บทที่ 3
การสร้างแบบจำลองการหมุน

3.1 การหากราฟความเข้มของสเปกตรัม

ในการหาเส้นกราฟการหมุน (rotation curve) ของดาราจักรทางช้างเผือกนั้น จากบทที่ 2 นักดาราศาสตร์อาศัยการวิเคราะห์จากกราฟความเข้มของสเปกตรัม (spectral line profile) ที่ได้จากการสังเกตการณ์วัดคลื่น 21 เซนติเมตรของแก๊สไฮโดรเจน ซึ่งจากการวิเคราะห์กราฟความเข้มของสเปกตรัมที่ได้มานั้นจะได้เส้นกราฟการหมุนที่แตกต่างกันตามแต่ละวิธีการที่ใช้ แต่สำหรับในที่นี้ผู้ศึกษาอาศัยความรู้และทฤษฎีทางดาราศาสตร์มาสร้างแบบจำลองการหมุนหรือเส้นกราฟการหมุน เพื่อนำมาหากราฟความเข้มของสเปกตรัมโดยวิธีการคำนวณ โดยกำหนดเงื่อนไขดังนี้

1. วงโคจรของดวงอาทิตย์และแก๊สจากการสังเกต มีวงโคจรเป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางของดาราจักร ทำให้ความเร็วในวงโคจรตั้งฉากกับรัศมี
2. ความหนาแน่นของแก๊สไฮโดรเจนในดาราจักรมีค่าคงที่ และมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100 เคลวิน
3. ให้ค่าความเร็วในวงโคจรของดวงอาทิตย์ $\Theta_0 = 250$ กิโลเมตรต่อวินาที โดยระยะทางจากดวงอาทิตย์ถึงจุดศูนย์กลางของดาราจักรเท่ากับ 10 กิโลพาร์เสค

จากการหาความเร็วแนวเส้นสายตาของแก๊ส และระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์จากบทที่ 2 ตามสมการที่ (2.1.2) และ (2.1.3) ได้

$$\frac{V_R}{\Theta_0} = \left(\frac{\Theta}{R} - \frac{\Theta_0}{R_0}\right) R_0 \sin l \qquad 2.1.2$$

$$R^2 = d^2 + R_0^2 - 2R_0 d\cos l \qquad 2.1.3$$

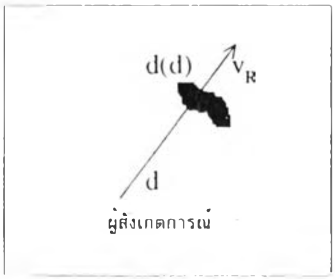
ดังนั้น จากสมการ (2.1.2) และ (2.1.3.) จึงได้ว่าระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรของแก๊สที่สังเกตการณ์มีค่าน้อยที่สุดสำหรับในแนวเส้นสายตาหนึ่งๆ หรือในลองจิจูดหนึ่งๆ โดยที่ $0 < l < 90$ คือ $R_{min}(l) = R_0 \sin l$ โดยที่ระยะห่างจากดวงอาทิตย์ต่างกันให้ค่าความเร็วแนวเส้นสายตาต่างกัน ที่ระยะห่างของแก๊สจากดวงอาทิตย์ $d = R_0 \cos l$ จะให้ค่า R_{min} และที่ตำแหน่งดังกล่าวจะให้ ความเร็วแนวเส้นสายตาสูงสุด

จากการศึกษาแก๊สไฮโดรเจนที่ปล่อยรังสีในห้องปฏิบัติการได้กราฟความเข้มของเส้นสเปกตรัมเป็นเส้นเดี่ยวที่มีความยาวคลื่น 21.106 เซนติเมตร โดยความสูงของกราฟขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของกลุ่มแก๊ส แต่เมื่อกลุ่มแก๊สมีความเร็วเทียบกับผู้สังเกต เนื่องจากปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (Doppler effect) ทำให้ความยาวคลื่นเปลี่ยนไปจาก 21.106 เซนติเมตร ดังนั้นเมื่อวัดผลจากการสังเกตการณ์จากกลุ่มแก๊สในดาราจักรพบว่า ความยาวของคลื่นที่ได้ไม่เป็นสเปกตรัมเส้นเดี่ยว เนื่องจากในแนวเส้นสายตาหนึ่งจะมีกลุ่มแก๊สหลายกลุ่ม ที่มีความหนาแน่นต่างๆกัน และห่างจากผู้สังเกตต่างกันซึ่งทำให้ได้ความเร็วสัมพัทธ์หลายค่าที่แตกต่างกันทำให้ได้ความยาวคลื่นหลายค่าที่ต่อเนื่องกันและมีความเข้มของกราฟเปลี่ยนไปตามค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา จากปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ได้สมการระหว่างความเร็วแนวเส้นสายตากับความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปจากความยาวคลื่นเดิม คือ

$$\frac{\Delta\lambda}{21.106} = \frac{V_R}{c} \qquad c = \text{ความเร็วแสง}$$

ดังนั้นสามารถแปลงกราฟความเข้มของสเปกตรัมตามแนวแกนนอนจากความยาวคลื่นที่ต่างกันเมื่อวัดจากผู้สังเกตุการณ์ให้เป็นความเร็วในแนวเส้นสายตาได้

เนื่องจากความเข้มของสเปกตรัมขึ้นกับจำนวนอะตอมที่ปล่อยคลื่นในปริมาตรหนึ่งหรือความหนาแน่นของกลุ่มแก๊ส ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างแก๊สกับผู้สังเกตมีผลทำให้ความเข้มของสเปกตรัมเปลี่ยนแปลงไป เนื่องจากแต่ละตำแหน่งมีความเร็วในวงโคจรต่างกันทำให้ความเร็วแนวเส้นสายตาเปลี่ยนแปลงไปตามระยะทาง จึงพิจารณาถึงความเข้มของสเปกตรัมที่เปลี่ยนแปลงไปเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็วแนวเส้นสายตาซึ่งเกิดขึ้นในช่วงระยะทางหนึ่ง ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 แก๊สมีความหนาd(d) มีความเร็วแนวเส้นสายตาV_R

ที่ระยะทางระหว่างผู้สังเกตกับกลุ่มแก๊ซ d บนช่วงระยะทางสั้นๆ บนแนวเส้นสายตา d(d) ทำให้ความเข้มของคลื่นเปลี่ยนแปลงไป d(I) โดยค่าของ d(I) ขึ้นอยู่กับค่าของความหนาแน่นของกลุ่มแก๊สและ ช่วงระยะทาง d(d)

กำหนดว่า dI แปรผันตรงกับความหนาแน่นของกลุ่มแก๊สและช่วงระยะ d(d) โดย

$$dI \propto \rho(R,l)d(d) \qquad (3.1.1)$$

จากสมการ (2.1.3) d เป็นฟังก์ชันของระยะจากจุดศูนย์กลาง R ดังนั้น

$$dI \propto \rho(R,l)\left|\frac{dd}{dR}\right| dR \qquad (3.1.2)$$

จากสมการ (2.1.2) เมื่อหาค่าความเร็วแนวเส้นสายตาที่เปลี่ยนแปลงในช่วงd(d)ได้

$$dV_R = R_0 \sin l\left(\frac{d\Theta}{dR} - \frac{\Theta}{R}\right)\frac{dR}{R} \qquad (3.1.3)$$

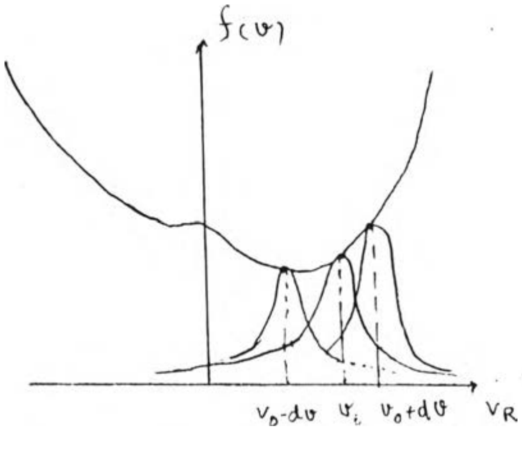
เมื่อหาค่าอนุพันธ์ของระยะของแก๊ซจากดวงอาทิตย์ d เทียบกับรัศมีวงโคจรของแก๊ส R โดยสมการ (2.1.3) และจากสมการ (3.1.3) มาแทนลงใน (3.1.2) ได้

$$\frac{dI}{dV_R} \propto \left|\frac{R^2\rho(R,l)}{(d - R_0\cos l)R_0\sin l\left(\frac{d\Theta}{dR} - \frac{\Theta}{R}\right)}\right| \qquad (3.1.4)$$

สมการที่(3.1.4) ที่ได้นี้เป็นสมการที่ใช้ในการหาค่าของความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมและ

นำมาสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมในแนวแกน y กับความเร็วแนวเส้นสายตาในแนวแกน x ซึ่งจะเห็นว่าในที่นี้กำหนดให้ความหนาแน่นของแก๊สคงที่ และเมื่อพิจารณาค่าระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ d ในสมการจะเห็นว่าแต่ละค่าของ $\frac{d(I)}{dv_R}$ อาจมาจากค่า d มากกว่า 1 ค่า ซึ่งอย่างไรก็ตามจะให้ค่าของความเร็วแนวเส้นสายตาเพียงค่าเดียว

เนื่องจากต้องการหากราฟความเข้มของเส้นสเปกตรัม เพื่อความสะดวกในการคำนวณและเปรียบเทียบจะกำหนดให้เมื่อความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์มีความสูงของกราฟความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมมีค่าเป็นหนึ่งเสมอ ในแต่ละแบบจำลองจะได้สมการที่หาค่าของความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม แตกต่างกัน เนื่องจากต้องการหาค่าความเข้มของสเปกตรัมที่แต่ละค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา โดยพิจารณาจากที่แต่ละจุดของกราฟ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม กับความเร็วแนวเส้นสายตา เพราะว่าแต่ละค่าของความเร็วแนวเส้นสายตาที่ต้องการหาค่าความเข้มของสเปกตรัมนั้นเป็นค่าเฉลี่ยของความเร็วของกลุ่มแก๊สที่ระยะทาง d ซึ่งมีการกระจายเนื่องจากอุณหภูมิ ทุกๆค่าของความเร็วในแนวเส้นสายตาบนเส้นกราฟที่สร้างมานั้น มีผลต่อความเข้มของสเปกตรัมของแต่ละค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา การหาความเข้มของสเปกตรัมที่ความเร็วค่าหนึ่งๆ จะต้องอินทิเกรตทุกๆจุดของกราฟความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม โดยพิจารณาว่าแต่ละจุดจะมีการกระจายแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution)ที่มาจากการกระจายของความเร็วของแก๊สที่อุณหภูมิใดๆ



จากรูปที่ 3-2 แต่ละจุดของความเร็วแนวเส้นสายตาที่นำมาหาค่านั้น เป็นค่าเฉลี่ยของความเร็วแนวเส้นสายตาที่มาจากกลุ่มแก๊สที่มีการกระจายเนื่องจากความร้อน ถ้าให้ f(v) คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นกับความเร็วเฉลี่ยของกลุ่มแก๊ส $\rho(v)$ คือ โอกาสที่จะพบอะตอมที่มีความเร็ว v

รูปที่ 3-2 กราฟความสัมพันธ์ที่ขึ้นกับการกระจายของแก๊สเนื่องจากความร้อน

กำหนดให้

v_0 แทน ความเร็วแนวเส้นสายตาที่ต้องการหาค่าความเข้มของสเปกตรัม

$I(v_0)$ แทน ค่าความเข้มของเส้นสเปกตรัมที่ความเร็วแนวเส้นสายตาที่ $V_R = V_0$

T แทน อุณหภูมิของกลุ่มแก๊สในดาราจักรซึ่งกำหนดให้เท่ากับ 100 เคลวิน

k แทน ค่าคงที่ของโบลซมานน์ $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}

m แทนมวลอะตอมของไฮโดรเจน $m = 1.66 \times 10^{-27}$ กิโลกรัม

ดังนั้น

$$\rho(v)dv = Ke^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv \qquad \text{K กงที่ ไม่ขึ้นกับความเร็ว}$$

จากรูป (3-2) การหาอินทิเกรตหาโดยพิจารณาพื้นที่ f(v)dv จึงคิด dv มาจากช่วงของความเร็วมากกว่าหนึ่งช่วง โดยจะพิจารณา dv ที่มาจากการซ้อนทับกันของความเร็วแนวเส้นสายตาที่มาจาก f(v) หลายจุดจึงได้ว่า แต่ละตำแหน่งบนกราฟที่ $(v_0, f(v_0))$ หาพื้นที่ $A(v_0)$ ได้คือ

$$A(v_0) = \int_1^2 f(v_0)\rho(v_R - v_0)dv_R$$

ซึ่ง $\rho(V_R - V_0)dV_R$ คือความน่าจะเป็นของแก๊สที่ให้ความเร็วแนวเส้นสายตาสัมพัทธ์กับ V_0 ดังนั้นเมื่อพิจารณาเทียบกับความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม เพื่อหาความเข้มของสเปกตรัมจึงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มของเส้นสเปกตรัมกับความเร็วแนวเส้นสายตาได้คือ

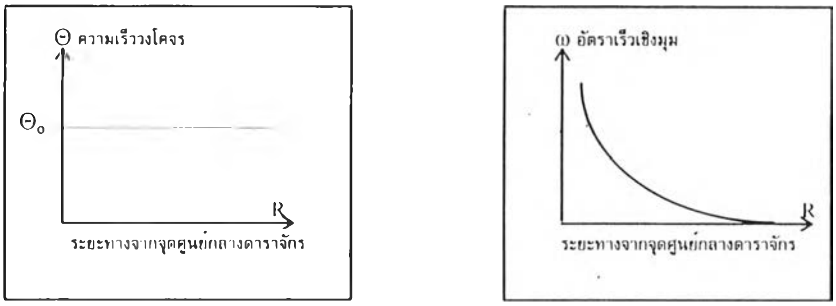
$$I(v_0) = \int_{V_{min}}^{V_m} \frac{d(I)}{dV_R} e^{-\frac{m(v_R - v_0)^2}{2kT}} dv_R \qquad (3.1.5)$$

ในที่นี้ผลจากการอินทิเกรตของแต่ละค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา v_0 จะได้จากการแบ่งพื้นที่ใต้กราฟระหว่าง ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม กับ ความเร็วแนวเส้นสายตา โดย Simpson's Parabolic Rule (ภาคผนวก ก) โดยแบ่งความเร็วแนวเส้นสายตา ออกเป็น 5,000 ช่วง และใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวนและวาดกราฟของความเข้มของสเปกตรัมกับความเร็วแนวเส้นสายตา การจำลองการหมุนได้สมมุติเส้นกราฟการหมุนเป็นกรณีต่างๆรวม 4 กรณีคือ กรณีที่ 1 ความเร็วในวงโคจรของแก๊สมีค่าคงที่ กรณีที่ 2 เมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดารา

จักร น้อยกว่า 8 กิโลพาร์เสค แก๊สมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุเกร็งรอบจุดศูนย์กลางของดาราจักร เมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มากกว่า 8 กิโลพาร์เสค ความเร็วในวงโคจรของแก๊สมีค่าคงที่ กรณีที่ 3 คล้ายกับกรณีที่ 2 แต่เมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มากกว่า 8 กิโลพาร์เสค จะมีการหมุนแบบเคปเปลอร์ ส่วนแบบจำลองที่ 4 เป็นแบบจำลองที่ได้จากค่าคงที่การหมุนของอูรท ในที่นี้จะอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรกับความเร็วในวงโคจรของแก๊สมาสร้างกราฟความเข้มของสเปกตรัม โดยจะพิจารณาลองจิจูดของดาราจักรตั้งแต่ ศูนย์ ถึง 90 องศา โดยคำนวนตั้งแต่ 4, 9, 14, 19 ถึง 89 องศา

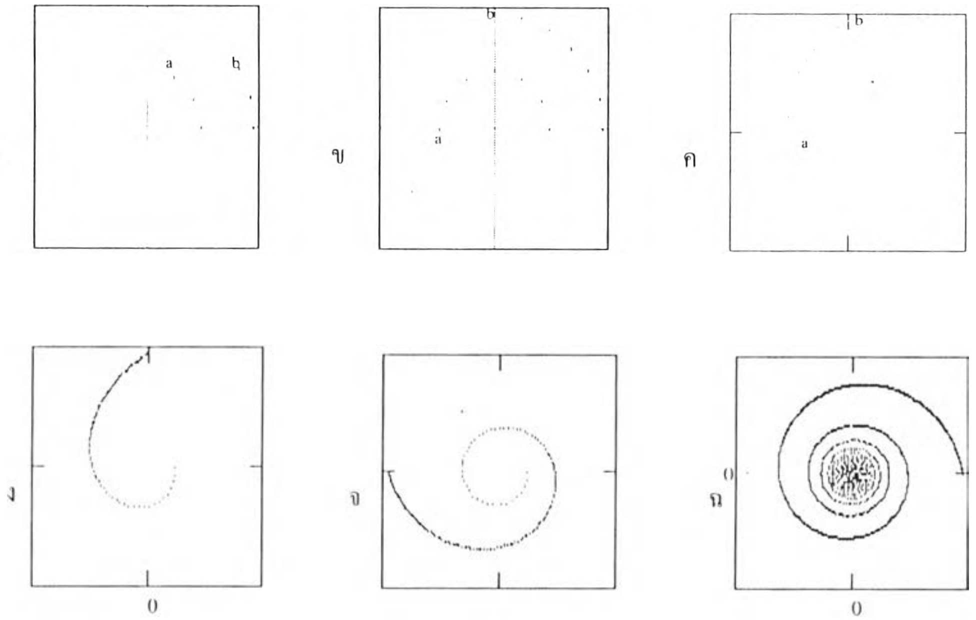
3.2 การสร้างแบบจำลอง

3.2.1 แบบจำลองที่ 1 การหมุนด้วยความเร็วในวงโคจรคงที่ ($\Theta(R) = \Theta_0$)



รูปที่ 3-3 แบบจำลองเส้นกราฟการหมุนของดาราจักรตามแบบจำลองที่ 1

แบบจำลองนี้ทุกตำแหน่งที่วัดจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มีความเร็วตามแนวเส้นสัมผัสหรือความเร็วในวงโคจร เท่ากับ 250 กิโลเมตรต่อวินาที ซึ่งจากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดความเร็วในวงโคจรของแก๊สกับอัตราเร็วเชิงมุม คือ $\Theta(R) = \omega R$ หรือ $\omega \propto 1/R$ ได้ T(คาบ) $\propto$ R แสดงว่าเมื่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเพิ่มขึ้น อัตราเร็วเชิงมุมจะลดลงต่อเนื่องดังรูป(3-3) และคาบของการเคลื่อนที่รอบดาราจักรแปรผันตรงกับระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ถ้ามองภาพการเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไปจะเป็นไปดังรูป



รูปที่ 3-4 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาครอบจุดศูนย์กลางดาราจักรตามแบบจำลองที่ 1
ภาพ ก. และ ข. อนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยที่อนุภาคห่างจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเป็นอัตราส่วน R ต่อ 2R ก. a โคจรได้มุม 90 องศา ข. a โคจรได้มุม 180 องศา ค. แสดงแนวทางเดินของอนุภาคที่เรียงตัวอยู่ระหว่างอนุภาค a และ b จากภาพ ข. ภาพ ง. และภาพ จ. แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่อยู่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกัน โดย ง. อนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ครบ 1 รอบ จ. อนุภาคที่ตำแหน่ง 0.5R เคลื่อนที่ได้ 2 รอบ ฉ. แสดงทางโคจรของอนุภาคตั้งแต่ 0.1R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากัน

ถ้าสมมติว่าอนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดย ห่างจากจุดศูนย์กลางดาราจักรต่างกันเป็นอัตราส่วน 2R ต่อ 1R เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ได้ระยะดังรูป(3-4ก) และ รูป(3-4ข) โดยจากรูป(3-4ข) ขณะที่อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 180 องศา อนุภาค b จะเคลื่อนที่ได้มุม 90 องศา รูป(3-4ค)แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่างอนุภาค a ถึงอนุภาค b ที่อยู่ในรูป(3-4ข) รูป(3-4ง)และ รูป(3-4จ) แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R โดยรูป(3-4ง) อนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ครบ 1 รอบ อนุภาคถัดไปจะอยู่ในตำแหน่งดังรูปเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากัน ส่วนรูป(3-4จ)อนุภาคที่ตำแหน่ง 0.5R เคลื่อนที่ได้ 2 รอบ อนุภาคถัดออกไปอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ดังรูป รูป(3-4ฉ) แสดงทางโคจรของอนุภาคตั้งแต่ 0.1R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากัน

จากสมการที่(2.1.2) ได้ความเร็วแนวเส้นสายตา

$$V_R = \left(\frac{\Theta_0}{R} - \frac{\Theta_0}{R_0}\right) R_0 \sin l$$

กำหนดว่าที่ความเร็วแนวเส้นสายตา $V_R = 0$ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเท่ากับหนึ่ง โดยจะได้ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักรที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์คือ

$$R = R_0 = 10 \text{ kpc} \tag{3.2.1}$$

จะเห็นได้ว่าที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเท่ากับรัศมีวงโคจรของดวงอาทิตย์

จากสมการที่(3.1.4) ได้ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม

$$\frac{d(I)}{dV_R} = \left| \frac{k\rho R^2}{R_0 \sin l (d - R_0 \cos l)\left(\frac{d\Theta}{dR} - \frac{\Theta}{R}\right)} \right| \tag{3.1.4}$$

เนื่องจากแบบจำลองที่ 1 นั้น ความเร็วในวงโคจรของแก๊สคงที่ ได้ $\frac{d\Theta}{dR} = 0$ จึงได้ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม เมื่อความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ $\left.\frac{d(I)}{dV_R}\right|_{V_R = 0}$ คือ

$$\left.\frac{d(I)}{dV_R}\right|_{V_R = 0} = -\frac{k\rho R_0}{\Theta_0 \sin l (d - R_0 \cos l)} = 1 \tag{3.2.2}$$

จากสมการที่(2.1.3) ได้ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์คือ

$$\frac{d}{R_0} = \cos l \pm \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - \sin^2 l} \tag{3.2.3}$$

ดังนั้นที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ได้ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์

$$\frac{d}{R_0} = 0 \ , \ 2R_0\cos l$$

แทนในสมการที่(3.2.2) ได้

$$k\rho = \cos l \sin l \frac{\Theta_0}{R}$$

แทน kρ ลงในสมการที่(3.1.4) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม กับระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์และระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรในแบบจำลองที่ 1 คือ

$$\frac{d(I)}{dv_R} = \frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \qquad (3.2.4)$$

จากสมการที่(2.1.2) เมื่อหาระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรในเทอมของความเร็วแนวเส้นสายตาได้

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{\frac{v_R}{\Theta_0 \sin l} + 1} \qquad (3.2.5)$$

เนื่องจากระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ($\frac{R}{R_0}$) มีขนาดมากกว่าศูนย์เสมอ ดังนั้น จากสมการที่(3.2.5) จึงได้ค่าต่ำสุดของความเร็วแนวเส้นสายตา คือ

$$\frac{v_R}{\Theta_0} \geq -\sin l$$

จากสมการที่(3.2.3) จะเห็นว่าส่วนที่อยู่ในรากต้องมากกว่าศูนย์ดังนั้น

$$\frac{R}{R_0} \geq \sin l$$

จากสมการที่(3.2.5) ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{1}{\frac{v_R}{\Theta_0 \sin l} + 1} \geq \sin l$$

ดังนั้นจึงได้ค่าสูงสุดของความเร็วแนวเส้นสายตาที่เป็นไปได้คือ

$$\frac{V_R}{\Theta_0} \leq 1 - \sin l$$

จะเห็นว่าในการสร้างกราฟความเข้มของสเปกตรัมนั้น ความเร็วที่ใช้ในการหาความเข้มอยู่ในช่วง

$$-\sin l \leq \frac{V_R}{\Theta_0} \leq 1 - \sin l \qquad (3.2.6)$$

เนื่องจากระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ และระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มีขนาดมากกว่าศูนย์ ซึ่งแต่ละความเร็วแนวเส้นสายตาที่ได้นั้นมาจากส่วนของแก๊สจากที่ตำแหน่งต่างๆ ทำให้เกิดความเข้มของเส้นสเปกตรัมที่มีความเข้มต่างกันไป ในที่นี้จากสมการที่(3.2.3) จะเห็นว่าในความเร็วแนวเส้นสายตาหนึ่งอาจมาจาก ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ที่มีค่าหนึ่งหรือสองค่า ซึ่งต้องพิจารณาว่า

$$\frac{d}{R_0} = \cos l \pm \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - \sin^2 l} \geq 0$$

จากสมการนี้พบว่าที่ $\frac{R}{R_0} = 1$ เป็นค่าเริ่มต้นที่หาได้ค่าของความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมจากสมการที่(3.2.4) มีสองค่าคือ มาจากส่วนของแก๊สที่ห่างจากดวงอาทิตย์ เท่ากับ 0 และ $2R_c\cos l$ และพบว่าให้ค่าความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

เมื่อ $$\frac{V_R}{\Theta_0} \leq 0 \quad : \quad \frac{d(I)}{dv_R} = \frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3$$

$$\frac{V_R}{\Theta_0} > 0 \quad : \quad \frac{d(I)}{dv_R} = 2\,.\frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3$$

จากนั้นจะอินทิเกรต ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมตามสมการที่(3.1.5) โดยอินทิเกรตในช่วง $(-\sin l, 1 - \sin l)$ จะได้ค่าความเข้มของสเปกตรัมที่ความเร็วแนวเส้นสายตาใดๆ เมื่อนำมาวาด

กราฟจะได้กราฟความเข้มของสเปกตรัมสำหรับแบบจำลองที่ 1 และจะแสดงตัวอย่างค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา ระยะทางระหว่าง แก๊สกับดวงอาทิตย์ ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัมเมื่อลองจิจูดดาราจักรเท่ากับ 34 องศา ในตารางที่(3-1)

ตารางที่ 3-1 แสดงตัวอย่างผลของการคำนวนหา ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัม ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาใดๆในแบบจำลองที่ 1

ลองจิจูด l = 34°

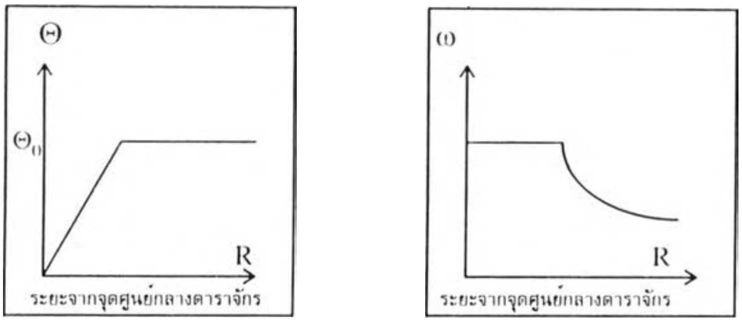
ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-130.0	142.68	150.86	-134.28	337.79	337.79	396.49
-125.0	94.47	102.59	-86.01	148.24	148.24	171.36
-120.0	70.61	78.68	-62.10	82.39	82..39	95.38
-117.0	61.32	69.35	-52.77	31.30	31.30	71.88
-115.0	56.37	64.39	-47.81	26.48	26.48	60.76
-110.0	46.91	54.87	-38.29	18.38	18.38	42.12
-105.0	40.17	48.07	-31.49	13.51	13.51	30.94
-100.0	35.12	42.97	-26.39	10.36	10.36	23.72
-95.0	31.21	38.99	-22.41	8.21	8.21	18.78
-90.0	28.09	35.8	-19.22	6.67	6.67	15.25
-85.0	25.51	33.18	-16.66	5.53	5.53	12.65
-80.0	23.38	30.99	-14.41	4.66	4.66	10.67
-75.0	21.57	29.13	-12.55	4.00	4.00	9.14
-70.0	20.03	27.52	-10.94	3.46	3.46	7.92

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-60.0	17.52	24.89	-8.31	2.68	2.68	6.14
-50.0	15.56	22.82	-6.24	2.15	2.15	4.92
-40.0	14.01	21.13	-45.53	1.77	1.77	4.06
-30.0	12.73	19.73	-31.48	1.50	1.50	3.42
-20.0	11.67	18.53	-19.52	1.29	1.29	2.94
-10.0	1077	17.50	-9.15	1.13	1.13	2.57
-5.0	10.37	17.02	-4.43	1.06	1.06	2.42
-2.0	10.15	16.76	-1.75	1.02	1.02	2.37
-1.5	10.11	16.71	-1.31	1.02	1.02	2.44
-1.0	10.07	16.67	-0.87	1.01	1.01	2.63
-0.5	10.04	16.62	-0.43	1.01	1.01	2.97
0.0	10.00	16.58	-0.00	1.00	1.00	3.43
0.5	9.96	16.54	0.04	0.99	1.99	3.88
1.0	9.93	16.49	0.09	0.99	1.98	4.22
1.5	9.89	16.45	0.13	0.98	1.97	4.39
2.0	9.86	16.41	0.17	0.98	1.96	4.44
4.0	9.72	16.24	0.38	0.96	1.92	4.38
5.0	9.66	16.16	0.42	0.95	1.90	4.33
10.0	9.33	15.76	0.82	0.90	1.80	4.12
15.0	9.03	15.46	0.99	0.86	1.72	3.94
17.5	8.89	15.20	1.38	0.84	1.69	3.85
20.0	8.75	15.02	1.56	0.83	1.65	3.77
30.0	8.23	14.33	2.24	0.77	1.53	3.50
32.5	8.11	14.17	2.41	0.75	1.51	3.44

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
34.5	8.02	14.04	2.54	0.74	1.49	3.40
40.0	7.78	13.69	2.89	0.72	1.44	3.30
50.0	7.37	13.08	3.50	0.69	1.38	3.16
60.0	7.00	12.50	4.08	0.68	1.25	3.09
70.0	6.66	11.91	4.67	0.68	1.25	3.09
80.0	6.36	11.32	5.25	0.70	1.41	3.22
90.0	6.08	10.69	5.89	0.78	1.56	3.56
100.0	5.83	9.93	6.64	1.00	1.99	4.57
105.0	5.71	9.45	7.13	1.33	2.67	6.16
107.5	5.65	9.12	7.46	1.81	3.61	8.99
108.5	5.63	8.95	7.64	2.26	4.51	14.80
109.5	5.60	8.71	7.87	3.48	6.96	27.67
110.0	5.60	8.52	8.07	6.46	12.93	30.69
110.2	5.60	8.31	8.27	68.81	137.63	30.04

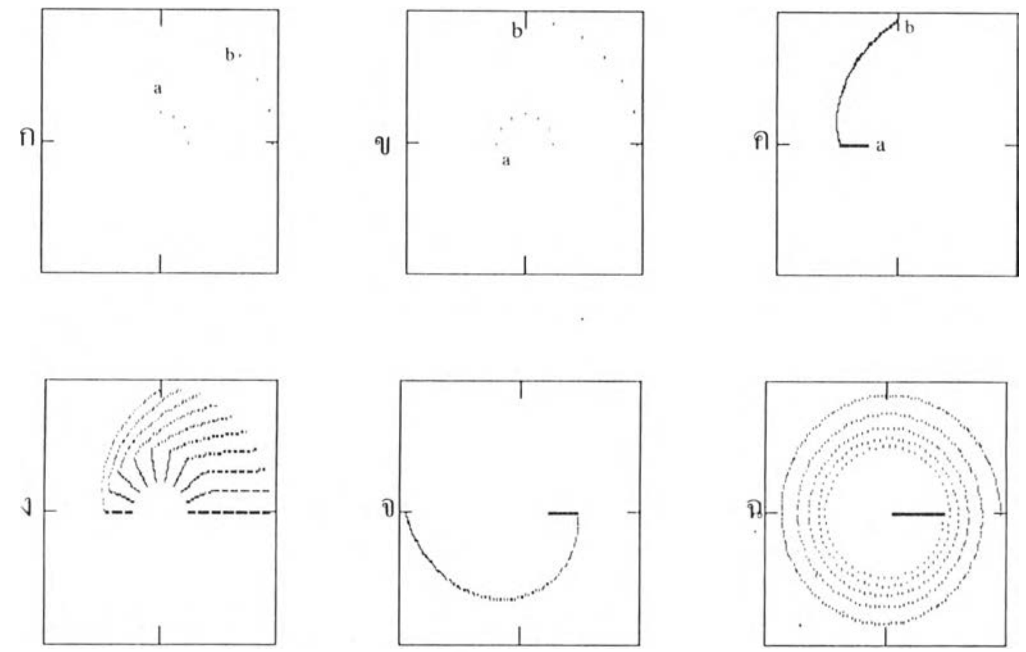
แบบจำลองที่ 2 $\Theta = KR$: $R \leq M < 10$ กิโลพาร์เสค

$= \Theta_0 = 250$ km/s : $R \geq M$ กิโลพาร์เสค



รูปที่ 3-6 แสดงเส้นกราฟการหมุนของดาราจักรทางช้างเผือกในแบบจำลองที่ 2

แบบจำลองนี้หมายความว่า เมื่อระยะทางระหว่างแก๊สกับจุดศูนย์กลางดาราจักรน้อยกว่า M กิโลพาร์เสค โดยน้อยกว่า 10 กิโลพาร์เสค การหมุนของแก๊สมีการเคลื่อนที่ในลักษณะเดียวกับวัตถุแข็งเกร็งที่มีอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ เมื่อพิจารณากลุ่มแก๊สที่มีระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มากกว่า M กิโลพาร์เสค มีลักษณะการเคลื่อนที่เหมือนแบบจำลองที่ 1 โดยในช่วงดังกล่าวใช้สมการของแบบจำลองที่ 1 ซึ่งการเคลื่อนที่ของอนุภาคแสดงดังรูปที่ 3-6



รูปที่ 3-5 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามแบบจำลองที่ 2

อนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่ที่แขนของรัศมีเดียวกันโดยที่ ภาพ ก.และข.ห่างจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเป็นอัตราส่วน 0.5R ต่อ 2 R ซึ่ง M = R โดย ก. a โคจรได้มุม 90 องศา ข a โคจรได้มุม 180 องศา ภาพ ค แสดงอนุภาคที่เรียงตัวอยู่ระหว่างอนุภาค a และ อนุภาค b ถ้าอนุภาคทั้งหมดเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากัน โดย M = 1R ภาพ ง. แสดงแนวเส้นทางเดินของอนุภาคที่เรียงตัวอยู่ระหว่างอนุภาค a และ อนุภาค b ถ้าอนุภาคทั้งหมดเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกัน จ. แสดงอนุภาคเคลื่อนที่เมื่ออนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ครบ 1 รอบฉ. แสดงทางโคจรของอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 0.1R ถึง 2R ถ้าอนุภาคทั้งหมดเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกัน

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามแบบจำลองที่ 2 โดยพิจารณาอนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเป็นอัตราส่วน 0.5R ต่อ 2R เมื่อเวลาผ่านไปเท่ากันโดยมีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของการเคลื่อนที่ ที่ M = 1R ขณะที่อนุภาค a โคจรได้มุม 90 องศา อนุภาค bได้ระยะมุมดังรูป(3-6ก) ขณะที่อนุภาค a โคจรได้มุม 180 องศา อนุภาค b ได้ระยะมุมดังรูป (3-6ข) ซึ่งรูป(3-6ค) แสดงแนวทางเดินของอนุภาคที่เรียงอยู่ระหว่างอนุภาค a และ อนุภาค b ที่มาจากกรณีในรูป(3-6ข) ถ้าอนุภาคทั้งหมดเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกัน ซึ่งเมื่อพิจารณาทางโคจรของอนุภาคที่อยู่ระหว่าง a และ bจากจุดเริ่มต้นจะเป็นดังรูป(3-6ง) และ รูป(3-6ฉ) แสดงทางโคจรของอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 0.1R ถึง 2R

เมื่อพิจารณาช่วงระยะทางที่น้อยกว่า M จะได้

$$\Theta = \frac{\Theta_0}{M} R$$

เมื่อนำความเร็วในวงโคจรของแก๊ส Θ มาแทนในสมการที่(3.1.4) จะได้พจน์ที่หารด้วยศูนย์ ทำให้ ความเข้มของสเปกตรัมเป็นอนันต์ และเมื่อนำความเร็วในวงโคจรของแก๊สมาแทนในสมการที่ (2.1.2) ได้ ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับ

$$\frac{v_R}{\Theta_0} = \frac{R_0 - M}{M} \sin l \qquad (3.3.1)$$

ซึ่งได้ความเร็วแนวเส้นสายตาเป็นค่าคงที่ แสดงว่าทุกส่วนของแก๊สที่อยู่ในบริเวณที่มีการหมุนแบบวัตถุแข็งนั้นให้ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากัน ทำให้ความเข้มของสเปกตรัมที่ความเร็วแนวเส้นสายตาตามสมการที่(3.3.1)มีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้นที่ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่า M นั้นใช้สมการที่(3.2.3) , (3.2.4) และ (3.2.5)ในการหาค่าความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม ส่วนการหาค่าความเข้มของสเปกตรัมจากการอินทิเกรตจากสมการที่(3.1.5) ต้องพิจารณาช่วงของการอินทิเกรตจากเงื่อนไขสมการเมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร น้อยกว่า M ได้

$$\frac{v_R}{\Theta_0} > \frac{R_0 - M}{M} \sin l$$

เมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร น้อยกว่า M ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเป็นอนันต์ ความเร็วแนวเส้นสายตาที่ต้องนำมาพิจารณาหากราฟการหมุน จึงอยู่ในขอบเขต

$$-\sin l \leq \frac{v_R}{\Theta_0} \leq \frac{R_0 - M}{M} \sin l$$

ในที่นี้ได้ใช้ค่า M เท่ากับ 8 กิโลพาร์เสคจึงได้ขอบเขตบนของความเร็วแนวเส้นสายตาคือ

$$\frac{v_R}{\Theta_0} \leq \frac{1}{4}\sin l$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่ 1 จะพบว่าแบบจำลองที่ 2 จะได้กราฟความเข้มของสเปกตรัมเหมือนกับแบบจำลองที่ 1 เมื่อ $\frac{1}{4}\sin l \geq 1 - \sin l$ หรือ ลองจิจูดมากกว่า 53 องศา

แสดงตัวอย่างค่าของความเร็วแนวเส้นสายตา ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัมโดยสมการที่(3.2.4) (3.2.5) (3.1.4)และ (3.1.5)ในตารางที่ 3-2 เมื่อลองจิจูดเท่ากับ 34 องศา

ตารางที่ 3-2 แสดงตัวอย่างผลของการคำนวณหา ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัม ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาใดๆในแบบจำลองที่ 2

ลองจิจูด l = 34°

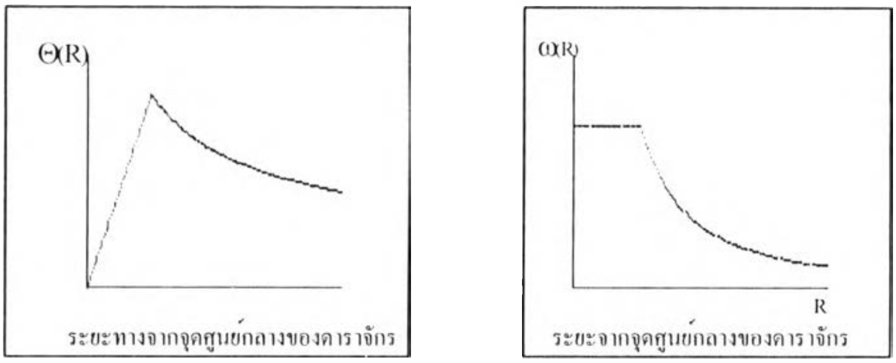
ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-130.0	142.68	150.86	-134.28	337.79	337.79	396.49
-125.0	94.47	102.59	-86.01	148.24	148.24	171.36
-120.0	70.61	78.68	-62.10	82.39	82..39	95.38
-117.0	61.32	69.35	-52.77	31.30	31.30	71.88
-115.0	56.37	64.39	-47.81	26.48	26.48	60.76
-110.0	46.91	54.87	-38.29	18.38	18.38	42.12
-105.0	40.17	48.07	-31.49	13.51	13.51	30.94
-100.0	35.12	42.97	-26.39	10.36	10.36	23.72
-95.0	31.21	38.99	-22.41	8.21	8.21	18.78
-90.0	28.09	35.8	-19.22	6.67	6.67	15.25
-85.0	25.51	33.18	-16.66	5.53	5.53	12.65
-80.0	23.38	30.99	-14.41	4.66	4.66	10.67
-75.0	21.57	29.13	-12.55	4.00	4.00	9.14
-70.0	20.03	27.52	-10.94	3.46	3.46	7.92
-60.0	17.52	24.89	-8.31	2.68	2.68	6.14
-50.0	15.56	22.82	-6.24	2.15	2.15	4.92
-40.0	14.01	21.13	-45.53	1.77	1.77	4.06
-30.0	12.73	19.73	-31.48	1.50	1.50	3.42

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (pc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-20.0	11.67	18.53	-19.52	1.29	1.29	2.94
-10.0	1077	17.50	-9.15	1.13	1.13	2.57
-5.0	10.37	17.02	-4.43	1.06	1.06	2.42
-2.0	10.15	16.76	-1.75	1.02	1.02	2.37
-1.5	10.11	16.71	-1.31	1.02	1.02	2.44
-1.0	10.07	16.67	-0.87	1.01	1.01	2.63
-0.5	10.04	16.62	-0.43	1.01	1.01	2.97
0.0	10.00	16.58	-0	1.00	1.00	3.43
0.5	9.96	16.54	0.04	0.99	1.99	3.88
1.0	9.93	16.49	0.09	0.99	1.98	4.22
1.5	9.89	16.45	0.13	0.98	1.97	4.39
2.0	9.86	16.41	0.17	0.98	1.96	4.44
4.0	9.72	16.24	0.38	0.96	1.92	4.38
5.0	9.66	16.16	0.42	0.95	1.90	4.33
10.0	9.33	15.76	0.82	0.90	1.80	4.12
15.0	9.03	15.46	0.99	0.86	1.72	3.94
17.5	8.89	15.20	1.38	0.84	1.69	3.85
20.0	8.75	15.02	1.56	0.83	1.65	3.77
30.0	8.23	14.33	2.24	0.77	1.53	3.50
32.5	8.11	14.17	2.41	0.75	1.51	3.43

แบบจำลองที่ 3

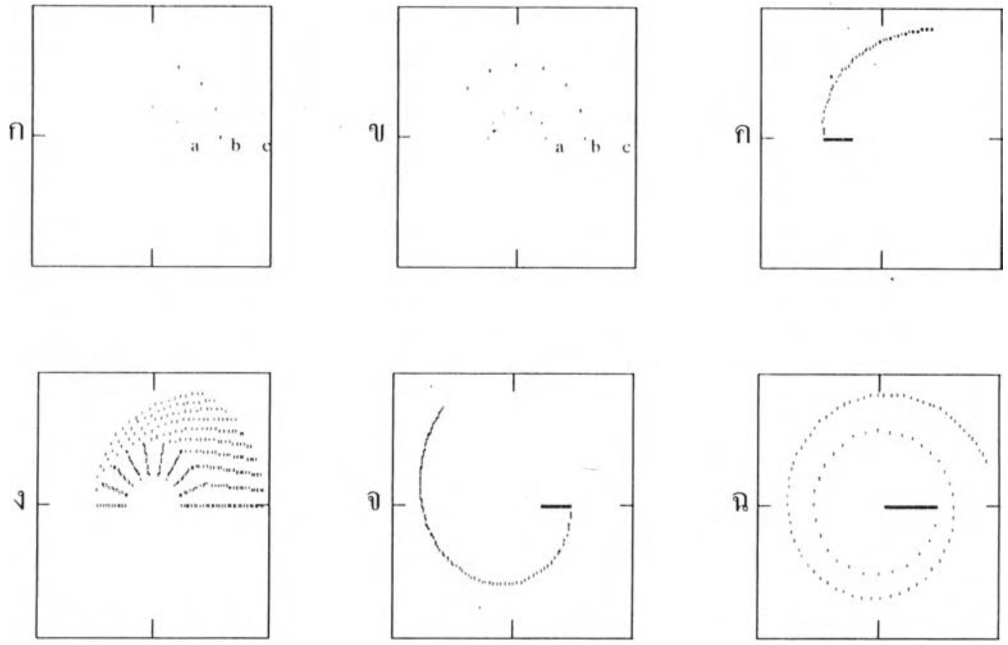
$$\Theta = KR \qquad R \leq M \text{ กิโลพาร์เสค}$$

$$= CR^{-\frac{1}{2}} \qquad R \geq M \text{ กิโลพาร์เสค} \qquad C : \text{ค่าคงที่}$$



รูปที่ 3-7 เส้นกราฟการหมุนของดาราจักรตามแบบจำลองที่ 3

เมื่อระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรน้อยกว่า M กิโลพาร์เสค แก๊สจะเคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางของดาราจักรแบบเดียวกับวัตถุแข็ง เมื่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่า M กิโลพาร์เสค แก๊สจะมีการหมุนแบบเคาเปลอร์รอบจุดศูนย์กลางดาราจักร ซึ่งสามารถเขียนทางเดินของอนุภาคได้ดังรูปที่ (3-8)



รูปที่ 3-8 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแบบจำลองที่ 3

ภาพ ก - ง อนุภาค a,b,c เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยที่ ห่างจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเป็นอัตราส่วน R_a = 0.5R R_b = 1.2R และ R_c = 2R ซึ่ง M = R โดย ก. a โคจรได้มุม 90 องศา ข. a โคจรได้มุม 180 องศา ค. แสดงอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง a ,b, c ใน ภาพ ข ง. แสดงแนวทางเดินของอนุภาคที่เรียงตัวอยู่ระหว่างอนุภาค a และ b ,c ในภาพ ข. ถ้าอนุภาคทั้งหมดเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกัน จ. แสดงอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R ถ้าอนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ได้ 1รอบ ฉ. แสดงทางโคจรของอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 0.1R ถึง 2R ถ้าอนุภาคที่ 0.1R เคลื่อนที่ได้ 3 รอบ

ถ้าสมมุติว่าอนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยห่างจากจุดศูนย์กลางดาราจักรต่างกันเป็นอัตราส่วน $R_a:R_b:R_c$ = 0.5 : 1.2 : 2 ซึ่งอนุภาค a จะอยู่ในช่วงที่มีการเคลื่อนที่แบบวัตถุเกร็ง อนุภาค b และ c เคลื่อนที่ในช่วงที่มีแรงกระทำต่ออนุภาคตามกฎแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ได้ระยะดังรูป (3-8ก)และรูป (3-8ข) โดยจากรูป(3-8ก) ขณะที่อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 90 องศา อนุภาคbและ c จะเคลื่อนที่ได้ระยะเชิงมุมดังรูป รูป(3-8ข) ขณะที่อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 180 องศา อนุภาคb และ c จะเคลื่อนที่ได้ระยะเชิงมุมดังรูป รูป(3-8ค)แสดงอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่างอนุภาค a ถึงอนุภาค b และ c ที่อยู่ในรูป(3-8ข) รูป(3-8ง)แสดงอนุภาคแนวทางเดินของที่อยู่ระหว่างอนุภาค a ถึงอนุภาค b และ c ที่อยู่ในรูป(3-8ข) และ รูป(3-8จ) แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R โดย อนุภาคที่ตำแหน่ง 0.5 R เคลื่อนที่ได้ 1 รอบ อนุภาคถัดออกไปอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ดังรูป รูป(3-8ฉ) แสดงทางโคจรของอนุภาคตั้งแต่ 0.1R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากันจากแบบจำลองที่ 3

$$\Theta = KR \qquad R \leq M < 10 \text{ กิโลพาร์เสค}$$
$$= CR^{-\frac{1}{2}} \qquad R \geq M \qquad (3.3.1)$$

หาค่าคงที่ C จากเมื่อความเร็วในวงโคจรของแก๊ส $\Theta = \Theta_0 = 250$ กิโลเมตรต่อวินาที ได้ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร $R = R_0 = 10$ กิโลพาร์เสค ดังนั้นเมื่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มากกว่า M กิโลพาร์เสคได้

$$\Theta = \Theta_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.3.2)$$

ที่ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรเท่ากับ M กิโลพาร์เสค พิจารณาหาค่าคงที่ K จากสมการ(3.3.1)และ (3.3.2) โดยพิจารณาว่าที่ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร M เป็นจุดต่อของสองช่วงสมการ แทน M ได้ค่าคงที่ K กลับไปแทนในสมการ (3.3.1) ได้

$$\Theta = \Theta_0\left(\frac{R_0}{M^3}\right)^{\frac{1}{2}} R \qquad (3.3.3)$$

เมื่อแทนความเร็วในวงโคจรของแก๊สจากสมการ (3.3.3) ลงในสมการ (3.1.4) เพื่อหาความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมซึ่งได้ค่าเป็นอนันต์ แสดงว่าช่วงระยะทางแรกของกราฟให้ค่าความเร็วแนวเส้นสายตาเพียงค่าเดียว จากสมการ (3.1.2)ได้

$$V_R = \left(\left(\frac{R_0}{M}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) R_0 \sin l \qquad (3.3.4)$$

ดังนั้นจึงเห็นได้ว่า ความเร็วแนวเส้นสายตาเป็นค่าคงที่สำหรับมุมลองจิจูดหนึ่ง เมื่อแทนความเร็วแนวเส้นสายตาที่น้อยกว่า ค่าคงที่ที่ได้จากสมการ(3.3.4) จะได้ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่า M กิโลพาร์เสค ดังนั้นค่าความเร็วแนวเส้นสายตาจากสมการ(3.3.4) จึงเป็นค่าสูงสุดของความเร็วแนวเส้นสายตาที่เป็นไปได้ที่จะนำมาแทนในการคำนวนหาความเข้มของสเปกตรัม

เมื่อพิจารณาที่ช่วงระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่า M กิโลพาร์เสค กำหนดให้ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเท่ากับหนึ่ง เมื่อนำมาแทนในสมการ(3.1.2) ได้ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ คือ

$$R = R_0 = 10 \text{ กิโลพาร์เสค}$$

และได้ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ คือ $d = 0 , 2R_0 \cos l$

นำผลที่ได้ข้างต้นและสมการ (3.3.2) แทนลงในสมการ(3.1.4)โดยให้ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเท่ากับหนึ่ง ได้

$$\frac{2}{3}K\rho = \frac{\Theta_0}{R_0}\cos l \sin l$$

แทนลงในสมการ(3.1.4) ได้

$$\frac{d(I)}{dv_R} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)} \tag{3.3.5}$$

จะเห็นว่าเมื่อต้องการหา ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมจากค่าความเร็วแนวเส้นสายตาต้องหาระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร และระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร จากสมการ (2.1.2) เมื่อแทน Θได้

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{V_R}{\Theta_0 \sin l} + 1\right)^{-\frac{2}{3}} \tag{3.3.6}$$

เนื่องจากระยะทางจากแก๊สจากจุดศูนย์กลางดาราจักรมีค่ามากกว่าศูนย์ จากสมการ (2.1.3)และ Θ เมื่อพิจารณา ได้

$$\frac{V_R}{\Theta_0} \geq -\sin l$$

เนื่องจากสมการที่ (2.1.3) ส่วนที่อยู่ในรากมากกว่าศูนย์ได้ $\frac{R}{R_0} \geq \sin l$ ดังนั้นจากสมการ (3.3.6) ได้

$$\left(\frac{V_R}{\Theta_0 \sin l} + 1\right)^{-\frac{2}{3}} > \sin l$$

จึงได้ความเร็วแนวเส้นสายตา

$$\frac{V_R}{\Theta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{\sin l}} - \sin l \qquad (3.3.7)$$

แต่หาช่วงในการอินทิเกรตของสมการ(3.1.5) ต้องพิจารณาที่ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่า M กิโลพาร์เสค จากสมการที่ (3.3.6) ได้ว่า

$$\left(\frac{V_R}{\Theta_0 \sin l} + 1\right)^{-\frac{2}{3}} \geq \frac{M}{R_0}$$

ดังนั้น

$$\frac{V_R}{\Theta_0} \leq \left(\left(\frac{R_0}{M}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\sin l \qquad (3.3.8)$$

การหาขอบเขตบนของการอินทิเกรตนั้นจะพิจารณาว่า ความเร็วแนวเส้นสายตาจากสมการ (3.3.8) ได้ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมมีค่าอนันต์ ซึ่งถ้าที่ลองจิจูดให้ค่าความเร็วแนวเส้นสายตาน้อยกว่าค่าจากสมการ(3.3.7) จะพิจารณาขอบเขตบนจากสมการ(3.3.8) แต่ถ้าความเร็วแนวเส้นสายตามากกว่าค่าที่ได้จากสมการ(3.3.7) จะใช้ความเร็วแนวเส้นสายตาจากสมการที่(3.3.7)เป็นขอบเขตบน ดังนั้นจึงได้ว่าช่วงของความเร็วแนวเส้นสายตาสำหรับการอินทิเกรตคือ

$$\text{เมื่อ } \sin l \leq \frac{M}{R_0} \quad : \quad -\sin l < \frac{V_R}{\Theta_0} < \left(\left(\frac{R_0}{M}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)R_0 \sin l$$

$$\sin l \geq \frac{M}{R_0} \quad : \quad -\sin l < \frac{V_R}{\Theta_0} < (\sin l)^{1/2} - \sin l$$

พิจารณาระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์มีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ พิจารณาสมการที่ (2.1.3) ได้คำตอบสองค่า ค่าที่น้อยกว่าศูนย์ให้ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรมากกว่าหนึ่ง จากสมการ(3.3.6) เมื่อแทนได้ว่าที่ความเร็วแนวเส้นสายตามากกว่าศูนย์จะได้ความเข้มสเปกตรัมมาจากสองแหล่งกำเนิดดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\frac{v_R}{\Theta_0} > 0 : \qquad \frac{d(I)}{dv_R} = 2.\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}$$

$$\frac{v_R}{\Theta_0} < 0 : \qquad \frac{d(I)}{dv_R} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{\cos l}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}$$

ในแบบจำลองนี้ให้ค่า M = 8 กิโลพาร์เสค ดังนั้นขอบเขตของลองจิจูด $\sin l = 8/10$ ได้ลองจิจูดประมาณ 53 องศา ดังนั้นเมื่อ l มากกว่า 53 องศา จะใช้เงื่อนไขตามสมการที่ (3.3.7)

ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างผลของการคำนวณค่าระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมและความเข้มของสเปกตรัมดังตารางที่ 3-3 และแสดงกราฟ ความเข้มของสเปกตรัม ในภาคผนวก ก

ตารางที่ 3-3 แสดงตัวอย่างผลของการคำนวณหาระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัม ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาใดๆในแบบจำลองที่ 3

ลองจิจูด $l = 34^{\circ}$

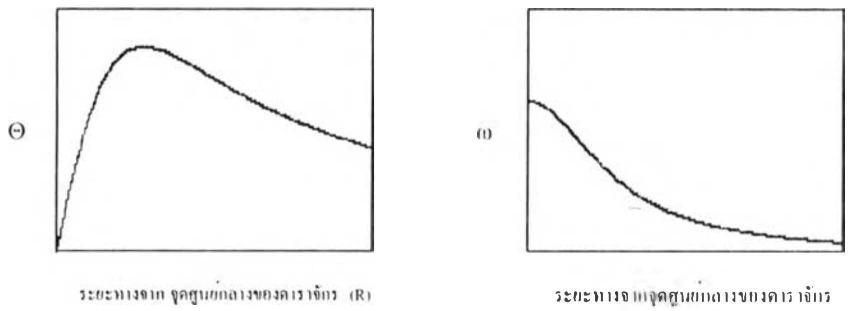
ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-130.0	58.83	66.85	-50.27	69.90	69.90	162.93
-125.0	44.69	52.63	-36.05	35.28	35.28	81.31
-120.0	36.81	44.61	-28.09	21.60	21.60	50.06
-115.0	31.68	39.47	-22.89	15.04	15.04	34.48
-110.0	28.03	35.75	-19.17	11.12	11.12	25.48
-105.0	25.27	32.94	-16.36	8.63	8.63	19.76
-100.0	23.11	30.71	-14.13	6.94	6.94	15.87
-95.0	21.36	28.90	-12.32	5.72	5.72	13.10
-90.0	19.90	27.39	-10.81	4.82	4.82	11.04
-85.0	18.67	26.10	-9.52	4.14	4.14	9.47
-80.0	17.62	24.99	-8.41	3.60	3.60	8.23
-75.0	16.70	24.02	-7.44	3.17	3.17	7.25
-70.0	15.89	23.16	-6.58	2.82	2.82	6.44
-60.0	14.53	21.70	-5.12	2.29	2.29	5.83
-50.0	13.43	20.50	-3.93	1.91	1.91	4.36
-40.0	12.52	19.49	-2.91	1.63	1.63	3.72
-30.0	11.75	18.62	-2.04	1.41	1.41	3.22
-25.0	11.40	18.23	-1.65	1.32	1.32	3.02
-20.0	11.08	17.86	-1.28	1.24	1.24	2.84

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-10.0	10.51	17.19	-0.61	1.11	1.11	2.53
-5.0	10.25	16.87	-0.30	1.05	1.05	2.40
-3.0	10.15	16.76	-0.17	1.03	1.03	2.36
-2.0	10.10	16.70	-0.16	1.02	1.02	2.36
-1.0	10.05	16.64	-0.06	1.010	1.01	2.62
-0.5	10.02	16.61	-0.3	1.005	1.01	2.96
0.0	10	16.58	-0.00	1.000	1.00	3.42
0.5	9.98	16.55	0.03	0.995	1.99	3.88
1.0	9.53	16.52	0.06	0.990	1.98	4.22
1.5	9.93	16.50	0.09	0.986	1.97	4.39
2.0	9.91	16.47	0.11	0.98	1.96	4.45
3.0	9.86	16.41	0.18	0.972	1.94	4.44
5.0	9.77	16.36	0.28	0.954	1.91	4.36
10.0	9.55	16.03	0.55	0.911	1.82	4.17
15.0	9.34	15.78	0.81	0.873	1.75	3.99
20.0	9.15	15.53	1.05	0.838	1.67	3.83
25.0	8.96	15.29	1.29	0.807	1.61	3.69
30.0	8.78	15.07	1.52	0.777	1.56	3.55
35.0	8.62	14.85	1.74	0.751	1.50	3.43
40.0	8.46	14.66	1.95	0.727	1.45	3.32
45.0	8.30	14.43	2.15	0.704	1.41	3.22
50.0	8.16	14.27	2.35	0.684	1.37	3.13
55.0	8.02	14.03	2.55	0.666	1.33	2.25
55.5	8.00	14.01	2.57	0.664	1.33	1.62

แบบจำลองที่ 4 $\Theta = \dfrac{K_1 R}{K_2 + R^2}$

โดย $K_1 = 4.166 \times 10^3$ km/kpc/s

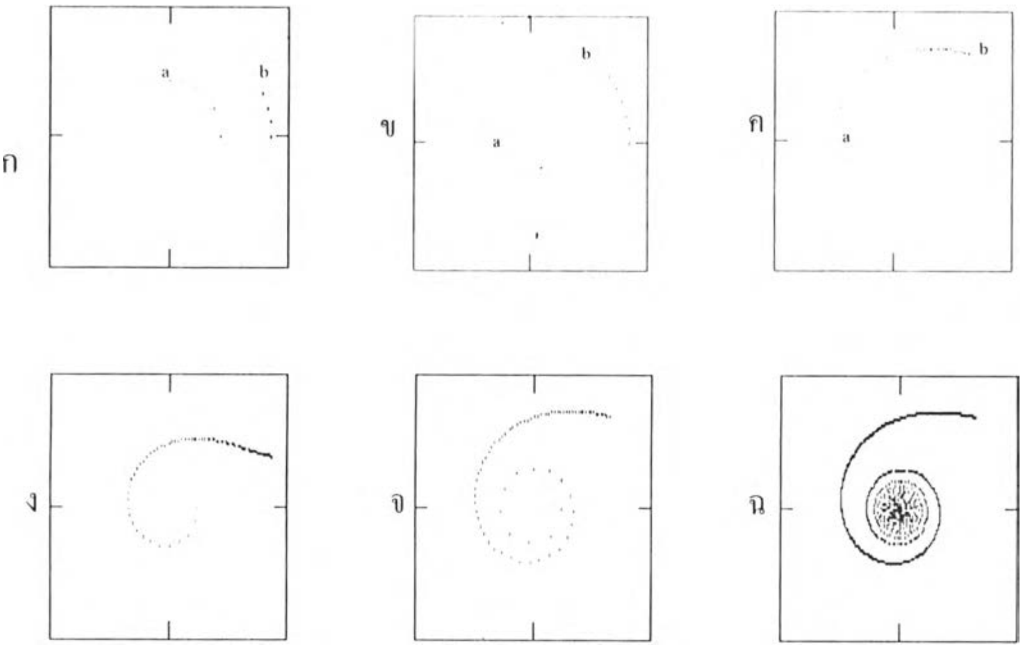
$K_2 = 66.66$ kpc^2



(ก) (ข)

รูปที่ 3-9 แสดงเส้นกราฟการหมุนตามแบบจำลองที่ 4

แบบจำลองนี้ได้มาจากสมการระหว่าง ความเร็วแนวเส้นสายตากับระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรโดยคำนวนจากข้อมูลจากการสังเกตการณ์หาค่าคงที่การหมุนของอูร์ท และความสัมพันธ์ทางพลศาสตร์ (บทที่ 2 ตอนที่ 2.2) ซึ่งในที่นี้จะสร้างกราฟความเข้มของเส้นสเปกตรัมมาเพื่อนำมาเป็นตัวเทียบกับแบบจำลองอื่น การเคลื่อนที่ของอนุภาคตามแบบจำลองนี้จะเป็นไปดังรูป 3-10



รูปที่ 3-10 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในดาราจักรตาม แบบจำลองที่ 4

ถ้าสมมุติว่าอนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยห่างจากจุดศูนย์กลางดาราจักรต่างกันเป็นอัตราส่วน 2R ต่อ 1R เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ได้ระยะ โดย ก. อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 90 องศา ข. อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 90 องศา ค. แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่างอนุภาค a ถึงอนุภาค b ที่อยู่ใน ภาพ ข ภาพ ง และ จ แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R โดย ง. อนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ครบ 1 รอบ อนุภาคถัดไปจะอยู่ในตำแหน่งดังรูปเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากัน จ. อนุภาคที่ตำแหน่ง 0.5R เคลื่อนที่ได้ 2 รอบ อนุภาคถัดออกไปอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ดังรูป ฉ. แสดงทางโคจรของอนุภาคตั้งแต่ 0.1R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากัน

ถ้าสมมุติว่าอนุภาค a,b เริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันโดยห่างจากจุดศูนย์กลางดาราจักรต่างกันเป็นอัตราส่วน 2R ต่อ 1R เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ได้ระยะดังรูป (3-10ก) และ รูป(3-10ข) โดยจากรูป(310ข) ขณะที่อนุภาค a เคลื่อนที่ได้มุม 180 องศา อนุภาค b จะเคลื่อนที่ได้ระยะมุมดังรูป รูป(3-10ค) แสดงอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ระหว่างอนุภาค a ถึงอนุภาค b โดยเวลาผ่านไปเท่ากัน ดังในรูป(3-10ข) รูป(3-10ง)และ รูป(3-10จ) แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ระหว่าง 0.5R ถึง 2R โดยรูป(3-10ง) อนุภาคที่ 0.5R เคลื่อนที่ครบ 1 รอบ อนุภาคถัดไปจะอยู่ในตำแหน่งดังรูปเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากัน ส่วนรูป(3-10จ) อนุภาคที่ตำแหน่ง 0.5 R เคลื่อนที่ได้ 2 รอบ อนุภาคถัดออกไปอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ดังรูป รูป(3-10ฉ) แสดงทางโคจรของอนุภาคตั้งแต่ 0.1R ถึง 2R โดยเริ่มต้นเคลื่อนที่จากแขนของรัศมีเดียวกันเวลาผ่านไปเท่ากัน

จากความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักรและรัศมีวงโคจรของแก๊ส ได้ว่า

$$\Theta = \frac{K_1 R}{K_2 + R^2} \qquad (3.4.1)$$

จากความเร็วในวงโคจรของแก๊สในสมการ (3.4.1) แทนในสมการ (3.1.4) ได้ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม คือ

$$\frac{d(I)}{dv_R} = \frac{k\rho(k_2 + R^2)^2}{2k_1(d - R_0 \cos l)R_0 \sin l} \qquad (3.4.2)$$

กำหนดให้ เมื่อความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ได้ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเท่ากับหนึ่ง จากสมการ (2.1.2) ได้ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ คือ

$$R|_{V_R=0} = \left[\frac{k_1 R_0}{\Theta_0} - k_2\right]^{\frac{1}{2}} R_0$$

จากสมการ(2.1.3) ได้ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาเท่ากับศูนย์ คือ

$$d|_{V_R=0} = \cos l R_0 \pm \sqrt{\frac{k_1}{\Theta_0 R_0} - \frac{k_2}{R_0^{\ 2}} - \sin^2 l}\ R_0$$

เมื่อแทนกลับลงในสมการ(3.4.2) และความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมเท่ากับหนึ่ง จึงได้ว่า

$$k\rho = \frac{2\Theta_0^{\ 2} \sin l}{k_1} \sqrt{\frac{k_1}{\Theta_0 R_0} - \frac{k_2}{R_0^{\ 2}} - \sin^2 l}$$

แทนลงในสมการ(3.4.2) ได้ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัมคือ

$$\frac{d(l)}{dv_R} = \frac{\Theta_0^{\,2} R_0^{\,2}}{k_1^{\,2}} \sqrt{\frac{k_1}{\Theta_0 R_0} - \frac{k_2}{R_0^{\,2}} - \sin^2 l}\; \frac{\left(\frac{k_2}{R_0^{\,2}} + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{d}{R_0} - \cos l\right)}$$

ซึ่งจากสมการ (2.1.3) แทนสมการ (3.4.1) ได้ ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร คือ

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{k_1}{\Theta_0 R_0^{\,2}\left[\frac{V_R}{\Theta_0 \sin l} + 1\right]} - \frac{k_2}{R_0^{\,2}}} \qquad (3.4.3)$$

พิจารณาช่วงของการอินทิเกรตจากสมการ(2.1.3) ได้ $\frac{R}{R_0} > \sin l$ จากสมการ(3.4.3) ได้ค่าขอบเขตบนของความเร็วแนวเส้นสายตาคือ

$$\frac{V_R}{\Theta_0} < \frac{\left(\frac{k_1}{R_0 \Theta_0} - \frac{k_2}{R_0^{\,2}} - \sin^2 l\right)}{\frac{k_2}{R_0^{\,2}} + \sin^2 l} . \sin l \qquad (3.4.4)$$

และเนื่องจากสมการ(3.4.3) ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร มากกว่าศูนย์เสมอ เมื่อพิจารณาจะได้ผลคือ

$$-\sin l < \frac{V_R}{\Theta_0} < \left(\frac{R_0 k_1}{\Theta_0 k_2} - 1\right) \sin l \qquad (3.4.5)$$

ซึ่งเมื่อขอบเขตบนของความเร็วแนวเส้นสายตาจากทั้งสองสมการ จะเห็นว่าจากสมการที่(3.4.4) มีเงื่อนไขที่ความจำเป็นในการอินทิเกรตดังนั้นจึงได้

$$-\sin l < \frac{V_R}{\Theta_0} < \frac{\left(\frac{k_1}{R_0 \Theta_0} - \frac{k_2}{R_0^{\,2}} - \sin^2 l\right)}{\frac{k_2}{R_0^{\,2}} + \sin^2 l} . \sin l \qquad (3.4.6)$$

ในทำนองเดียวกับแบบจำลองที่ผ่านมาความเร็วแนวเส้นสายตาแต่ละค่าอาจมาจากระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์หนึ่ง หรือ สองค่า ดังนั้นจากสมการ(2.1.3) ให้ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ที่มากกว่า ศูนย์ได้อัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มของเส้นสเปกตรัมเทียบความเร็วแนวเส้นสายตาสองเท่าดังนั้น

ที่ $v_R \leq 0$: $$\frac{d(I)}{dv_R} = \frac{k\rho(k_2 + R^2)^2}{2k_1(d - R_0\cos l)R_0 \sin l}$$

$v_R > 0$: $$\frac{d(I)}{dv_R} = 2.\frac{k\rho(k_2 + R^2)^2}{2k_1(d - R_0\cos l)R_0 \sin l}$$

ซึ่งนำอัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มของเส้นสเปกตรัมเทียบความเร็วแนวเส้นสายตามาคำนวนหาความเข้มของสเปกตรัมโดยสมการ (3.1.5) โดยใช้ช่วงของการอินทิเกรตตามสมการ (3.4.6)โดยที่นี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวนโดยลองจิจูดเท่ากับ 34 องศาในตารางที่ 3-4

ตารางที่ 3-4 แสดงตัวอย่างผลของการคำนวนหา ระยะทางของแก๊สจากจุดศูนย์กลางของดาราจักร ระยะทางระหว่างแก๊สกับดวงอาทิตย์ ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม และความเข้มของสเปกตรัม ที่ความเร็วแนวเส้นสายตาใดๆในแบบจำลองที่ 4 ลองจิจูด $l = 34^{\circ}$

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-130.0	48.07	56.04	-39.46	35.34	35.34	82.107
-125.0	38.83	46.71	-30.13	19.25	19.25	44.31
-120.0	33.32	41.14	-24.53	12.58	12.58	28.87
-115.0	29.54	37.30	-20.72	9.08	9.08	20.80
-110.0	26.74	34.44	-17.86	6.98	6.98	15.98
-105.0	24.55	32.20	-15.62	5.66	5.66	12.81
-100.0	22.78	30.37	-13.79	4.63	4.63	10.60
-95.0	21.29	28.84	-12.25	3.93	3.93	8.99
-90.0	20.03	27.53	-10.94	3.40	3.40	7.77
-85.0	18.93	26.38	-9.80	2.98	2.98	6.82
-80.0	17.97	25.37	-8.79	2.65	2.65	6.07
-75.0	17.11	24.46	-7.88	2.39	2.39	5.45
-70.0	16.34	23.65	-7.07	2.17	2.17	4.53
-65.0	15.65	22.90	-6.32	1.98	1.98	4.53
-60.0	15.01	22.22	-5.64	1.83	1.83	4.18
-55.0	14.42	21.59	-5.01	1.69	1.69	3.87
-50.0	13.88	21.00	-4.42	1.58	1.58	3.61
-40.0	12.91	19.93	-3.35	1.40	1.40	3.19
-30.0	12.08	19.44	-2.40	1.32	1.32	2.87

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
-20.0	11.35	18.12	-1.53	1.15	1.15	2.63
-10.0	10.62	17.32	-0.74	1.07	1.07	2.43
-5.0	10.30	16.94	-0.36	1.03	1.03	2.35
-3.0	10.18	16.80	-0.21	1.02	1.02	2.33
-2.0	10.12	16.72	-0.14	1.01	1.01	2.34
-1.0	10.06	16.65	-0.07	1.006	1.006	2.61
-0.5	10.03	16.62	-0.04	1.003	1.003	2.95
0.0	10	16.58	-0.001	1.00	2.00	3.43
0.5	9.97	16.54	0.04	0.997	1.99	3.89
1.0	9.94	16.51	0.07	0.994	1.99	4.22
2.0	9.88	16.44	0.14	0.989	1.98	4.44
3.0	9.82	16.37	0.22	0.984	1.96	4.50
2.5	9.85	16.40	0.18	0.986	1.97	4.50
5.0	9.71	16.23	0.36	0.974	1.95	4.45
10.0	9.43	15.88	0.70	0.951	1.90	4.35
15.0	9.16	15.54	1.04	0.932	1.87	4.26
20.0	8.90	15.21	1.37	0.917	1.83	4.19
25.0	9.64	14.88	1.70	0.905	1.81	4.14
30.0	8.40	14.56	2.02	0.897	1.79	4.10
35.0	8.16	14.24	2.35	0.892	1.78	4.08
40.0	7.93	13.92	2.67	0.891	1.78	4.07
45.0	7.71	13.59	2.99	0.894	1.79	4.09
50.0	7.49	13.27	3.31	0.903	1.81	4.13
60.0	7.07	12.61	3.97	0.939	1.88	4.29

ความเร็วแนวเส้นสายตา (km/sec)	ระยะทางจากจุดศูนย์กลางดาราจักร (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์1 (kpc)	ระยะทางจากแก๊สถึงดวงอาทิตย์2 (kpc)	ความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ผลรวมความหนาแน่นของเส้นสเปกตรัม	ความเข้มของสเปกตรัม
70.0	6.66	11.91	4.67	1.016	2.03	4.65
75.0	6.47	11.54	5.05	1.082	2.17	4.95
80.0	6.27	11.13	5.45	1.181	2.36	5.40
85.0	6.08	10.68	5.90	1.343	2.69	6.13
90.0	5.89	10.15	6.43	1.653	3.31	7.59
95.0	5.71	9.43	7.16	2.590	5.20	12.41
97.5	5.61	8.78	7.80	5.85	11.70	38.85
98.0	5.60	8.48	8.10	15.18	30.35	40.08
98.075	5.60	8.36	8.22	41.54	83.09	39.49