บทที่ 2
ทฤษฎีการวิเคราะห์เชิงสถิต

การวิเคราะห์เชิงสถิต (Static Analysis)

การวิเคราะห์เชิงสถิตคือการวิเคราะห์หาการกระจัดและแรงภายในของโครงสร้างภายใต้แรงกระทำคงที่ซึ่งเขียนในรูปความสัมพันธ์

$$\{P\} = [K]_{str}\{X\} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\{P\}$, $\{X\}$ คือเวคเตอร์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง

$[K]_{str}$ คือเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง

2.1 การสังเคราะห์เมตริกซ์สติฟเนส (Stiffness Matrix)

จากความสัมพันธ์สมการที่ 2.1 ในการวิเคราะห์เชิงสถิตต้องสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง จากการรวมเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนซึ่งในหัวข้อนี้จะอธิบายการสังเคราะห์เมตริกซ์สติฟเนสของคานและเสา

การสังเคราะห์เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนที่อยู่ในช่วงอีลาสติก สามารถสังเคราะห์จากหลักการของงานสมมติ (Virtual Work) คืองานสมมติเนื่องจากแรงภายนอกเท่ากับพลังงานความเครียดสมมติ (Virtual Stain Energy)

$$\delta W = \delta U \tag{2.2}$$

โดยที่ δW คืองานสมมติเนื่องจากแรงภายนอก

δU คือพลังงานความเครียดสมมติ (Virtual Strain Energy)

งานสมมติเนื่องจากแรงภายนอกคือผลคูณของการกระจัดสมมติที่จุดต่อของโครงสร้างกับแรงภายนอกกระทำที่จุดต่อของโครงสร้าง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\delta W = \delta u^T R \tag{2.3}$$

โดยที่ δu^T คือการกระจัดสมมติของจุดต่อของโครงสร้าง (Virtual Nodal Displacements)

R คือแรงภายนอก (External Nodal Forces)

พลังงานความเครียดสมมติ (Virtual Strain Energy) คือผลคูณของค่าความเค้นและความเครียดสมมติแสดงดังนี้

$$\delta U = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma \, dv \tag{2.4}$$

โดยที่ σ คือค่าความเค้น (Stress)

$\delta \varepsilon$ คือค่าความเครียดสมมติ (Virtual Strain)

ซึ่งค่าความเค้น และค่าความเครียดมีความสัมพันธ์กับค่าการกระจัดสมมติที่จุดต่อของโครงสร้าง และค่าความเครียด (Strain)

$$\delta \varepsilon = N' \delta u \tag{2.5}$$

$$\sigma = D\varepsilon \tag{2.6}$$

แทนค่า $\delta\varepsilon , \sigma$ ในสมการที่ (2.4) ได้

$$\delta U = \delta u^T \int_v \left(N'^T\right)\left(DN'\right) dv\, u \tag{2.7}$$

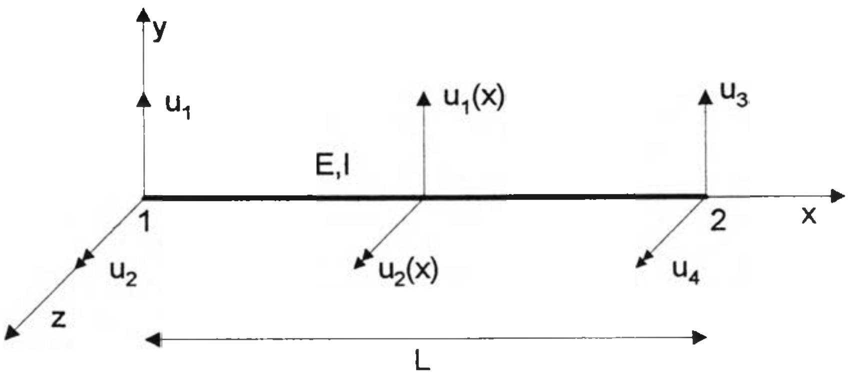
แทนค่างานสมมติเนื่องจากแรงภายนอก (2.3) และพลังงานความเครียดสมมติ (2.7) ในสมการที่ (2.2) ได้

$$\delta u^T \int_v \left(N'^T\right)\left(DN'\right) dv\, u = \delta u^T R \tag{2.8}$$

ดังนั้นเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคือ

$$K_e = \int_v \left(N'^T\right)\left(DN'\right) dv \tag{2.9}$$

พิจารณาการสังเคราะห์เมตริกซ์สติฟเนสของคาน โดยสมมติคานมีฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) เป็นพหุนามกำลังสาม (Cubic Polynomial)โดยที่ฟังก์ชันรูปร่าง ที่สมมติต้องเป็นฟังก์ชันมีรูปร่างที่เหมาะสมและที่จุดต่อของโครงสร้างที่เชื่อมระหว่างชิ้นส่วนต้องมีความต่อเนื่อง (Compatibility)



รูปที่ 2.1 พิกัดของคาน

กำหนดให้ $u(x)$คือการกระจัดสามัญ (Generic Displacement) ของชิ้นส่วนแสดงดังรูปที่ 2.1 ซึ่งเขียนอยู่ในรูป$u_1(x)$, $u_2(x)$ได้

$$u(x) = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

สมมติคานมีฟังชั่นรูปร่างเป็นพหุนามกำลังสาม

$$u_1(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{2.11}$$

ดังนั้น มุมหมุนเนื่องจากโมเมนต์ $u_2(x)$

$$u_2(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \tag{2.12}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\{u(x)\} = [f(x)]\{a\} \tag{2.13}$$

โดยที่ $$[f(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

หาการกระจัดที่จุดต่อที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ L โดยแทนค่าใน $[f(x)]$

$$\{U\} = [G]\{a\} \tag{2.14}$$

โดยที่

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\{a\} = [G^{-1}]\{U\} \tag{2.15}$$

นำค่า $\{a\}$ แทนในสมการที่ (2.8)

$$\{u(x)\} = [f(x)][G^{-1}]\{U\} \quad \text{หรือ} \quad \{u\} = [N^T]\{U\} \tag{2.16}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดของคาน

$$\varepsilon_x = -y\frac{d^2u_1(x)}{dx^2} \tag{2.17}$$

โดยที่

y คือระยะจากแกนสมดุลของคาน

หรือ

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -y\dfrac{d^2x}{dx^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{Bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \varepsilon = Tu(x) \tag{2.18}$$

ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ความเครียดกับการกระจัดที่จุดต่อเป็น

$$\varepsilon(x) = [T]N^TU = N''U = BU \tag{2.19}$$

แทนค่าความเครียดและความเครียดสมมติในสมการที่ (2.4) ดังนั้นเมตริกซ์สติฟเนสของคานได้

$$K_e = \int_v N''^T D N'' dv = \int_v B^T DB dv \tag{2.20}$$

$$\bar{K}_e = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

ในกรณีของเสามีการคิดแรงในแนวแกน เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนจึงรวมสติฟเนสในแนวแกนเพิ่มขึ้นในสติฟเนสของคานซึ่งสามารถเขียนดังนี้ [Chopra]

$$\overline{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{-AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.2 การรวมเมตริกซ์สติฟเนส

ในขั้นตอนนี้จะนำเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนของโครงสร้างทั้งหมดมารวมกันเป็นเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง โดยตำแหน่งของสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนที่นำมารวมในเมตริกซ์ของโครงสร้างต้องมีความสอดคล้องกัน กล่าวคืออยู่ในตำแหน่งของระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) ของชิ้นส่วนตรงกับในระบบแกนพิกัดทั่วไปหลังจากรวมทุกส่วนของโครงสร้าง จึงสามารถสร้างสมการสมดุลสถิตของโครงสร้างได้ดังนี้

$$\{P\} = [K]_{str} \{X\} \quad (2.23)$$

โดยที่ $\{P\}$, $\{X\}$ คือเวกเตอร์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบแกนพิกัดทั่วไป

$[K]_{str}$ คือเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างในระบบแกนพิกัดทั่วไป

2.3 การแก้สมการเชิงสถิต

ในการแก้สมการเชิงสถิตจะแยกการกระจัดที่ทราบค่าและการกระจัดที่ไม่ทราบค่า

$$\begin{Bmatrix} P_n \\ P_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{un} \\ K_{nu} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_u \\ X_n \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

โดยที่

X_u , P_u คือการกระจัดและแรงที่ไม่ทราบค่า

X_n , P_n คือการกระจัดและแรงที่ทราบค่า

ดังนั้นเราจะแก้สมการเชิงสถิตเพื่อหาค่าการกระจัดไม่ทราบค่าและแรงที่ไม่ทราบค่าได้

$$X_u = K_{uu}^{-1}(P_n - K_{un}X_n) \tag{2.25}$$

$$P_u = K_{nu}X_u + K_{nn}X_n \tag{2.26}$$