บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

3.1 สมการพื้นฐานของการไหล

ในการศึกษานี้เป็นการศึกษาถึงลักษณะการไหลของน้ำในทะเล ซึ่งต้องใช้สมการของการเคลื่อนที่ (Equation of Motion) หรือสมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity Equation) มาอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าว

ก) สมมติฐาน

เนื่องจากสภาพทางภูมิศาสตร์ของอ่าวไทยตอนบนมีความลึกน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับความกว้างของอ่าว ดังนั้น จึงสามารถกำหนดสมมติฐานได้ดังนี้

1) ความเร็วของการไหลในแนวดิ่งมีค่าเป็นศูนย์
2) อัตราเร่งอื่นๆในแนวดิ่งมีค่าน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับอัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก จึงพิจารณาเฉพาะอัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
3) ความดันในแนวดิ่งมีการเปลี่ยนแปลงแบบ hydrostatic

นอกจากนี้ค่าความหนาแน่นของน้ำ จะสมมุติว่ามีค่าเท่ากันตลอดทั้งพื้นที่ศึกษาและค่าเสียดทานต่างๆ จะรวมอยู่ในรูปของความเค้น เนื่องจากแรงเฉือน(shear stress)

จากสมมติฐานดังกล่าว เมื่อคำนึงถึงผลจากการเคลื่อนที่รอบตัวเองของโลกด้วยแล้ว เราสามารถเปลี่ยนสมการ Navier-Strokes และสมการการไหลต่อเนื่อง ให้เป็นสมการพื้นฐานของการไหล 2 มิติ ในแนวราบ คือ

ข) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}+\bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{1}{h\rho}\tau_{bx}+\frac{1}{h\rho}\tau_{wx}-f\bar{V}-\frac{1}{h\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(hD_x\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(hD_x\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)\right]=0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}+\bar{V}\frac{\partial \bar{V}}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{h\rho}\tau_{by}+\frac{1}{h\rho}\tau_{wy}+f\bar{U}-\frac{1}{h\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(hD_{xy}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(hD_{yy}\frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right)\right]=0 \quad (3.2)$$

ค) สมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity Equation)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(h\bar{U}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\bar{V}\right)=0 \quad (3.3)$$

เมื่อ U และ V คือความเร็วเฉลี่ยตามแนวดิ่ง มีทิศทางตามแกน X, Y ตามลำดับ

t คือ เวลา

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

η คือ ระดับผิวน้ำ

h คือ ระดับความลึกน้ำทั้งหมด (η+d)

d คือ ความลึกท้องน้ำถึงระดับอ้างอิง

ρ คือ ความหนาแน่นของน้ำ

f คือ แรง Coriolis force = 2 Ωsinϕ

Ω คือ ความเร็วเชิงมุมของโลก

ϕ คือ Lattitude

τ_{bx} , τ_{by} คือ Bottom friction stress ตามแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

τ_{wx} , τ_{wy} คือ ความเค้นเฉือนที่ผิวเนื่องจากลมตามแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายสัมพันธ์กับทิศทาง

โดย

$$\tau_{bx} = \rho f_r \bar{u} \left(\bar{u}^2+\bar{v}^2\right)^{1/2}$$

$$\tau_{by} = \rho f_r \bar{v} \left(\bar{u}^2+\bar{v}^2\right)^{1/2}$$

$$f_r = g/CH^2$$

CH = Chezy coefficient

ความเค้นเฉือนที่ผิวเนื่องจากลม, τ_{wx} และ τ_{wy} มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมของความเค้นเฉือนอื่นๆ เพราะว่าอ่าวไทยตอนบนตั้งอยู่ในเขตที่มีแรงลมน้อย (weak wind zone) ดังนั้นความเค้นเฉือนที่ผิวเนื่องจากลมจะไม่นำมาคิดในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการศึกษานี้

3.2 ทฤษฎีของคลื่น

สมการของคลื่นเมื่อไม่คิดแรงตึงผิวของน้ำทะเลเป็นดังนี้

ความเร็วคลื่น $C = L / T = \left(\frac{gT}{2\pi}\right)\tanh\frac{2\pi d}{L}$ (3.4)

หรือ $C^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L}$ (3.5)

ความยาวคลื่น $L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L}$ (3.6)

เมื่อ T = คาบเวลาคลื่น (วินาที)

d = ความลึกของน้ำ (ซม)

g = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (ซม ต่อวินาที^{2})

ในเขตน้ำลึกเมื่อ $\frac{d}{L} \geq 0.5$

ความเร็วคลื่นในเขตน้ำลึก $C_0 = {}^{gT}/_{2\pi}$ (3.7)

หรือ $C_0 = \left({}^{gL_0}/_{2\pi}\right)^{1/2}$ (3.8)

(3.8)

พลังงานของคลื่นต่อหน่วยพื้นที่ (Wave Energy) $E = \frac{\rho g H^2}{8}$ (3.9)

เมื่อ H = ความสูงคลื่น

3.3 ทฤษฎีการเคลื่อนที่ของคลื่น

ขณะที่คลื่นเคลื่อนที่อยู่ภายนอกชายฝั่ง (Offshore) คุณสมบัติต่างๆของคลื่น เช่น ความเร็วของคลื่น ความยาวและความสูงของคลื่นยังคงสภาพเดิม และเมื่อคลื่นเคลื่อนที่เข้าหาชายฝั่ง (On shore) คุณสมบัติต่างๆ ดังกล่าว จะเริ่มเปลี่ยนแปลงไปตามระยะทางที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่าน และเมื่อคลื่นเคลื่อนที่เข้าสู่ฝั่ง ความลึกของท้องน้ำจะลดลงตามลำดับ ทำให้พลังงานคลื่นเริ่มลดลงเรื่อยๆ ทั้งนี้เนื่องมาจากการสูญเสียพลังงาน จากความเสียดทานกับพื้นท้องทะเล และกระบวนการภายในต่างๆ ดังนั้น อิทธิพลของคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าหาฝั่ง มีดังต่อไปนี้

3.3.1 การหักเหของคลื่น (Wave Refraction)

Noda (1974) ได้เสนอสมการการหักเหของคลื่น โดยอาศัยหลักการของ Irrotational of Wave Number ดังนี้

$$\frac{d\sigma}{dt} + \vec{\nabla}_H * \vec{k} = 0 \qquad (3.10)$$

เมื่อ σ คือ ความถี่เชิงมุม (Angular frequency) $= (qk \tanh kh)^2$

$\vec{k}$ คือ Wave Number $= ik_x + jk_y$

$\vec{\nabla}_H$ คือ ความแตกต่างของ Operator ในแนวราบ $= i(\frac{\partial}{\partial x}) + j(\frac{\partial}{\partial y})$

ซึ่ง i,j เป็น Unit Vector ในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

จากสมการ (3.10) ในสภาวะ Steady-State

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_y) - \frac{\partial}{\partial y}(k_x) = 0 \qquad (3.11)$$

เมื่อ k_x และ k_y คือ Wave Number ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ทำมุมกับแกน y ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะแสดง ในรูปของสมการ

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial y}(k\sin\theta) \qquad (3.12)$$

จะเห็นได้ว่า สมการที่ (3.12) จัดอยู่ในรูปของ finite difference และทำการแตก scheme โดยใช้ central-difference ในแกน x และ forward-difference ในแกน y ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของจุดเริ่มต้นใช้หลักการของ สเนลล์ (Snell's law) และรูปแบบสุดท้ายของ finite difference ของสมการที่ (3.12) Noda (1974) ได้เสนอดังนี้

$$\theta_{i,j}^{n+1} = \sin^{-1}\left\{\frac{1}{k_{i,j}}\left[\begin{array}{l}\tau(k\sin\theta)_{i-1,j+1} + (1-2\tau)(k\sin\theta)_{i,j+1} + \tau(k\sin\theta)_{i+1,j+1} \\ +\frac{\Delta y}{2\Delta x}(k\cos\theta)_{i+1,j} - (k\cos\theta)_{i-1,j}\end{array}\right]\right\} \qquad (3.13)$$

ให้ τ คือ Dissipative factor = 0.25

การเปลี่ยนแปลงความสูงคลื่น (Wave Deformation) สามารถแสดงอยู่ในรูปสมการ Conservation of Energy ดังนี้

$$\bar{\nabla}(E\vec{C}_g) = 0 \qquad (3.14)$$

$$E = \frac{pgH^2}{8} \tag{3.15}$$

และ
$$C_g = \frac{C}{2}\left[1 + \frac{2kh}{\sinh^2 kh}\right] \tag{3.16}$$

เมื่อ E คือ ค่าพลังงานเฉลี่ย ต่อพื้นที่ผิว

C_g คือ Group Velocity

C คือ ความเร็วคลื่น

k คือ Wave Number

h คือ ความลึกของน้ำ

ρ คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล

H คือ ความสูงของคลื่น

จาก สมการที่ (3.14) เมื่อเขียนในทิศทาง x และ y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}(EC_g \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(EC_g \cos\theta) = 0 \tag{3.17}$$

แทนค่าสมการที่ (3.15) ลงในสมการที่ (3.17) ความสูงของคลื่น ได้จากสมการ finite difference คล้ายกับ สมการที่ (3.13) Perlin (1984) ได้เสนอ ดังนี้

$$H_{i,j}^{N+1} = \left\{ \frac{1}{(C_g \cos\theta)_{i,j}} \left[\begin{array}{l} \tau(H^2 C_g \cos\theta)_{i-1,j+1} + (1-2\tau)(H^2 C_g \cos\theta)_{i,j+1} + \\ \tau\left(H^2 C_g \cos\theta\right)_{i+1,j+1} + \frac{\Delta y}{2\Delta x}\left[\begin{array}{l} \left(H^2 C_g \sin\theta\right)_{i+1,j} - \\ \left(H^2 C_g \sin\theta\right)_{i-1,j} \end{array} \right] \end{array} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของค่าความสูงคลื่นให้ ประกอบกับทิศทางคลื่น (θ) ที่คำนวณได้จากสมการที่ (3.13) ค่าความสูงคลื่นในพื้นที่จึงสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการที่ (3.18)

สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างของคลื่นภายในเขตคลื่นแตกตัวนั้นคือ คลื่นที่เคลื่อนตัวเข้าใกล้ชายฝั่งจะมีความชันของคลื่นมากขึ้นจนกระทั่งเกิดการแตกตัวเนื่องจากความลึกของน้ำลดลง

ซึ่งตามแนวชายฝั่งที่คลื่นแตกตัวจะมีการสูญเสียพลังงานมากจึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีคลื่นแนวราบเส้นตรงมาใช้สำหรับหาตำแหน่งการแตกตัวของคลื่นหรือการเปลี่ยนรูปร่างของคลื่นตามแนวคลื่นแตกตัว ดังนั้นจึงใช้วิธีประมาณจากการทดลอง (Empirical and Approximate Method) มาใช้กับขบวนการแตกตัวของคลื่น

สูตรที่ใช้คำนวณ Wave Charavteristic ที่ตำแหน่งคลื่นแตกตัว คือ (Munk, 1949)

$$Hb/h_b=0.78 \qquad (3.19)$$

โดย Hb = ความสูงของคลื่นแตกตัว

h_b = ความลึกของน้ำที่ตำแหน่งคลื่นแตกตัว

3.4 ทฤษฎีการเคลื่อนตัวของตะกอนท้องน้ำ

3.4.1 การเคลื่อนตัวของตะกอนเนื่องจากคลื่นและกระแสน้ำ

Sawaragi et al (1984) เสนอ ความสัมพันธ์ของ suspended sediment เนื่องจากคลื่นและกระแสน้ำ ดังนี้

$$Q_{sw}=\left((1-\gamma)CoW_f\left(1-\frac{u^*_{cw}}{w_f}\right)+\overline{C}Wf\right) \qquad (3.20)$$

$$C_o=\left[\alpha_o\frac{0.688U^{*2}_{CW}}{1.13\sigma_S\, gWfT}\right]$$

โดย Q_{sw} = suspended sediment อันเนื่องจากคลื่นและกระแสน้ำ

γ = ค่าคงที่ที่จะเป็นตัวชี้ว่า sediment จะลอยอยู่หรือตกลง

$\gamma = 0$ เมื่อ $\frac{u^*_{cw}}{w_f} > 1$

$\gamma = 1$ เมื่อ $\frac{u^*_{cw}}{w_f} < 1$

$\overline{C}$ = ค่าความเข้มข้นของตะกอนเฉลี่ย

C_0 = ค่าความเข้มข้นของตะกอนที่ท้องน้ำ

α_c = 0.0003 (จากการคำนวณด้วยข้อมูลภาคสนาม ดูภาคผนวก ง)

W_f = ค่าความเร็วการตกตะกอน(settling velocity)

$\cup^*_{cw}$ = ค่าความเร็วของแรงเค้น (ดูสมการที่ 3.26)

นอกจากนี้ Sawaragi ยังได้เสนอค่าความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของตะกอนท้องน้ำอันเนื่องมาจากคลื่นและกระแสน้ำดังนี้

$$Q_{bw} = \left(47\sigma\pi d_{50}^{2}(\psi - \psi_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\overline{U}}{u_w} \right) \quad (3.21)$$

$$u_w = \frac{\pi H}{T \sinh\left(\frac{2\pi h Z_h}{L}\right)} \quad (3.22)$$

$\overline{U}$ = ความเร็วเฉลี่ย (ซม ต่อวินาที)

Z_h = ความลึกน้ำ (ซม)

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (3.23)$$

$$= \frac{u_{cw}^{*2}}{(\Delta g d_{50})} \quad (3.24)$$

$$\psi_c = \begin{cases} 0.2 : D_* \le 1 \\ 0.2 D_*^{\frac{-2}{3}} : 1 < D_* \le 20 \\ 0.01 D_*^{\frac{1}{2}} : 20 < D_* \le 125 \\ 0.05 : 125 < D_* \end{cases} \quad (3.25)$$

$$D_* = \left[(\sigma_s / \sigma - 1) g / \nu^2 \right]^{\frac{1}{2}} d_{50}$$

g = 9.81 (เมตรต่อวินาที^{2})

T = คาบความเร็วคลื่น (วินาที)

ρ_s = ความหนาแน่นของเม็ดตะกอน = 2700 กก.ต่อลบ.ม (NEDECO,1965)

ρ = ความหนาแน่นของน้ำ = 2010 กก.ต่อลบ.ม (NEDECO,1965)

ν = ความหนืดของน้ำ = 0.8 x 10^{-6} ตร.มต่อวินาที (NEDECO,1965)

ถ้า $\psi < \psi_c$ นั่นคือ จะไม่มี bed load transport

ค่า U_{cw}^{*} คือ ค่า shear velocity อันเนื่องจากอิทธิพลร่วมของคลื่นและกระแสน้ำ ซึ่งเป็นความเร็วที่จะทำให้ตะกอนเคลื่อนที่ได้

$$U_{cw*} = \sqrt{\frac{\hat{\tau}}{\rho}} \qquad (3.26)$$

$$\hat{\tau} = 0.5\rho f_w \hat{U}_{bp}^2$$

$$f_w = \exp\left\{-5.977 + 5.213\left(a_b / k_s\right)^{-0.194}\right\}$$

$$a_b = \hat{U}_{bp} / \sigma$$

$$= 2\pi/T$$

โดย $\hat{\tau}$ = แรงเฉือนที่พื้นท้องน้ำ

f_w = ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน

$k_s = 2D_{50}$

a_b = Water Particle Excursion ที่ท้องน้ำ

$\hat{U}_{bp}$ = Amplitude of Water Particle Velocity ที่ท้องน้ำ

$\hat{U}_{bp} = U_{bx}/\cos\theta\cos\sigma t$

U_{bx} = cross-shore velocity

3.4.2 การเคลื่อนตัวของตะกอนอันเนื่องจากกระแสน้ำ

Sawaragi et al (1984) เสนอความสัมพันธ์ของ suspended sediment เนื่องจากกระแสน้ำ ดังนี้

$$Q_s = \bar{C} W_f \qquad (3.27)$$

$\bar{C}$ = ค่าความเข้มข้นของตะกอนเฉลี่ย (ลบ.ซม ต่อลบ.ซม)

W_f = ค่า settling velocity (ซม ต่อวินาที)

3.5 ทฤษฎีการฟุ้งกระจายของตะกอน

สมการคำนวณหาความเข้มข้นของตะกอน

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U\frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + V\frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = Ksx\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + Ksy\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} + \Delta q_s \qquad (3.28)$$

$K_{sy} = K_{sx} = \alpha_c U_{cw}^* d$

$\overline{C}$ = ความเข้มข้นของตะกอนเฉลี่ย

โดย Ksx, Ksy = ค่าสัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายของตะกอนแขวนลอย

α_c = diffusion constant

U^*_{cw} คำนวณจากสมการที่ (3.26)

d = total depth (ซม.)

สำหรับค่า Δq_s กรณีมีทั้งคลื่น และกระแสน้ำ; $\Delta q_s = -Q_{sw}$ (สมการที่ 3.20)

กรณีมีเฉพาะกระแสน้ำ; $\Delta q_s = 0$

3.6 ทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงท้องน้ำ

สมการคำนวณการเปลี่ยนแปลงท้องน้ำกับเวลาสามารถคำนวณจากการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่ของตะกอน (ตะกอนแขวนลอยและตะกอนท้องน้ำ) ตามระยะทาง สมการที่ใช้คำนวณคือ

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Delta Q_s\right) \qquad (3.29)$$

ในที่นี้ $\vec{q} = (q_x, q_y) = \vec{q}_b$

$\vec{q}_b = Q_{bw}$ (จากสมการที่ 3.21)

สำหรับค่า ΔQ_s กรณีมีทั้งคลื่น และกระแสน้ำ; $\Delta Q_s = -Q_{sw}$ (จากสมการที่ 3.20)

กรณีมีเฉพาะกระแสน้ำ; $\Delta Q_s = -CW_f$ (จากสมการที่ 3.27)