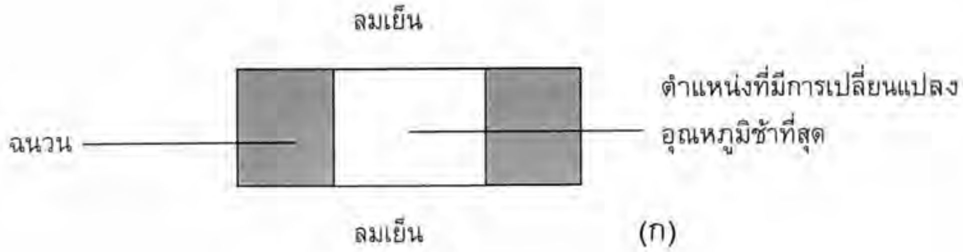
บทที่ 3

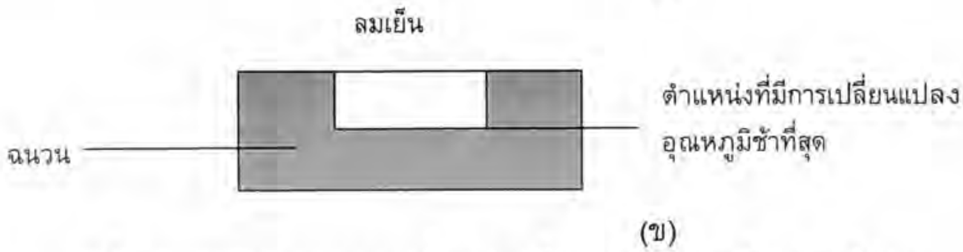
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 การพัฒนาแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งปลาหมึกกระดองโดยวิธีเชิงเลข

การศึกษาแบบจำลอง เพื่อศึกษาการแช่เยือกแข็งปลาหมึกกระดอง ในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาให้มีการถ่ายโอนความร้อนแบบทิศทางเดียวตามความหนาของปลาหมึก ซึ่งสามารถจำลองแบบได้ 2 แบบ คือ แบบที่ 1 จำลองแบบให้ตัวอย่างมีการถ่ายโอนความร้อนออกทั้งสองด้านของผิวหน้าอาหาร ตัวอย่างมีการสัมผัสลมเย็นทั้ง 2 ด้าน โดยตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิช้าที่สุดอยู่กึ่งกลางชิ้นอาหาร (รูปที่ 3.1ก) หรือแบบที่ 2 จำลองแบบให้ตัวอย่างมีการถ่ายโอนความร้อนออกเพียงด้านเดียว โดยใช้ความหนาตัวอย่างเพียงครึ่งหนึ่งของความหนาในการจำลองแบบแบบที่ 1 ตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิช้าที่สุดอยู่ด้านล่างสุดของอาหาร (รูปที่ 3.1ข) สำหรับการศึกษาเวลาในการแช่เยือกแข็งจากการทดลองนี้ ใช้การจำลองแบบตามรูปที่ 3.1ข เนื่องจากการหาเวลาในการแช่เยือกแข็งปลาหมึกกระดอง จากการทดลองเพื่อทวนสอบผลการการทำนายสามารถจำลองแบบได้ง่าย และควบคุมภาวะเริ่มต้น ภาวะขอบเขตที่ผิว ภาวะการแช่เยือกแข็งให้ตรงกับที่กำหนดได้ง่ายกว่าการจำลองแบบแบบที่ 1



(ก)

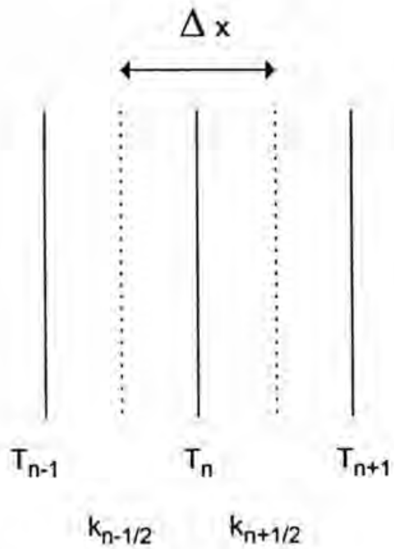


(ข)

รูปที่ 3.1 การจำลองแบบการศึกษาเวลาในการแช่เยือกแข็งอาหารที่มีการถ่ายโอนความร้อนแบบทิศทางเดียว

การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งปลาหมึกกระดองด้วยวิธีเชิงเลขในงานวิจัยนี้ ใช้หลักการแก้สมการเชิงอนุพันธ์การถ่ายโอนความร้อนแบบทิศทางเดียว ด้วยวิธี explicit finite difference โดยอาหารมีความหนา d หน่วย อาหารจะถูกแบ่งเป็น X ส่วน แต่ละส่วนมีความหนา Δx หน่วย ซึ่งมีจุดแบ่งของอาหาร (node) รวมส่วนของอากาศ (ลมเย็น) ทั้งหมด N ส่วน โดย nodeที่ 1 เป็น node ตำแหน่งลมเย็น nodeที่ 2 ถึง N-1 เป็น node ภายในอาหาร และ node ที่ N เป็น node ตำแหน่งผิวล่างอาหาร ดังนั้นสมดุลความร้อนในส่วนของ Δx ของอาหารแสดงดังสมการ 3.1 (Cleland และ Earle, 1984a)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.1}$$



รูปที่ 3.2 ภาพตัดขวางแสดงส่วน Δx ของอาหารที่มีการถ่ายโอนความร้อนในทิศทางเดียว

กำหนดให้ภาวะขอบเขต (boundary condition) เป็นแบบภาวะที่ 3 คือ convective heat transfer (สมการ 3.2) โดย node ที่ 1 เป็นอุณหภูมิลมเย็น (สมการ 3.3) และภาวะเริ่มต้นของการแช่เยือกแข็ง คือ อาหารมีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากันทั้งชิ้น (สมการ 3.4) (Cleland และ Earle, 1977a; Cleland, 1990)

$$h(T_a - T_s) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \quad \text{เมื่อ } t > 0 \tag{3.2}$$

$T_1 = T_a$ ณ เวลาใดๆ เมื่อ n =1 เป็นตำแหน่งลมเย็น (3.3)

$T_n = T_i$ เมื่อ t = 0 n = 2 ถึง N (ตลอดชิ้นอาหาร) (3.4)

เมื่อ h คือ สัมประสิทธิ์การถ่ายโอนความร้อนที่ผิว *(W/m².K)*, T_a คือ อุณหภูมิลมเย็น (°C), T_s คือ อุณหภูมิที่ผิวของอาหาร (°C), T_i คือ อุณหภูมิเริ่มต้นของอาหาร (°C), T_n คือ อุณหภูมิตำแหน่งใดๆ ของอาหาร (°C), C_p คือ ค่าความร้อนจำเพาะ (cal/g.°C), k คือ ค่าสภาพนำความร้อน (W/m.K) อุณหภูมิของอาหารที่ตำแหน่ง node ใดๆ ณ เวลาใดๆ คำนวณได้จากสมการ 3.5 (Cleland, 1990)

$$T_n^{i+1} = \frac{\Delta t k_{n+1/2}^i (T_{n+1}^i - T_n^i)}{(\rho C_p)_n^i \Delta x^2} - \frac{\Delta t k_{n-1/2}^i (T_n^i - T_{n-1}^i)}{(\rho C_p)_n^i \Delta x^2} + T_n^i \qquad (3.5)$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาภาวะที่ผิวของอาหาร (node 2) อุณหภูมิที่ผิวของอาหารที่ time step ต่อไปได้ดังนี้

$$T_2^{i+1} = \frac{\Delta t k_{2+1/2}^i (T_3^i - T_2^i)}{(\rho C_p)_2^i \Delta x^2} - \frac{\Delta t h (T_2^i - T_1^i)}{(\rho C_p)_2^i \Delta x} + T_2^i \qquad (3.6)$$

และเมื่อพิจารณาภาวะตำแหน่งจุดศูนย์กลางความร้อน (node N) อุณหภูมิอาหารที่ time step ต่อไป คือ

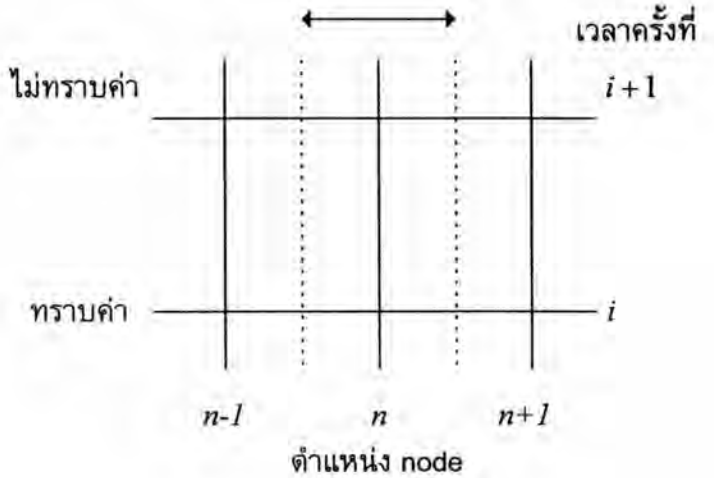
$$T_N^{i+1} = \frac{-\Delta t k_{N-1/2}^i (T_N^i - T_{N-1}^i)}{(\rho C_p)_N^i \Delta x^2} - + T_N^i \qquad (3.7)$$

เมื่อ $k_{N+1/2}^i = 0$ (ตำแหน่งฉนวน) (3.8)

สำหรับ node 3 ถึง N-1 ในอาหาร (interior node) สามารถหาอุณหภูมิที่ time step ต่อไปได้ตามสมการ 3.5

$$T_n^{i+1} = \frac{\Delta t k_{n+1/2}^i (T_{n+1}^i - T_n^i)}{(\rho C_p)_n^i \Delta x^2} - \frac{\Delta t k_{n-1/2}^i (T_n^i - T_{n-1}^i)}{(\rho C_p)_n^i \Delta x^2} + T_n^i \qquad (3.5)$$

เมื่อ i และ $i+1$ คือ เวลาครั้งที่ i และ $i+1$, *n-1, n-1/2, n, n+1/2, n+1* คือ node ตำแหน่งต่างๆ (รูปที่ 3.2) , T คือ อุณหภูมิ (°C), ρ คือ ค่าความหนาแน่น (kg/m^3) ประเมินที่อุณหภูมิ T_n , C_p คือ ค่าความร้อนจำเพาะ (cal/g.°C) ประเมินที่อุณหภูมิ T_n , $k'_{n-1/2}$ คือ ค่าสภาพนำความร้อนประเมินที่อุณหภูมิ $0.5(T_n - T_{n-1})$, $k'_{n+1/2}$ คือ ค่าสภาพนำความร้อน (W/m.K) ประเมินที่อุณหภูมิ $0.5(T_n - T_{n+1})$ และจากสมการ 3.5-3.8 แสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิที่ node ใดๆ ณ เวลาครั้งที่ $i+1$ สามารถคำนวณได้โดยตรงจากอุณหภูมิของ 3 node คือ *n-1, n, n+1* ซึ่งทราบค่ามาแล้วจากการคำนวณ ณ เวลาครั้งที่ i แสดงดังรูปที่ 3.3 (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2538)



รูปที่ 3.3 การคำนวณโดยวิธี explicit finite difference

ในการคำนวณเวลาในการแช่เยือกแข็งโดยวิธีเชิงเลขต้องกำหนด space step (*Δx*) และ time step (*Δt*) การกำหนดดังกล่าวเป็นไปตามเงื่อนไขของหลักการ explicit finite difference และต้องพิจารณาค่าสมบัติทางกายภาพและความร้อนของอาหารที่เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิร่วมด้วย (Miyawaki และคณะ, 1989; Gerald และ Wheatley, 1994) ดังสมการ 3.9

$$\frac{k_{max}\Delta t}{(\rho Cp)_{min}\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \tag{3.9}$$

ซึ่งความหมายของสมการนี้คือ ภายหลังจากการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ ชิ้นอาหารประกอบด้วย node ต่างๆที่มีระยะห่างกัน เท่ากับ Δx ค่าใดค่าหนึ่ง จะก่อให้เกิดเงื่อนไขของการใช้ Δt สูงสุดได้เพียงค่าๆ หนึ่ง ซึ่งเรียกว่า ช่วงเวลาวิกฤต (critical time step) หากใช้ Δt

ที่มีค่ามากกว่าช่วงเวลาวิกฤตในการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้จะเกิดการลู่ออก (diverge) จากผลลัพธ์ที่ควรจะเป็น และหากต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ต้องกำหนดให้มีจุดต่อมากขึ้นหรือใช้ Δx มีค่าลดลง การใช้ Δx ที่มีค่าลดลงดังกล่าวจะก่อให้เกิดขีดจำกัดของการใช้ Δt ซึ่งมีค่าลดลงมากยิ่งขึ้นตามไปด้วยในอัตรา Δx กำลังสอง

3.2 การทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งปลาหมึกกระดองโดยใช้สมการอย่างง่าย

แบบจำลองอย่างง่ายที่นิยมนำมาใช้ทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็ง ได้แก่ แบบจำลองของ Plank (1941), แบบจำลองของ IIR (1972), แบบจำลองของ Cleland และ Earle (1984b), แบบจำลองของ Pham (1986b) เนื่องจากแบบจำลองดังกล่าว ใช้ข้อมูลในการคำนวณน้อย

แบบจำลองของ Plank (1941)

Plank (1941) ศึกษาแบบจำลองพื้นฐานเพื่อหาเวลาในการแช่เยือกแข็งอาหารที่มีความหนา D หน่วย มีการถ่ายโอนความร้อนออกทั้งสองด้านของผิวหน้าอาหาร (รูปที่ 3.1ก) เวลาในการแช่เยือกแข็งแสดงดังสมการ 3.10

$$t_f = \frac{\rho_f L}{T_{if} - T_a}\left(\frac{D}{2h} + \frac{D^2}{8k_f}\right) \tag{3.10}$$

สมการในรูปทั่วไป

$$t_f = \frac{\rho_f L}{T_{if} - T_a}\left(\frac{PD}{h} + \frac{RD^2}{k_f}\right) \tag{3.11}$$

จากสมการ 3.10 และ 3.11 ค่า geometric factor P = 1/2 และ R = 1/8 ในตัวอย่างรูปทรง infinite slab แต่การศึกษาในงานวิจัยนี้ จำลองแบบให้ตัวอย่างมีการถ่ายโอนความร้อนออกเพียงด้านเดียวคือทางผิวหน้าอาหาร จากสมการของ Plank (1941) สามารถ derive สำหรับอาหารที่มีความหนา d ตามรูป 3.1 ข

$$t_f = \frac{\rho_f L}{T_{if} - T_a}\left(\frac{d}{h} + \frac{d^2}{2k_f}\right) \tag{3.12}$$

สมการในรูปทั่วไป

$$t_f = \frac{\rho_f L}{T_{if} - T_a}\left(\frac{P_1 d}{h} + \frac{R_1 d^2}{k_f}\right) \tag{3.13}$$

จากสมการพบว่า ค่า $P_1 = 1$, $R_1 = 1/2$ ซึ่งมีค่า 2 และ 4 เท่าของ P และ R ในสมการ 3.11 การ derive แบบจำลองของ IIR (1972), แบบจำลองของ Cleland และ Earle (1984b), และแบบจำลองของPham (1986b) ซึ่งใช้ศึกษาการทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งในงานวิจัยนี้ จึงได้ derive ให้สอดคล้องกับการจำลองแบบที่ใช้โดยตัวอย่างมีความหนา d หน่วย มีการถ่ายโอนความร้อนออกเพียงด้านเดียว (รูปที่ 3.1ข)

แบบจำลองของ IIR (1972)

ดัดแปลงสมการของ Plank (1941) (สมการ 3.12) โดยแทนที่ความร้อนแฝงในสมการ Plank (1941) ด้วยเอนทาลปีระหว่างจุดเยือกแข็งเริ่มต้นจนถึงอุณหภูมิสุดท้ายที่ตำแหน่งกึ่งกลางอาหารเวลาในการแช่เยือกแข็ง แสดงดังสมการ 3.14

$$t_f = \frac{\rho_f \Delta H_i}{T_{if} - T_a}\left(\frac{d}{h} + \frac{d^2}{2k_f}\right) \tag{3.14}$$

เมื่อ $\Delta H_i = L_w x_{wo} + C_{pf}(T_{if} - T_c)$ (3.15)

แบบจำลองของ Cleland และ Earle (1984b)

Cleland และ Earle (1977b, 1979) พัฒนาแบบจำลองทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งอาหารรูปทรง slab ทรงกระบอกและทรงกลม (ซึ่งกำหนดให้อุณหภูมิสุดท้ายของอาหารเป็น -10°C) โดย Cleland และ Earle (1977b, 1979) แทนที่ความร้อนแฝงในสมการ Plank (1941) ด้วยเอนทาลปีระหว่างอุณหภูมิจุดเยือกแข็งเริ่มต้นกับอุณหภูมิสุดท้ายของอาหาร ที่จุดศูนย์กลางเป็น -10°C และหาค่า geometric factor จากสมการตัวแปรไร้หน่วย Cleland และ Earle (1982, 1984b) ได้ใช้แนวทางการหา equivalent heat transfer dimensionality (EHTD) มาใช้คำนวณเวลาในการแช่เยือกแข็งในอาหารรูปทรงเรขาคณิตอื่นๆ และปรับปรุงแบบจำลองเพื่อประยุกต์ใช้ทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งเมื่ออุณหภูมิสุดท้ายของอาหารต่ำกว่า -10°C การคำนวณเวลาในการแช่เยือกแข็งจากอุณหภูมิเริ่มต้นถึงอุณหภูมิสุดท้ายของอาหารจะคิดเทียบกับเวลาในการแช่เยือกแข็งจากจุดเยือกแข็งถึงอุณหภูมิสุดท้ายของอาหารโดยคิดที่อุณหภูมิอ้างอิง (-10 °C) โดยหาค่าความสัมพันธ์ของ factor ต่างๆ ที่ศึกษาได้จากการทดลองมาคำนวณ ซึ่งเวลาในการแช่เยือกแข็งอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$t_f = (t_f to T_{ref}).[1-(\frac{1.65Ste}{k_f}\ln(\frac{T_c-T_a}{-10-T_a}))] \quad (3.16)$$

$$t_f = \frac{\rho_f \Delta H_{10}}{(T_{if}-T_a)EHTD_1}(\frac{P_2 d}{h}+\frac{R_2 d^2}{k_f})[1-(\frac{1.65Ste}{k_f}\ln(\frac{T_c-T_a}{-10-T_a}))] \quad (3.17)$$

เมื่อ $\Delta H_{10} = L_w X_{wo} + C_{pf}(T_{if}-T_{-10})$ (3.18)

$P_2 = 2(0.5)\ [1.026+0.5808Pk+Ste(0.2296\ Pk +0.1050)]$ (3.19)

$R_2 = 4(0.125)\ [1.202+Ste(3.41Pk+0.7336)]$ (3.20)

$Pk = C_{pu}(T_i - T_{if}) / H_{10}$ (3.21)

$Ste = C_{pf}(T_{if} - T_a) / H_{10}$ (3.22)

$EHTD_1$ = 1, 2, 3 สำหรับอาหารรูปทรง infinite slab, infinite cylinders และทรงกลม ตามลำดับ (3.23)

แบบจำลองของ Pham (1986b) ที่ดัดแปลงเพิ่มเติมโดย Cleland (1991) และ Hossain, Cleland และ Cleland (1992)

Pham (1985a) พัฒนาแบบจำลองหาเวลาในการแช่เยือกแข็งในระยะต่างๆ โดยในระยะ precooling และ tempering จะดัดแปลงสมการของ Newton แต่ในระยะ phase change จัดรูปสมการของ Plank (1941) ให้มีลักษณะเหมือนสมการในช่วง precooling และ tempering โดยใช้ค่า Biot number และหาอุณหภูมิจุดเยือกแข็งเฉลี่ย (mean freezing temperature) ซึ่งมีค่าต่ำกว่าจุดเยือกแข็งเริ่มต้น 1.5°C ต่อมา Pham (1986b) ได้ปรับปรุงแบบจำลองหาเวลาในการแช่เยือกแข็งอาหารโดยพิจารณาเอนทาลปีหรือความร้อนสัมผัสที่เปลี่ยนแปลงไปในระยะ precooling และ tempering รวมทั้งความร้อนแฝงที่ถูกกำจัดออกในระยะ phase change ในรูปสมการเดียว และยังมีการคำนวณหาอุณหภูมิจุดเยือกแข็งเฉลี่ย (mean freezing temperature : T_{fm}) และค่า geometric factor เพื่อใช้ประยุกต์กับอาหารรูปทรงต่างๆ Cleland (1991) และ Hossain, Cleland และ Cleland (1992) ได้ดัดแปลงแบบจำลองของ Pham (1986b) โดยประยุกต์ใช้ equivalent heat transfer dimensionality หาเวลาในการแช่เยือกแข็งของอาหารรูปทรงต่างๆ เทียบกับเวลาในการแช่เยือกแข็งของอาหารรูปทรง slab ให้มีรูปสมการง่ายขึ้น สามารถใช้ทำนายเวลาในการแช่เยือกแข็งสำหรับอาหารที่มีความชื้นมากกว่า 55% และใช้ได้ในช่วงภาวะการแช่เยือกแข็งกว้างๆ เวลาในการแช่เยือกแข็งที่มีการดัดแปลงดังกล่าวคำนวณได้ดังนี้

$$t_f = \frac{t_{slab}}{EHTD_2} \tag{3.24}$$

$$t_f = \frac{1}{EHTD_2}[\frac{\Delta H_1}{\Delta T_1} + \frac{\Delta H_2}{\Delta T_2}][\frac{d}{h} + \frac{d^2}{2k_f}] \tag{3.25}$$

เมื่อ $\Delta H_1 = \rho_u C_{pu} (T_i - T_{fm})$ (3.26)

$\Delta H_2 = \rho_f L_w x_i + \rho_f C_{pf} (T_{fm} - T_c)$ (3.27)

$\Delta T_1 = 0.5(T_i + T_{fm}) - T_a$ (3.28)

$\Delta T_2 = T_{fm} - T_a$ (3.29)

$T_{fm} = 1.8 + 0.263\ T_c + 0.105\ T_a$ (3.30)

$EHTD_2$ = 1, 2, 3 สำหรับอาหารรูปทรง infinite slab, infinite cylinders และทรงกลม ตามลำดับ (3.31)