บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงลักษณะทั่วไปของความคลาดเคลื่อนและวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งใช้ในการพยากรณ์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ ผู้วิจัยจะประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุด วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทน ตัวประมาณเบส์ และตัวพยากรณ์ผสม ซึ่งมีรายละเอียดต่างๆ ดังนี้

คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาลักษณะของความคลาดเคลื่อนตามรูปแบบของอัตตสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง (first order autoregressive process : AR(1)) ซึ่งเขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ ρ คือค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง ε_t กับ ε_{t-1} โดยที่ $|\rho| < 1$

ν_t คือค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มซึ่งเป็นอิสระกันและ $\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu^2)$

พิจารณา

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,n$$

จากนี้จะได้ว่า

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + \nu_{t-1} \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,n$$

แทนค่า ε_{t-1} ในเทอมของ $\rho\varepsilon_{t-2} + \nu_{t-1}$ จะได้

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + \nu_{t-1}) + \nu_t \\ &= \rho^2\varepsilon_{t-2} + (\rho\nu_{t-1} + \nu_t)\end{aligned}$$

และสามารถแทนค่า ε_{t-2} ในเทอมของ $\rho\varepsilon_{t-3} + \nu_{t-2}$ จะได้

$$\varepsilon_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + (\rho^2 v_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t)$$

และทำในลักษณะเดิมจะได้ว่า

$$\varepsilon_t = \rho^s\varepsilon_{t-s} + \rho^{s-1}v_{t-s+1} + \rho^{s-2}v_{t-s+2} + \ldots + \rho v_{t-1} + v_t$$

เมื่อ $s \to \infty$ แล้ว ρ^s มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty}\rho^s v_{t-s}$$

พิจารณา ε_t จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความคลาดเคลื่อนสุ่มในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ พิจารณา $0 < \rho < 1$ จะทำให้ ε_t มีความสัมพันธ์กับความคลาดเคลื่อนในเทอมก่อนหน้าลดน้อยลงเรื่อยๆ

1. ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน

จาก

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty}\rho^s v_{t-s}$$

$$= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

กำหนด $E(\varepsilon_t)$ คือค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t) = E(v_t) + \rho E(v_{t-1}) + \rho^2 E(v_{t-2}) + \ldots$$

จากข้อตกลงเบื้องต้นของ v_t จะได้

$$E(v_t) = 0;\ t = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

$$E(\varepsilon_t) = 0;\ t = 1, 2, \ldots, n$$

2. ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จาก

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty}\rho^s v_{t-s}$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t^2) = E[v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \ldots]^2$$
$$= E\{(v_t^2 + \rho^2 v_{t-1}^2 + \rho^4 v_{t-2}^2 + \ldots) + (2\rho v_t v_{t-1} + 2\rho^2 v_t v_{t-2})\}$$

แต่

$$E(v_t^2) = \sigma^2 \text{ และ } E(v_t v_{t-s}) = 0 \; ; \; t \neq s \; ; \; t = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

$$E(\varepsilon_t^2) = (\sigma_v^2 + \rho^2\sigma_v^2 + \rho^4\sigma_v^2 + \rho^6\sigma_v^2 + \ldots) + (0 + 0 + 0 + \ldots + 0)$$
$$= \sigma_v^2(1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \ldots)$$
$$= \sigma_v^2 \frac{1}{1-\rho^2} \; , \; |\rho| < 1$$

และ

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$ เป็นค่าคงที่สำหรับค่าคงที่ σ_v^2 และ ρ

วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้จะเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 4 วิธีคือ วิธีกำลังสองต่ำสุด วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทน ตัวประมาณเบส์ และตัวพยากรณ์ผสม ซึ่งมีรายละเอียดแต่ละวิธีเป็นดังนี้

1. วิธีกำลังสองต่ำสุด (Ordinary Least Squares)

หลักการของวิธีนี้ก็คือ หาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าต่ำสุด

จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, \ldots, n$

เขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (1.1)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{y}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรตาม

X คือ เมตริกซ์ของตัวแปรอิสระ

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ $= [\beta_0, \beta_1]'$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งเมื่อแทนที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ในสมการที่ (1.1) จะได้

$$\underset{\sim}{y} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{\sim}{e}$$

จะได้ว่า $\underset{\sim}{e} = \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

พิจารณาผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(Sum Square of Residual : SSE)

$$\begin{aligned} SSE &= \underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} \\ &= (\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \\ &= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ &= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} \end{aligned}$$

การหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อน ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อนเทียบกับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ แล้วกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\underset{\sim}{\beta}}}(\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = 0$$

$$-2X'\underset{\sim}{y} + 2X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = 0$$

และเมื่อทำการอนุพันธ์ จะได้สมการปกติคือ

$$(X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

จะได้ว่า

$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$

2. วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทน (Prais-Winsten Transformation)

ในปี ค.ศ. 1954 เพรสและวินส์เทน เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ ซึ่งทำการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการแปลงข้อมูลทั้งหมด n ค่า ในปี ค.ศ. 1980 Park และ Mitchell พบว่าวิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัต (Cochrane-Orcutt transformation) ที่ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลเพียง n - 1 ค่า จะทำให้ประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์ต่ำ ดังนั้นวิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทนที่พิจารณาข้อมูลทั้งหมด n ค่าจึงเหมาะสมกว่าโดยเฉพาะในกรณีที่ข้อมูลที่มีขนาด

เล็กเนื่องจากวิธีนี้สามารถสงวนองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) ได้ และทำให้ประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์สูงขึ้น การคำนวณหาสมการการแปลงข้อมูลแบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ณ คาบเวลา t = 1

เพรสและวินส์เทน ได้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อน ดังนี้

$$\varepsilon_1 = (1-\rho^2)^{-1/2}\, v_1$$

จากสมการ

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

แทนค่า ε_1 ในสมการ (2.1) จะได้

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + (1-\rho^2)^{-1/2} v_1$$

ดังนั้นสมการการแปลงข้อมูล ณ คาบเวลา t = 1 คือ

$$y_1(1-\rho^2)^{1/2} = \beta_0(1-\rho^2)^{1/2} + \beta_1 X_1 (1-\rho^2)^{1/2} + v_1 \tag{2.2}$$

<u>กรณีที่ 2</u> สำหรับคาบเวลาที่ t = 2, 3, ...,n

เพรสและวินส์เทน ใช้เทคนิคการแล็ก (lag)[1] ดังนี้

แล็กสมการที่ (2.1) ไปหนึ่งคาบเวลา

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{2.3}$$

คูณสมการที่ (2.3) ตลอดด้วย ρ

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} \tag{2.4}$$

นำสมการที่ (2.1) ลบ (2.4)

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1} \tag{2.5}$$

จากสมการที่ (2.5) จะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$ เท่ากับ v_t ในสมการ AR(1)

---

[1] คำว่าแล็ก(lag) หมายถึง ย้อนเวลาไปในอดีต

ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ ดังนั้นสมการการแปลงข้อมูล ณ คาบเวลา $t = 2, 3, \ldots, n$ คือ

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + v_t \tag{2.6}$$

จากสมการที่ (2.2) และ (2.6) เราสามารถเขียนสมการการแปลงข้อมูล ณ คาบเวลา $t = 1, 2, \ldots, n$ ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{y}^{*} = X^{*}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{v} \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\rho^2)^{1/2} y_1 \\ y_2 - \rho y_1 \\ \vdots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\rho^2)^{1/2} & (1-\rho^2)^{1/2} X_1 \\ 1-\rho & X_2 - \rho X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1-\rho & X_n - \rho X_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

และประมาณค่า ρ ด้วย $\hat{\rho}_{pw}$ โดยที่

$$\hat{\rho}_{pw} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

เมื่อ e_t เป็นค่าความความคลาดเคลื่อนจากวิธี OLS ที่คำนวณได้จากสมการที่ (2.1)

จากการแปลงข้อมูลโดยใช้วิธีของเพรสและวินส์เทนเราจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธี OLS ดังนี้

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} = (X^{*'}X^{*})^{-1}X^{*'}\underset{\sim}{y}^{*}$$

ซึ่ง $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}$

และสมการพยากรณ์ค่า y_t ณ คาบเวลา $t = n+1$ คือ

$$\hat{y}_{n+1} - \hat{\rho}_{pw} y_n = \hat{\beta}_0^{*}(1-\hat{\rho}_{pw}) + \hat{\beta}_1^{*}(X_{n+1} - \hat{\rho}_{pw} X_n)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+1} &= \hat{\beta}_0^{*} + \hat{\beta}_1^{*} X_{n+1} + \hat{\rho}_{pw}(y_n - \hat{\beta}_0^{*} - \hat{\beta}_1^{*} X_n) \\ &= \hat{\beta}_0^{*} + \hat{\beta}_1^{*} X_{n+1} + \hat{\rho}_{pw}\hat{e}_n \end{aligned}$$

ณ คาบเวลา $t = n+2$ คือ

$$\hat{y}_{n+2} = \hat{\beta}_0^*(1-\hat{\rho}_{pw}) + \hat{\beta}_1^*(X_{n+2} - \hat{\rho}_{pw}X_{n+1}) + \hat{\rho}_{pw}\hat{y}_{n+1}$$
$$= \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* X_{n+2} + \hat{\rho}_{pw}(\hat{y}_{n+1} - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* X_{n+1})$$

แทนค่า $\hat{y}_{n+1} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* X_{n+1} + \hat{\rho}_{pw}\hat{c}_n$ จะได้

$$\hat{y}_{n+2} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* X_{n+2} + \hat{\rho}_{pw}^2\hat{c}_n$$

ดังนั้นสมการพยากรณ์ ณ คาบเวลา t = n+i คือ

$$\hat{y}_{n+i} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* X_{n+i} + \hat{\rho}_{pw}^i\hat{c}_n$$

เมื่อ

$$\hat{c}_n = y_n - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* X_n$$

3. ตัวประมาณเบส์ (Bayesian Estimator)

ในปี ค.ศ. 1964 Zellner, A. และ Tiao, G. C. เสนอวิธีตัวประมาณเบส์ในการแก้ปัญหาความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง โดยสมมติว่ามีข้อมูลเบื้องต้นของพารามิเตอร์และได้ทำการทดลองหรือสุ่มตัวอย่างเพิ่มเติมเพื่อนำมาปรับปรุงข้อมูลเบื้องต้นและจากการศึกษาของ Zellner ในปี ค.ศ. 1971 พบว่า ตัวประมาณเบส์เป็นตัวประมาณที่ยอมรับได้ มีความคงเส้นคงวา(consistency) และให้ค่าความเสี่ยงเฉลี่ยต่ำสุด นอกจากนี้ตัวประมาณเบส์สามารถใช้ได้ดี เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

สำหรับปัญหาการเกิดพารามิเตอร์รบกวน(nuisanc parameter) เช่น σ ในฟังก์ชันความหนาแน่นโดยประสบการณ์ (posterior probability density function) เราสามารถแก้ไขด้วยการอินทิเกรตพารามิเตอร์ที่ไม่สนใจออกจากฟังก์ชัน เพื่อให้ได้ฟังก์ชันความหนาแน่นโดยประสบการณ์เชิงเดียว (marginal posterior probability density function) ของพารามิเตอร์ที่สนใจ การคำนวณหาตัวประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\rho}_B$ มีดังนี้

จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, ..., n \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \quad , v_t \sim N(0, \sigma_v^2) \tag{3.2}$$

และจากสมการที่ (3.1) ในปี ค.ศ. 1964 Zellner และ Tiao และค.ศ. 1971 Zellner ได้พัฒนาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) เมื่อกำหนดค่า X ดังนี้

$$p(\underset{\sim}{y}/X, \underset{\sim}{\beta}, \sigma_v, \rho) \propto (1-\rho^2)^{1/2}\sigma_v^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}(\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\beta})\right] \tag{3.3}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{y}^* = P\underset{\sim}{y}$ และ $X^* = PX$, P เป็นเมตริกซ์การแปลงของเพรสและวินส์เทน และในปี ค.ศ. 1978 Fomby และ Guilkey เสนอการแจกแจงโดยหลักเกณฑ์ที่ไม่มีสารสนเทศ (noninformative prior distribution)[2] โดยที่สมมติว่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ และ $\ln \sigma$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (uniform distribution) ในช่วงจำนวนจริง และ ρ มีการแจกแจงแบบเบต้า (beta distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ และคลุมช่วง $|\rho|<1$ ซึ่งการแจกแจงมีรูปแบบดังนี้

$$p(\underset{\sim}{\beta}, \rho, \sigma_v) \propto (1-\rho^2)^{-1/2}\sigma_v^{-1} \tag{3.4}$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นโดยประสบการณ์ของ $\underset{\sim}{\beta}$, σ_v และ ρ คือ

$$p(\underset{\sim}{\beta},\rho,\sigma_v / \underset{\sim}{y}) \propto \sigma_v^{-(n+1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}(\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\beta})\right] \tag{3.5}$$

ทำการอินทิเกรตเทียบกับ σ_v และ $\underset{\sim}{\beta}$ ตามลำดับ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นโดยประสบ-การณ์เชิงเดี่ยวของค่าอัตตสหสัมพันธ์ (ρ) คือ

$$p(\rho / \underset{\sim}{y}) \propto (s^{*2})^{-(n-2)/2} \left|X^{*'}X^*\right|^{-1/2} \tag{3.6}$$

เมื่อ

$$s^{*2} = (\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*)'(\underset{\sim}{y}^* - X^*\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*)\Big/(n-2) \tag{3.7}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}\underset{\sim}{y}^* \tag{3.8}$$

ดังนั้นตัวประมาณค่าอัตตสหสัมพันธ์ ($\hat{\rho}_B$) จะแทนด้วยค่าเฉลี่ยของการแจกแจงโดยประสบ-การณ์ ซึ่งเป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันความสูญเสียแบบกำลังสอง (Quadratic Loss Function) มีค่าต่ำสุด ตัวประมาณค่าอัตตสหสัมพันธ์คือ

$$\hat{\rho}_B = \frac{\int_{-1}^{1} \rho\, p(\rho/y)d\rho}{\int_{-1}^{1} p(\rho/y)d\rho}$$

---

[2] ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้การแจกแจงโดยหลักเกณฑ์ที่ไม่มีสารสนเทศ เนื่องจากตัวประมาณที่ไม่ใช่ตัวประมาณเบส์ ที่พิจารณาในที่นี้ไม่ทราบข้อมูลเบื้องต้น (prior information)

$$\hat{\rho}_B = \frac{\int_{-1}^{1} \rho \, (s^{*2})^{-(n-2)/2} \left| X^{*\prime} X^{*} \right|^{-1/2} \mathrm{d}\rho}{\int_{-1}^{1} (s^{*2})^{-(n-2)/2} \left| X^{*\prime} X^{*} \right|^{-1/2} \mathrm{d}\rho} \tag{3.9}$$

การอินทิเกรตสมการที่ (3.9) เป็นไปได้ยาก ดังนั้นจะแก้ไขโดยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerioal integration) โดยใช้กฎของซิมป์สัน(Simpson's rule) และทำการแทนค่า $\hat{\rho}_B$ ในสมการการแปลงของเพรสและวินส์เทนอีกครั้งหนึ่ง

เมื่อเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{y}^{*} = X^{*} \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{v} \tag{3.10}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\hat{\rho}_B^{\,2})^{1/2} y_1 \\ y_2 - \hat{\rho}_B\, y_1 \\ \vdots \\ y_n - \hat{\rho}_B\, y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\hat{\rho}_B^{\,2})^{1/2} & (1-\hat{\rho}_B^{\,2})^{1/2} X_1 \\ 1-\hat{\rho}_B & X_2 - \hat{\rho}_B X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1-\hat{\rho}_B & X_n - \hat{\rho}_B\, X_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

เราจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธี OLS ดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^{*} = (X^{*\prime} X^{*})^{-1} X^{*\prime} \underset{\sim}{y}^{*} \tag{3.11}$$

ซึ่ง $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^{*}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}$

และสมการพยากรณ์ค่า y_t , t = n+1, n+2, ..., n+i คือ

$$\hat{y}_{n+i} = \hat{\beta}_0^{*} + \hat{\beta}_1^{*} X_{n+i} + \hat{\rho}_B^{i}\, \hat{w}_n$$

เมื่อ

$$\hat{w}_n = y_n - \hat{\beta}_0^{*} - \hat{\beta}_1^{*} X_n$$

4. ตัวพยากรณ์ผสม (Mixture prediotor)

ในปี ค.ศ. 1993 Latif, A. และ King, M. L. เสนอวิธีการของตัวพยากรณ์ผสม มีหลักการคือค่าพยากรณ์จะถูกเฉลี่ยด้วยน้ำหนักซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับฟังก์ชันความหนาแน่นเชิงเดี่ยวของค่าอัตตสหสัมพันธ์ (marginal probability density funotion of ρ) ซึ่งตัวพยากรณ์ผสมจะใช้ได้ดี ขึ้นอยู่กับค่าน้ำหนักที่นำมาใช้ถ่วงค่าพยากรณ์ และถ้าภาวะความน่าจะเป็นเชิงเดี่ยว (marginal likelihood) ของค่าสหสัมพันธ์มีค่าอยู่ใกล้กับค่าจริงแล้วคาดว่าตัวพยา-

กรณ์ผสมจะใช้ได้ดี ซึ่งวิธีนี้ไม่ขึ้นอยู่กับการประมาณค่า ρ การคำนวณหาตัวพยากรณ์ผสมมีดังนี้

จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, ..., n \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \tag{4.2}$$

เมื่อ $v_t \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ ดังนั้น $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \Sigma(\rho))$ โดยที่ $\Sigma(\rho)$ เป็น Symmetric Positive Definite Metrix[3] ขนาด nxn มีรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \\ \rho^2 & \rho & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & \rho \\ \rho^{n-1} & \cdots & & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งในสมการถดถอยที่เกิดปัญหาความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง ถ้าทราบค่า ρ แล้ว เราสามารถใช้สมการพยากรณ์ของ Goldberger(1992) ทำการพยากรณ์ค่า y_{n+i} เมื่อกำหนด X_{n+1} มาให้คือ

$$\hat{y}_{n+i}(\rho) = X'_{n+i}\underset{\sim}{\tilde{\beta}} + \rho^{i}\hat{\varepsilon}_n \quad ; i = 1, 2, ..., m \tag{4.3}$$

โดยที่

$$\underset{\sim}{\tilde{\beta}} = (X'\Sigma^{-1}(\rho)X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(\rho)\underset{\sim}{y}$$ คือตัวประมาณ GLS ของ $\underset{\sim}{\beta}$

และ $\hat{\varepsilon}_n = y_n - X'_n\underset{\sim}{\tilde{\beta}}$ คือเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนจากตัวประมาณ GLS

ซึ่งสมการนี้จะให้ตัวพยากรณ์ที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Prediotor)

---

[3] Positive Definite Matrix คือ เมตริกซ์ที่ให้ค่า Charaoteristio values เป็นบวกทุกค่า โดยปกติใน GLS (Generalized Least Squares) ถือว่า σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ขณะที่ $\Sigma(\rho)$ เป็นเมตริกซ์ที่ต้องทราบค่าสมาชิกทุกตัว แต่ในทางปฏิบัติมักไม่ทราบค่าสมาชิกของ $\Sigma(\rho)$ การวิเคราะห์ผลโดยใช้ค่าประมาณ $\Sigma(\rho)$ เรียกว่า Estimated Generalized Least Squares:EGLS

ซึ่งในปี ค.ศ. 1989 Tunnioliffe ได้เสนอฟังก์ชันความหนาแน่นเชิงเดี่ยวของค่าอัตตสหสัมพันธ์ โดยอาศัยสมการที่ (4.1) และ (4.2) คือ

$$h(\rho/y) = (1-\rho^2)^{1/2}\left|X'\Sigma^{-1}(\rho)X\right|^{-1/2}(\hat{\varepsilon}'\Sigma^{-1}(\rho)\,\hat{\varepsilon})^{-(n-2)/2} \tag{4.4}$$

โดยที่

$\hat{\varepsilon} = \underset{\sim}{y} - X'\ \underset{\sim}{\tilde{\beta}}$ คือเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนจากตัวประมาณ GLS

และ $\underset{\sim}{\tilde{\beta}} = (X'\Sigma^{-1}(\rho)X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(\rho)\underset{\sim}{y}$ คือตัวประมาณ GLS ของ $\underset{\sim}{\beta}$

ดังนั้นค่าพยากรณ์ตัวใหม่จะถูกเฉลี่ยด้วยน้ำหนักซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับฟังก์ชันความหนาแน่นเชิงเดี่ยวของ ρ ในสมการที่ (4.4) และค่าพยากรณ์ในสมการที่ (4.3) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

ให้ $\bar{y}_{n+i}$ เป็นค่าพยากรณ์ของ y_{n+i} ; i = 1, 2, ..., m

$$\bar{y}_{n+i} = \frac{\int_{-1}^{1} \hat{y}_{n+i}(\rho)\,h(\rho/y)\,d\rho}{\int_{-1}^{1} h(\rho/y)\,d\rho}$$

$$\bar{y}_{n+i} = \frac{\int_{-1}^{1} \hat{y}_{n+i}(\rho)(1-\rho^2)^{1/2}\left|X'\Sigma^{-1}(\rho)X\right|^{-1/2}(\hat{\varepsilon}'\Sigma^{-1}(\rho)\,\hat{\varepsilon})^{-(n-2)/2}\,d\rho}{\int_{-1}^{1} (1-\rho^2)^{1/2}\left|X'\Sigma^{-1}(\rho)X\right|^{-1/2}(\hat{\varepsilon}'\Sigma^{-1}(\rho)\,\hat{\varepsilon})^{-(n-2)/2}\,d\rho} \tag{4.5}$$

เมื่อ

$$\hat{y}_{n+i}(\rho) = X'_{n+i}\underset{\sim}{\tilde{\beta}} + \rho^i\hat{\varepsilon}_n$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\beta}} = (X'\Sigma^{-1}(\rho)X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(\rho)\underset{\sim}{y}$$

ดังนั้นค่าของ ρ ในสมการนี้จะให้ค่าพยากรณ์ $\hat{y}_{n+i}$ ทุกๆ ค่า ρ ในช่วงเปิด (-1, 1) ซึ่งการอินทิเกรตสมการที่ (4.5) เป็นไปได้ยาก จึงแก้ไขโดยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) โดยใช้กฎของซิมป์สัน (Simpson's rule)