื่อ $r_{k,j} = r_{k-1,j} - r_{kk}r_{k-1,k-j}$,j = 1,2,...,k-1

r_{kk} มีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวน $\sigma^2_{r_{kk}}$ ประมาณด้วย $S^2_{r_{kk}}$ โดยค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ r_{kk} คือ

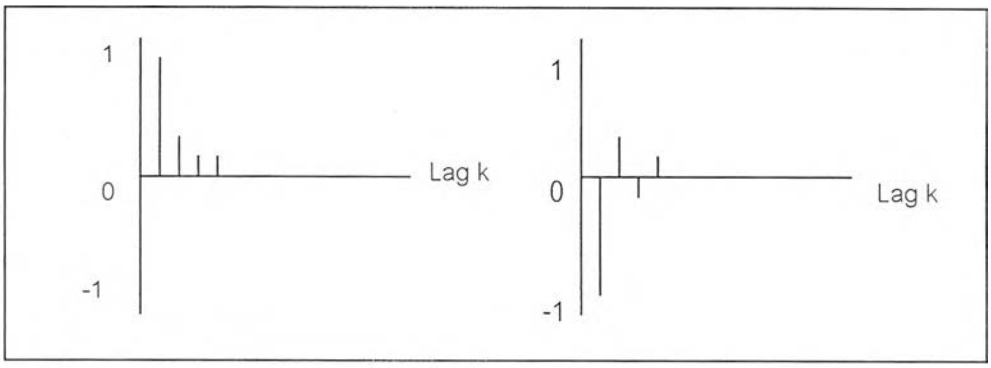
$$S_{r_{kk}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ,k=1,2,\ldots$$

การทราบลักษณะการแจกแจงของ r_{kk} จะทำให้ทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับ ρ_{kk} ได้ นั่นคือการทดสอบ H_0: $\rho_{kk} = 0$ กับ H_1: $\rho_{kk} \neq 0$ จะใช้สถิติทดสอบ r_{kk} และจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05 เมื่อ $|r_{kk}| \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$

ในการกำหนดรูปแบบจะพิจารณาจากชุดรวมของอัตตะสหสัมพันธ์และอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ซึ่งก็คือฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ (autocorrelation function: ACF) และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน (partial autocorrelation function: PACF) แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ (ρ_k) และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของประชากร (ρ_{kk})

ได้ ดังนั้นจึงพิจารณาจากฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งแสดงได้ในรูปแบบที่แตกต่างกัน 2 ลักษณะ (Makridakis, Wheelwright and McGee, 1983; O'Donovan, 1983; Granger and Newbold, 1986; Hanke & Reitsch, 1995; Bowerman & O'Connell, 1993) ดังนี้

ลักษณะที่ 1 ค่า r_k และ r_{kk} ลดลงอย่างรวดเร็วเป็น 0 เรียกว่า มีค่าต่ำสุด (cuts off) ดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของกลุ่มตัวอย่างที่ลดลงอย่างรวดเร็ว (cuts off) หลังเวลาล้าหลัง k

ลักษณะที่ 2 ค่า r_k และ r_{kk} มีค่ามากในเวลาล้าหลัง k แรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น เรียกว่า dies down หรือ tails off ดังภาพที่ 6

ตอนที่ 3 รูปแบบสำหรับการวิเคราะห์

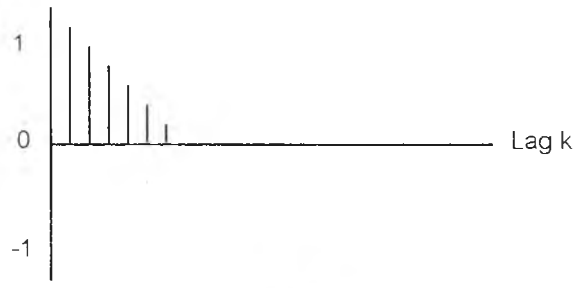
วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ จะพิจารณาค่าฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน เพื่อสร้างรูปแบบขึ้นมา โดยเรียกชื่อเฉพาะว่า ARMA (autoregressive-moving average) โดยรูปแบบสำหรับการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่คงที่และไม่มีฤดูกาล Box และ Jenkins กำหนดไว้ 3 รูปแบบ ดังนี้

3.1 กระบวนการการถดถอยในตัวเอง (autoregressive process) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ AR(p) หรือ ARMA(p,0) หรือ ARIMA(p,0,0) หมายถึงรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต y_t จะขึ้นอยู่กับค่าของ $y_{t-1},\ldots,y_{t-p}$ หรือค่าสังเกตที่เกิดขึ้นก่อน p ค่า สมการของ AR(p) คือ

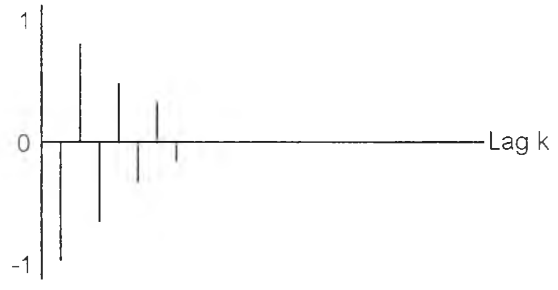
$$Y_t = \theta_0+\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\ldots+\phi_p y_{t-p}+\varepsilon_t$$

เมื่อ Y_t = ตัวแปรตาม

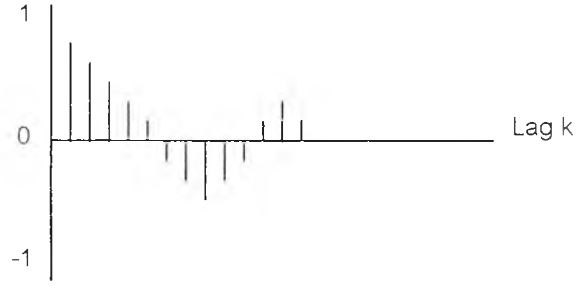
θ_0 = ค่าคงที่



ก. ลดลงอย่างช้า ๆ แบบเอกซ์โปเนนเชียล (damped exponential) ที่ไม่กระเพื่อม (no oscillation)



ข. ลดลงอย่างช้า ๆ แบบเอกซ์โปเนนเชียล (damped exponential) ที่กระเพื่อม (oscillation)



ค. ลดลงอย่างช้า ๆ แบบฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบไซน์ (damped sine-wave)

ภาพที่ 6 ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของกลุ่มตัวอย่าง ที่ลดลงอย่างช้า ๆ (dies down) หลังเวลาล้าหลัง k

ϕ_i = พารามิเตอร์ AR ตัวที่ i, i=1,2,3,...,p

ε_t = ค่าความคลาดเคลื่อน ที่เวลา t

โดยที่ $\theta_0 = \mu(1-\phi_1-\phi_2-...-\phi_p)$

พารามิเตอร์ ϕ_i จะต้องมีคุณสมบัติ stationary คือ มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรมเวลาคงที่ และค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ ที่ lag k ขึ้นอยู่กับค่า k อย่างเดียว โดย

พิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์ $\phi_1, \ldots, \phi_p$ ใด ที่ทำให้คำตอบของสมการ $1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p = 0$ มี $|B| > 1$ ซึ่งสมการนี้มาจากรูปแบบของ AR(p) นั่นเอง คือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

หรือ
$$Y_t - \phi_1 y_{t-1} - \ldots - \phi_p y_{t-p} = \theta_0 + \varepsilon_t$$

และเขียนในเทอมของ backward operator B ได้เป็น

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)\, Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t$$

ดังนั้น AR(p) อาจเขียนใหม่ได้เป็น $\phi_p(B) Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t$

โดยที่ $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$

และ $By_t = y_{t-1}, \ldots, B^p y_t = y_{t-p}$

เรียก B ว่า ตัวถอยหลังเวลา

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k จะมีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential หรือ damped sine wave หรือทั้งสองแบบรวมกัน

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลัง p (lag p) หรือมีลักษณะ cuts off นั่นคือ

$\rho_{kk} \neq 0$;k=1, 2, 3,…,p

และ $\rho_{kk} = 0$; k>p

โดยทั่วไปในทางปฏิบัติ ลำดับของกระบวนการ AR มักมีค่าไม่เกิน 2 นั่นคือ $p \leq 2$

3.2 กระบวนการการเคลื่อนที่เฉลี่ย (moving average process) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ MA(q) หรือ ARMA(0,q) หรือ ARIMA(0,0,q)หมายถึงรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต y_t จะขึ้นอยู่กับค่าของความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ หรือความคลาดเคลื่อนที่อยู่ก่อนหน้า q ค่า สมการของ MA(q) คือ

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

เมื่อ Y_t = ตัวแปรตาม

θ_0 = ค่าคงที่

θ_i = พารามิเตอร์ MA ตัวที่ i, i=1,2,3,…,q

ε_t = ค่าความคลาดเคลื่อน ที่เวลา t

โดยที่ $\theta_0 = \mu$

พารามิเตอร์ θ_i จะต้องมีคุณสมบัติ invertible คือ คุณสมบัติที่ทำให้หาค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ ε_t ในเทอมของ y_t, y_{t-1}, ...ได้ โดยพิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์ $\theta_1,\ldots,\theta_q$ใดที่ทำให้คำตอบของสมการ $1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q = 0$ มี $|B| > 1$ ซึ่งสมการนี้มาจากรูปแบบของ MA(q) นั่นเอง คือ

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q)\varepsilon_t$$

ดังนั้น MA(q) อาจเขียนใหม่ได้เป็น $Y_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t$

โดยที่ $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$

และ $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}, \ldots, B^q\varepsilon_t = \varepsilon_{t-q}$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีค่าเป็น 0 หลัง lag q หรือมีลักษณะ cuts off นั่นคือ

$$\rho_k \neq 0 \text{ ;k=1, 2, 3,...,q}$$

และ $\rho_k = 0$; k>q

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential หรือ damped sine wave หรือทั้งสองแบบรวมกัน

โดยทั่วไปในทางปฏิบัติ ลำดับของกระบวนการ MA มักมีค่าไม่เกิน 2 นั่นคือ $q \leq 2$

3.3 กระบวนการรวมกันของการถดถอยในตัวเองและการเคลื่อนที่เฉลี่ย (Mixed Autoregressive - Moving Average Process) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ARMA(p,q) หรือ ARIMA(p,0,q) มี p เป็นอันดับของ AR และ q เป็นอันดับของ MA โดยรูปแบบนี้เป็นการรวมส่วนของรูปแบบ AR(p) และรูปแบบ MA(q) เข้าด้วยกัน แสดงว่าค่าสังเกต y_t ขึ้นอยู่กับค่าสังเกตที่เกิดขึ้นก่อน p ค่า และค่าของความคลาดเคลื่อนที่อยู่ก่อนหน้า q ค่า สมการของ ARMA(p,q) คือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

เมื่อ Y_t = ตัวแปรตาม

θ_0 = ค่าคงที่

ϕ_i = พารามิเตอร์ AR ตัวที่ i, i=1,2,3,...,p

ε_t = ค่าความคลาดเคลื่อน ที่เวลา t

θ_i = พารามิเตอร์ MA ตัวที่ i, i=1,2,3,...,q

โดยที่ $\theta_0 = \mu(1-\phi_1-\phi_2-...-\phi_p)$

พารามิเตอร์ ϕ_i จะต้องมีคุณสมบัติ stationary และพารามิเตอร์ θ_i จะต้องมีคุณสมบัติ invertible

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential หรือ damped sine wave หรือทั้งสองแบบรวมกัน

การวิเคราะห์อนุกรมเวลาทั้ง 3 รูปแบบ สามารถสรุปลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ได้ดังตาราง 4 (O'Donovan, 1983; Vandaele, 1983; Bowerman and O'Connell, 1993; Makridakis, Wheelwright and Hyndman, 1998)

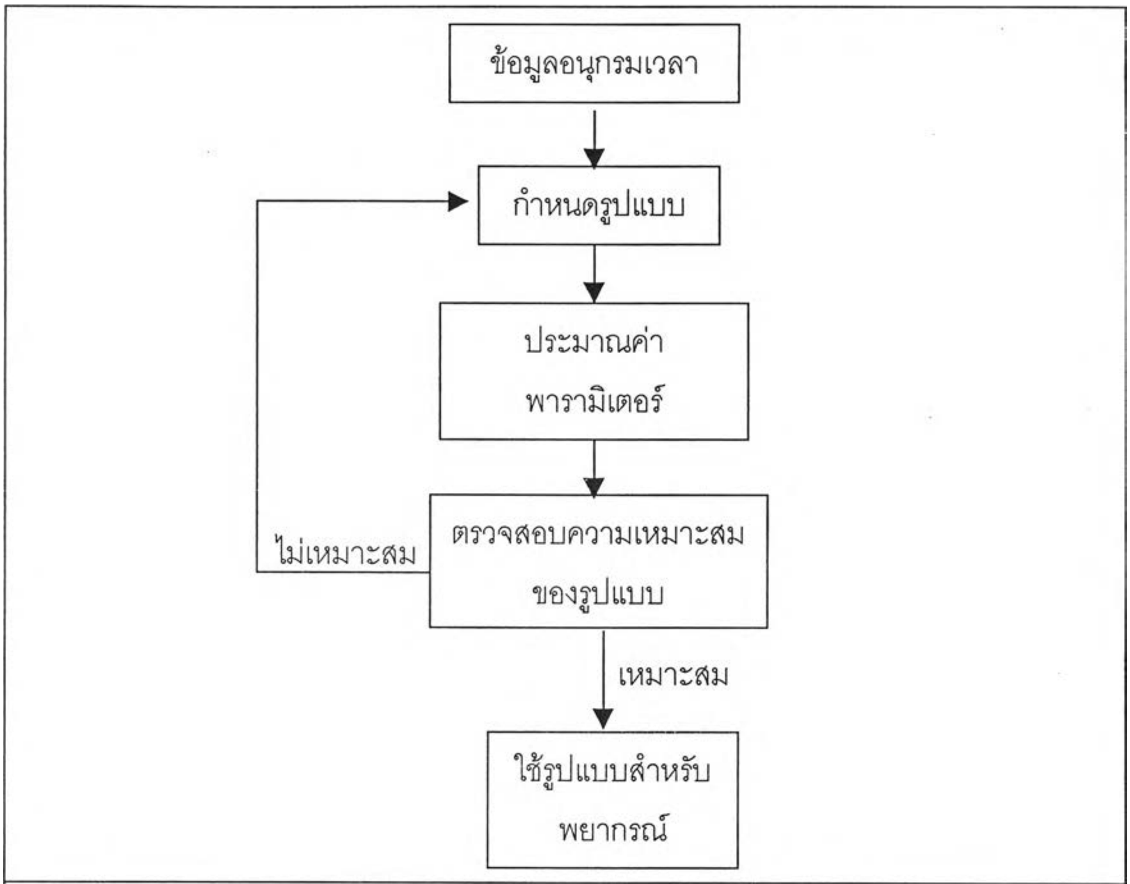
ตาราง 4 ลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของอนุกรมเวลาคงที่

รูปแบบ	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน
AR(p)=ARIMA(p,0,0)	dies down	cuts off หลังเวลาล้าหลัง p
MA(q)=ARIMA(0,0,q)	cuts off หลังเวลาล้าหลัง q	dies down
ARMA(p,q)=ARIMA(p,0,q)	dies down	dies down

ตอนที่ 4 ขั้นตอนการวิเคราะห์

วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ แบ่งขั้นตอนในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาไว้ 4 ขั้นตอน คือ การกำหนดรูปแบบ (identification) การประมาณค่าพารามิเตอร์ (estimate parameters) การตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ (diagnostic checking) และใช้รูปแบบสำหรับพยากรณ์ (model for forecasting) ดังภาพที่ 7

ถ้าในขั้นตอนการตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ พบว่า รูปแบบไม่เหมาะสมก็จะไปกำหนดรูปแบบในขั้นตอนที่ 1 ใหม่ จนกว่าจะได้รูปแบบที่เหมาะสม แล้วจึงใช้รูปแบบนั้นพยากรณ์ข้อมูลในอนาคตต่อไป ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



ภาพที่ 7 ขั้นตอนการวิเคราะห์อนุกรมเวลาด้วยวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดรูปแบบ (identification)

การกำหนดรูปแบบ เป็นการหารูปแบบ ARMA(p,q)×SARMA(P,Q)$_L$ ที่คาดว่าจะเหมาะสมให้กับอนุกรมเวลา ซึ่งอาจจะมีมากกว่า 1 รูปแบบก็ได้ โดยพิจารณาเปรียบเทียบค่า r_k และ r_{kk} ของอนุกรมเวลากับค่า ρ_k และ ρ_{kk} ของแต่ละรูปแบบ จากรูปที่เรียกว่าคอเรลโลแกรม (correlogram) ที่ได้จากการพล๊อต r_k , r_{kk} , ρ_k และ ρ_{kk} กับ k โดยอนุกรมเวลาที่ใช้ในการพิจารณาหารูปแบบจะต้องเป็นอนุกรมเวลาที่คงที่เท่านั้น แต่ลักษณะของข้อมูลอนุกรมเวลาโดยทั่วไปมิได้มีแต่เฉพาะอนุกรมเวลาที่คงที่ ดังนั้นจึงพิจารณาการกำหนดรูปแบบตามลักษณะของข้อมูล 3 ประเภท คือ อนุกรมเวลาคงที่ อนุกรมเวลาไม่คงที่หรืออนุกรมเวลาที่มีแนวโน้ม และอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล ดังต่อไปนี้

ก. อนุกรมเวลาคงที่ (stationary time series)

อนุกรมเวลาคงที่ หมายถึง อนุกรมเวลาที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนคงที่ และค่าความแปรปรวนร่วมของข้อมูลในเวลานั้นกับเวลาล้าหลังจะขึ้นอยู่กับ lag k อย่างเดียว

มีรูปแบบคือ ARMA(p,q) หรือ ARIMA(p,0,q) เนื่องจากเป็นอนุกรมเวลาคงที่แล้วจึงไม่ต้องมีการหาผลต่างลำดับต่างๆ ดังนั้น ค่า d จึงเท่ากับ 0

การกำหนดรูปแบบของอนุกรมเวลาคงที่แบ่งออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 AR(p) หรือ ARIMA(p,0,0) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

1.1 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 1 (the autoregressive model of order 1: AR(1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=1, d=0 และ q=0 ดังนั้น AR(1) ก็คือ ARIMA(1,0,0) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary คือ $|\phi_1| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เมื่อ k มีค่ามากขึ้นเกือบถึง 0 หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential

$$\rho_k = \phi_1^{k}; k \geq 1$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 1 หรือ lag 1

$$\rho_{11} = \phi_1$$

$$\rho_{kk} = 0; k > 1$$

1.2 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 2 (the autoregressive model of order 2: AR(2))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=2, d=0 และ q=0 ดังนั้น AR(2) ก็คือ ARIMA(2,0,0) มี สมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary คือ $\phi_2 + \phi_1 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$ และ $|\phi_2| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential หรือ damped sine wave หรือทั้งสองแบบรวมกัน

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}; k > 1$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 2 หรือ lag 2

$$\rho_{11} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_{22} = \phi_2$$

$$\rho_{kk} = 0; k > 2$$

กรณีที่ 2 MA(q) หรือ ARIMA(0,0,q) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

2.1 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 (the moving average model of order 1: MA(1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=0 และ q=1 ดังนั้น MA(1) ก็คือ ARIMA(0,0,1) มี สมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น invertible คือ $|\theta_1| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 1 หรือ lag1

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\rho_k = 0; k > 1$$

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential

$$\rho_{kk} = \frac{-\theta_1^{k}(1-\theta_1^{2})}{1-\theta_1^{2k+2}}$$

2.2 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 2 (the moving average model of order 2: MA(2))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=0 และ q=1 ดังนั้น MA(2) ก็คือ ARIMA(0,0,2) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0+\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น invertible คือ $\theta_2 + \theta_1 < 1, \theta_2 - \theta_1 < 1$ และ $|\theta_2| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 2 หรือ lag 2

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0; k > 2$$

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential หรือ damped sine wave หรือทั้งสองแบบรวมกัน

กรณีที่ 3 ARMA(p,q) หรือ ARIMA(p,0,q) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

3.1 รูปแบบ white noise

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=0 และ q=0 ดังนั้น ARMA(0,0) ก็คือ ARIMA(0,0,0) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0+\varepsilon_t$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่าเป็น 0 ทุกตัว

3.2 รูปแบบการรวมกันของการถดถอยและการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ (1,1) (mixed autoregressive - moving average model of order (1,1): ARMA(1,1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=1, d=0 และ q=1 ดังนั้น ARMA(1,1) ก็คือ ARIMA(1,0,1) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0+\phi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary คือ $|\phi_1| < 1$ และมีคุณสมบัติเป็น invertible คือ $|\theta_1| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down แบบ damped exponential

$$\rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\theta_1^{\ 2}-2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho_k = \phi_1^{\ k-1}\rho_1; k>1$$

การวิเคราะห์อนุกรมเวลาคงที่ ทั้ง 6 รูปแบบ สามารถนำมาสรุปลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ได้ดังตาราง 5

ตาราง 5 ลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาคงที่ สำหรับรูปแบบ ARMA(p,q)

รูปแบบ	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน
White noise หรือ ARMA (0,0) หรือ ARIMA(0,0,0)	ทุก ρ_k เป็น 0 ทุกตัว	ทุก ρ_{kk} เป็น 0 ทุกตัว
AR(1) หรือ ARIMA(1,0,0)	dies down แบบ damped exponential $\rho_k = \phi_1^{\ k}; k \geq 1$	cuts off หลังเวลาล้าหลังที่ 1 $\rho_{11} = \phi_1$ $\rho_{kk} = 0; k>1$
AR(2) หรือ ARIMA(2,0,0)	dies down แบบผสมของ damped exponential และ/หรือ damped sine wave $\rho_0 = 1$ $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$ $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}; k>1$	cuts off หลังเวลาล้าหลังที่ 2 $\rho_{11} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$ $\rho_{22} = \phi_2$ $\rho_{kk} = 0; k>2$
MA(1) หรือ ARIMA(0,0,1)	cuts off หลังเวลาล้าหลังที่ 1 $\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^{\ 2}}$ $\rho_k = 0; k>1$	dies down แบบ damped exponential $\rho_{kk} = \frac{-\theta_1^{\ k}(1-\theta_1^{\ 2})}{1-\theta_1^{\ 2k+2}}$

ตาราง 5 (ต่อ)

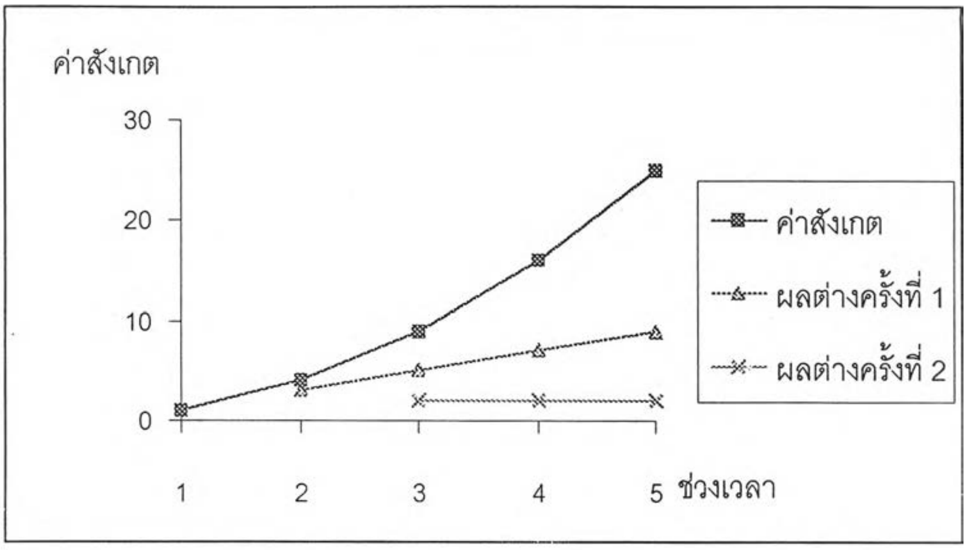
รูปแบบ	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน
MA(2) หรือ ARIMA(0,0,2)	cuts off หลังเวลาล้าหลังที่ 2 $\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_k = 0; k > 2$	dies down แบบผสมของ damped exponential และ/หรือ damped sine wave
ARMA(1,1) หรือ ARIMA (1,0,1)	dies down แบบ damped exponential $\rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$ $\rho_k = \phi_1^{k-1}\rho_1; k > 1$	dies down แบบ damped exponential

ข. อนุกรมเวลาไม่คงที่ (nonstationary time series) หรืออนุกรมเวลาที่มีแนวโน้ม

อนุกรมเวลาไม่คงที่หรืออนุกรมเวลาที่มีแนวโน้ม หมายถึง อนุกรมเวลาที่มีค่าเฉลี่ยไม่คงที่ เป็นอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบ ARIMA(p,d,q) เมื่อ d มีค่าเป็น 1, 2, ... ข้อมูลอนุกรมเวลามีค่าเฉลี่ยไม่คงที่เนื่องจากแนวโน้ม จึงต้องทำให้เป็นอนุกรมเวลาที่คงที่โดยการหาผลต่างลำดับต่าง ๆ ของข้อมูล (regular difference = d) ถ้าผลต่างลำดับที่ 1 ของข้อมูลยังไม่ทำให้อนุกรมเวลาเป็นอนุกรมเวลาคงที่ ก็จะหาผลต่างลำดับอื่น ๆ ต่อไปจนกว่าจะเป็นอนุกรมเวลาคงที่ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วผลต่างมักมีลำดับไม่เกิน 2 ก็ทำให้ได้อนุกรมเวลาคงที่ ถ้าอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มเป็นเส้นตรงจะใช้ d=1 แต่ถ้ามีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งแบบ quadratic จะใช้ d=2 และการหาผลต่างไม่ควรทำหลายครั้งมากเกินความจำเป็น เพราะจะมีผลทำให้ค่าพยากรณ์มีความคลาดเคลื่อนสูง การหาผลต่างสามารถทำได้ดังตาราง 6 และภาพที่ 8

ตาราง 6 การหาผลต่างของอนุกรมเวลา

ช่วงเวลา	ค่าสังเกต	ผลต่างครั้งที่ 1(d=1)	ผลต่างครั้งที่ 2(d=2)
1	1		
2	4	4-1=3	
3	9	9-4=5	5-3=2
4	16	16-9=7	7-5=2
5	25	25-16=9	9-7=2



ภาพที่ 8 การหาผลต่างของอนุกรมเวลา

การหาผลต่างจะเป็นการปรับอนุกรมเวลาเดิม (y_t) ให้เป็นอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) ที่เป็นอนุกรมเวลาคงที่ โดย $Z_t = \nabla^d Y_t$ เมื่อ d เป็นลำดับของการหาผลต่าง เช่น

d=1, $Z_t = \nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

d=2, $Z_t = \nabla^2 Y_t = (1-B)^2 Y_t = (1-2B+B^2)\, Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

หรือ $= \nabla(Y_t - Y_{t-1}) = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} + Y_{t-2} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

เมื่ออนุกรมเวลาใหม่(Z_t) เป็นอนุกรมเวลาคงที่แล้วจึงกำหนดรูปแบบ ARMA(p,q) ให้ ถ้าอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) มีรูปแบบเป็น ARMA(p,q) จะสรุปได้ว่าอนุกรมเวลาเดิม (y_t) มีรูปแบบเป็น ARIMA(p,d,q) มี p เป็นอันดับของ AR, qเป็นอันดับของ MA และ d เป็นจำนวนครั้งที่หาผลต่างเพื่อให้อนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) คงที่

เช่น เมื่อ d=1 รูปแบบ ARIMA(p,1,q) จะได้

$$\phi_p(B)(1-B)Y_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t$$

หรือ $(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)(1-B)Y_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)\varepsilon_t$

สามารถเขียนสมการในรูปของอนุกรมเวลาเดิมได้ คือ

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} - Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-2} + \phi_2 Y_{t-3} + \ldots + \phi_p Y_{t-p-1} \\ = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} Y_t = \theta_0 + (1+\phi_1)Y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)Y_{t-2} - \phi_2 Y_{t-3} + \ldots + (\phi_p - \phi_{p-1})Y_{t-p} - \phi_p Y_{t-p-1} \\ + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

หรือรูปแบบ ARIMA(p,1,q) เขียนสมการในรูปของอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t)ได้ คือ

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

และเมื่อ d=1 จะได้ $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ นั่นคือ

$$Y_t - Y_{t-1} = \theta_0 + \phi_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \ldots + \phi_p (Y_{t-p} - Y_{t-p-1})$$
$$+ \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

หรือ

$$Y_t = \theta_0 + (1+\phi_1) Y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1) Y_{t-2} - \phi_2 Y_{t-3} + \ldots + (\phi_p - \phi_{p-1}) Y_{t-p} - \phi_p Y_{t-p-1}$$
$$+ \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ในที่นี้ผู้วิจัยเสนอรูปแบบที่พบบ่อยในทางปฏิบัติ คือ รูปแบบที่เป็นผลต่างลำดับที่ 1 หรือ d=1 จะพิจารณารูปแบบได้ 3 กรณี คือ กรณีแรก ARI(p,1) กรณีที่สอง IMA(1,q) และกรณีที่สาม ARIMA(p,1,q) ซึ่งในแต่ละกรณีสามารถแบ่งเป็นรูปแบบย่อย ๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ARI(p,1) หรือ ARIMA(p,1,0) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

1.1 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 1 ที่ไม่คงที่ (the autoregressive integrated model of order (1,1): ARI(1,1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=1, d=1 และ q=0 ดังนั้น ARI(1,1) ก็คือ ARIMA(1,1,0) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + (1+ \phi_1) y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary คือ $|\phi_1| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 1 หรือ lag 1

1.2 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 2 ที่ไม่คงที่ (the autoregressive integrated model of order (2,1): ARI(2,1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=2, d=1 และ q=0 ดังนั้น ARI(2,1) ก็คือ ARIMA(2,1,0) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + (1+ \phi_1) y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1) y_{t-2} - \phi_2 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary คือ $\phi_2 + \phi_1 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$ และ $|\phi_2| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 2 หรือ lag 2

กรณีที่ 2 IMA(1,q) หรือ ARIMA(0,1,q) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

2.1 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 ที่ไม่คงที่ (the integrated moving average model of order(1,1): IMA(1,1))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=1 และ q=1 ดังนั้น IMA(1,1) ก็คือ ARIMA(0,1,1) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น invertible คือ $|\theta_1|<1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 1 หรือ lag1

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down

2.2 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 2 ที่ไม่คงที่ (the integrated moving average model of order (1,2): IMA(1,2))

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=1 และ q=2 ดังนั้น IMA(1,2) ก็คือ ARIMA(0,1,2) มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น invertible คือ $\theta_2 + \theta_1 < 1, \theta_2 - \theta_1 < 1$ และ $|\theta_2|<1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 หลังเวลาล้าหลังที่ 2 หรือ lag 2

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีค่ามากในช่วงแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เกือบถึง 0 เมื่อ k มีค่ามากขึ้น หรือมีลักษณะ dies down

กรณีที่ 3 ARIMA(p,1,q) แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย ดังนี้

3.1 รูปแบบการรวมกันของการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 1 กับการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 ที่ไม่คงที่ (the autoregressive integrated moving average model of order (1,1,1)) หรือ ARIMA(1,1,1)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=1, d=1 และ q=1 มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + (1+\phi_1)y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ ที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติเป็น stationary และ invertible คือ $|\phi_1| < 1$ และ $|\theta_1| < 1$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ dies down

3.2 รูปแบบที่เดินอย่างสุ่ม (the random walk model) หรือ ARIMA(0,1,0)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า p=0, d=1 และ q=0 มีสมการคือ

$$y_t = \theta_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ทุก ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนทุก ρ_{kk} เป็น 0

รูปแบบอนุกรมเวลาไม่คงที่สามารถนำลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนมาสรุปได้ดังตาราง 7(ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539)

ตาราง 7 ลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาไม่คงที่ สำหรับรูปแบบ ARIMA(p,d,q)

รูปแบบของอนุกรมเวลา (y_t)	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k (y_t)	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k (z_t)	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} (z_t)
Random walk	ลดลงอย่างช้า ๆ	ทุก ρ_k เป็น 0	ทุก ρ_{kk} เป็น 0
ARI(1,1)	ลดลงอย่างช้า ๆ	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0	ρ_{kk} เป็น 0 สำหรับ k=2,...
ARI(2,1)	ลดลงอย่างช้า ๆ	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0	ρ_{kk} เป็น 0 สำหรับ k=3,...
IMA(1,1)	ลดลงอย่างช้า ๆ	ρ_k เป็น 0 สำหรับ k=2,...	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0
IMA(1,2)	ลดลงอย่างช้า ๆ	ρ_k เป็น 0 สำหรับ k=3,...	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0
ARIMA(1,1,1)	ลดลงอย่างช้า ๆ	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0	ค่าลดลงเร็วใกล้ 0

ค. อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล (seasonal time series)

อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล หมายถึง ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงขึ้นลงตามช่วงเวลาและมีแบบแผนไม่ต่างกันมากนักในแต่ละปี มีรูปแบบเป็น $SARIMA(P,D,Q)_L$ (seasonal integrated autoregressive and moving average model of order $(P,D,Q)_L$) โดยมี P เป็นอันดับของ SAR (seasonal autoregressive), Q เป็นอันดับของ SMA (seasonal moving average) และ D เป็นจำนวนครั้งที่หาผลต่างฤดูกาลเพื่อทำให้อนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) เป็นอนุกรมเวลาคงที่ การแปลงอนุกรมเวลาเดิม (y_t) ให้เป็นอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) โดยใช้ผลต่างฤดูกาล (seasonal difference=D) ดังนี้

$$Z_t = \nabla_L^D Y_t$$

เมื่อ D = ลำดับของการหาผลต่าง

L = จำนวนฤดูกาลต่อปี สำหรับอนุกรมเวลารายเดือน L=12 และอนุกรมเวลารายไตรมาส L=4

เช่น อนุกรมเวลารายเดือน

$$D=1,\ Z_t = \nabla_{12} Y_t = (1-B^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-12}$$

$$D=2,\ Z_t = \nabla_{12}^2 Y_t = (1-B^{12})^2 Y_t = (1-2B^{12}+B^{24})Y_t = Y_t - 2Y_{t-12} + Y_{t-24}$$

การหาผลต่างของฤดูกาลจะเป็นการปรับอนุกรมเวลาเดิม (y_t)ให้เป็นอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) จะหาผลต่างฤดูกาลจนกว่าอนุกรมเวลาใหม่เป็นอนุกรมเวลาคงที่ แล้วจึงกำหนดรูปแบบ $ARMA(p,q)\times SARMA(P,Q)_L$ให้กับอนุกรมเวลาใหม่ ($Z_t$) ถ้าอนุกรมเวลาใหม่ ($Z_t$) มีรูปแบบเป็น $ARMA(p,q)\times SARMA(P,Q)_L$ จะสรุปได้ว่าอนุกรมเวลาเดิม (y_t) มีรูปแบบ $ARMA(p,q)\times SARIMA(P,D,Q)_L$

รูปแบบของอนุกรมเวลาฤดูกาลที่คงที่และพบบ่อยในทางปฏิบัติ คือ อนุกรมเวลารายเดือน (L=12) ซึ่งจะพิจารณารูปแบบได้ 3 กรณี คือ กรณีแรก $SAR(P)_{12}$ กรณีที่สอง $SMA(Q)_{12}$ และกรณีที่สาม $SARMA(P,Q)_{12}$ ซึ่งในแต่ละกรณีสามารถแบ่งเป็นรูปแบบย่อย ๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 $SAR(1)_{12}$ หรือ $SARMA(P,0)_{12}$ แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

1.1 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 1 ที่มีฤดูกาล (the seasonal autoregressive model of order 1 and period 12: $SAR(1)_{12}$)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า P=1, D=0 และ Q=0 ดังนั้น $SAR(1)_{12}$ ก็คือ $SARMA(1,0)_{12}$ มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_{12} y_{t-12} + \varepsilon_t$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ dies down ที่ lag 12, 24,...

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 ที่เวลาล้าหลังที่ 24, 36,... หรือ lag 24, 36,...

1.2 รูปแบบการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 2 ที่มีฤดูกาล (the seasonal autoregressive model of order 2 and period 12: $SAR(2)_{12}$)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า P=2, D=0 และ Q=0 ดังนั้น $SAR(2)_{12}$ ก็คือ $SARMA(2,0)_{12}$ มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_{12}y_{t-12} + \phi_{24}y_{t-24} + \varepsilon_t$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ dies down ที่ lag 12, 24,...

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 ที่เวลาล้าหลังที่ 36, 48,... หรือ lag 36, 48,...

กรณีที่ 2 $SMA(Q)_{12}$ หรือ $SARMA(0,Q)_{12}$ แบ่งเป็น 2 รูปแบบย่อย คือ

2.1 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 ที่มีฤดูกาล (the seasonal moving average model of order 1 and period 12: $SMA(1)_{12}$)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า P=0, D=0 และ Q=1 ดังนั้น $SMA(1)_{12}$ ก็คือ $SARMA(0,1)_{12}$ มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_{12}\varepsilon_{t-12}$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 ที่เวลาล้าหลังที่ 24, 36,... หรือ lag 24, 36,...

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ dies down ที่ lag 12, 24,...

2.2 รูปแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 2 ที่มีฤดูกาล (the seasonal moving average model of order 2 and period 12: $SMA(2)_{12}$)

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า P=0, D=0 และ Q=2 ดังนั้น $SMA(2)_{12}$ ก็คือ $SARMA(0,2)_{12}$ มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_{12}\varepsilon_{t-12} - \theta_{24}\varepsilon_{t-24}$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k มีลักษณะ cuts off คือมีค่าเป็น 0 ที่เวลาล้าหลังที่ 36, 48,... หรือ lag 36, 48,..

ส่วนฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ dies down ที่เวลาล้าหลังที่ 12, 24,...

กรณีที่ 3 SARMA(P,Q)$_{12}$ มีรูปแบบ คือ

รูปแบบการรวมกันของการถดถอยในตัวเองลำดับที่ 1 กับการเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 1 (the seasonal mixed autoregressive - moving average model of order (1,1) and period 12) หรือ SARMA(1,1)$_{12}$

รูปแบบนี้ได้จากการแทนค่า P=1, D=0 และ Q=1 มีสมการคือ

$$Y_t = \theta_0 + \phi_{12}y_{t-12} + \varepsilon_t - \theta_{12}\varepsilon_{t-12}$$

ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ ρ_k และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ρ_{kk} มีลักษณะ dies down ที่ lag 12, 24,...

รูปแบบของอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลที่คงที่สามารถนำลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนมาสรุปได้ดังตาราง 8 (Vandaele, 1983; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539)

ตาราง 8 ลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนของรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลที่คงที่ สำหรับรูปแบบ SARMA(P,Q)$_{12}$

รูปแบบ	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์ $\rho_k(Z_t)$	ฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน $\rho_{kk}(Z_t)$
SAR(1)$_{12}$	$\rho_{12}, \rho_{24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0	$\rho_{kk} = 0$ สำหรับ k=24, 36,...
SAR(2)$_{12}$	$\rho_{12}, \rho_{24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0	$\rho_{kk} = 0$ สำหรับ k=36, 48,...
SMA(1)$_{12}$	$\rho_k = 0$ สำหรับ k=24, 36,...	$\rho_{12,12}, \rho_{24,24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0
SMA(2)$_{12}$	$\rho_k = 0$ สำหรับ k=36, 48,...	$\rho_{12,12}, \rho_{24,24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0
SARMA(1,1)$_{12}$	$\rho_{12}, \rho_{24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0	$\rho_{12,12}, \rho_{24,24}, \ldots$ มีค่าลดลงเร็วใกล้ 0

อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลและไม่คงที่ มีรูปแบบเป็น SARIMA(P,D,Q)$_L$ จะต้องหาผลต่างฤดูกาล (D) จนกว่าอนุกรมเวลานั้นคงที่ เช่น อนุกรมเวลารายเดือน เมื่อ D=1 ที่มีรูปแบบเป็น SARIMA(1,1,1)$_{12}$ เขียนสมการในรูปของอนุกรมเวลาเดิม (Y_t) ได้ คือ

$$(1-\phi_{12}B^{12})(1-B^{12})Y_t = \theta_0 + (1-\theta_{12}B^{12})\varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_{12}Y_{t-12} - Y_{t-12} + \phi_{12}Y_{t-24} = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_{12}\varepsilon_{t-12}$$

$$Y_t = \theta_0 + (1+\phi_{12})Y_{t-12} - \phi_{12}Y_{t-24} + \varepsilon_t - \theta_{12}\varepsilon_{t-12}$$

หรือสำหรับอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) จะมีรูปแบบเป็น SARMA(1,1)$_{12}$ ซึ่งจะมีสมการ คือ

$$Z_t = \theta_0 + \phi_{12}Z_{t-12} - \theta_{12}\varepsilon_{t-12} + \varepsilon_t$$

ในกรณีที่อนุกรมเวลาไม่คงที่เนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงที่แสดงแนวโน้มและการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล ผู้วิจัยต้องแปลงให้อยู่ในรูปอนุกรมเวลาที่คงที่ โดยการหาทั้งผลต่างและผลต่างของฤดูกาล เช่น

เมื่อ L=12, d=1 และ D=1 จะได้อนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) คือ

$$Z_t = (1-B)(1-B^{12})y_t = \nabla_{12}\nabla y_t = \nabla_{12}(y_t - y_{t-1}) = y_t - y_{t-1} - y_{t-12} + y_{t-13}$$

อนุกรมเวลาไม่คงที่เนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงที่แสดงแนวโน้ม และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล มีรูปแบบคือ

$$\text{ARIMA}(p,d,q)\times\text{SARIMA}(P,D,Q)_L$$

เช่น อนุกรมเวลารายเดือน เมื่อ d=1 และ D=1 ที่มีรูปแบบเป็น $\text{ARIMA}(1,1,1)\times\text{SARIMA}(1,1,1)_{12}$ สามารถเขียนสมการในรูปของอนุกรมเวลาเดิม (Y_t) ได้ คือ

$$(1-\phi_1 B)(1-\phi_{12}B^{12})(1-B)(1-B^{12})Y_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12}B^{12})\varepsilon_t$$

หรือ

$$\begin{aligned} Y_t = {} & \theta_0 + (1+\phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + (1+\phi_{12})Y_{t-12} - (1+\phi_1+\phi_{12}+\phi_1\phi_{12})Y_{t-13} \\ & + (\phi_1 + \phi_1\phi_{12})Y_{t-14} - \phi_{12}Y_{t-24} + (\phi_{12}+\phi_1\phi_{12})Y_{t-25} - \phi_1\phi_{12}Y_{t-26} + \varepsilon_t \\ & - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_{12}\varepsilon_{t-12} + \theta_1\theta_{12}\varepsilon_{t-13} \end{aligned}$$

หรือสำหรับอนุกรมเวลาใหม่ (Z_t) จะมีรูปแบบเป็น $\text{ARMA}(1,1)\times\text{SARMA}(1,1)_{12}$ ซึ่งจะมีสมการคือ

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_{12}Z_{t-12} - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_{12}\varepsilon_{t-12} + \varepsilon_t$$

การเขียนรูปแบบต้องรวม (integrate) ทั้งรูปแบบอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มและฤดูกาลเข้าด้วยกัน ในการกำหนดรูปแบบที่เหมาะสมเพื่อมาอธิบายอนุกรมเวลาชุดหนึ่ง ๆ ต้องคำนึงว่าจำนวนพารามิเตอร์ของรูปแบบนั้นควรจะมีน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ (Box and Jenkins, 1976; เกศิณี กมลรัตน์, 2530) โดยที่รูปแบบนั้นยังคงคุณสมบัติทางสถิติเหมือนกับคุณสมบัติทางสถิติของอนุกรมเวลาชุดนั้น ๆ ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการนำรูปแบบอนุกรมเวลาไปใช้พยากรณ์ต่อไป และจะทำให้สามารถประมาณค่าเบื้องต้นของพารามิเตอร์เหล่านั้นได้เร็วขึ้น ดังนั้นเมื่อกำหนดรูปแบบที่เหมาะสมกับอนุกรมเวลา โดยการพิจารณาจากฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์และฟังก์ชันอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วนได้แล้ว จึงนำรูปแบบนั้นประมาณค่าพาราเตอร์ในขั้นตอนต่อไป

ขั้นตอนที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (estimation parameters)

เมื่อได้รูปแบบของอนุกรมเวลาที่คาดว่าเหมาะสมสำหรับข้อมูลแล้ว โดยพิจารณาจากค่าอัตตะสหสัมพันธ์และอัตตะสหสัมพันธ์บางส่วน ก็จะกำหนดค่าประมาณพารามิเตอร์ เบื้องต้นซึ่งจะนำไปหาค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าสุดท้าย ค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าสุดท้ายที่ดี ที่สุดที่เมื่อนำไปพยากรณ์แล้วจะมีผลทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์สามารถทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 การลองผิดลองถูก (trial and error) เป็นการตรวจสอบค่าความแตกต่างหลาย ๆ ค่า และเลือกค่าที่มีค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(sum of squared residuals) น้อยที่สุด

วิธีที่ 2 การคำนวณทวนซ้ำ (interative) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประมาณค่าสามารถแบ่งตามรูปแบบได้ดังนี้

1. กระบวนการการถดถอยในตัวเอง (autoregressive process:AR) ที่คงที่และไม่มีฤดูกาล

กระบวนการ AR(p) ใช้สมการ Yule-Walker คือ

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p} \quad ,k=1,2,3,\ldots,p$$

เมื่อ ρ_k เป็นสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ทางทฤษฎี สำหรับช่วงเวลาที่ 1,2,3,…,k

ϕ_p เป็นสัมประสิทธิ์ของกระบวนการ AR(p)

แต่ ρ_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ทางทฤษฎีที่ไม่ทราบค่า จึงต้องแทนค่า ρ_k ด้วยค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์เชิงประจักษ์จากกลุ่มตัวอย่าง คือ r_k แล้วจึงแก้สมการ เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$

ดังนั้นกระบวนการ AR(1) จึงมีสมการ Yule-Walker คือ

$$\rho_1 = \phi_1$$

แทนค่า ρ_1 ด้วย r_1 ในสมการ ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์สำหรับรูปแบบ AR(1) คือ

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

ค่าประมาณพารามิเตอร์เบื้องต้น $\hat{\phi}_1$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติ stationary คือ $|\hat{\phi}_1| < 1$

กระบวนการ AR(2) มีสมการ Yule-Walker คือ

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

แทนค่า ρ_1 และ ρ_2 ด้วย r_1 และ r_2 ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ ในAR(2) คือ

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^{\,2}}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^{\,2}}{1-r_1^{\,2}}$$

ค่าประมาณพารามิเตอร์เบื้องต้น $\hat{\phi}_1$ และ $\hat{\phi}_2$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติ stationary คือ $\hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_1 < 1$, $\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 < 1$ และ $\left|\hat{\phi}_2\right| < 1$

2. กระบวนการการเคลื่อนที่เฉลี่ย (moving average process:MA) ที่คงที่และไม่มีฤดูกาล

อัตตะสหสัมพันธ์ทางทฤษฎีของกระบวนการ MA(q) คือ

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k-1} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^{\,2} + \ldots + \theta_q^{\,2}},\ k = 1,2,\ldots,q$$

$$\rho_k = 0,\ k > q$$

ρ_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์ทางทฤษฎีที่ไม่ทราบค่า จึงต้องแทนค่า ρ_k ด้วยค่าสัมประสิทธิ์อัตตะสหสัมพันธ์เชิงประจักษ์จากกลุ่มตัวอย่าง คือ r_k แล้วจึงแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

ดังนั้น กระบวนการ MA(1) มีสมการคือ

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^{\,2}}, \quad k = 2$$

$$\rho_k = 0, \quad k \geq 2$$

แทนค่า ρ_1 ด้วย r_1 ในสมการ จะได้สมการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับรูปแบบ MA(1) คือ

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^{\,2}}$$

หรือ $r_1\hat{\theta}_1^{\,2} + \hat{\theta}_1 + r_1 = 0$

แล้วจึงแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ จะได้

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

ค่าประมาณพารามิเตอร์เบื้องต้น $\hat{\theta}_1$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติ invertible คือ $|\hat{\theta}_1| < 1$

กระบวนการ MA(2) จะได้สมการ

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0; k > 2$$

แทนค่า ρ_1 และ ρ_2 ด้วย r_1 และ r_2 ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ ใน MA(2) คือ

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_2)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$$

$$r_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$$

แล้วจึงแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$

ค่าประมาณพารามิเตอร์เบื้องต้น $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติ invertible คือ $\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 < 1,\ \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 < 1$ และ $|\hat{\theta}_2| < 1$

3. กระบวนการรวมตัวกันของการถดถอยในตัวเองและการเคลื่อนที่เฉลี่ย (mixes autoregressive-moving average process:ARMA)

กระบวนการ ARMA(1,1) มีสมการ คือ

$$\rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1$$

แทนค่า ρ_1 และ ρ_2 ด้วย r_1 และ r_2 ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ ใน ARMA(1,1) คือ

$$r_1 = \frac{(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1)}{1-\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}$$

$$r_2 = \hat{\phi}_1 r_1$$

แล้วจึงแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\phi}_1$ และ $\hat{\theta}_1$

ค่าประมาณพารามิเตอร์เบื้องต้น $\hat{\phi}_1$ และ $\hat{\theta}_1$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้รูปแบบมีคุณสมบัติ stationary และ invertible คือ $|\hat{\phi}_1|<1$ และ $|\hat{\theta}_1|<1$

จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบต่าง ๆ สามารถสรุปสูตรที่ใช้ในการประมาณค่าได้ดังตาราง 9

ตาราง 9 สูตรที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

รูปแบบ	พารามิเตอร์ที่จะประมาณ	สูตรที่ใช้ในการประมาณ	ขอบเขตของการประมาณค่าพารามิเตอร์
AR(1)	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_1 = r_1$	$\|\hat{\phi}_1\|<1$
AR(2)	$\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$ $\hat{\phi}_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}$	$\hat{\phi}_2+\hat{\phi}_1<1$ $\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_1<1$ และ $\|\hat{\phi}_2\|<1$
MA(1)	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$	$\|\hat{\theta}_1\|<1$
MA(2)	$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$	$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_2)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$ $r_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$	$\hat{\theta}_2+\hat{\theta}_1<1,$ $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1<1$ และ $\|\hat{\theta}_2\|<1$
ARIMA(1,1)	$\hat{\phi}_1, \hat{\theta}_1$	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}$ $\hat{\theta}_1 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$ $b = \frac{-(1-2r_2+\hat{\phi}_1^2)}{r_1-\hat{\phi}_1}$	$\|\hat{\phi}_1\|<1$ และ $\|\hat{\theta}_1\|<1$

เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์เบื้องต้นได้แล้ว ผู้วิจัยยังไม่สามารถนำสมการพยากรณ์ไปใช้ได้ เพราะยังไม่ทราบว่าสมการนั้นเหมาะสมหรือไม่ ดังนั้นขั้นตอนต่อไปคือต้องตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ

ขั้นตอนที่ 3 การตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ (diagnostic checking)

เมื่อเลือกรูปแบบของอนุกรมเวลาและประมาณค่าพารามิเตอร์ได้แล้วจะต้องตรวจสอบทุกครั้งว่ารูปแบบที่กำหนดนั้นเหมาะสมกับอนุกรมเวลาชุดนั้น ๆ จริงหรือไม่ ซึ่งการตรวจสอบทำได้หลายวิธี ในทางปฏิบัติมักจะทำหลายวิธีพร้อมกัน ได้แก่ พิจารณาจากคอเรลโลแกรม การทดสอบค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบด้วยการทดสอบแบบ t และการทดสอบความเหมาะสมของรูปแบบโดยการทดสอบของ Box และ Pierce หรือการทดสอบของ Box และ Ljung หากตรวจสอบพบว่ารูปแบบที่กำหนดนั้นเหมาะสมก็จะใช้รูปแบบนั้นพยากรณ์ต่อไป แต่ถ้าหากพบว่าไม่เหมาะสมก็จะต้องไปกำหนดรูปแบบในขั้นตอนที่ 1ใหม่

การตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบ เป็นการตรวจสอบความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่งผู้วิจัยใช้วิธีในการตรวจสอบ ดังนี้

1. พิจารณาจากคอเรลโลแกรมของความคลาดเคลื่อน ถ้า r_k ของอนุกรมเวลา (e_t) มีค่าใกล้ 0 แสดงว่ารูปแบบนั้นเหมาะสม โดยทำการทดสอบสมมติฐาน H_0: $\rho_k=0$ กับ H_1: $\rho_k \neq 0$ สำหรับ k=1, 2, ... การปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05 เมื่อ $|r_k| \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$

2. การทดสอบค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบด้วยการทดสอบแบบ partial t คือพิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบมีค่าเป็น 0 หรือไม่ เช่น ต้องการพิจารณาว่ารูปแบบ AR(2) เหมาะสมหรือไม่ ก็จะกำหนดสมมติฐาน ดังนี้

$$H_0 : \phi_2 = 0$$

$$H_1 : \phi_2 \neq 0$$

ใช้ตัวทดสอบสถิติ $Z=\frac{\hat{\phi}_2}{S_{\hat{\phi}_2}}$ จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $|Z| \geq z_{\alpha/2}$ ที่ระดับนัยสำคัญ α

3. พิจารณาจากค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อน $s^2 = \sum \frac{e_t^2}{n}$ ซึ่งรูปแบบที่เหมาะสมจะมีค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนต่ำ

4. การทดสอบความเหมาะสมของรูปแบบโดยการทดสอบของ Box และ Pierce หรือการทดสอบของ Box และ Ljung คือพิจารณาว่าค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ที่อยู่ห่างกัน 1,2,...,m ช่วงเวลาเป็นอิสระจากกันหรือไม่ โดยการกำหนดสมมติฐานดังนี้

$H_0 : \rho_1(e_t) = \ldots = \rho_m(e_t) = 0$

$H_1 : \rho_k(e_t)$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เท่ากับ 0 สำหรับ k= 1, 2, 3, ..., m

การตรวจสอบว่ารูปแบบเหมาะสมหรือไม่ ใช้การทดสอบไคสแควร์ ด้วยสถิติ Box-Pierce Chi-Square Statistics ใช้สัญลักษณ์ Q_m ดังสมการ

$$Q_m = n\sum_{k=1}^{m} r_k^2(e_t)$$

เมื่อ n = จำนวนข้อมูลของอนุกรมเวลา (e_t)

k = เวลาล้าหลังตัวแรกที่ตรวจสอบ

m = เวลาล้าหลังที่มากที่สุดที่ตรวจสอบ

$r_k(e_t)$ = อัตตะสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน ในเวลาล้าหลังที่ k

ช่วงวิกฤติ คือ $Q_m \geq \chi^2_{\alpha, m-a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนพารามิเตอร์ทั้งหมดในรูปแบบ

การทดสอบนี้ต่อมาได้มีการพัฒนาขึ้นโดย Box และ Ljung เรียกว่า modified Box-Pierce test โดยใช้ตัวทดสอบสถิติ Q'_m แทน Q_m

$$Q'_m = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{r_k^2(e_t)}{n-k}$$

การทดสอบของ Box-Pierce หรือการทดสอบของ Box-Ljung ต่างก็เป็นการทดสอบสมมติฐานหลักและสมมติฐานเลือกที่เหมือนกัน มีช่วงวิกฤติเดียวกัน ต่ างกันที่ตัวทดสอบสถิติเท่านั้น

ขั้นตอนที่ 4 ใช้รูปแบบสำหรับพยากรณ์ (model for forecasting)

เมื่อผ่านการตรวจสอบความเหมาะสมของรูปแบบแล้ว ก็จะพยากรณ์โดยใช้สมการพยากรณ์ที่สร้างจากรูปแบบการพยากรณ์ที่กำหนด ซึ่งวิธีนี้เหมาะสำหรับการพยากรณ์ระยะสั้น ให้ความแม่นยำที่สุดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (เกศิณี กมลรัตน์, 2530; ธิดารัตน์ จันทวี, 2539; Hanke and Reitsch, 1995)

สำหรับสมการที่ใช้ในการพยากรณ์รูปแบบต่าง ๆ ของบ็อกซ์และเจ็นกิ้นส์ สรุปได้ดังตาราง 10 (Thomopoulos, 1980) เมื่อ τ คือช่วงเวลาที่จะพยากรณ์ล่วงหน้า , τ=1, 2, 3, ...

ตาราง 10 สมการพยากรณ์ของวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์

รูปแบบ	สมการพยากรณ์
ARIMA (1,0,0)	$\hat{y}_t(1)=\hat{\phi}_1 y_t+(1-\hat{\phi}_1)\bar{y}$ $\hat{y}_t(\tau)=\hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-1)+(1-\hat{\phi}_1)\bar{y}\ ;\ \tau=2,3,4,...$
ARIMA (1,1,0)	$\hat{y}_t(1)=(1+\hat{\phi}_1)y_t-\hat{\phi}_1 y_{t-1}$ $\hat{y}_t(2)=(1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)-\hat{\phi}_1 y_t$ $\hat{y}_t(\tau)=(1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1)-\hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-2)\ ;\ \tau=3,4,5,...$
ARIMA (1,2,0)	$\hat{y}_t(1)=(2+\hat{\phi}_1)y_t-(1+2\hat{\phi}_1)y_{t-1}+\hat{\phi}_1 y_{t-2}$ $\hat{y}_t(2)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)-(1+2\hat{\phi}_1)y_t+\hat{\phi}_1 y_{t-1}$ $\hat{y}_t(3)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(2)-(1+2\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)+\hat{\phi}_1 y_t$ $\hat{y}_t(\tau)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1)-(1+2\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-2)+\hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-3)\ ;\ \tau=4,5,6,...$
ARIMA (2,0,0)	$\hat{y}_t(1)=\hat{\phi}_1 y_t+\hat{\phi}_2 y_{t-1}+(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2)\bar{y}$ $\hat{y}_t(2)=\hat{\phi}_1\hat{y}_t(1)+\hat{\phi}_2 y_t+(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2)\bar{y}$ $\hat{y}_t(\tau)=\hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-1)+\hat{\phi}_2\hat{y}_t(\tau-2)+(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2)\bar{y}\ ;\ \tau=3,4,5,...$
ARIMA (2,1,0)	$\hat{y}_t(1)=(1+\hat{\phi}_1)y_t+(\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_1)y_{t-1}-\hat{\phi}_2 y_{t-2}$ $\hat{y}_t(2)=(1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)+(\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_1)y_t-\hat{\phi}_2 y_{t-1}$ $\hat{y}_t(3)=(1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(2)+(\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)-\hat{\phi}_2 y_t$ $\hat{y}_t(\tau)=(1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1)+(\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-2)-\hat{\phi}_2\hat{y}_t(\tau-3)\ ;\ \tau=4,5,6,...$
ARIMA (2,2,0)	$\hat{y}_t(1)=(2+\hat{\phi}_1)y_t+(\hat{\phi}_2-2\hat{\phi}_1-1)y_{t-1}+(\hat{\phi}_1-2\hat{\phi}_2)y_{t-2}+\hat{\phi}_2 y_{t-3}$ $\hat{y}_t(2)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1)+(\hat{\phi}_2-2\hat{\phi}_1-1)y_t+(\hat{\phi}_1-2\hat{\phi}_2)y_{t-1}+\hat{\phi}_2 y_{t-2}$ $\hat{y}_t(3)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(2)+(\hat{\phi}_2-2\hat{\phi}_1-1)\hat{y}_t(1)+(\hat{\phi}_1-2\hat{\phi}_2)y_t+\hat{\phi}_2 y_{t-1}$ $\hat{y}_t(4)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(3)+(\hat{\phi}_2-2\hat{\phi}_1-1)\hat{y}_t(2)+(\hat{\phi}_1-2\hat{\phi}_2)\hat{y}_t(1)+\hat{\phi}_2 y_t$ $\hat{y}_t(\tau)=(2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1)+(\hat{\phi}_2-2\hat{\phi}_1-1)\hat{y}_t(\tau-2)+(\hat{\phi}_1-2\hat{\phi}_2)\hat{y}_t(\tau-3)$ $+\hat{\phi}_2\hat{y}_t(\tau-4)\ ;\ \tau=5,6,7,...$
ARIMA (0,0,1)	$\hat{y}_t(1)=-\hat{\theta}_1\varepsilon_t+\bar{y}$ $\hat{y}_t(\tau)=\bar{y}\ ;\ \tau=2,3,4,...$

ตาราง 10 (ต่อ)

รูปแบบ	สมการพยากรณ์
ARIMA (0,1,1)	$\hat{y}_t(1) = -\hat{\theta}_1\varepsilon_t + y_t$ $\hat{y}_t(\tau) = \hat{y}_t(\tau-1)$; $\tau = 2,3,4,...$
ARIMA (0,2,1)	$\hat{y}_t(1) = -\hat{\theta}_1\varepsilon_t + 2y_t - y_{t-1}$ $\hat{y}_t(2) = 2\hat{y}_t(1) - y_t$ $\hat{y}_t(3) = 2\hat{y}_t(\tau-1) - \hat{y}_t(\tau-2)$; $\tau = 3,4,5,...$
ARIMA (0,0,2)	$\hat{y}_t(1) = -\hat{\theta}_1\varepsilon_t - \hat{\theta}_2\varepsilon_{t-1} + \bar{y}$ $\hat{y}_t(2) = -\hat{\theta}_2\varepsilon_t + \bar{y}$ $\hat{y}_t(\tau) = \bar{y}$; $\tau = 3,4,5,...$
ARIMA (0,1,2)	$\hat{y}_t(1) = -\hat{\theta}_1\varepsilon_t - \hat{\theta}_2\varepsilon_{t-1} + y_t$ $\hat{y}_t(2) = -\hat{\theta}_2\varepsilon_t + \hat{y}_t(1)$ $\hat{y}_t(\tau) = \hat{y}_t(\tau-1)$; $\tau = 3,4,5,...$
ARIMA (0,2,2)	$\hat{y}_t(1) = -\hat{\theta}_1\varepsilon_t - \hat{\theta}_2\varepsilon_{t-1} + 2y_t - y_{t-1}$ $\hat{y}_t(2) = -\hat{\theta}_2\varepsilon_t + 2\hat{y}_t(1) - y_t$ $\hat{y}_t(\tau) = 2\hat{y}_t(\tau-1) - \hat{y}_t(\tau-2)$; $\tau = 3,4,5,...$
ARIMA (1,0,1)	$\hat{y}_t(1) = \hat{\phi}_1 y_t - \hat{\theta}_1\varepsilon_t + (1-\hat{\phi}_1)\bar{y}$ $\hat{y}_t(\tau) = \hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-1) + (1-\hat{\phi}_1)\bar{y}$; $\tau = 2,3,4,...$
ARIMA (1,1,1)	$\hat{y}_t(1) = (1+\hat{\phi}_1)y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\theta}_1\varepsilon_t$ $\hat{y}_t(2) = (1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1) - \hat{\phi}_1 y_t$ $\hat{y}_t(\tau) = (1+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1) - \hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-2)$; $\tau = 3,4,5,...$
ARIMA (1,2,1)	$\hat{y}_t(1) = (2+\hat{\phi}_1)y_t - (1+2\hat{\phi}_1)y_{t-1} + \hat{\phi}_1 y_{t-2} - \hat{\theta}_1\varepsilon_t$ $\hat{y}_t(2) = (2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1) - (1+2\hat{\phi}_1)y_t + \hat{\phi}_1 y_{t-1}$ $\hat{y}_t(3) = (2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(2) - (1+2\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(1) + \hat{\phi}_1 y_t$ $\hat{y}_t(\tau) = (2+\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-1) - (1+2\hat{\phi}_1)\hat{y}_t(\tau-2) + \hat{\phi}_1\hat{y}_t(\tau-3)$; $\tau = 4,5,6,...$

ตอนที่ 3 วิธีการพยากรณ์ร่วม (combined forecasts)

ในการพยากรณ์ไม่มีวิธีพยากรณ์ใดที่เป็นวิธีที่ดีที่สุด แต่ละวิธีมีทั้งข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน ผู้พยากรณ์ไม่สามารถหาวิธีที่ถูกต้องและเหมาะสมต่อสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่งได้ (Makridakis, 1989; Makridakis, Wheelwright, and Hyndman,1998; อัจฉรา จันทร์ฉาย, 2542) จึงต้องอาศัยประสบการณ์และเหตุผลหลายประการประกอบกันในการเลือกวิธีที่จะนำมาใช้พยากรณ์ ซึ่งมักเป็นปัญหาในการที่จะเลือกให้ได้วิธีที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้นจึงเกิดแนวทางเลือกอีกทางหนึ่งขึ้นมา นั่นคือ วิธีการรวมการพยากรณ์ (combining forecasts)

แนวความคิดในการรวมการพยากรณ์ เริ่มต้นประมาณต้นศตวรรษที่ 19 จากประสิทธิภาพของการรวมการพยากรณ์ทำให้เกิดมีการศึกษาเพิ่มเติมขึ้นในเวลาต่อมา และใน ค.ศ.1963 Barnard (อ้างถึงใน Granger and Newbold, 1986) ได้ทำการรวมวิธีการพยากรณ์ 2 วิธีเข้าด้วยกัน โดยใช้ simple average ต่อมาใน ค.ศ. 1969 Bates และ Granger ใช้แนวความคิดนี้ของ Barnard ประยุกต์ขึ้นเป็น weighted average และในปี ค.ศ.1974 Newbold และ Granger ได้ปรับปรุง weighted average ให้ดีขึ้น โดยในระยะเริ่มแรกนี้ได้นำเอาวิธีการพยากรณ์ 2 วิธี มารวมกัน เช่น วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์รวมกับวิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์รวมกับวิธีstepwise autoregression เป็นต้น และพบว่าวิธีการรวมการพยากรณ์นี้มีความถูกต้องในการพยากรณ์มากกว่าวิธีการพยากรณ์เดี่ยว ดังนั้นต่อมาในปี ค.ศ. 1983 Makridakis และ Winkler จึงได้มีการพัฒนาขึ้นโดยการนำเอาวิธีการพยากรณ์หลาย ๆ วิธีมารวมกัน โดยใช้ weighted average ของ Newbold และ Granger

จากการศึกษาค้นคว้าของ Makridakis and Winkler (1983), Clemen and Winkler (1986), Makridakis (1989) และ Batchelor and Dua (1995) สรุปได้ว่า การรวมการพยากรณ์นี้มีประโยชน์และข้อดีหลายประการ ได้แก่

1. การรวมการพยากรณ์มีค่าความถูกต้องมากกว่า (Makridakis and Winkler, 1983; Makridakis, 1989) นั่นคือ มีค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์น้อยกว่าวิธีการพยากรณ์เพียงวิธีเดียว เช่น การรวมวิธีการพยากรณ์ 2 วิธีเข้าด้วยกัน จะช่วยลดค่าความคลาดเคลื่อน (MAPE) ได้ 7 % (Armstrong, 1989)

2. วิธีการพยากรณ์ที่จะนำมารวมกันยิ่งใช้วิธีมากขึ้นเท่าใด ค่าความถูกต้องก็จะยิ่งเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย และค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนก็จะยิ่งลดลง (Winkler and Makridakis, 1983; Clemen and Winkler, 1986)

3. การนำข้อมูลจากแหล่งข้อมูลหลายแหล่งหรือวิธีการพยากรณ์ที่แตกต่างกันมารวมกันจะทำให้ค่าการพยากรณ์นั้นมีความถูกต้องมากขึ้น (Makridakis and Winkler, 1983)

4. การนำวิธีที่มีความแตกต่างกันมากมารวมกัน จะยังให้ผลการพยากรณ์ได้ดีกว่าการพยากรณ์เพียงวิธีเดียว รวมทั้งให้ผลที่ดีกว่าการรวมวิธีที่เหมือนกัน (Winkler and Makridakis, 1983; Batchelor and Dua, 1995)

เมื่อมีการรวมวิธีการพยากรณ์หลาย ๆ วิธีเข้าด้วยกัน ก็จะต้องมีการให้น้ำหนักของวิธีการพยากรณ์เดี่ยวแต่ละวิธีที่นำมารวมกัน การให้น้ำหนักของวิธีที่นำมารวมกันแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ simple average และ weighted average ซึ่งการให้น้ำหนักแบบ simple average นั้นจะเป็นการให้น้ำหนักเฉลี่ยที่เท่ากันทุกวิธี นั่นคือให้ความสำคัญในแต่ละวิธีเท่ากัน ส่วนการให้น้ำหนักแบบ weighted average ในแต่ละวิธีที่นำมารวมกันนั้นจะไม่เท่ากัน นั่นคือ ใน weighted average จะให้น้ำหนักตามความสำคัญของแต่ละวิธีที่นำมารวมกัน

การวิจัยในครั้งนี้ การรวมวิธีการพยากรณ์จะเป็นการรวมวิธีการพยากรณ์เฉพาะวิธีที่มีความยุ่งยากซับซ้อนในการวิเคราะห์ไม่มากนัก มี 7 วิธี ได้แก่ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (SMA) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (SES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (DES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (LES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 3 ครั้งตามแบบของบราวน์ (TES) วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (REG) วิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ (HWS) โดยจะไม่นำวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ (B-J) มารวมด้วย เนื่องจากเป็นวิธีที่มีความถูกต้อง (accuracy) สูงกว่าวิธีอื่นในการพยากรณ์ระยะสั้น และมีความยุ่งยากรวมทั้งใช้เวลาในการวิเคราะห์มาก (O'Donovan, 1983; Brockwell and Davis, 1996; วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล และคณะ, 2524; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) ซึ่งในการพยากรณ์ร่วม (combined forecasted) นี้จะมีการให้น้ำหนักเฉลี่ย (weighted averages, w_i) ของแต่ละวิธีตามแบบของ Newbold และ Granger (1974) ซึ่ง Makridakis and Winkler (1983) พบว่าวิธีการให้น้ำหนักเฉลี่ย (weighted averages) ตามแบบของ Newbold และ Granger (1974) ที่ได้ผลดีที่สุด มี 2 แบบ คือ

$$1.\ w_i = \frac{\left(\sum_{t=n-\upsilon}^{n-1} e_t(i)^2\right)^{-1}}{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{t=n-\upsilon}^{n-1} e_t(j)^2\right)^{-1}}$$

$$2.\ w_i = \beta\left[\frac{\left(\sum_{t=n-\upsilon-1}^{n-2} e_t^{(i)2}\right)^{-1}}{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{t=n-\upsilon}^{n-2} e_t^{(j)2}\right)^{-1}}\right] + (1-\beta)\left[\frac{\left(\sum_{t=n-\upsilon}^{n-1} e_t^{(i)2}\right)^{-1}}{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{t=n-\upsilon}^{n-1} e_t^{(j)2}\right)^{-1}}\right],0\langle\beta\langle 1$$

ค่าการพยากรณ์ คือ $\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{p} w_i \hat{y}_t^{(i)}$

โดยที่ $e_t^{(i)} = \frac{\left[y_t - \hat{y}_t^{(i)}\right]}{y_t}$, $i = 1,2,3,\ldots,p$

เมื่อ n= จำนวนข้อมูล

$\hat{y}_t^{(i)}$ = ค่าพยากรณ์ ณ เวลาที่ t วิธีพยากรณ์ที่ I

$\hat{y}_t$ = ค่าพยากรณ์ ณ เวลาที่ t

w_i = น้ำหนักของวิธีการพยากรณ์ที่ i

p = จำนวนวิธีการพยากรณ์

การให้น้ำหนักเฉลี่ยในการพยากรณ์ร่วมตามแบบของ Newbold และ Granger (1974) ทั้ง 2 แบบ จะเห็นได้ว่ามีการพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีที่นำมารวมกัน โดยแบบแรกจะให้น้ำหนักเท่ากันสำหรับวิธีการพยากรณ์เดี่ยวที่นำมารวมกัน ส่วนแบบที่สองจะมีการปรับการให้น้ำหนักของวิธีการพยากรณ์เดี่ยวที่นำมารวมกัน โดยมีการคำนึงถึงความสำคัญของน้ำหนักในช่วงเวลาที่ผ่านมาก่อน 1 ช่วงเวลาด้วย โดยให้ความสำคัญของน้ำหนักใน 2 ช่วงเวลาที่ต่างกันลดลงแบบเรขาคณิต

ตอนที่ 4 เกณฑ์ในการเปรียบเทียบความสามารถของวิธีการพยากรณ์

การตัดสินว่าวิธีการพยากรณ์ใดเหมาะสมและมีความถูกต้องในการพยากรณ์มากที่สุดสามารถพิจารณาได้จากค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าพยากรณ์ที่ได้กับค่าจริง ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่นิยมใช้กันมากได้แก่ ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute error: MAE) ค่าเบี่ยงเบนสมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute deviation: MAD) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (mean square error: MSE) รากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (root mean square error: RMSE) และเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute percentage error: MAPE) เป็นต้น

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้ค่าความคลาดเคลื่อน 2 แบบ คือ ค่าเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) เนื่องจากเป็นค่าวัดความถูกต้องของการพยากรณ์ที่วัดจากความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ที่เทียบกับค่าจริง และไม่มีหน่วยจึงเหมาะที่จะใช้กับการเปรียบเทียบวิธีการพยากรณ์หลายวิธีเมื่อใช้อนุกรมเวลาชุดเดียวกัน (Shearer, 1994; Hanke and Reitsch, 1995; ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2539) และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ซึ่งเหมาะสำหรับใช้เปรียบเทียบความถูกต้องของวิธีการพยากรณ์ของข้อมูลอนุกรมเวลาในชุดเดียวกัน (Thompson, 1990) มีสูตรดังนี้

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right|}{n} \times 100$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n}$$

เมื่อ $\hat{y}_t$ = ค่าพยากรณ์ ณ เวลาที่ t

y_t = ข้อมูลจริง ณ เวลาที่ t

n = จำนวนข้อมูล

สำหรับค่าเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) มีเกณฑ์ดังตาราง 11 (Lewis, 1982)

ตาราง 11 การแปลผลค่าเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย

ค่า MAPE(%)	การแปลผล
<10	ค่าพยากรณ์มีความถูกต้องสูงมาก
10-20	ค่าพยากรณ์มีความถูกต้องดี
20-50	ค่าพยากรณ์เชื่อถือได้
>50	ค่าพยากรณ์ไม่ถูกต้อง

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สาระในตอนนี้ ผู้วิจัยนำเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพยากรณ์ที่ใช้วิธีการพยากรณ์เชิงปริมาณและการพยากรณ์ข้อมูลทางการศึกษาดังนี้

วันพร เหลืองอาภาพงศ์ (2520) ใช้วิธีของบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ มาพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาปริมาณส่งออกข้าว ยาง และข้าวโพด ตั้งแต่เดือนมกราคม ถึง เดือนธันวาคม พ.ศ.2519 โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นรายเดือนตั้งแต่ พ.ศ.2513-2518 พบว่าอนุกรมเวลาปริมาณข้าว และยาง เป็นอนุกรมเวลาที่คงที่ รูปแบบที่เหมาะสมกับข้อมูล คือ ARIMA(2,0,0) ส่วนอนุกรมเวลาปริมาณส่งออกข้าวโพดเป็นอนุกรมเวลาฤดูกาลรูปแบบที่เหมาะสมกับข้อมูล คือ ARIMA(0,1,1) x SARIMA$(0,1,1)_{12}$ และผลการพยากรณ์ปริมาณส่งออกทั้งสามชนิด ได้ค่าพยากรณ์อยู่ในเกณฑ์ไม่แตกต่างจากปีที่ผ่านมาเท่าใดนัก

นิตย์ ฝ่าม (2528) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพยากรณ์ความต้องการการบริการทางโทรศัพท์ ซึ่งแบ่งตามเขตต่าง ๆ โดยใช้วิธีการวิเคราะห์การถดถอย วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเส้นตรง และวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล พบว่าเขตนครหลวง 1, 3 และ 4 วิธีการพยากรณ์ที่เหมาะสมที่สุดคือ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเส้นตรง เขตนครหลวง 2 และเขตภูมิภาค วิธีการพยากรณ์ที่เหมาะสมที่สุดคือวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

เกศิณี กมลรัตน์ (2530) ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการพยากรณ์ที่เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลเงินอากรขาเข้า ซึ่งเป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่ประกอบด้วยลักษณะของการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากค่าผิดปกติ และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์อื่น ๆ โดยเปรียบเทียบระหว่าง 5 วิธี คือ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง วิธีการพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้ วิธีการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก และวิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ พบว่าข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาลน้อย มีค่าเปลี่ยนแปลงมาก และมีค่าผิดปกติ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 7, 9 และ 10 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด ส่วนขนาดตัวอย่างเท่ากับ 6 และ 8 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียวใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด แต่เมื่อข้อมูลไม่มีข้อผิดปกติ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ5, 9,10 และ 20 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด ถ้าขนาดตัวอย่างเท่ากับ 6, 7 และ 8 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียวใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น วิธีการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิกจะใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด ข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาลมาก มีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยหรือมาก และมีค่าผิดปกติหรือไม่ก็ตาม ในช่วงขนาดตัวอย่าง

เท่ากับ 20, 30 และ 40 ส่วนใหญ่วิธีการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก ใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นเป็น 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 และ 120 วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ใช้พยากรณ์ได้ดีที่สุด

ธิดารัตน์ จันทวี (2539) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพยากรณ์ความต้องการใช้ไฟฟ้าเพื่อการผลิตไฟฟ้าระยะสั้น ซึ่งเป็นข้อมูลอนุกรมเวลารายเดือนของปีงบประมาณ 2533-2538 พยากรณ์โดยใช้วิธีของบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ วิธีการปรับให้เรียบ และวิธีการพยากรณ์ของแผนกวางแผนการผลิตไฟฟ้าระยะสั้น การไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย (กฟผ.) พบว่าวิธีการพยากรณ์ที่มีค่าเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) ต่ำที่สุดในทุกกรณี คือ วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์

ณัตติณา วัฒนาชยากูล (2513) ได้พยากรณ์ความต้องการครูระดับประถมศึกษาปีการศึกษา 2515-2519 จากการเพิ่มของจำนวนนักเรียน โดยใช้ข้อมูลจำนวนนักเรียนระดับประถมศึกษา ปีการศึกษา 2508-2513 และจำนวนประชากรที่อายุ 7 ปีบริบูรณ์ ตั้งแต่ พ.ศ. 2509-2519 ซึ่งได้จากการคำนวณมาพยากรณ์จำนวนนักเรียนในอนาคต โดยใช้อัตราส่วนแนวโน้มจำนวนนักเรียนในอดีต แล้วนำมาพยากรณ์จำนวนครูที่ต้องการจากจำนวนนักเรียนที่พยากรณ์ได้ โดยใช้อัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อจำนวนครู ในระดับประถมศึกษาตอนต้นคือ 30:1 และในระดับประถมศึกษาตอนปลายคือ 25:1 อัตราส่วนต่อครูของยูเนสโกคือ 38:1 และอัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครูที่เป็นจริงในปัจจุบันจากผลการวิจัยทั้งในระดับประถมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย คือ 32:7:1 และผลการวิจัยพบว่าการพยากรณ์ความต้องการครูโดยใช้อัตราส่วนดังกล่าว ได้จำนวนครูเรียงจากมากไปน้อยคือ อัตราส่วนของกระทรวงศึกษาธิการ อัตราส่วนที่เป็นจริงในปัจจุบันจากผลการวิจัย และอัตราส่วนของยูเนสโก ตามลำดับ

นภาพร สิงหทัต (2518) ได้ทำการพยากรณ์ความต้องการครูในระดับประถมศึกษา โดยพยากรณ์จำนวนนักเรียนจากประชากรอายุ 5-13 ปี ประมาณจำนวนนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ร้อยละของประชากรที่เข้าเรียนและพยากรณ์จำนวนนักเรียนในชั้นอื่น ๆ และพยากรณ์ความต้องการครูในอนาคตใช้วิธีเดียวกับ ณัตติณา วัฒนาชยากูล ผลการวิจัยพบว่า การพยากรณ์ความต้องการครูโดยใช้อัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครู ได้จำนวนครูโดยเรียงจากมากไปหาน้อย คือ อัตราส่วนของกระทรวงศึกษาธิการ อัตราส่วนที่เป็นจริงในปัจจุบันจากผลการวิจัย และอัตราส่วนของยูเนสโก ตามลำดับ แต่อย่างไรก็ตาม ความต้องการครูในอนาคตลดลง เป็นเครื่องบ่งชี้ว่า อัตราส่วนจำนวนนักเรียนนักเรียนต่อครูควรลดลง

วรรณพร วิเชียรวงศ์ (2521) ได้ทำการพยากรณ์ความต้องการครูระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษาของอำเภอธัญบุรี จังหวัดปทุมธานี ปีการศึกษา 2521-2526 โดยใช้

ประชากรที่เกิดในปี พ.ศ.2509-2520 มาปรับด้วยอัตราความครบถ้วนของการจดทะเบียนและอัตราการตายตามหมวดอายุ เพื่อให้ได้ประชากรที่แท้จริง แล้วพยากรณ์จำนวนนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้อัตราการเข้าเรียนและอัตราส่วนแนวโน้มจำนวนนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย แล้วจึงนำมาหาจำนวนครูที่ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครูแยกตามหมวดวิชา ผลการวิจัยพบว่าในปีการศึกษา 2521-2525 จำนวนครูประถมศึกษาและมัธยมศึกษาที่ต้องการมีจำนวนลดลง ส่วนในปีการศึกษา 2526 จำนวนครูที่ต้องการเพิ่มขึ้น

กานต์ กุณาศล (2525) ได้ทำการพยากรณ์ความต้องการครูในระดับประถมศึกษาของจังหวัดกาญจนบุรี ปีการศึกษา 2524-2529 โดยพยากรณ์ความต้องการครูจาก 3 รูปแบบ รูปแบบที่ 1 จะหาจำนวนนักเรียนจากประชากรในโรงเรียนทั้งหมด ตั้งแต่ พ.ศ.2524-2529 รูปแบบที่ 2 จะหาจำนวนนักเรียนจากประชากรวัยเรียนทั้งหมดที่จะเข้าเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ตั้งแต่ พ.ศ.2524-2529 แต่ละอำเภอ แล้วนำมาพยากรณ์ความต้องการครูจากเกณฑ์ครู:นักเรียน คือ 1:25 รูปแบบที่ 3 พยากรณ์ความต้องการครูแต่ละโรงเรียน โดยดูจากขนาดของโรงเรียน ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบที่ 3 มีความต้องการครูมากที่สุด รองลงคือ รูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 2 ตามลำดับ

อังคณา พัฒนผลไพบูลย์ (2531) ทำการพยากรณ์จำนวนครูโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา ปีการศึกษา 2531-2540 โดยสร้างรูปแบบทางเศรษฐมิติทางการศึกษา มีการดำเนินงาน 4 ขั้นตอน คือ ขั้นแรก กำหนดรูปแบบในการพยากรณ์จำนวนครู โดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อคัดเลือกตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับจำนวนครู ได้ 11 ตัวแปร และเก็บรวบรวมข้อมูลจากแหล่งทุติยภูมิคือสำนักงานคณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติและกรมสามัญศึกษา ในช่วงปีการศึกษา 2515-2530 รวม 16 ปี มาทำแผนภาพกระจาย เพื่อหาลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรอธิบายกับตัวแปรตาม แล้วคัดเลือกตัวแปรที่สำคัญไว้ 5 ตัว คือ จำนวนนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ผลิตภัณฑ์ประชาชาติภายในประเทศ หลักสูตรหรืออัตราส่วนวิชาอาชีพต่อวิชาสามัญ อัตราการสอนของครู และอัตราการปลดเกษียณ ขั้นที่ 2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบ หรือค่าสัมประสิทธิ์ของโมเดล ขั้นที่ 3 ประเมินค่าที่ประมาณได้ของพารามิเตอร์โดยใช้ F-test เมื่อมีนัยสำคัญแล้วทดสอบค่าพารามิเตอร์โดยใช้ t-test และขั้นสุดท้ายประเมินประสิทธิภาพของรูปแบบโดยตรวจสอบกับข้อมูลในอดีต แล้วใช้รูปแบบไปพยากรณ์จำนวนครู ได้ 2 รูปแบบ คือ

1. $Q=-151.6686 + 15.2960X_1 + 75.7035 \log G_{t-1}$

$$(2.0243) \qquad (3.4710)$$

$$R^2=.9953 \qquad SE.est=2.1263$$

2. $Q=87.2475 + .0567S + 5.0969X_2 - 76.5132 \log L$

$$(.0028) \quad (2.3080) \quad (30.0134)$$

$$R^2=.9926 \qquad SE.est=2.7737$$

โดยที่ Q คือจำนวนครู X_1 คือตัวแปรดัมมี่แก้การเปลี่ยนระบบการศึกษา $\log_{t-1}$ คือ logของGDP ย้อนหลัง 1 ปี S คือจำนวนนักเรียน X_2 คือตัวแปรดัมมี่แก้จำนวนนักเรียนลด logL คือ log ของอัตราการสอน ผลการวิจัยพบว่าเมื่อใช้รูปแบบที่ 1 พยากรณ์จะได้จำนวนครู 96,650 – 115,977 คน และใช้รูปแบบที่ 2 พยากรณ์ได้จำนวนครู 95,654-115,101 คน

นงนุช อินทรวงษ์โชติ (2538) ได้สร้างรูปแบบทางเศรษฐมิติเพื่อทำการพยากรณ์จำนวนครูโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา ปีการศึกษา 2538-2550 เช่นเดียวกับ อังคณา พัฒนผลไพบูลย์ แต่เพิ่มตัวแปรขึ้นอีก 6 ตัว คือ งบประมาณทางการศึกษา รายได้ต่อหัวต่อปีของประชากร จำนวนโรงเรียน จำนวนโรงเรียนที่เปิดใหม่ อัตราการเรียนต่อม.1 และตัวแปรอื่น ๆ ที่เนื่องมาจากตัวแปรจำนวนขนาดของโรงเรียน และมีการตรวจสอบประสิทธิภาพของรูปแบบการพยากรณ์กับข้อมูลในอนาคต โดยใช้ข้อมูลจากผลการพยากรณ์ของอังคณา พัฒนผลไพบูลย์ ผลการวิจัยได้ 2 รูปแบบ คือ

1. $Q=96.0391 + 0.0295S - 2.7862F + 0.0019Sc$

$$(0.0044) \quad (0.6021) \quad (0.0006)$$

$$R^2=.9979 \qquad SE.est=.6063$$

2. $Q=221.3984 + 0.0089S + 0.0051GDP + 0.0014NSc - 3.5012E$

$$(0.0012) \quad (0.0002) \quad (0.0003) \quad (0.2440)$$

$$R^2=.9999 \qquad SE.est=0.1205$$

โดยที่ S คือจำนวนนักเรียน F คืออัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครู Sc คือจำนวนโรงเรียน GDP คือผลิตภัณฑ์ประชาชาติภายในประเทศ NSc คือจำนวนโรงเรียนที่เปิดใหม่ E คืออัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อห้อง ผลการพยากรณ์เมื่อใช้โมเดลที่ 1 ได้จำนวนครู 131,513-175,132 คน และโมเดลที่ 2 ได้จำนวนครู 131,600-175,422 คน

บำเพ็ญ ปิดชิด (2540) ได้ศึกษาการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่มีและไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล โดยใช้วิธีการวิเคราะห์การถดถอย วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล และวิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ จากการวัดค่าความคลาดเคลื่อน 6 แบบ ได้แก่ รากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์สัมพัทธ์ (GMRAE) ค่ามัธยฐานของค่าสมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนวัดในรูปร้อยละ (MdAPE) ค่ามัธยฐานของค่าสมบูรณ์สัมพัทธ์ของความคลาดเคลื่อน (MdRAE) และร้อยละที่ดีกว่า (percent better) พบว่าการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล วิธีการวิเคราะห์การถดถอยจะมีขนาดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ส่วนการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์จะมีขนาดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

Winkler และ Makridakis (1983) ทำการวิจัยโดยใช้วิธีการพยากรณ์ร่วม จากวิธีการพยากรณ์ 10 วิธี คือ วิธีง่าย (naïve) วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (SMA) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (SES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (DES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (LES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 3 ครั้งตามแบบของบราวน์ (TES) วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (REG) วิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ (HWS) วิธีการปรับให้เรียบแบบปรับอัตราส่วน (ARRES) และวิธี Automatic AEP โดยใช้ข้อมูล 1001 ชุด (series) จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ หลายแหล่ง และหลายประเภท มีทั้งข้อมูลที่เป็นรายปี รายไตรมาส และรายเดือน พบว่าวิธีการพยากรณ์ร่วม โดยการให้น้ำหนักเฉลี่ยของ Newbold และ Granger (1974) เป็นวิธีที่ดีที่สุดในการพยากรณ์ โดยมีค่าเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) น้อยที่สุด

Makridakis และ Winkler (1983) ทำการวิจัยเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการพยากรณ์ร่วม โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลา 111 ชุด และ 1001 ชุด ทั้งประเภทรายเดือน รายปี และรายไตรมาส ใช้วิธีการพยากรณ์ร่วม โดยให้น้ำหนักแบบ simple average จากวิธีการพยากรณ์เดี่ยว 14 วิธี ได้แก่ วิธีง่าย (naïve) วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบง่าย (SMA) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (SES) วิธีการปรับให้เรียบแบบปรับอัตราส่วน (ARRSES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของบราวน์ (DES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 ครั้งตามแบบของโฮลท์ (LES) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล 3 ครั้งตามแบบของบราวน์ (TES) วิธีการวิเคราะห์การถดถอย (REG) วิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ (HWS) วิธี Automatic AEP วิธีบ็อกซ์-เจนกิ้นส์ (B-J) วิธี Lewandowski's FORSYS system วิธี

Parzen's ARAMA methodology และวิธี Bayesian forecasting โดยใช้ MAPE เป็นเกณฑ์ในการตัดสิน พบว่าความถูกต้องของการพยากรณ์ร่วมขึ้นอยู่กับจำนวนวิธีที่นำมารวมกัน โดยยิ่งใช้จำนวนวิธีการพยากรณ์ในการนำมารวมกันเพิ่มมากขึ้นเท่าใด ค่าความถูกต้องก็จะยิ่งเพิ่มตาม

Batchelor และ Dua (1995) ทำการวิจัยโดยใช้ ชุดข้อมูลอนุกรมเวลารายเดือน 4 ประเภท คือ real GNP growth (RGNP) inflation in the implicit GNP deflator (PGNP) the growth of corporate profits (PROF) และ the unemployment rate (UNMP) ของนักพยากรณ์ 22 คน พบว่า ในข้อมูลทุกประเภทยิ่งทำการรวมเพิ่มมากขึ้น ค่าความถูกต้องก็จะเพิ่มตาม หรือช่วยลดความคลาดเคลื่อนได้มากขึ้น และการรวมด้วยวิธีการที่หลากหลายก็จะยิ่งให้ผลที่ดีขึ้น ทำให้ค่าของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ลดลง และมีค่าความน่าจะเป็นในการลดลงของความคลาดเคลื่อนได้มากกว่าการที่รวมการพยากรณ์ที่เหมือนหรือคล้ายกัน

จากผลงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ยังไม่มีการนำวิธีการพยากรณ์ร่วมมาใช้พยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษา ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะใช้วิธีการพยากรณ์เดี่ยววิธีต่าง ๆ และวิธีการพยากรณ์ร่วม โดยใช้น้ำหนักเฉลี่ยตามแบบของ Newbold และ Granger 2 แบบ มาเปรียบเทียบกันโดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อน MAPE และ MSE เพื่อจะหาวิธีที่ดีและเหมาะสมที่สุดที่จะนำมาใช้ในการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษา โดยข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล 3 ชุด ได้แก่ ปริมาณการยืมหนังสือภาษาไทย ภาษาอังกฤษ และวิทยานิพนธ์ ใช้วิธีการพยากรณ์เดี่ยวทั้ง 8 วิธี และวิธีการพยากรณ์ร่วม 6 วิธี ส่วนข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล 2 ชุด ได้แก่ จำนวนครูวิทยาศาสตร์และครูคณิตศาสตร์ จะใช้วิธีการพยากรณ์เดี่ยว 6 วิธี ยกเว้นวิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์และวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์ เนื่องจากวิธีการปรับให้เรียบแบบโฮลท์-วินเทอร์ใช้สำหรับข้อมูลที่มีฤดูกาลและวิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์นี้เหมาะสำหรับพยากรณ์ข้อมูลระยะสั้น และต้องใช้ข้อมูลอย่างน้อย 50 ค่า แต่ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการศึกษาที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นข้อมูลระยะยาวรายปี 14 ค่า ดังนั้นจึงไม่เหมาะที่จะใช้วิธีบ๊อกซ์-เจนกิ้นส์และวิธีการพยากรณ์ร่วม 6 วิธี