5

เมตริกซ์ที่หาตัวผกผันได้บนเซมิริง

นาย สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2530

ISBN 974-567-626-8

INVERTIBLE MATRICES OVER SEMIRINGS

Mr. Surachai Sombatboriboon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1987

ISBN 974-567-626-8

Thesis Title	Invertible Matrices over Semirings
By	Mr. Surachai Sombatboriboon
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Virool Boonyasombat .... Chairman

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit .... Thesis Advisor

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เมตริกซ์ที่หาตัวผกผันได้บนเซมิริง
ชื่อนิสิต	นาย สุรชัย สมบัติบริบูรณ์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2529

บทคัดย่อ

ให้ $S = (S,+,\cdot)$ เป็นเซมิริงสลับที่ได้และมี 0,1

จะกล่าวว่าสมาชิก x ของเซมิริง S

<u>หาตัวผกผันได้ภายใต้การบวก</u>ใน S ถ้า $x+y = 0$ สำหรับบางสมาชิก $y \in S$

<u>หาตัวผกผันได้ภายใต้การคูณ</u>ใน S ถ้า $x \cdot y = 1$ สำหรับบางสมาชิก $y \in S$

จะเรียกเซมิริง S ว่าเป็น

(i) <u>เซมิริงบูลลีน</u> ถ้า $x^2 = x$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in S$

(ii) <u>เซมิริงผกผันภายใต้การบวก</u> ถ้า $(S,+)$ เป็นเซมิกรุปผกผัน และสำหรับ $x \in S$ เราให้ x' แทนตัวผกผันของ x ในเซมิกรุปผกผัน $(S,+)$

(iii) <u>เซมิฟิลด์</u> ถ้า $(S\setminus\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

สำหรับเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ บน S ให้ A_{ij} แทนสมาชิกของ A ในแถวที่ i และหลักที่ j และเรานิยาม<u>ตัวกำหนดบวก</u>ของ A, $\det^+A$, <u>ตัวกำหนดลบ</u>ของ A, $\det^-A$, และ<u>เพอร์มาเนนท์</u>ของ A, $\operatorname{per}(A)$, ตามลำดับ โดย

$$\det{}^+A = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}\right),$$

$$\det{}^-A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{B}_n}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}\right) & \text{ถ้า } n > 1 \\ 0 \quad \text{ถ้า } n = 1 & \end{cases}$$

และ

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}\right)$$

โดยที่ $\mathcal{S}_n$ เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนบนเซต $\{1,2,\ldots,n\}$ ทั้งหมด $\mathcal{A}_n$ เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนคู่บนเซต $\{1,2,\ldots,n\}$ ทั้งหมด และ $\mathcal{B}_n = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$

ในวิทยานิพนธ์นี้เราให้ลักษณะของเมตริกซ์ที่หาตัวผกผันได้บนเซมิริงบูลลีน เซมิริงผกผันภายใต้การบวกและเซมิฟิลด์ ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ให้ S เป็นเซมิริงบูลลีนและ A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n บน S ดังนั้นเมตริกซ์ A หาตัวผกผันได้บน S เมื่อและต่อเมื่อ

(i) $\mathrm{per}(A) = 1$ และ

(ii) $2A_{ij}A_{ik} = 0$ สำหรับทุกสมาชิก $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่ง $j \neq k$

<u>บทแทรก 2</u> ให้ S เป็นเซมิริงบูลลีนและ A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n บน S ดังนั้นเมตริกซ์ A หาตัวผกผันได้บน S เมื่อและต่อเมื่อ

(i) $\mathrm{per}(A) = 1$ และ

(ii) $2A_{ij}A_{kj} = 0$ สำหรับทุกสมาชิก $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่ง $i \neq k$

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ให้ S เป็นเซมิริงผกผันภายใต้การบวกและ A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n บน S ดังนั้นเมตริกซ์ A หาตัวผกผันได้บน S เมื่อและต่อเมื่อ

(i) $\det^+A + (\det^-A)'$ หาตัวผกผันได้ภายใต้การคูณใน S และ

(ii) $A_{ij}A_{ik}$ หาตัวผกผันได้ภายใต้การบวกใน S สำหรับทุกสมาชิก i,j,k ใน $\{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่ง $j \neq k$

<u>บทแทรก 4</u> ให้ S เป็นเซมิริงผกผันภายใต้การบวกและ A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n บน S ดังนั้นเมตริกซ์ A หาตัวผกผันได้บน S เมื่อและต่อเมื่อ

(i) $\det^+A + (\det^-A)'$ หาตัวผกผันได้ภายใต้การคูณใน S และ

(ii) $A_{ij}A_{kj}$ หาตัวผกผันได้ภายใต้การบวกใน S สำหรับทุกสมาชิก i,j,k ใน $\{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่ง $i \neq k$

<u>ทฤษฎีบท 5</u> ให้ S เป็นเซมิฟิลด์ซึ่งไม่เป็นฟิลด์และ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสบน S ดังนั้นเมตริกซ์ A หาตัวผกผันได้บน S เมื่อและต่อเมื่อ ทุก ๆ แถวและทุก ๆ หลักของ A มีสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

Thesis Title Invertible Matrices over Semirings

Name Mr. Surachai Sombatboriboon

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Department Mathematics

Academic Year 1986

ABSTRACT

Let $S = (S,+,\cdot)$ be a commutative semiring with 0,1.

An element x of the semiring S is said to be

<u>additively invertible</u> in S if $x+y = 0$ for some $y \in S$,

<u>multiplicatively invertible</u> in S if $x\cdot y = 1$ for some $y \in S$.

The semiring S is said to be

(i) a <u>Boolean semiring</u> if $x^2 = x$ for all $x \in S$,

(ii) an <u>additively inverse semiring</u> if $(S,+)$ is an inverse semigroup, and for $x \in S$, let x' denote the inverse of x in the inverse semigroup $(S,+)$,

(iii) a <u>semifield</u> if $(S\setminus\{0\},\cdot)$ is a group.

For an $n\times n$ matrix A over S, A_{ij} will denote the element of A in the $i^{\underline{th}}$ row and the $j^{\underline{th}}$ column, and the <u>positive determinant</u> of A, $\det^+A$, the <u>negative determinant</u> of A, $\det^-A$, and the <u>permanent</u> of A, $\operatorname{per}(A)$, are defined respectively by

$$\det{}^+A = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}\right),$$

$$\det{}^-A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{B}_n}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}\right) & \text{if } n > 1, \\ 0 \text{ if } n = 1 \end{cases}$$

and

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)} \right)$$

where $\mathcal{S}_n$ is the permutation group of degree n, $\mathcal{A}_n$ is the alternating group of degree n and $\mathcal{B}_n = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$.

In this thesis, we characterize invertible matrices over a Boolean semiring, an additively inverse semiring and a semifield as follows :

Theorem 1. Let S be a Boolean semiring and A an n$\times$n matrix over S. Then the matrix A is invertible over S if and only if

(i) per(A) = 1 and

(ii) $2A_{ij}A_{ik} = 0$ for all $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $j \neq k$.

Corollary 2. Let S be a Boolean semiring and A an n$\times$n matrix over S. Then the matrix A is invertible over S if and only if

(i) per(A) = 1 and

(ii) $2A_{ij}A_{kj} = 0$ for all $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i \neq k$.

Theorem 3. Let S be an additively inverse semiring and A an nxn matrix over S. Then the matrix A is invertible over S if and only if

(i) $\det^{+}A + (\det^{-}A)'$ is multiplicatively invertible in S and

(ii) $A_{ij}A_{ik}$ is additively invertible in S for all i,j,k in $\{1,2,\ldots,n\}$, $j \neq k$.

Corollary 4. Let S be an additively inverse semiring and A an n$\times$n matrix over S. Then the matrix A is invertible over S if and only if

(i) $\det^{+}A + (\det^{-}A)'$ is multiplicatively invertible in S and

(ii) $A_{ij}A_{kj}$ is additively invertible in S for all i,j,k in $\{1,2,\ldots,n\}$, $i \neq k$.

Theorem 5. Let S be a semifield which is not a field and A a square matrix over S. Then the matrix A is invertible over S if and only if every row and every column of A has exactly one nonzero element.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Asso. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father and mother for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS