บทที่ 2
ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบและผลการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปัจจุบันตัวสถิติทดสอบที่ใช้กันอย่างแพร่หลายได้แก่ ตัวสถิติทดสอบซี(z test statistic) ตัวสถิติทดสอบที(t test statistic) ตัวสถิติทดสอบเอฟ(F test statistic) และตัวสถิติทดสอบไค-กำลังสอง(χ^2-test statistic) ซึ่งตัวสถิติที่ใช้ทดสอบทั้ง 4 ตัวนี้ใช้ในการทดสอบสมมติฐานทางสถิติซึ่งแตกต่างกัน ตัวสถิติทดสอบทีและซีมักใช้เพื่อสรุปเกี่ยวกับค่ามัชฌิมเลขคณิต(arithmatic mean) ของกลุ่มประชากร ส่วนตัวสถิติทดสอบเอฟและไคกำลังสองมักจะใช้สรุปเกี่ยวกับค่าความแปร-ปรวน(variance)ของกลุ่มประชากร ตัวสถิติทดสอบที ซี และเอฟเป็นตัวสถิติอิงพารามิเตอร์ (parametric statistic) คือต้องอาศัยข้อตกลงเบื้องต้นบางอย่างจึงจะใช้ตัวสถิติทั้งสามได้อย่างมีประ-สิทธิภาพ ส่วนตัวสถิติทดสอบไคกำลังสองเป็นทั้งตัวสถิติอิงพารามิเตอร์และตัวสถิติไม่อิงพารามิ-เตอร์(non-parametric statistic) ดังนั้นการใช้ตัวสถิติไคกำลังสองจึงแพร่หลายและกว้างขวางกว่าการใช้ตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ

การทดสอบไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางสามารถใช้ในการทดสอบสมมติฐานทางสถิติของกรณีการวิเคราะห์ข้อมูลพหุนาม(multinomial data analysis) เช่น การทดสอบความเป็นอิสระ (test of independence) การทดสอบภาวะเอกพันธ์ (test of homogeneity) การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (goodness of fit test) เพื่อหาอำนาจการทดสอบ(power of the test) ภายใต้สมมติฐานแย้ง $H_a: \mu_i \neq \mu_j$ สำหรับทุกค่า $i \neq j$ การหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางอาจพิจารณาได้จากคำนิยามและทฤษฎีต่าง ๆต่อไปนี้

2.1. นิยามที่เกี่ยวข้อง

<u>นิยามที่ 2.1.1</u>

กำหนดให้ $\underset{\sim}{x} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, I_n)$ จะได้ว่า $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ มีการแจกแจงไคกำลังสอง $\chi^2(n)$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไคกำลังสอง จะอยู่ในรูปของ

(2.1) $$f(u) = \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma(\frac{1}{2}n)} \quad , u > 0$$

และฟังก์ชันที่ให้โมเมนต์ของการแจกแจงไคกำลังสอง $\chi^2(n)$ จะอยู่ในรูปของ

(2.2) $$M_u(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}n}$$

<u>นิยามที่ 2.1.2</u>

กำหนดให้ $\underset{\sim}{x} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, I_n)$ จะได้ว่า $u = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}$ มีการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง $\chi^2(n;\delta)$

<u>หมายเหตุ</u>

1.การแจกแจงไคกำลังสองและการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางมีความสัมพันธ์กันด้วยค่าองศาความเป็นอิสระ (n) และ ค่าพารามิเตอร์ไร้ศูนย์กลาง $\delta = \frac{1}{2}\mu'\mu = \frac{1}{2}\sum \mu_i^2$

2. การแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง $\chi^2(n;\delta)$ มีค่าองศาความเป็นอิสระ $=n$ และค่าพารามิเตอร์ไร้ศูนย์กลาง = δ และผู้อ่านจะสังเกตได้ว่าเมื่อ $\delta = 0$ ซึ่งจะเกิดขึ้นกรณีที่ $\mu = 0$ การแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางสามารถลดรูปเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางจะอยู่ในรูปแบบข้างล่างนี้

(2.3) $$f(u) = e^{-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}\frac{u^{\frac{1}{2}n+k-1}e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n+k}\,\Gamma(\frac{1}{2}n+k)}$$

เราจะสังเกตได้ว่าสมการที่ 2.3 มีเทอมของฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไค-กำลังสอง เพราะว่าเทอม $\dfrac{u^{\frac{1}{2}n+k-1}e^{\frac{-1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n+k}\,\Gamma(\frac{1}{2}n+k)}$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไค-กำลังสอง $\chi^2(\frac{1}{2}n+k)$

ดังนั้นฟังก์ชันที่ให้โมเมนต์ของการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง จะอยู่ในรูปของ

(2.4) $$M_u(t) = e^{-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \text{ (moment generating function of } \chi^2(\frac{1}{2}n + k))$$

เราสามารถหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E(\sum x_i^2) &= \sum E(x_i^2) \\ &= \sum(\sigma_x^2 + \mu_i^2) \\ &= \sum 1 + \sum \mu_i^2 \\ &= n + 2\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\sum x_i^2) &= \sum Var(x_i^2) \\ &= \sum Var[(x_i - \mu_i)^2 + 2\mu_i(x_i - \mu_i) + \mu_i^2] \\ &= \sum Var(x_i - \mu_i)^2 + 4\sum \mu_i^2 Var(x_i - \mu_i) \\ &= \sum[E(x_i - \mu_i)^4 - \{E(x_i - \mu_i)^2\}^2] + 4\mu_i^2\sigma_x^2 \\ &= \sum[3\sigma_x^4 - (\sigma_x^2)^2] + 8\delta \\ &= 2n + 8\delta \end{aligned}$$

<u>ทฤษฎีบทที่2.1</u>

ถ้า u_i , $i = 1,2,3,\ldots$ มีการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง และตัวแปรสุ่มแต่ละตัวเป็นอิสระกันแล้ว จะได้ว่า ผลรวมของ u_i , $i = 1,2,3,\ldots$ จะมีการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง

กล่าวคือ ถ้า u_i , $i = 1,2,3,\ldots$ มีการแจกแจง $\chi^2(n_i;\delta_i)$ และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน จะได้ว่า $\sum u_i$, $i = 1,2,3,\ldots$ จะมีการแจกแจง $\chi^2(\sum n_i; \sum \delta_i)$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง

กำหนดให้ $\underset{\sim}{x}$ มีการแจกแจง $\chi^2(n;\delta)$ เราสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\underset{\sim}{x}$ ในรูปของการแจกแจงปัวส์ซงดังนี้

$$F_n^{\delta}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \, .F_{n+2i}(x) \quad , \quad > 0 \tag{2.5}$$

เมื่อ $P(i) = \dfrac{e^{-\frac{\delta}{2}}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^i}{i!}$, $F_{n+2i}(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}n+i-1}}{2^{\frac{1}{2}n+i}\Gamma(\frac{1}{2}n+i)}$

2.2 ที่มาของวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางแต่ละวิธี

ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง 4 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 วิธีนี้เป็นวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง โดยวิธีการคำนวณของแพ็ตเนค (Patnaik) ซึ่งได้นำเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1949 วิธีนี้ใช้ในการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางในกรณีที่องศาความเป็นอิสระเป็นค่าใด ๆ

วิธีที่ 2 วิธีนี้เป็นวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง โดยวิธีการคำนวณของแอชอาวร์ และ แอ็บเดล-ซาแมด (Ashour & Abdel-Samad) ซึ่งได้นำเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1990 วิธีนี้ใช้ในการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางในกรณีที่องศาความเป็นอิสระเป็นค่าใด ๆ

วิธีที่ 3 วิธีนี้เป็นวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง โดยวิธีการคำนวณของแอชอาวร์ และ แอ็บเดล-ซาแมด (Ashour & Abdel-Samad) ซึ่งได้นำเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1990 วิธีนี้ใช้ในการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางในกรณีที่องศาความเป็นอิสระเป็นเลขคี่

วิธีที่ 4 วิธีนี้เป็นวิธีการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง โดยวิธีการคำนวณของรูเบ็น(Ruben) ซึ่งได้นำเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1974 และต่อมาเบิกและโกวินดาราจูลู (Bock & Govindarajulu) ได้นำเสนอในปี ค.ศ. 1989 วิธีนี้ใช้ในการคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางในกรณีที่องศาความเป็นอิสระเป็นเลขคี่

วิธีที่ 1

ในปี ค.ศ. 1949 แพ็ตเนค (Patnaik) ได้นำเสนอฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง ซึ่งเป็นอนุกรมที่สามารถคำนวณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเมื่อองศาความเป็นอิสระเป็นค่าใด ๆ ดังแสดงในสมการที่ (2.8)

เนื่องจากตัวสถิติ χ^2 คือผลบวกกำลังสองของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน(ξ_i) ของการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และส่วนเบี่ยงเบน σ นั่นคือ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 / \sigma^2$$

ถ้าค่าเฉลี่ยของ ξ_i คือ a_i เราสามารถเขียนได้ว่า $x_i = \xi_i - a_i$

ดังนั้นตัวสถิติไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางสามารถเขียนได้เป็น

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a_i)^2 / \sigma^2$$

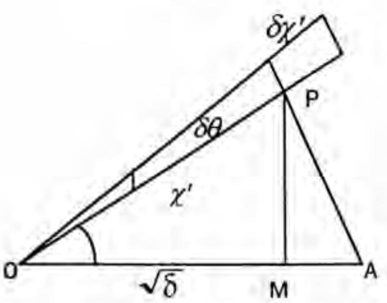
สมมติว่า $\sigma = 1$ จะได้ว่า

(2.6) $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

นั่นคือ $\chi'^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

ให้ตัวแปรสุ่ม ξ มี n มิติ และจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง (origin) จุด P คือ $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ จุด A คือ $(a_1,\ldots,a_n)$ มุม POA = θ และจุด M คือระยะตั้งฉากจากจุด P กับแกน OA แสดงในรูปภาพที่ 2.1

$$OP^2 = \chi'^2 \ , \ OA^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \delta$$



รูปภาพที่ 2.1

จากสมการ (2.6) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่จุด P สามารถเขียนได้เป็น

$$\text{(2.7)} \quad \exp[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a_i)^2] = \exp[-\frac{1}{2}PA^2] = \exp[-\frac{1}{2}(\chi'^2 + \delta - 2\chi'\sqrt{\delta}\cos\theta)$$

เมื่อกำหนดให้ OP และ θ คงที่ P เป็นอิสระกัน n-1 ตัว , $PM = \chi'\sin\theta$ จะได้พื้นที่ของพื้นผิวเป็น $(\chi'\sin\theta)^{n-2}$

ถ้า χ' เพิ่มขึ้นเป็น $\chi' + d\chi'$ และ θ เพิ่มขึ้นเป็น $\theta + d\theta$ แล้ว พื้นที่ของ $\chi d\chi d\theta$ จะเพิ่มขึ้นเป็น $(\chi'\sin\theta)^{n-2}\chi d\chi d\theta$ เมื่อพิจารณาการแจกแจงของ χ' อย่างเดียวจะได้ว่า

$$F(\chi')d\chi' = C\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\chi'^2+\delta-2\chi'\sqrt{\delta}\cos\theta)}(\chi'\sin\theta)^{n-2}\,d\theta\,d\chi'$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$F(\chi'^2)d\chi'^2 = \frac{C}{2}e^{-\frac{1}{2}(\chi'^2+\delta)}(\chi'^2)^{\frac{1}{2}n-1}d\chi'^2$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(e^{-\sqrt{\delta}\chi'\cos\theta} + e^{\sqrt{\delta}\chi'\cos\theta})\,\sin^{n-2}\theta\;d\theta$$

จะได้ว่า

$$F(\chi'^2) = \frac{1}{2}C\,e^{-\frac{1}{2}(\chi'^2+\delta)}(\chi'^2)^{\frac{1}{2}n-1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\{\frac{1}{2}(n-1)\}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}$$
$$\left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\chi'^2\delta}{2}\right) + \frac{1}{n(n+2)2!}\left(\frac{\chi'^2\delta}{2}\right)^2 + \ldots\right\}$$

เมื่อแทนค่า $\delta = 0$ อนุกรมนี้สามารถลดรูปเป็นการแจกแจงแบบไคกำลังสองและจะสามารถหาค่า C ได้ ซึ่งจะทำให้ได้อนุกรมต่อไปนี้

$$\text{(2.8)} \quad F_n^{\delta}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+\delta)}x^{\frac{1}{2}n-1}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma(\frac{1}{2})n}\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{x\delta}{2}\right) + \frac{1}{n(n+2).2!}\left(\frac{x\delta}{2}\right)^2 + \ldots\}$$

วิธีที่ 2

ในปี ค.ศ. 1990 แอชอาวร์ และ แอ็บเดล-ซาแมด (Ashour & Abdel-Samad) ได้นำเสนอการประมาณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางซึ่งเป็นอนุกรมที่สามารถคำนวณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเมื่อองศาความเป็นอิสระเป็นค่าใดๆ ดังสมการที่(2.11)

เราสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองได้ดังนี้

(2.9) $$F_n(x) = f_{\frac{n}{2}}(\frac{x}{2})\sum_{s=0}^{\infty} C_s(\frac{x}{2},\frac{n}{2})$$

เมื่อ $f_{\frac{n}{2}}(\frac{x}{2}) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}(\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

$$C_s(\frac{x}{2},\frac{n}{2}) = \frac{\frac{x}{2}}{(\frac{n}{2}+s)} C_{s-1}(\frac{x}{2},\frac{n}{2}) \quad ,s = 1,2,3,\ldots$$

และ $C_0(\frac{x}{2},\frac{n}{2}) = 1$

จากสมการที่ (2.5) และ (2.9) เราสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางของแอชอาวร์ และ แอ็บเดล-ซาแมดได้ดังนี้

(2.10) $$F_n^{\delta}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i)\, f_{m+i}(y) \sum_{j=0}^{\infty} C_j(y, m+i)$$

เมื่อ $y = \frac{x}{2}$ และ $m = \frac{n}{2}$

$$\text{นั่นคือ } F_n^{\delta}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}(\frac{\delta}{2})^i}{i!} \frac{e^{-\frac{x}{2}}(\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}+i}}{(\frac{n}{2}+i)!} \sum_{s=0}^{\infty} C(\frac{x}{2},\frac{n}{2}+i)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\delta}{2}} e^{-\frac{x}{2}}(\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \cdot 1 + \frac{\frac{\delta x}{4}}{1!(\frac{n}{2}+1)} + \frac{(\frac{\delta x}{4})^2}{2!(\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+2)} +$$

$$\ldots + \frac{(\frac{\delta x}{4})^r}{r!\prod_{i=1}^{r}(\frac{n}{2}+i)} + \ldots] \sum_{s=0}^{\infty} C_s(\frac{x}{2},\frac{n}{2}+i)$$

จะได้ว่า

(2.11) $$F_n^{\delta}(x) = e^{-\delta/2} f_n(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i(z,m)}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} C_j(y,m+i)$$

เมื่อ $f_n(x) = \dfrac{e^{-x/2}(\frac{x}{2})^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, $C_j(z,k) = \dfrac{z}{(k+j)C_{j-1}(z,k)}$, $j = 1,2,\ldots$

$C_0(z,k) =$, $z = \dfrac{\delta y}{2}$, $y = \dfrac{x}{2}$ และ $m = \dfrac{n}{2}$

วิธีที่ 3

ในปีค.ศ.1990 แอชอาวร์ และ แอ็บเดล-ซาแมด (Ashour & Abdel-Samad) ได้นำเสนอการประมาณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางของซึ่งเป็นอนุกรมที่สามารถคำนวณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเมื่อองศาความเป็นอิสระเป็นเลขคี่ดังสมการที่ (2.20)

จากสมการที่(2.5) เราสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางได้ดังนี้

$$F_n^{\delta}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \, F_{n+2i}(x) \quad , \delta > 0$$

เมื่อ $P(i) = \dfrac{e^{-\frac{\delta}{2}}\left(\frac{\delta}{2}\right)^i}{i!}$, $F_{n+2i}(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}n+i-1}}{2^{\frac{1}{2}n+i}\Gamma(\frac{1}{2}n+i)}$, $n = 2m+1$

ถ้าแทนค่า $n = 2m+1$ สมการข้างบนจะกลายเป็น

(2.12) $$F_{2m+1}^{\delta}(x) \cong \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \, F_{2m+2i+1}(x)$$

จาก (Abromowitz and Stegun , 1964) จะได้ผลดังสมการที่ (2.13)

(2.13) $$F_{2m+2i+1}(x) = 2(1-\Phi(\sqrt{x})) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)}$$

เมื่อ Φ มีการแจกแจงแบบปกติ ($N(0,\sigma^2)$) จาก (2.12) และ (2.13) จะได้ว่า

$$(2.14) \qquad F^{\delta}_{2m+1}(x) \approx \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \,.\, \{ \; 2(1-\Phi(\sqrt{x}))+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)} \; \}$$

$$\approx 2(1-\Phi(\sqrt{x}))+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)}$$

โดยที่เทอมที่ 2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{\{(i,r):i\geq 0, r\geq 1, r-i\leq m\}}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{\{(i,r):i\geq 0, 1\leq r\leq m\}}^{\infty} P(i) \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} +$$

$$\sum_{\{(i,r):r\geq m+1, r-i\leq m\}}^{\infty} P(i) \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)}$$

$$(2.15) \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m+i} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5.7\ldots(2r-1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} +$$

$$\left. \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} \sum_{i=r-m}^{\infty} P(i) \right]$$

ซึ่งเทอมที่ 1 สามารถเขียนดังนี้

$$(2.16) \qquad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \sum_{r=1}^{m} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{r=1}^{m} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)}$$

และเทอมที่ 2 สามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของไคกำลังสองและปัวส์ซงได้ดังนี้

$$(2.17) \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} \sum_{i=r-m}^{\infty} P(i) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)} F_{2r-2m}(\delta)$$

จากสมการ (2.15),(2.16) และ(2.17) จะได้

(2.18) $$F^{\delta}_{2m+1}(x) = 2(1-\Phi(\sqrt{x}))+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} . \{\sum_{r=1}^{m}\frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)}+\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)}F_{2r-2m}(\delta)\}$$

(2.19) $$F^{\delta}_{2m+1}(x) = F_{2m+1}(x)+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} . \{\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{x^{r-\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2r-1)}F_{2r-2m}(\delta)\}$$

เมื่อ $n = 2m+1$

วิธีที่ 4

ในปี ค.ศ. 1974 รูเบิน และ ในปี ค.ศ. 1989 เบิก และ โกวินดาราจูลู ได้เสนอการประมาณค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางซึ่งเป็นอนุกรมที่สามารถคำนวณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเมื่อองศาความเป็นอิสระเป็นเลขคี่ ดังสมการที่ (2.22)

กำหนดให้ $\chi^2(n;\delta)$ เป็นตัวแปรสุ่มไคกำลังสองไร้ศูนย์กลาง ด้วยองศาความเป็นอิสระ $= n$ และค่าพารามิเตอร์ไร้ศูนย์กลาง = δ (ตัวสถิตินี้มีการแจกแจงของ $\|X\|^2 (=\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ โดยที่ $X \sim N(\theta, I_n)$ และ $\|\theta\|^2 = \delta$)

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางสามารถเขียนได้เป็น

(2.20) $$f_{n,\delta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{m!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{m} f_{n+2m}(t)$$

เมื่อ $f_{n+2m,0}(t)$ คือ $f_{k,0}(x) = 2^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}} \exp(-x/2)$, $x > 0$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมไคกำลังสองไร้ศูนย์กลางสามารถเขียนได้เป็น

(2.21) $$P[\chi^2_{n,\delta} \le t] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{m!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2} P[\chi^2_{n+2m} \le t]$$

จาก (เบิก และ โกวินดาราจูลู , 1989 : 127-129)

(2.22) $$F_n^{\delta}(x) = F_1^{\delta}(x) - e^{-(\delta+x)/2}\sum_{j=1}^{k}(x/\delta)^{(2j-1)/4} I_{j-(1/2)}(\sqrt{\delta x}) \ , n = 2k+1$$

เมื่อ $F_1^{\delta}(x) = \Phi(a) - \Phi(b)$ และ $\Phi(.)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

$$a = \sqrt{\lambda} + \sqrt{x} \ , \ b = \sqrt{\lambda} - \sqrt{x} \ , \quad I_{v+1}(y) = I_{v-1}(y) - (\frac{2v}{y}) I_v(y) \ ,$$

$I_{\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sinh\ y$ และ $I_{\frac{3}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}[\cosh\ y - (\sinh\ y)/y]$