บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมแบบจำลอง เริ่มจากทฤษฎีเกี่ยวกับกลศาสตร์ยานยนต์ ซึ่งกล่าวถึงความสัมพันธ์ของความเร็วรถยนต์กับความเร็วรอบของเครื่องยนต์และการส่งถ่ายกำลังจากเครื่องยนต์ไปยังล้อรถยนต์ เป็นต้น กล่าวถึงรูปแบบการขับขี่ที่ใช้สำหรับการขับขี่รถยนต์ และกล่าวถึงทฤษฎีการประมาณค่าที่ใช้ในโปรแกรมแบบจำลอง ดังมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 กลศาสตร์ยานยนต์

การที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ต้องอาศัยกำลังจากเครื่องยนต์ส่งผ่าน ชุดเกียร์ เพลาขับ ไปยังล้อรถยนต์ กำลังที่เครื่องยนต์ผลิตออกมาเพื่อขับเคลื่อนรถยนต์นั้น อาจพูดอีกนัยหนึ่งก็คือ เป็นกำลังที่เครื่องยนต์ผลิตออกมาเพื่อเอาชนะแรงต้านทานการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ได้แก่ แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความเสียดทานที่ล้อ แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความชัน และแรงขับเคลื่อนที่ต้องการใช้เปลี่ยนแปลงความเร็วรถยนต์ ในหัวข้อนี้ได้กล่าวถึงสมการแรงต้านทานการเคลื่อนที่ต่าง ๆ สมการการส่งถ่ายแรงบิดและกำลังจากเครื่องยนต์มายังล้อ

2.1.1 แรงต้านทานการเคลื่อนที่ของรถยนต์[1]

เป็นแรงขับที่รถยนต์ต้องการ (F) ในการเอาชนะแรงต้านทานการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ได้แก่ แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ (R_a), แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความเสียดทานที่ล้อ (R_r), และแรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความชัน (R_g) นอกจากนี้ยังมีแรงขับที่รถยนต์ต้องการในการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (F_{acc}) ดังนั้นความสัมพันธ์ของแรงต้านทานการเคลื่อนที่รวมของรถยนต์คือ

---

[1] Gillespie, T.D., Fundamentals of Vehicle Dynamics (United States of America : Society of Automotive Engineer, 1992) pp.79-120.

$$F = R_a + R_r + R_g + F_{acc} \qquad \text{(N)} \qquad (2.1)$$

ก) แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ (R_a) ขึ้นกับรูปร่างของรถยนต์ และความเร็วของรถยนต์ที่เคลื่อนที่ แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ จะมีค่าน้อยเมื่อรถยนต์มีความเร็วน้อย และจะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อความเร็วรถยนต์เพิ่มขึ้น ดังสมการต่อไปนี้

$$R_a = kV^2 \qquad \text{(N)} \qquad (2.2)$$

เมื่อ k คือ สัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ ขึ้นอยู่กับรูปร่างของรถยนต์เท่ากับ $\frac{1}{2}\rho c_d A$

ρ คือความหนาแน่นของอากาศ (kg/m^3)

C_d คือสัมประสิทธิ์ความต้านทานอากาศของรถยนต์

A คือหน้าตัดที่มากที่สุดของรถยนต์ที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศ (m^2)

V คือ ความเร็วเชิงเส้นของรถยนต์ (m/s)

ข) แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความเสียดทานที่ล้อ (R_r) เกิดจากปัจจัยหลายประการ เช่น ลักษณะของดอกยาง, ความฝืดของตลับลูกปืนล้อ, สภาพถนน, ความเร็วของรถยนต์ และน้ำหนักของรถยนต์เป็นต้น สมการแรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความเสียดทานที่ล้อ คือ

$$R_r = f_r W \qquad \text{(N)} \qquad (2.3)$$

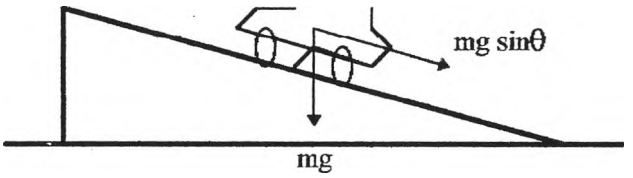
เมื่อ f_r คือ สัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับสภาพยางรถ และลักษณะถนน

V คือ ความเร็วเชิงเส้นของรถยนต์ (m/s)

W คือ น้ำหนักของรถยนต์ (N)

ค) แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความชัน (R_g) เมื่อรถยนต์แล่นขึ้นพื้นเอียง รถยนต์ต้องการกำลังเพิ่ม เพื่อเอาชนะแรงโน้มถ่วงของโลก ดังรูปที่ 2.1

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.1 แสดงการกระจายแรงเนื่องจากการเคลื่อนที่ของรถยนต์ขึ้นทางชัน

แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากการขึ้นทางชัน เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$R_g = W \sin\theta \qquad \text{(N)} \qquad (2.4)$$

เมื่อ θ คือ มุมเอียงของพื้นถนน (Degree)

ง) แรงขับเคลื่อนที่รถยนต์ต้องการใช้เพื่อเปลี่ยนแปลงความเร็ว (F_{acc}) โดยเฉพาะการเพิ่มความเร็ว รถยนต์ต้องการกำลัง หรือแรงขับเคลื่อนเพื่อให้เกิดอัตราเร่ง แรงขับเคลื่อนที่รถยนต์ต้องการใช้เพื่อเปลี่ยนแปลงความเร็วสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$F_{acc} = m_e a \qquad \text{(N)} \qquad (2.5)$$

เมื่อ m_e = มวลประสิทธิผลของรถยนต์ (Effective mass) (kg)[2]

$$m_e = \left(m + m_r\right) \qquad \text{(N)} \qquad (2.6)$$

m = มวลของรถยนต์ (kg)

m_r = มวลเทียบเท่าของชิ้นส่วนหมุน (Equivalent mass of rotational parts) (kg)

---

[2] Gillespie, T.D., Fundamentals of Vehicle Dynamics (United States of America : Society of Automotive Engineer, 1992) p.27.

ข) แรงต้านทานการเคลื่อนที่รวม (F) จากสมการที่ 2.1 เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$F = \frac{1}{2}\rho C_d A V^2 + f_r W + W\sin\theta + m_e a \qquad \text{(N)} \qquad (2.7)$$

2.1.2 กำลังที่ใช้ในการขับเคลื่อนรถยนต์

กำลังที่ใช้ในการขับเคลื่อนรถยนต์เป็นกำลังที่ใช้ในการเอาชนะแรงต้านทานการเคลื่อนที่ ดังหัวข้อที่ 2.1 กำลังที่ใช้ในการขับเคลื่อนรถยนต์ได้มาจากเครื่องยนต์นั่นเอง การส่งผ่านกำลังจากเครื่องยนต์ผ่านระบบส่งกำลังไปยังล้อขับ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรอบของเครื่องยนต์ และแรงบิดของเครื่องยนต์กับความเร็วของรถยนต์ได้กล่าวในรายละเอียดต่อไปนี้

ก) ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรอบที่เพลาข้อเหวี่ยงกับความเร็วรถยนต์

จากความสัมพันธ์

$$N_E = GN_W \qquad \text{(rev/min)} \qquad (2.8)$$

เมื่อ N_E = ความเร็วรอบที่เพลาข้อเหวี่ยง (rev/min)

G = อัตราทดของระบบส่งกำลัง

$$G = G_t G_d \qquad (2.9)$$

เมื่อ G_t = อัตราทดของชุดเกียร์ (เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งการเข้าเกียร์)

G_d = อัตราทดของเฟืองท้าย

N_W = ความเร็วรอบที่ล้อรถ (rev/min)

ความสัมพันธ์ของความเร็วรอบที่ล้อรถกับ ความเร็วเชิงเส้นของรถยนต์ คือ

$$N_W = \frac{60V}{2\pi r} \qquad \text{(rev/min)} \qquad (2.10)$$

เมื่อ V = ความเร็วเชิงเส้นของรถยนต์ (m/s)

r = รัศมีประสิทธิผลของล้อขับ (Effective radius of drive wheel) (m)

เมื่อทำการรวมความสัมพันธ์ของสมการ (2.8) และ (2.10) เข้าด้วยกัน จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรอบที่เพลาข้อเหวี่ยงกับความเร็วรถยนต์ดังนี้

$$N_E = \frac{60GV}{2\pi r} \quad \text{(rev/min)} \tag{2.11}$$

ข) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดที่เพลาข้อเหวี่ยง กับแรงขับเคลื่อน และความเร็วของรถยนต์

ข.1 ความสัมพันธ์ของกำลังของเครื่องยนต์กับแรงบิด และความเร็วรอบของเครื่องยนต์ คือ

$$P_E = \frac{2\pi T_E N_E}{60} \quad \text{(W)} \tag{2.12}$$

เมื่อ P_E = กำลังของเครื่องยนต์ (Watt)

T_E = แรงบิดที่เพลาข้อเหวี่ยงของเครื่องยนต์ (N.m)

N_E = ความเร็วรอบของเพลาข้อเหวี่ยง (rev/min)

ข.2 ความสัมพันธ์ของกำลังของเครื่องยนต์ กับกำลังที่รถยนต์ต้องการใช้เพื่อการขับเคลื่อน เป็นดังนี้

$$P_E = \frac{P_V}{\eta_t} \quad \text{(W)} \tag{2.13}$$

เมื่อ P_V = กำลังที่รถยนต์ต้องการใช้เพื่อการขับเคลื่อน (Watt)

η_t = ประสิทธิภาพของระบบส่งกำลัง

ข.3 ความสัมพันธ์ของกำลังที่รถยนต์ต้องการใช้เพื่อการขับเคลื่อน เป็นความสัมพันธ์ของแรงที่ใช้ในการขับเคลื่อนรถยนต์ กับความเร็วเชิงเส้นของรถยนต์ ดังต่อไปนี้

$$P_V = FV \qquad \text{(W)} \qquad (2.14)$$

เมื่อนำความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.12) และ (2.13) แทนในสมการที่ 2.14 จะได้

$$\frac{2\pi T_E N_E}{60} = \frac{FV}{\eta_t}$$

หรือ $$T_E = \frac{60FV}{2\pi N_E \eta_t} \qquad \text{(N.m)} \qquad (2.15)$$

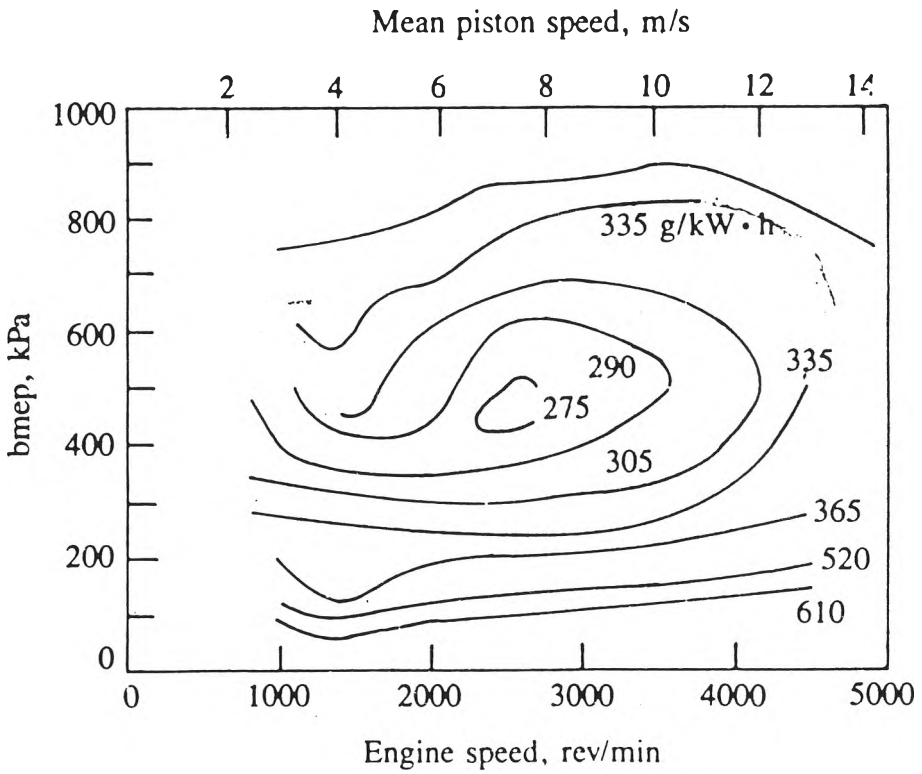
2.2 สมรรถนะของเครื่องยนต์

สมรรถนะของเครื่องยนต์ขึ้นอยู่กับตัวแปรการทำงานหลายชนิด เช่น เวลาของการจุดระเบิด (Spark Timing), อัตราส่วนเชื้อเพลิงกับอากาศ, อัตราส่วนการนำกาซไอเสียกลับมาใช้ (Exhaust Gas Recycle) เป็นต้น[3] สมรรถนะของเครื่องยนต์นิยมแสดงด้วยแผนภูมิของเครื่องยนต์ขณะทำงานที่ภาระ และความเร็วรอบเครื่องยนต์ต่าง ๆ กัน ดังตัวอย่างในแผนภูมิดังรูปที่ 2.2 [4]

---

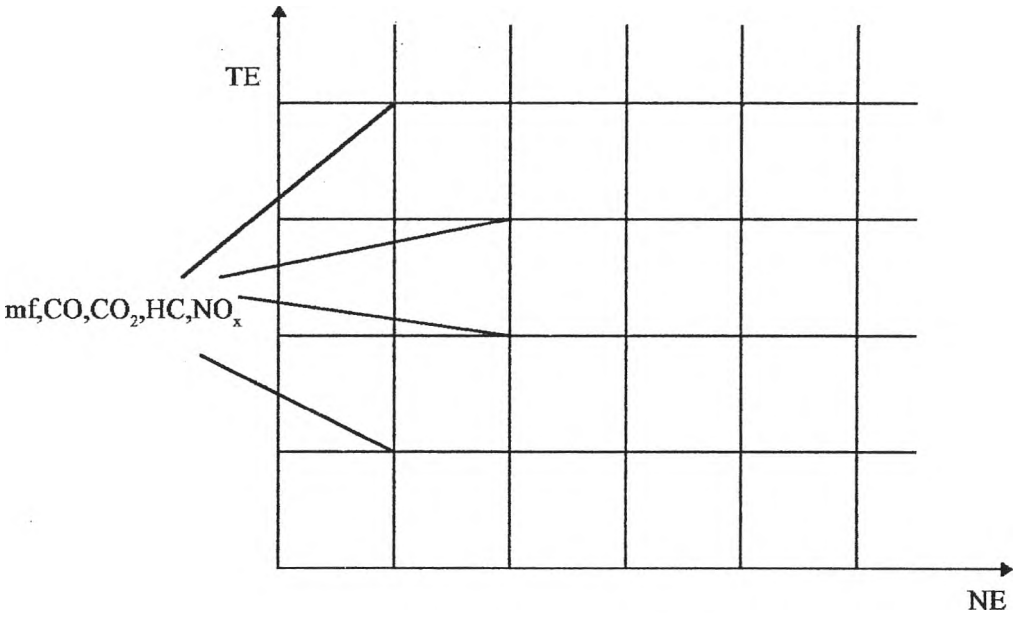
[3] Heywood, John B., Internal Combustion Engine Fundamentals (Singapore : McGraw-Hill, 1988) p.827.

[4] Heywood, John B., Internal Combustion Engine Fundamentals (Singapore : McGraw-Hill, 1988) p.839.



รูปที่ 2.2 แผนภูมิแสดงสมรรถนะของเครื่องยนต์

แผนภูมิแสดงสมรรถนะและมลภาวะจากเครื่องยนต์ สร้างขึ้นโดยการนำเครื่องยนต์ไปทดสอบบนเอนจินไดนาโมมิเตอร์ แผนภูมิแสดงสมรรถนะและมลภาวะจากเครื่องยนต์ นิยมสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ของภาระของเครื่องยนต์ กับความเร็วรอบของเครื่องยนต์ โดยแต่ละจุดตัดของภาระของเครื่องยนต์กับความเร็วรอบของเครื่องยนต์ เป็นจุดที่จะต้องทดสอบเครื่องยนต์ เพื่อวัดค่าการสิ้นเปลืองเชื้อเพลิง และปริมาณมลภาวะที่เกิดขึ้น จากเครื่องยนต์ ดังรูปที่ 2.3 การทดสอบเครื่องยนต์ โดยวัดค่าต่าง ๆ ที่จุดตัดของภาระของเครื่องยนต์ กับความเร็วรอบของเครื่องยนต์ และรอจนค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่มีผลกับค่าที่วัดคงที่ เรียกว่า การทดสอบที่สภาวะคงตัว (Steady State Test)



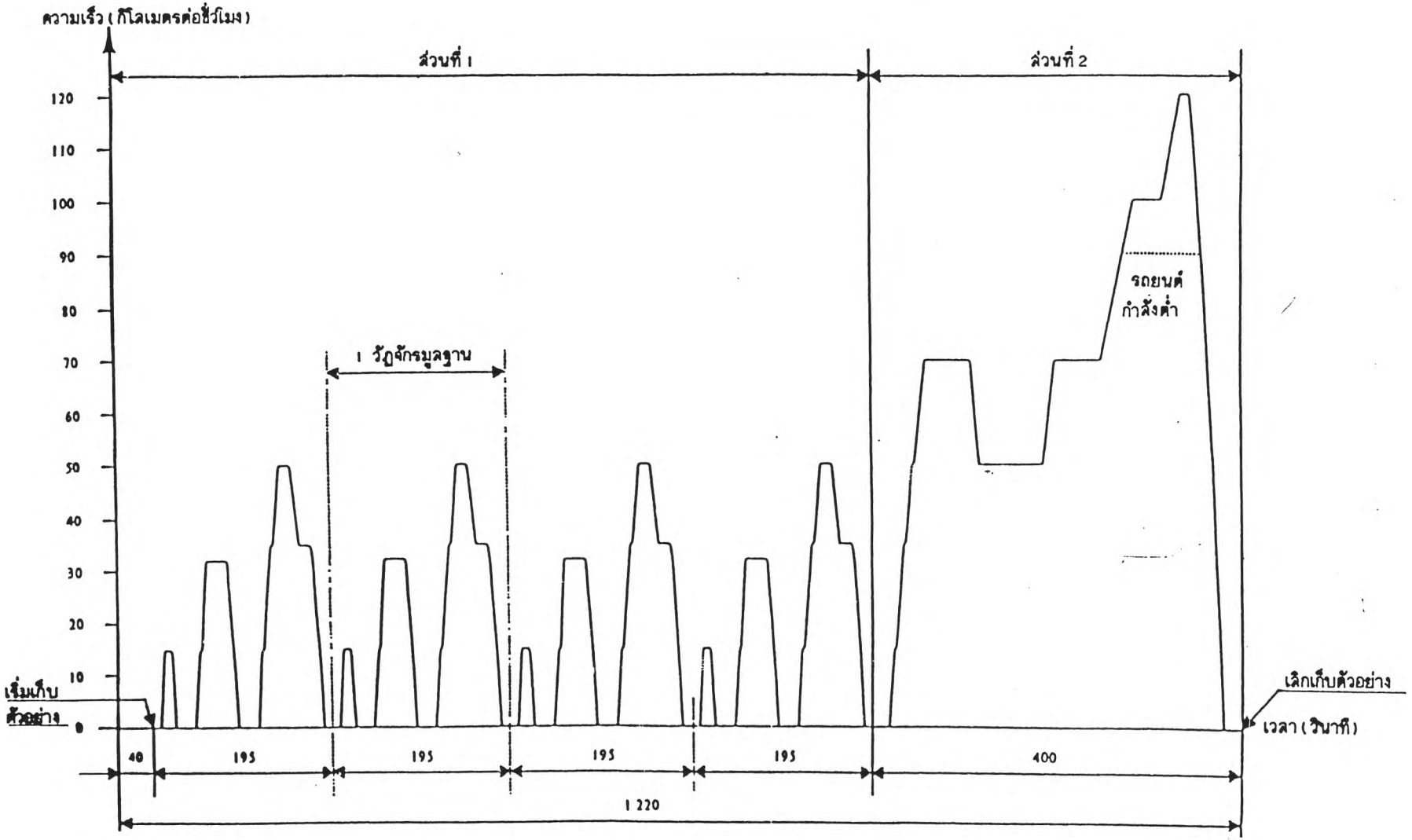
รูปที่ 2.3 ตัวอย่างกราฟแสดงความสัมพันธ์ของภาระของเครื่องยนต์ กับความเร็วรอบของเครื่องยนต์

2.3 รูปแบบการขับขี่มาตรฐาน (Driving Pattern)

รูปแบบการขับขี่รถยนต์ ได้มาจากการศึกษาข้อมูลทางสถิติของสภาพการจราจรภายในประเทศว่าสภาพการจราจรของแต่ละท้องถิ่นนั้น ๆ รถยนต์จะแล่นที่ความเร็วเท่าไร, มีการเร่ง, การหน่วง เป็นอย่างไร แล้วสรุปจำลองสภาพการจราจร ออกมาเป็นรูปแบบการขับขี่ กรณีของประเทศไทยใช้รูปแบบการขับขี่ เช่นเดียวกับกลุ่มประเทศยุโรป โดยสำนักงานมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม กำหนดเป็นมาตรฐานสำหรับประเทศไทย เรียกว่า มาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม รถยนต์ที่ใช้เครื่องยนต์เบนซินเฉพาะด้านความปลอดภัย สารมลพิษจากเครื่องยนต์ ระดับที่ 3 มอก. 1280-2538 [5] ดังรูปที่ 2.4 เป็นรูปแบบการขับขี่มาตรฐานสำหรับใช้ทดสอบรถยนต์ที่ผลิตออกจำหน่ายในประเทศไทยในปัจจุบัน

---

[5] สำนักงานมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม. มาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม รถยนต์ที่ใช้เครื่องยนต์เบนซินเฉพาะด้านความปลอดภัย : สารมลพิษจากเครื่องยนต์ ระดับ 3. มอก. 1280-2538. (สำนักงานมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม, 2538), หน้า 11.



รูปที่ 2.4 รูปแบบการขับขี่ตามมาตรฐาน มอก. 1280-2538

2.4 ทฤษฎีการถดถอยแบบหลายเชิงแบบเชิงเส้น (Multiple linear regression method)[6]

ทฤษฎีการถดถอยแบบหลายเชิงแบบเชิงเส้น ถูกนำมาใช้เป็นทฤษฎีการประมาณค่าสำหรับแบบจำลอง จากข้อมูลป้อนเข้าของเครื่องยนต์ (Steady State Engine Maps) เมื่อเวลาการขับขี่รถยนต์ผ่านไป ทฤษฎีนี้กล่าวถึงการประมาณรูปแบบสมการแบบเชิงเส้นจากข้อมูลดิบ โดยความสัมพันธ์ของตัวแปรตาม, y ซึ่งแปรตามตัวแปรต้นหลายตัว ในที่นี้จะขอกล่าวเฉพาะกรณีที่มีตัวแปรต้น 2 ตัว คือ x_1 และ x_2 ดังความสัมพันธ์ดังนี้

$$g = g(x_1, x_2) \tag{2.16}$$

เราสามารถสร้างฟังก์ชัน g ที่แปรผันกับ x_1 และ x_2 ได้โดยเริ่มจากการใช้สมการในรูปแบบของเชิงเส้นดังนี้

$$g(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{2.17}$$

โดยที่ a_0, a_1, a_2 เป็นตัวคงที่ ที่ไม่รู้ค่าซึ่งสามารถคำนวณโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด นั่นคือ เริ่มจากการเขียนสมการของความผิดพลาด E ของข้อมูลทั้งหมด n ข้อมูลที่เบี่ยงเบนไปจากฟังก์ชัน g นี้ ดังนี้

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i})]^2 \tag{2.18}$$

จากนั้นจึงทำการหาค่าต่ำสุดของความผิดพลาด E โดยเกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่า ก่อให้เกิดระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

---

[6] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 1. (สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538) , หน้า 78-85 และ 202-210.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a_0} &= 0\\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 0\\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

สมการแรกของระบบสมการนี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ดังนี้

$$2\sum_{i=1}^{n}[\,y_i-(a_0+a_1x_{1i}+a_2x_{2i})](-1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}a_0-\sum_{i=1}^{n}a_1x_{1i}-\sum_{i=1}^{n}a_2x_{2i}=0$$

$$na_0+(\sum_{i=1}^{n}x_{1i})a_1+(\sum_{i=1}^{n}x_{2i})a_2=\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (2.20)$$

สมการที่สองของระบบสมการคือ

$$2\sum_{i=1}^{n}[\,y_i-(a_0+a_1x_{1i}+a_2x_{2i})](-x_{1i})=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_ix_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_{1i}a_0-\sum_{i=1}^{n}a_1x^2{}_{1i}-\sum_{i=1}^{n}a_2x_{1i}x_{2i}=0$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_{1i})a_0+(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}{}^2)a_1+(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i})a_2=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i \qquad (2.21)$$

สมการที่สามของระบบสมการคือ

$$2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a_0+a_1x_{1i}+a_2x_{2i})](-x_{2i})=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_ix_{2i}-\sum_{i=1}^{n}x_{2i}a_0-\sum_{i=1}^{n}a_1x_{1i}x_{2i}-\sum_{i=1}^{n}a_2x_{2i}^{\,2}=0$$

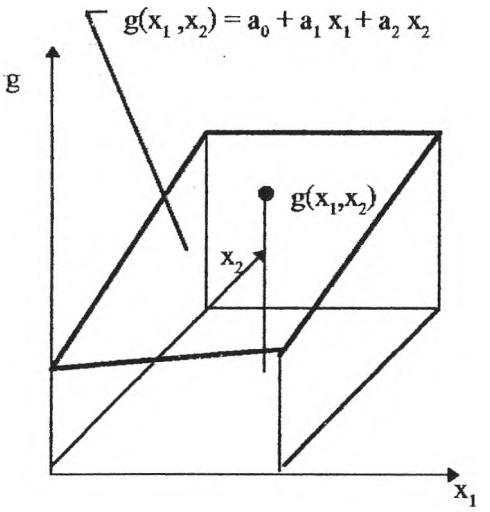
$$(\sum_{i=1}^{n}x_{2i})a_0+(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i})a_1+(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^{\,2})a_2=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i \qquad (2.22)$$

ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อยซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}^{\,2} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{2i}^{\,2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i \end{Bmatrix} \qquad (2.23)$$

โดยเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3 x 3 ที่อยู่ทางด้านซ้ายของระบบสมการนี้เป็นเมตริกซ์สมการที่รู้ค่าและเวกเตอร์ขนาด 3 x 1 ทางด้านขวาของระบบสมการก็รู้ค่าเช่นกัน ดังนั้นตัวไม่รู้ค่า a_0 ,a_1 และ a_2 สามารถคำนวณได้จากระบบสมการนี้โดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method) ลักษณะของฟังก์ชัน g ที่ได้จากสมการข้างต้น อยู่ในรูปแบบของแผ่นเรียบ ดังแสดงในรูปที่ 2.5

เมื่อได้ฟังก์ชัน g แล้วก็แทนค่า x_1 และ x_2 ที่เวลา t ใดๆลงไปเพื่อคำนวณค่า g ที่ต้องการ โดยค่า g หมายถึง อัตราการสิ้นเปลืองเชื้อเพลิงหรืออัตราการเกิดมลภาวะตัวต่าง ๆ ที่เวลา t นั้น ๆ



รูปที่ 2.5 แสดงฟังก์ชันในรูปแบบของแผ่นเรียบที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยวิธีการถดถอยแบบหลายเชิงแบบเชิงเส้น จากข้อมูล g ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น x_1 และ x_2

2.4.1 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ก. <u>การกำจัดไปข้างหน้า</u> (Forward Elimination) หากเรามีระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการดังหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว จะได้

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \qquad (2.24)$$

การกำจัดไปข้างหน้าจะเปลี่ยนระบบสมการ (2.24) ไปให้อยู่ในรูปแบบซึ่งเมตริกซ์จัตุรัสทางด้านซ้ายของสมการ จะเป็นเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ตลอดแถบล่างซ้ายของเมตริกซ์นั้น ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22}' & c_{23}' \\ 0 & 0 & c_{33}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2' \\ b_3'' \end{Bmatrix} \qquad (2.25)$$

โดยเครื่องหมายที่เป็นครรชนีบนของสัมประสิทธิ์แสดงถึงว่าสัมประสิทธิ์นั้นเป็นค่าใหม่ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปจากสัมประสิทธิ์เดิมในสมการ (2.24)

ข. <u>การแทนค่าย้อนกลับ</u> (Back Substitution) เมื่อจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบของสมการ (2.25) แล้ว ก็ทำการคำนวณหาค่า a_i โดยเริ่มจากสมการท้ายสุดก่อน แล้วทำไล่ย้อนกลับขึ้นไปเพื่อหาค่า a_i ทีละสมการ ดังนี้

$$a_2 = b_3'' / c_{33}''$$

$$a_1 = (b_2' - c_{23}' a_2) / c_{22}' \qquad (2.26)$$

$$a_0 = (b_1 - c_{12} a_1 - c_{13} a_2) / c_{11}$$

ค่า a_0, a_1, และ a_2 ที่คำนวณได้ก็คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ

$g(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ นั่นเอง