# บทที่ 2
# ทฤษฎีและแนวคิด

## ความนำ

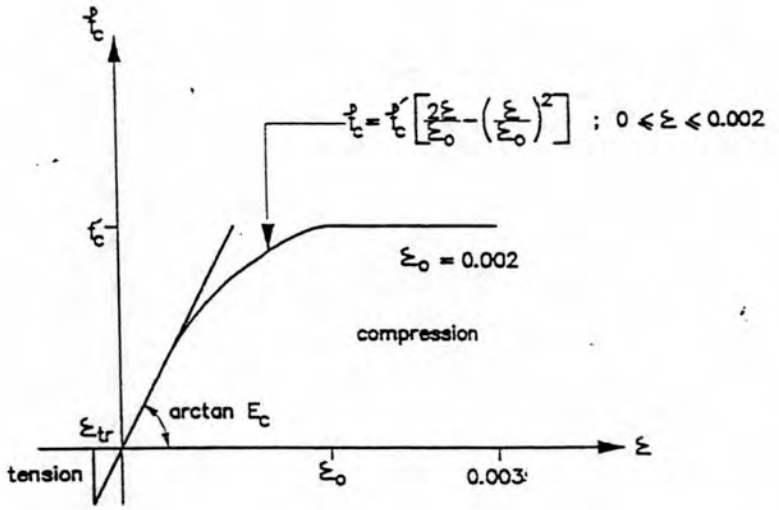
ในงานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์โครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็ก เพื่อคำนวนความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกสูงสุดของโครงข้อแข็งในระนาบที่ทราบขนาดของหน้าตัดและปริมาณเหล็กเสริมโดยได้แบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 3 ขั้นตอนหลัก ดังนี้

- การวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สองเพื่อพิจารณาถึงความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต
- การวิเคราะห์หน้าตัดเพื่อพิจารณาถึงความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุ
- การวิเคราะห์เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก

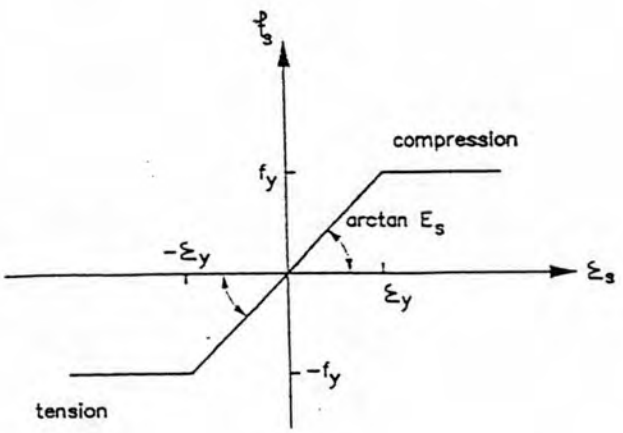
การวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สองและการวิเคราะห์หน้าตัดเมื่อนำมาพิจารณาร่วมกันในการวิเคราะห์ต้องสอดคล้องกัน คือ ความเครียดที่ได้จากทั้งสองวิธีต้องมีค่าเท่ากัน

## สมมติฐานที่ใช้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นคอนกรีต เนื่องจากหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัด (Baker and Amarakorn , 1964)
2. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเป็นแบบอิลาสติก- พลาสติกสมบูรณ์ (elastic - perfectly plastic) ดังแสดงในรูปที่ 2.2
3. ความเครียดมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากแนวแกนสะเทิน นั่นคือระนาบของหน้าตัดชิ้นส่วนจะยังคงเป็นระนาบทั้งก่อนและหลังการแตกร้าว.
4. พิจารณาเฉพาะหน้าตัดที่เหล็กเสริมสมมาตรกัน ดังนั้นในการวิเคราะห์หน้าตัดกำหนดให้แรงในแนวแกนกระทำที่กึ่งกลางความลึกของหน้าตัดเท่านั้น
5. คำนึงถึงผลของการแตกร้าว โดยเมื่อโมเมนต์ดัดเกินกว่าโมเมนต์การแตกร้าว กำหนดให้สติฟเนสของการดัดแปรเปลี่ยนเป็นแบบพาราโบลาตลอดความยาวขององค์อาคาร
6. เงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกพิจารณาจากการกระจายความเครียดของหน้าตัดในการวิเคราะห์หน้าตัดเมื่อความเครียดที่ผิวบนสุดเนื่องจากหน่วยแรงอัดของคอนกรีตเท่ากับความเครียดประลัยและความเครียดของเหล็กเสริมรับแรงดึงทั้งหมดมีค่าตั้งแต่ความเครียดคลากไปแล้ว




รูปที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต




รูปที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็ก

<u>สติฟเนสขององค์อาคาร</u>

การสร้างสติฟเนสเมตริกซ์ที่รวมผลความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต ทำโดยอาศัยหลักการของ ค่าสเตชันเนอรี่ของพลังงานศักย์รวม(principle of stationary total potential energy) เริ่มต้นจาก สมการพลังงานศักย์รวม(total potential energy,$\pi$) ดังนี้ (Chen and Lui,1991)

$$\pi = \mathcal{U} + \mathcal{V} \tag{2.1}$$

เมื่อ $\mathcal{U}$ เป็นพลังงานความเครียด ( strain energy )

ดังนั้น $$\mathcal{U} = \int_V \int_\varepsilon \sigma . d\varepsilon . dV = \int_0^L \int_A \int_\varepsilon (\sigma \, d\varepsilon) \, dA \, dx \tag{2.2}$$

โดยที่ $\sigma$ คือ ความเค้นในแนวแกน

$\varepsilon$ คือ ความเครียดในแนวแกน

$V$ คือ ปริมาตรขององค์อาคาร

$A$ คือ พื้นที่หน้าตัด

$L$ คือ ความยาว

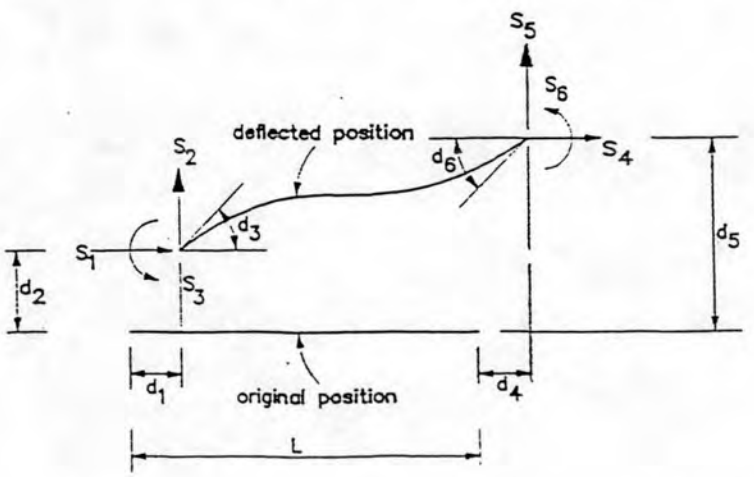
ขณะที่ $\mathcal{V}$ คือ พลังงานศักย์ ( potential energy )

ดังนั้น $$\mathcal{V} = -\sum_{i=1}^{n} s_i \, d_i = -\{d\}^T \{S\} \tag{2.3}$$

โดยที $s_i$ คือ แรงกระทำที่ปลาย (element nodal force)

$d_i$ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย (element nodal displacement)

แรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายขององค์อาคารแสดงในรูปที่2.3




รูปที่ 2.3 องค์อาคารภายใต้แรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง

จากกฎของฮุค ( Hook's law ) $\sigma = E\varepsilon$ (2.4)

เมื่อ $E$ เป็น อิลาสติกโมดูลัส( Young's modulus of elastic material )

แทนสมการ(2.4) ลงในสมการ (2.2) และอินทิเกรต จะได้

$$\mathcal{U} = \int_0^L \int_A \frac{E}{2} \varepsilon^2 dA dx \tag{2.5}$$

ในการวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต สามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่ง( strain-displacement relationship )ได้ดังนี้ ( Wen and Rahimzadeh,1982 )

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2.6}$$

โดยที่ $u$ และ $v$ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนและแนวตั้งฉากกับแกนขององค์อาคารตามลำดับ ที่มาของสมการ(2.6) แสดงในภาคผนวก ก. และเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนมีค่าน้อย ดังนั้นสามารถละทิ้งพจน์ที่สองได้ เขียนความสัมพันธ์ใหม่ดังนี้

$$\varepsilon \cong \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2.7}$$

แทน (2.7) ลงใน (2.5) และอินทิเกรตพื้นที่หน้าตัดเราจะได้

$$\mathcal{U} = \int_0^L \frac{E}{2}\left[A\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + I\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + A\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{A}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4\right]dx \tag{2.8}$$

โดยที่

$$I = \int_A y^2 dA$$

$$A = \int_A dA$$

$$\int_A y dA = 0$$

พจน์สุดท้ายของสมการ(2.8) มีค่าน้อยสามารถละทิ้งได้และเมื่อ

$$P = EA\frac{du}{dx} \tag{2.9}$$

ดังนั้นสมการ(2.8) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\mathcal{U} = \int_0^L \frac{E}{2}\left[A\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + I\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]dx + \int_0^L \frac{P}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{2.10}$$

เพื่อที่จะสามารถสร้างสติฟเนสเมตริกซ์ได้ จำเป็นต้องทำการสมมุติลักษณะการกระจายของค่าเปลี่ยนตำแหน่ง $u$ และ $v$ ก่อนดังนี้

$$u = a_0 + a_1 x \tag{2.11}$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \tag{2.12}$$

จากเงื่อนไขที่จุดต่อคือ

$$u|_{x=0} = d_1 \quad , \quad u|_{x=L} = d_4 \tag{2.13}$$

$$v|_{x=0} = d_2 \quad , \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = d_3 \quad , \quad v|_{x=L} = d_5 \quad , \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=L} = d_6 \tag{2.14}$$

จากนั้นจึงสามารถเขียนสมการลักษณะการกระจายของค่าเปลี่ยนตำแหน่ง $u$ และ $v$ ให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$u(x) = \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{L}) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} (1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}) & (x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}) & (\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}) & (-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

หรือเขียนในรูปของสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$u(x) = \{N_u\}\{d\} \tag{2.17}$$

$$v(x) = \{N_v\}\{d\} \tag{2.18}$$

โดยที่ $N_u$ และ $N_v$ แทนฟังก์ชันรูปร่าง ( shape function )

แทนค่า (2.10) และ (2.3) ลงใน (2.1) เราจะได้

$$\pi = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right) EA \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) EI \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \sum_{i=1}^{6} s_i d_i \tag{2.19}$$

โดยที่

$$\frac{du}{dx} = \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}_{1\times 2} \{d\}_{2\times 1} = \{d\}^T_{1\times 2} \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}^T_{2\times 1}$$

$$\frac{dv}{dx} = \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}_{1\times 4} \{d\}_{4\times 1} = \{d\}^T_{1\times 4} \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}^T_{4\times 1}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}_{1\times 4} \{d\}_{4\times 1} = \{d\}^T_{1\times 4} \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}^T_{4\times 1}$$

ดังนั้น

$$\pi = \frac{1}{2}\int_0^L \{d\}^T \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}^T EA\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}\{d\}dx + \frac{1}{2}\int_0^L \{d\}^T \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}^T EI\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}\{d\}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L \{d\}^T \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}^T P\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}\{d\}dx - \{d\}^T\{S\} \qquad (2.20)$$

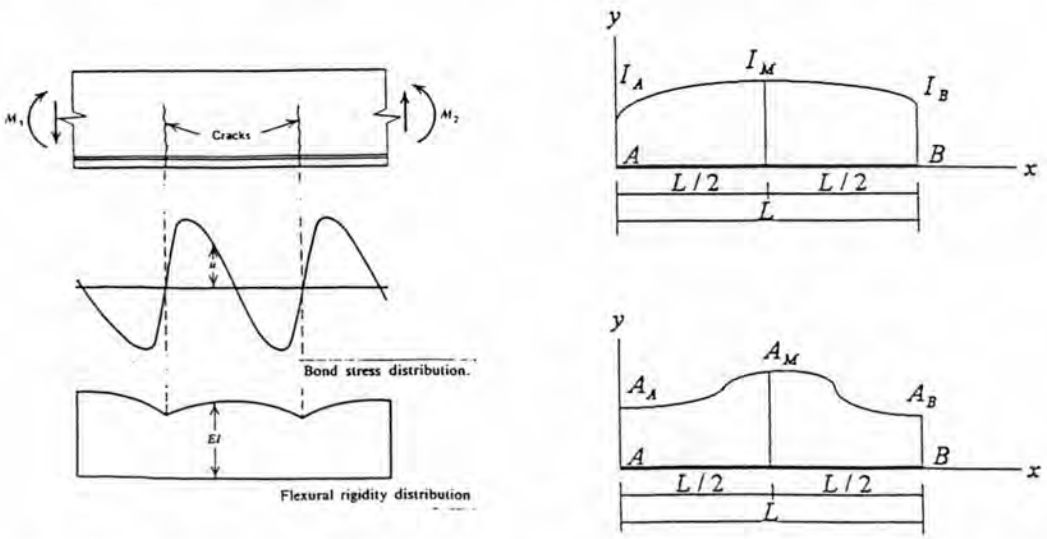
จากหลักการของค่าสเตชันเนอรีของพลังงานศักย์รวม( principle of stationary total potential energy ) สภาวะสมดุลเกิดเมื่อ การแปรเปลี่ยนอันดับแรกของ พลังงานศักย์รวมเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนรูปและการเปลี่ยนตำแหน่ง( deformation and displacement ) มีค่าเท่ากับศูนย์ ( Norris,Wilbur and Utka,1991)

$$\delta_d \pi = 0 \qquad (2.21)$$

นั่นคือ

$$\int_0^L \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}^T EA\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}\{d\}dx + \int_0^L \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}^T EI\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}\{d\}dx$$
$$+\int_0^L \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}^T P\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}\{d\}dx - \{S\} = 0 \qquad (2.22)$$

จากสมมุติฐานที่ว่าเมื่อหน้าตัดเกิดการแตกร้าว สติฟเนสของการดัดจะแปรเปลี่ยนแบบพาราโบลาตลอดความยาวขององค์อาคาร( Pulmano and Shin,1987) เพราะหน่วยแรงดึงซึ่งเกิดขึ้นบนหน้าตัดที่แตกร้าวมีเหล็กเสริมเป็นวัสดุรับแรงและถ่ายเทแรงสู่คอนกรีตในรูปของแรงยึดเหนี่ยว (bond stress)ซึ่งแปรตามระยะฝัง(embedment length)(Park and Paulay,1975) ดูรูปที่2.4




รูปที่2.4 การแปรเปลี่ยนสติฟเนสของการดัดขององค์อาคารเมื่อหน้าตัดเกิดการแตกร้าว

สมการของสติฟเนสของการดัดที่แปรเปลี่ยนแบบพาราโบลา($EI_c$)เขียนได้เป็น

$$EI_c = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 \tag{2.23}$$

โดยที่ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ เป็นค่าคงตัวสามารถหาได้จากสภาพเงื่อนไข ดังนี้

$EI_{x=0} = EI_A$ (สติฟเนสของการดัดที่จุดเริ่มขององค์อาคาร)

$EI_{x=L/2} = EI_M$ (สติฟเนสของการดัดที่จุดกึ่งกลางขององค์อาคาร)

$EI_{x=L} = EI_B$ (สติฟเนสของการดัดที่จุดปลายขององค์อาคาร)

จากเงื่อนไขดังกล่าวสมการ(2.23) เขียนได้เป็น

$$EI_c(x) = EI_A + \left(-3EI_A + 4EI_M - EI_B\right)\frac{x}{L} + 2\left(EI_A - 2EI_M + EI_B\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{2.24}$$

โดยที่ $x$ คือระยะใดๆจากจุดเริ่มต้นขององค์อาคาร

$L$ คือความยาวขององค์อาคาร

สำหรับสติฟเนสของแรงในแนวแกนเมื่อหน้าตัดเกิดการแตกร้าว($EA_c$) มีสมมุติฐานให้มีการแปรเปลี่ยนแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยให้

$EA_{x=0} = EA_A$ (สติฟเนสของแรงในแนวแกนที่จุดเริ่มขององค์อาคาร)

$EA_{x=L/2} = EA_M$ (สติฟเนสของแรงในแนวแกนที่จุดกึ่งกลางขององค์อาคาร)

$EA_{x=L} = EA_B$ (สติฟเนสของแรงในแนวแกนที่จุดปลายขององค์อาคาร)

เขียนสมการ(2.22)ใหม่ตามสมมุติฐานการแปรเปลี่ยนของ สติฟเนสของการดัด และสติฟเนสของแรงในแนวแกน ดังนี้

$$\int_0^L \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}^T EA_c\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}\{d\}dx + \int_0^L \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}^T EI_c\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}\{d\}\,dx + \int_0^L \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}^T P\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}\{d\}dx - \{S\} = 0 \tag{2.25}$$

แทนสติฟเนสของการดัดตามสมการ(2.24)ในสมการ(2.25) และสำหรับสติฟเนสของแรงในแนวแกนเมื่อใช้อินทิเกรตเชิงเลข(numerical integration) โดยกฎของซิมพ์สัน(Simpson's rule) จะมีค่าตามสมการนี้

$$\int_0^L EA_c(x)dx = \frac{E}{6}\left[A_A + 4A_M + A_B\right] \tag{2.26}$$

สติฟเนสเมตริกซ์ที่ได้จากสมการ(2.25) เขียนในรูปของสัญลักษณ์เมตริกซ์เป็น

$$\left(\{k_m\}+\{k_g\}\right)\{d\} = \{S\} \tag{2.27}$$

โดยที่ $\{k_m\}$ เรียกว่า สติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้นดัดแปลง(modified linear stiffness matrix)

$$\{k_m\} = \int_0^L \left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}^T EA_c\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}dx + \int_0^L \left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}^T EI_c\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}dx \tag{2.28}$$

สามารถเขียนสติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้นดัดแปลงที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{d\} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{bmatrix}^T$ ดังนี้

$$\{k_m\} = \begin{bmatrix} a & h & h & -a & h & h \\ & b & c & h & -b & e \\ & & d & h & -c & f \\ & & & a & h & h \\ & SYM. & & & b & -e \\ & & & & & g \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

ที่มาของสมการ(2.29)แสดงในภาคผนวก ข.

ค่าคงที่ $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ และ $h$ สำหรับองค์อาคารมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} a &= E\bar{A}/L \\ b &= E(12\bar{I}_1/L^3 + 6\bar{I}_2/L^2 + 24\bar{I}_3/5L) \\ c &= E(6\bar{I}_1/L^2 + 2\bar{I}_2/L + 7\bar{I}_3/5) \\ d &= E(4\bar{I}_1/L + \bar{I}_2 + 8\bar{I}_3L/15) \\ e &= E(6\bar{I}_1/L^2 + 4\bar{I}_2/L + 17\bar{I}_3/5) \\ f &= E(2\bar{I}_1/L + \bar{I}_2 + 13\bar{I}_3L/15) \\ g &= E(4\bar{I}_1/L + 3\bar{I}_2 + 38\bar{I}_3L/15) \\ h &= 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{6}\left[A_A + 4A_M + A_B\right] \\ \bar{I}_1 &= I_A \\ \bar{I}_2 &= (1/L)\left[-3I_A + 4I_M - I_B\right] \\ \bar{I}_3 &= (2/L^2)\left[I_A - 2I_M + I_B\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

เมื่อ $A_A, A_M, A_B$ และ $I_A, I_M, I_B$ ในสมการ(2.31)เป็นพื้นที่หน้าตัดและโมเมนต์ของความเฉื่อยที่ตำแหน่งเริ่ม,กึ่งกลางและปลายขององค์อาคารตามลำดับ ซึ่งหาได้จากการปรับปรุงสติฟเนสจากวิธี central difference ในการวิเคราะห์หน้าตัดเมื่อหน้าตัดแตกร้าวแล้ว ก่อนหน้าตัดแตกร้าวพื้นที่หน้าตัดและโมเมนต์ของความเฉื่อยได้จากคุณสมบัติของหน้าตัดแปลง(transformed section) ซึ่งทุกตำแหน่งขององค์อาคารมีค่าพื้นที่หน้าตัดและโมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากัน ทำให้ในสมการ(2.31) $\overline{A}$ เป็นพื้นที่หน้าตัดแปลงตามปกติ, $\bar{I}_2, \bar{I}_3$ มีค่าเป็นศูนย์และ $\bar{I}_1$ เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยจากหน้าตัดแปลง รวมแล้วทำให้สมการ(2.29)กลับเป็นสติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้น

สำหรับ $\{k_g\}$ คือสติฟเนสเมตริกซ์ไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต(geometric stiffness matrix)

$$\{k_g\} = \int_0^L \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}^T P \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\} dx \qquad (2.32)$$

เขียนสติฟเนสเมตริกซ์ไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]^T$ ดังนี้

$$\{k_g\} = \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & SYM. & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (2.33)$$

โดย $P$ มีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง ที่มาของสมการ(2.33)แสดงในภาคผนวก ข.

เมื่อรวมผลของสติฟเนสเชิงเส้นดัดแปลงเข้ากับสติฟเนสเมตริกซ์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต เขียนในรูปสัญลักษณ์เมตริกซ์ ดังนี้

$$\{k_t\} = \{k_m\} + \{k_g\} \qquad (2.34)$$

เมื่อเขียนสติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคารที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]^T$ ได้ดังนี้

$$\{k_t\}\{d\} = \{S\} \qquad (2.35)$$

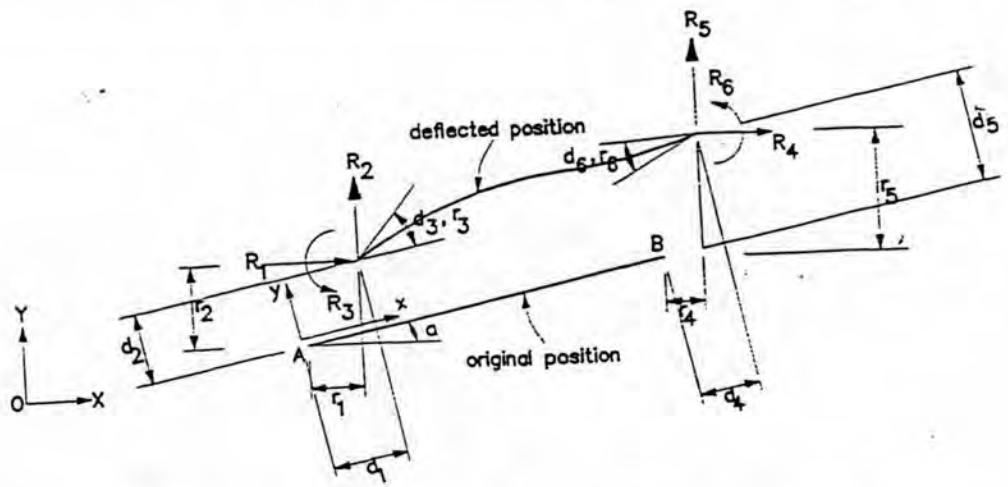
โดยที่ $\{k_t\}$ เป็นสติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคารในระบบพิกัดเฉพาะ

$\{d\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะ

$\{S\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงกระทำในระบบพิกัดเฉพาะ

การรวมสติฟเนส

ในกรณีที่องค์อาคารไม่ได้วางอยู่ในระบบพิกัดหลัก( global coordinate) จำเป็นต้องมีการหมุนเพื่อเปลี่ยนตำแหน่งและแรงกระทำที่กำหนดอยู่ในระบบพิกัดเฉพาะ( local coordinate ) ให้อยู่ในระบบพิกัดหลักก่อน พิจารณาองค์อาคารซึ่งไม่ได้วางอยู่ในระบบพิกัดหลัก ดังรูปที่2.5




รูปที่ 2.5 องค์อาคารวางในระบบพิกัดหลัก( Chen and Lui,1991)

จากรูปพิกัดหลักเป็น XY และมีโคออดิเนตประจำตัวเป็น xy ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดหลักกับพิกัดเฉพาะเป็น

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

เมื่อ

$\{d\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะ

$\{r\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดหลัก

$\alpha$ เป็นมุมระหว่างแกนขององค์อาคารกับแกนแนวราบของระบบพิกัดหลัก

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{d\} = \{a\}\{r\} \tag{2.37}$$

โดย $\{a\}$ คือเมตริกซ์แปลงการเปลี่ยนตำแหน่ง(displacement transformation matrix) และมีคุณสมบัติเป็น orthogonal matrix คือให้ $\{a\}^{-1} = \{a\}^T$ ดังนั้น

$$\{r\} = \{a\}^T\{d\} \tag{2.38}$$

17873721

สมการ(2.37)เป็นความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะกับการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดหลัก จะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำในระบบพิกัดเฉพาะกับแรงกระทำในระบบพิกัดหลักได้ในทำนองเดียวกัน คือ

$$\{R\} = \{a\}^T\{S\} \tag{2.39}$$

เมื่อ $\{S\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในระบบพิกัดเฉพาะ

$\{R\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในระบบพิกัดหลัก

ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดหลักได้เป็น

$$\{R\} = \{a\}^T\{k_l\}\{a\}\{r\} \quad \text{หรือ} \quad \{R\} = \left[K_g\right]^i\{r\} \tag{2.40}$$

เมื่อ $\left[K_g\right]^i$ เป็น สติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคารในระบบพิกัดหลัก

ถ้าพิจารณาองค์อาคารทั้งหมด n ชิ้นส่วนในโครงสร้างจะได้

$$\{R\} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left[K_g\right]^i\right)\{r\}$$

ให้ $$[K] = \left(\sum_{i=1}^{n}\left[K_g\right]^i\right)$$

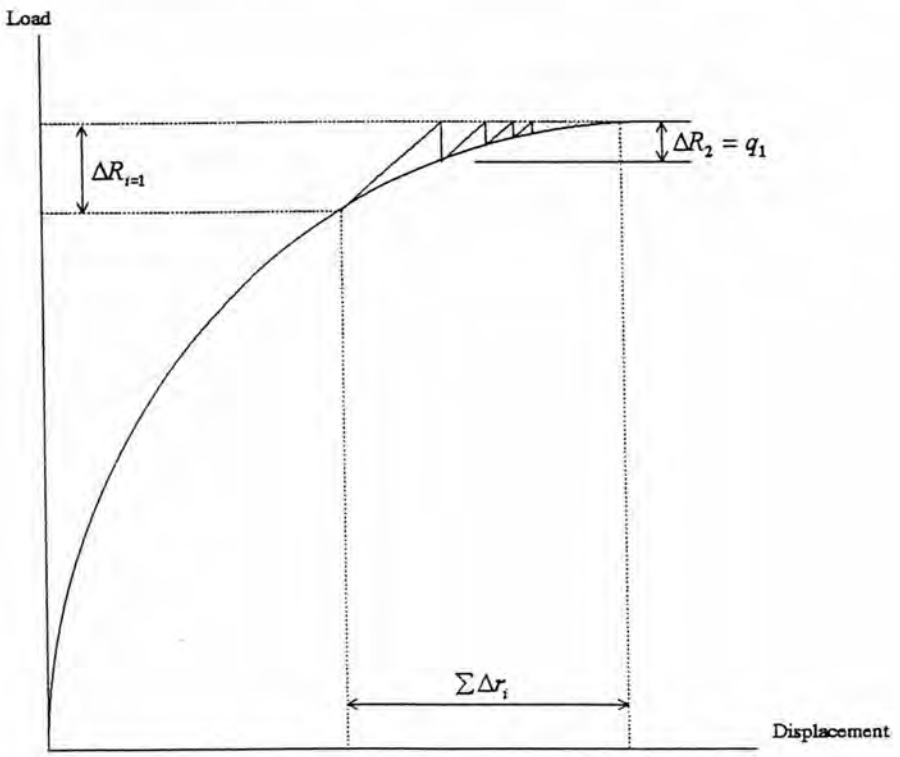
เมื่อ $[K]$ เป็น สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง จะได้

$$\{R\} = [K]\{r\} \tag{2.41}$$

เมตริกซ์ $[K]$ ในสมการ(2.41) จะเป็นซิงกูลาร์(singular matrix)เนื่องจากมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง( rigid body motion )อยู่จำเป็นต้องใส่เงื่อนไขขอบเขต( boundary conditions )ให้เพียงพอที่จะไม่เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง จะได้เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์( nonsingular matrix ) ซึ่งสามารถแก้สมการได้โดยการกำจัดแบบเกาซ์ ( Gauss elimination )

การวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตโดยวิธี นิวตัน - ราฟสัน (Newton-Raphson method)

วิธีนิวตัน-ราฟสัน เป็นวิธีในการหาคำตอบของการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตของโครงสร้างด้วยลักษณะการวิเคราะห์โดย การเพิ่มน้ำหนักบรรทุก ( load control method ) แต่ละขั้นของการเพิ่มน้ำหนักบรรทุก( incremental load ) ต้องทำการหาผลต่างของแรงภายนอกและแรงภายในที่เรียกว่า แรงคงค้าง ( unbalanced force ) แรงคงค้างนี้คือค่าผิดพลาดจากความเบี่ยงเบน ( drift-off error ) อันเกิดจากการใช้วิธีเชิงเส้นตามสมการ(2.41)ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นเพื่อปรับแก้ความไม่เป็นเชิงเส้นนี้จะกระทำโดยพยายามกำจัดแรงคงค้างให้หมดไปหรือเหลือน้อยที่สุดคือ ใช้แรงคงค้างนี้แทนน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มในการวิเคราะห์รอบถัดไปโดยการกระทำซ้ำ( iterative )เช่นนี้จนแรงคงค้างเหลือน้อยจนอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้จึงถือว่าเป็นคำตอบ ดูรูปที่2.6 ประกอบ




รูปที่2.6 การวิเคราะห์อันดับที่สองโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

สำหรับแรงภายนอก( external force )ซึ่งต้องนำมาหาแรงคงค้างคือ แรงจากการเพิ่มน้ำหนักบรรทุก( incremental load )ในรอบการคำนวณนั้น และแรงภายใน( internal force )คือแรงที่คำนวณจากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในรอบการคำนวณนั้น ซึ่งพิจารณาจากองค์อาคารในระบบพิกัดหลักสู่ระบบพิกัดเฉพาะ สามารถอธิบายโดยสมการได้ดังนี้

น้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มตามขั้นตอนการวิเคราะห์ $\{\Delta R_{i=1}\}$ ( incremental load )

จากสมการ(2.41) $$\{\Delta r_i\} = [K]^{-1}\{\Delta R_i\} \quad (2.42)$$

จากสมการ(2.37) $$\{\Delta d_i\} = \{a\}\{\Delta r_i\} \quad (2.43)$$

จากสมการ(2.35) $$\{\Delta S_i\} = \{k_i\}\{a\}\{\Delta r_i\} \quad (2.44)$$

ได้เวคเตอร์ของแรงคงค้าง $$\{q_i\} = \{a\}^T\{\Delta R_i\} - \{\Delta S_i\} \quad (2.45)$$

$$\{\Delta R_{i+1}\} = \{a\}^T\{q_i\} \quad (2.46)$$

ในสมการ(2.45) $\{\Delta R_i\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงภายนอก

$\{\Delta S_i\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงภายใน

$i$ ใช้ระบุรอบของการคำนวณ

ในสมการ(2.46) $\{\Delta R_{i+1}\}$ เป็นเวคเตอร์ของน้ำหนักบรรทุกที่จะเพิ่มในรอบถัดไป

ด้วยวิธีการดังกล่าวเงื่อนไขการลู่เข้าหาคำตอบมีดังนี้

$$\|Q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} \quad (2.47)$$

$$\|Q\| \le \frac{0.1}{100}\|\Delta R\| \quad (2.48)$$

โดยที่

$\|Q\|$ คือยูคลีเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง

$\|\Delta R\|$ คือยูคลีเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่ม

$q_i$ คือสมาชิกของเวคเตอร์ของแรงคงค้างในระบบพิกัดหลัก

$n$ คือจำนวนดีกรีของความอิสระ

การวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด

เมื่อเสร็จการวิเคราะห์โครงสร้างในแต่ละรอบของการเพิ่มแรงกระทำ ( load increment ) นำค่าโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนจากทุกหน้าตัดของชิ้นส่วนโครงสร้างที่แบ่งย่อย ( discretized element )มาทำการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุ ตามขั้นตอนดังนี้ ดูรูปที่2.7 และแผนภูมิแสดงขั้นตอนในรูปที่2.8 ประกอบ

1. เริ่มต้นโดยลองเพิ่มค่าความเครียดที่ผิวบนสุดของหน้าตัดด้านรับแรงอัด ($\varepsilon_c$) จากนั้นลองเปลี่ยนระยะจากผิวบนสุดถึงแกนสะเทิน ($kd$) ทีละขั้น เพื่อสมมุติการกระจายความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกน และหาแรงภายในซึ่งเกิดจากการสมมุติการกระจายความเครียดในแต่ละขั้นนี้จนผลรวมแรงของหน้าตัดอยู่ในภาวะสมดุล แรงภายในของหน้าตัดได้แก่

1.1 แรงภายในจากคอนกรีตมีดังนี้

1.1.1 หน่วยแรงอัดและแรงอัดของคอนกรีต

$$\text{หน่วยแรงอัด} \quad f_c = f_c'\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right] \qquad 0 \le \varepsilon \le 0.0020$$

$$f_c = f_c' \qquad 0.0020 \le \varepsilon \le 0.0030$$

$$\text{โดยที่} \quad \varepsilon_0 = 0.0020 \tag{2.49}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตเป็นแบบที่คิดผลของเหล็กปลอกรัดรอบแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า ( rectangular hoops ) เสนอโดย Baker and Amarokone, 1964 แสดงในรูปที่2.1 สำหรับคอนกรีตที่มี $f_c' \le 500 ksc.$ และแรงอัดของคอนกรีต($C_c$)มีสมการดังนี้

$$C_c = \frac{b.kd}{\varepsilon_c}\int_0^{\varepsilon_c} f_c.d\varepsilon \tag{2.50}$$

โดยที่ $b$ คือ ความกว้างของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

แทนค่าหน่วยแรงอัดจากสมการ(2.49) ใน (2.50) สามารถเขียนเป็นสมการของแรงอัดของคอนกรีต ดังนี้

$$C_c = \frac{b.f_c'.\varepsilon_c.kd}{\varepsilon_0}\left[1-\frac{\varepsilon_c}{3\varepsilon_0}\right] \qquad 0 \le \varepsilon_c \le 0.0020$$

$$C_c = \frac{b.f_c'(0.0020)^2}{\varepsilon_0.\phi}\left[1-\frac{0.0020}{3\varepsilon_0}\right] + b.f_c'\frac{(\varepsilon_c - 0.0020)}{\phi}$$

$$0.0020 \le \varepsilon_c \le 0.0030$$

โดยที่ $\phi = \frac{\varepsilon_c}{kd}$ ( curvature ) (2.51)

1.1.2 หน่วยแรงดึงและแรงดึงของคอนกรีต

หน่วยแรงดึง $f_c = E_c.\varepsilon_t \qquad \varepsilon_r \le \varepsilon_t \le 0$ (2.52)

โดยที่ $\varepsilon_t$ คือ ความเครียดที่ผิวรับแรงดึงของคอนกรีต

จากสมมุติฐานที่กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัด และให้คอนกรีตสามารถรับแรงดึงได้ไม่เกินหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ตาม ACI Committee 318 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f_r = 1.98\sqrt{f_c'}$ *ksc.*

ดังนั้นความเครียดสูงสุดที่ยอมให้ของคอนกรีตเนื่องจากแรงดึงมีค่าเท่ากับ $\varepsilon_r = -\frac{f_r}{E_c}$

จากหน่วยแรงดึงข้างต้นสามารถเขียนเป็นสมการของแรงดึง( $C_t$ )ของคอนกรีต ดังนี้

$$C_t = -\frac{b.E_c.\varepsilon_t^2}{2\phi} \qquad \varepsilon_r \le \varepsilon_t \le 0$$

$$= 0 \qquad \varepsilon_t \le \varepsilon_r \qquad (2.53)$$

1.2 แรงภายในจากเหล็กเสริม

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ กำหนดให้

1.2.1 หน่วยแรงอัดและแรงอัดของเหล็กเสริม

$$\text{หน่วยแรงอัด } f_s = E_s.\varepsilon_s \qquad 0 \le \varepsilon_s \le \varepsilon_y$$
$$f_s = f_y \qquad \varepsilon_s \ge \varepsilon_y \qquad (2.54)$$

จากหน่วยแรงข้างต้นสามารถเขียนเป็นสมการของแรงอัดของเหล็กเสริม($S_c$) ดังนี้

$$S_c = A_{sc}.E_s.\varepsilon_s \qquad 0 \le \varepsilon_s \le \varepsilon_y$$
$$S_c = A_{sc}.f_y \qquad \varepsilon_s \ge \varepsilon_y \qquad (2.55)$$

โดยที่ $\varepsilon_s$ คือ ความเครียดของเหล็กเสริม

$\varepsilon_y$ คือ ความเครียดคลากของเหล็กเสริม

$A_{sc}$ คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมรับแรงอัด

2.2.2 .หน่วยแรงดึงและแรงดึงของเหล็กเสริม

$$\text{หน่วยแรงดึง} \qquad f_s = -E_s.\varepsilon_s \qquad -\varepsilon_y \le \varepsilon_s \le 0$$
$$f_s = -f_y \qquad -\varepsilon_y \ge \varepsilon_s$$
$$(2.56)$$

จากหน่วยแรงข้างต้นสามารถเขียนเป็นสมการของแรงดึงของเหล็กเสริม($S_t$) ดังนี้

$$S_t = A_{st}.E_s.\varepsilon_s \qquad -\varepsilon_y \le \varepsilon_s \le 0$$
$$S_t = A_{st}.f_y \qquad -\varepsilon_y \ge \varepsilon_s \qquad (2.57)$$

$A_{st}$ คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมรับแรงดึง

สมการสมดุลของแรงภายในเนื่องจากวัสดุและแรงในแนวแกน มีดังนี้

$$C_c + C_t + S_c + S_t + P = 0 \qquad (2.58)$$

คำนวนโมเมนต์ดัดจากแรงภายในที่สมดุล ที่ตำแหน่งกึ่งกลางความลึกของหน้าตัดตามสมมุติฐานว่าแรงในแนวแกนบนหน้าตัดกระทำผ่านตำแหน่งกึ่งกลางความลึกของหน้าตัด ซึ่งในงานวิจัยนี้มีขอบเขตการพิจารณาเฉพาะ หน้าตัดที่มีเหล็กเสริมรับแรงดึงและแรงอัดสมมาตรกันเท่านั้น โมเมนต์ดัดที่คำนวณได้จะนำไปเปรียบเทียบกับโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้าง โดยมีสมการดังนี้

$$M = C_c.\left[(t/2 - kd) + x\right] + C_t.\left[x_t - (t/2 - kd)\right] + S_c(t/2 - d') + S_t(d - t/2)$$
$$0 \le \varepsilon_c \le 0.0020$$

$$M = C_{c1}.\left[(t/2 - kd) + x_{c1}\right] + C_{c2}.\left[(t/2 - kd) + x_{c2}\right] + C_t.\left[x_t - (t/2 - kd)\right]$$
$$+ S_c\left(t/2 - d'\right) + S_t(d - t/2)$$
$$0.0020 \le \varepsilon_c \le 0.0030 \qquad (2.59)$$

โดยที่ $t$ คือ ค่าความลึกของหน้าตัด

$d'$ คือ ระยะจากผิวบนสุดด้านรับแรงอัดถึงระดับของเหล็กเสริมรับแรงอัด

$d$ คือ ระยะจากผิวบนสุดด้านรับแรงอัดถึงระดับของเหล็กเสริมรับแรงดึง

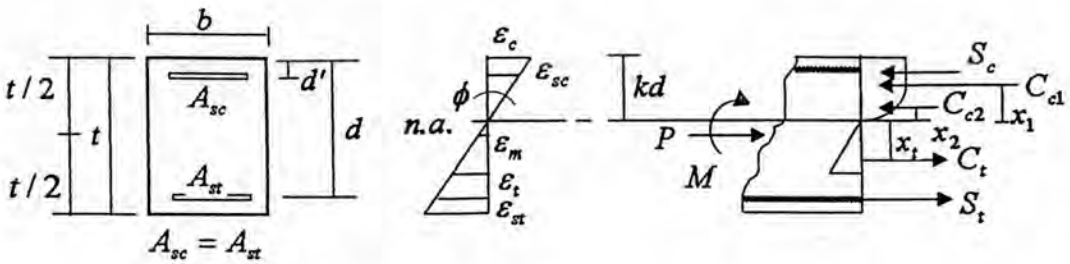
$x$ คือ ระยะจากแนวแกนสะเทินถึงศูนย์ถ่วงของแนวแรงคอนกรีต มีสมการดังนี้

$$x = x_1 = kd\left[\frac{8\varepsilon_0 + 3\phi(kd)}{12\varepsilon_0 - 4\phi(kd)}\right] \qquad 0 \le \varepsilon_c \le 0.0020$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[kd + \frac{0.0020}{\phi}\right] \qquad 0.0020 \le \varepsilon_c \le 0.0030$$

$$x_t = \frac{2\varepsilon_r}{3\phi} \qquad (2.60)$$

ถ้าโมเมนต์จากการคำนวนนี้มีค่าต่างจากโมเมนต์ที่ได้จากการวิเคราะห์อยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ให้ทำในขั้นตอนต่อไป ถ้าไม่ได้ต้องเริ่มขั้นตอนนี้ใหม่โดยปรับค่าความเครียดที่ผิวบนสุดใหม่




รูปที่ 2.7 แสดงการกระจายความเครียด-การกระจายหน่วยแรงของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก

2. ปรับปรุงสติฟเนสหลังจากหน้าตัดเกิดการแตกร้าว เมื่อหน่วยแรงบนหน้าตัดมีค่าเกินหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคอนกรีต ทำให้หน้าตัดเกิดการแตกร้าวซึ่งเป็นผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสติฟเนส โดยอาศัยหลักการของ central difference คำนวณค่าสติฟเนสสัมผัส( tangent stiffness modulus ) เนื่องจากแรงในแนวแกน และ โมเมนต์ดัด ตามลำดับดังนี้

$$EA = \Delta P / \Delta\varepsilon = (P_2 - P_1) / \Delta\varepsilon$$
$$EI = \Delta M / \Delta\phi = (M_2 - M_1) / \Delta\phi \qquad (2.61)$$

โดยที่ $P_1$ และ $P_2$ คือ แรงในแนวแกนที่สอดคล้องกับความเครียด $[\varepsilon_m - (1/2)\Delta\varepsilon]$ และ $[\varepsilon_m + (1/2)\Delta\varepsilon]$

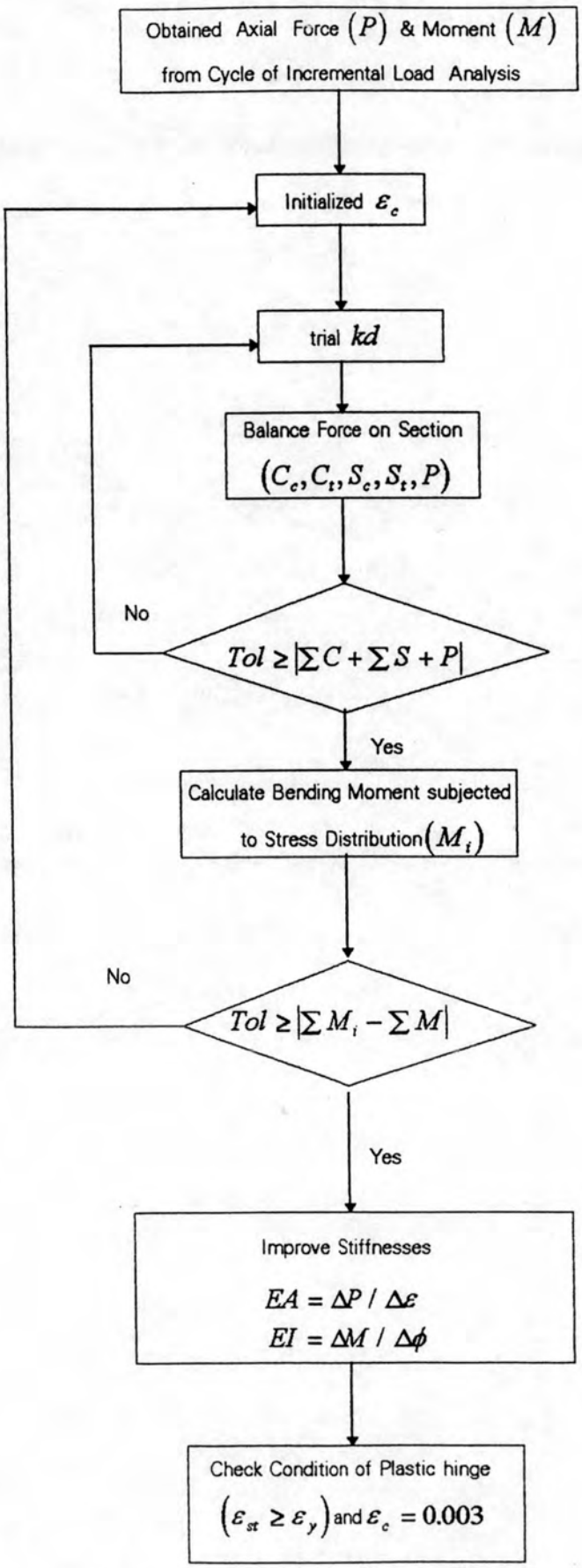
$\varepsilon_m$ คือ ความเครียดเนื่องจากแรงในแนวแกนที่ตำแหน่งกึ่งกลางความลึก

$\Delta\varepsilon$ คือ ผลต่างของความเครียดโดยกำหนดให้มีค่าน้อยๆเช่น $1\times10^{-6}$

$M_1$ และ $M_2$ คือ โมเมนต์ดัดที่สอดคล้องกับค่าความโค้ง $[\phi - (1/2)\Delta\phi]$ และ $[\phi + (1/2)\Delta\phi]$ ขณะที่ แรงในแนวแกน มีค่าคงที่

$\phi$ คือ ค่าความโค้งเนื่องจากโมเมนต์ดัด

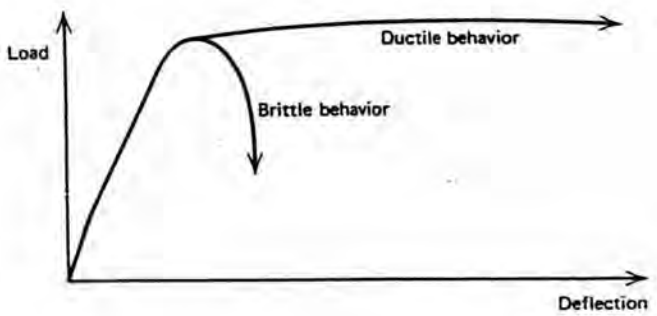
$\Delta\phi$ คือ ผลต่างของค่าความโค้งโดยกำหนดให้มีค่าน้อยๆเช่น $1\times10^{-6}$




รูปที่ 2.8 แผนภูมิแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด

การเกิดจุดหมุนพลาสติก

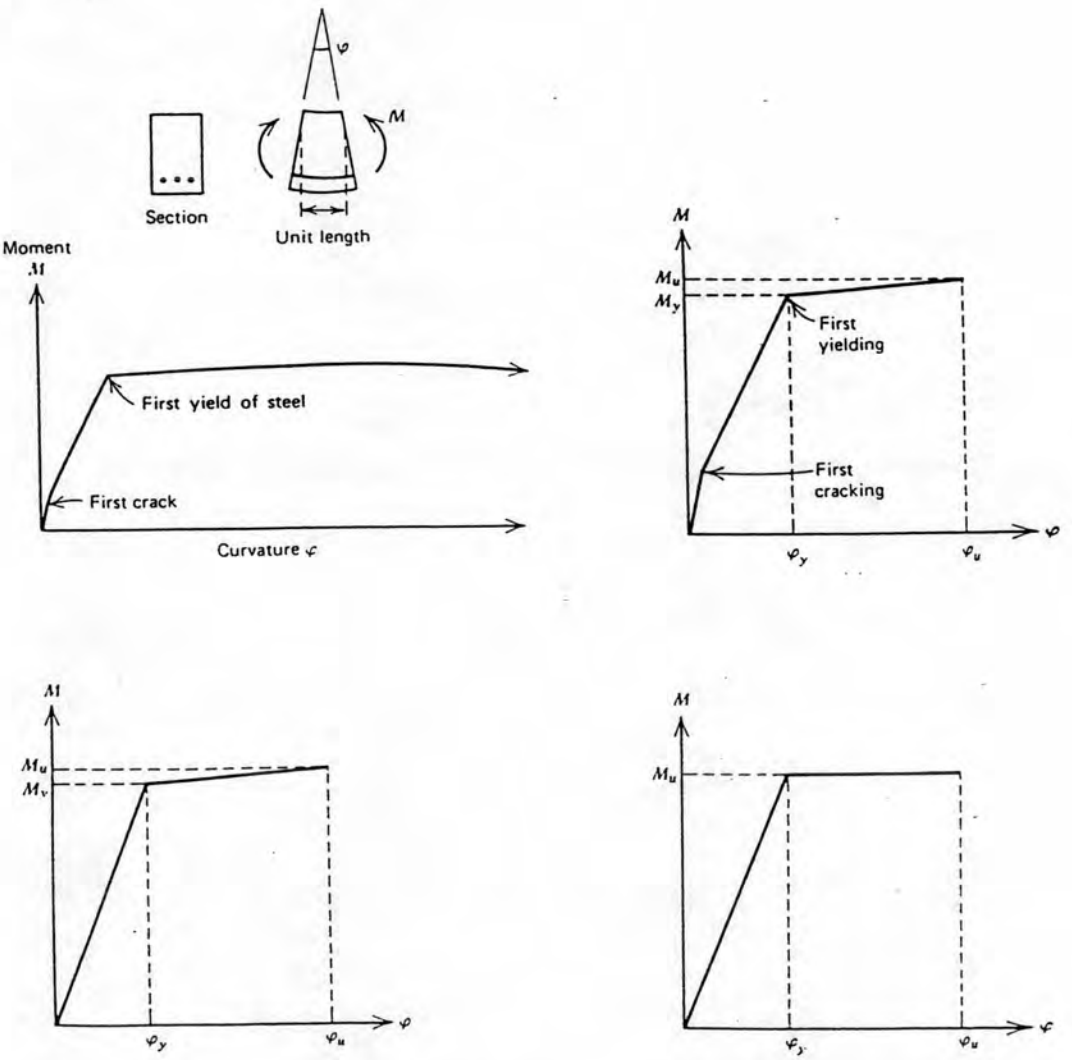
พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง ( load-displacement ) ของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กเมื่อทำการวิเคราะห์เพื่อหากำลังรับน้ำหนักสูงสุดพบว่าเป็นลักษณะแบบมีความเหนียวจำกัด(limited ductility characteristic) ในบางตัวอย่างของการวิเคราะห์พบว่ามีการแตกร้าวและวิบัติอย่างรวดเร็ว (brittle behavior) ในโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กแบบอินดีเทอร์มิเนตจะแสดงพฤติกรรมความเหนียว ( ductile behavior ) เพราะจะมีการย้อนกลับของหน่วยแรง( redistribution ) เมื่อมีหน่วยแรงเกินความสามารถในการรับหน่วยแรงของหน้าตัดโครงสร้างยังสามารถรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้นได้อีก และมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งมากขึ้นก่อนถึงจุดวิบัติ แสดงในรูปที่ 2.9




รูปที่ 2.9 ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง
ของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก

ตามขั้นตอนของการวิเคราะห์เมื่อพบว่ามีหน้าตัดใดเกิดหน่วยแรงจนเต็มความสามารถในการรับหน่วยแรงของหน้าตัด ณ จุดนี้สามารถระบุได้ว่ามีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้น การหาความสามารถในการรับหน่วยแรงสูงสุดของหน้าตัดหรือ การหาจุดหมุนพลาสติก สามารถกระทำได้จากการวิเคราะห์หน้าตัด (section analysis) จากขีดจำกัดของคุณสมบัติของหน้าตัด (section properties) ได้แก่ รูปร่าง , ขนาด , ตำแหน่งของเหล็กเสริมรวมทั้งขีดจำกัดของคุณสมบัติของวัสดุ (material properties) คือ คอนกรีตและเหล็กเสริม โดยหลักการของความสอดคล้องของความเครียด (strain compatability) หน้าตัดเกิดหน่วยแรงสูงสุดเมื่อถึงกำลังสูงสุดของวัสดุของหน้าตัดนั้น คือ คอนกรีตให้กำลังสูงสุดที่ค่าความเครียดประลัย $\varepsilon_{cu} = 0.0030$ และ เหล็กเสริมมีความเครียดตั้งแต่ค่าความเครียดคลากไปแล้ว ( Nilson and Winter,1991)

หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดและค่าความโค้ง $(M-\phi)$ ของหน้าตัดโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กใดๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.10 ค่าแรงดัด $M_y$ และค่าความโค้ง $\phi_y$ คือ สภาวะที่หน้าตัดเกิดความเครียดที่วัสดุคอนกรีตหรือเหล็กเสริมมีค่าถึงขีดจำกัดสูงสุด หากสภาวะความเครียดนี้มีวัสดุเพียงชนิดเดียวที่มีค่าถึงขีดจำกัดสูงสุด ซึ่งอาจเป็นคอนกรีตหรือเหล็กเสริม หน้าตัดก็สามารถเพิ่มแรงดัดขึ้นได้อีกจนถึงแรงอัดประลัย $M_u$ และมีค่าความโค้ง $\phi_u$ ทั้งนี้เป็นไปตามเสถียรภาพของหน้าตัดซึ่งต้องรักษาสมดุลระหว่างแรงภายในและแรงภายนอกของหน้าตัดนั้นๆ ไว้ด้วย จากกราฟอัตราส่วน $\phi_u$ ต่อ $\phi_y$ คือ ดัชนีแสดงความเหนียว ( ductility index ) ของหน้าตัด




รูปที่ 2.10 แสดงลักษณะความสัมพันธ์และแบบจำลองของความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดและค่าความโค้งของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก

ผลของแรงในแนวแกนต่อการเกิดจุดหมุนพลาสติก

หากพิจารณาหน้าตัดซึ่งรับโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียว ( pure bending ) หน่วยแรงซึ่งเกิดบนหน้าตัดคือ หน่วยแรงอัดในคอนกรีตและหน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมซึ่งสมดุลกัน แรงคู่ควบ ( couple force )นี้ไม่ว่าจะคำนวนหาโมเมนต์ดัด ณ.จุดอ้างอิงใดๆ บนหน้าตัดจะได้ ค่าโมเมนต์ดัดเท่ากับโมเมนต์ดัดซึ่งเกิดขึ้นที่หน้าตัดนั้น จากสมมุติฐานเมื่อเกิดหน่วยแรงขึ้นบนหน้าตัด,ระนาบของหน้าตัดยังคงรักษาระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนของชิ้นส่วนเสมอทำให้การกระจายความเครียดของหน้าตัดมีลักษณะการกระจายแบบเส้นตรง ( linearly strain distribution )

เมื่อพิจารณาโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงในแนวแกนซึ่งอาจเป็นแรงอัดหรือแรงดึงพบว่าหากแรงในแนวแกนเป็นแรงอัดการกระจายความเครียดจะเปลี่ยนไปจากเมื่อรับโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียวในทางที่มีหน่วยแรงอัดบนหน้าตัดเพิ่มขึ้น โดยการปรับความเครียดที่ผิวด้านรับแรงอัดและปรับตำแหน่งของแนวแกนสะเทินของหน้าตัด เพื่อรักษาสมดุลทั้งโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดนั้นๆ ในลักษณะเดียวกันเมื่อแรงในแนวแกนเป็นแรงดึงการกระจายความเครียดจะเปลี่ยนไปในทางที่มีหน่วยแรงดึงบนหน้าตัดเพิ่มขึ้น

หน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กเมื่อมีโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงในแนวแกนจะทำให้หน้าตัดถึงขีดจำกัดของวัสดุเร็วกว่าหน้าตัดซึ่งรับโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียว หน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กซึ่งมีโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงอัดในแนวแกนทำให้หน้าตัดถึงขีดจำกัดของคอนกรีตซึ่งกำหนดค่าความเครียดสูงสุดที่ผิวเนื่องจากหน่วยแรงอัดโดยทั่วไปที่0.003 หากมีโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงดึงในแนวแกนทำให้หน้าตัดถึงขีดจำกัดของเหล็กเสริมด้านรับแรงดึง ซึ่งโดยทั่วไปกำหนดจุดคลากที่ค่าความเครียดของเหล็กเท่ากับ 0.002

ในการวิเคราะห์หากำลังรับน้ำหนักสูงสุดของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยการเพิ่มน้ำหนักขึ้นเรื่อยๆ ( load control method ) ที่หน้าตัดใดๆ เมื่อมีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงทั้งโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกน ดังนั้นการจะใช้ค่าโมเมนต์พลาสติกหรือค่าความโค้งพลาสติกจากความสัมพันธ์ของโมเมนต์และค่าความโค้ง $(M-\phi)$ เพื่อระบุการเกิดจุดหมุนพลาสติกจะต้องคำนึงถึงแรงในแนวแกนที่กระทำต่อหน้าตัดด้วย หรือกล่าวได้ว่าสำหรับหน้าตัดเดียวกันจะมีค่าโมเมนต์พลาสติกและค่าความโค้งพลาสติกต่างกันขึ้นอยู่กับแรงในแนวแกนซึ่งกระทำต่อหน้าตัดในขณะนั้น

การเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก

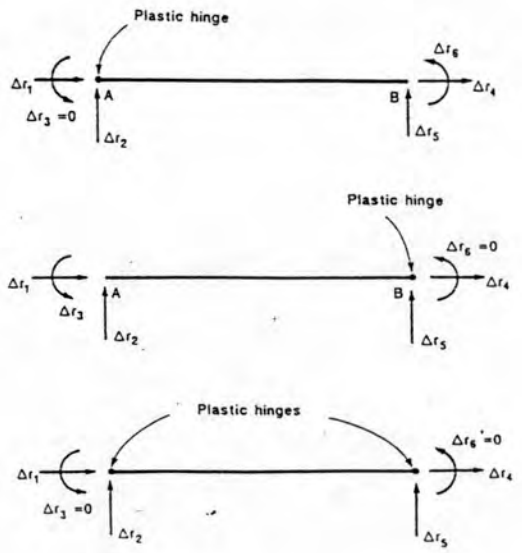
เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นที่ส่วนใดๆในโครงสร้าง จะทำการเปลี่ยนสภาพความต่อเนื่องของจุดต่อไปเป็นแบบข้อหมุน โดยลดดีกรีความอิสระ( degree of freedom )ที่เกี่ยวข้องลง พิจารณาสมการที่(2.41) ในรูปการเพิ่มแรงกระทำและการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง ( incremental form ) เพื่อให้สอดคล้องกับวิธีการเชิงเลขที่ใช้ในการวิเคราะห์ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\{\Delta R\} = [K]\{\Delta r\} \tag{2.62}$$

เขียนเป็นรูปแบบขยายได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & Sym. & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix} \tag{2.63}$$

เมื่อ $K_{ij}(i=1-6, j=1-6)$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์สติฟเนส




รูปที่ 2.11 องค์อาคารเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย

พิจารณารูปที่ 2.11 เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นที่ปลายด้าน A จะได้ $\Delta R_3 = 0$

$$\Delta r_3 = \frac{1}{K_{33}}\left(-K_{31}\Delta r_1 - K_{32}\Delta r_2 - K_{34}\Delta r_4 - K_{35}\Delta r_5 - K_{36}\Delta r_6\right) \qquad (2.64)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

$$\begin{Bmatrix}\Delta R_1\\ \Delta R_2\\ 0\\ \Delta R_4\\ \Delta R_5\\ \Delta R_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}-\frac{K_{13}^2}{K_{33}} & K_{12}-\frac{K_{13}K_{32}}{K_{33}} & 0 & K_{14}-\frac{K_{13}K_{34}}{K_{33}} & K_{15}-\frac{K_{13}K_{35}}{K_{33}} & K_{16}-\frac{K_{13}K_{36}}{K_{33}} \\ & K_{22}-\frac{K_{23}^2}{K_{33}} & 0 & K_{24}-\frac{K_{23}K_{34}}{K_{33}} & K_{25}-\frac{K_{23}K_{35}}{K_{33}} & K_{26}-\frac{K_{23}K_{36}}{K_{33}} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{44}-\frac{K_{43}^2}{K_{33}} & K_{45}-\frac{K_{43}K_{35}}{K_{33}} & K_{46}-\frac{K_{43}K_{36}}{K_{33}} \\ & \textit{Sym.} & & & K_{55}-\frac{K_{53}^2}{K_{33}} & K_{56}-\frac{K_{53}K_{36}}{K_{33}} \\ & & & & & K_{66}-\frac{K_{63}^2}{K_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\Delta r_1\\ \Delta r_2\\ \Delta r_3\\ \Delta r_4\\ \Delta r_5\\ \Delta r_6\end{Bmatrix} \qquad (2.65)$$

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นที่ด้านปลาย B จะได้ $\Delta R_6 = 0$

$$\Delta r_6 = \frac{1}{K_{66}}\left(-K_{61}\Delta r_1 - K_{62}\Delta r_2 - K_{63}\Delta r_3 - K_{64}\Delta r_4 - K_{65}\Delta r_5\right) \qquad (2.66)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

$$\begin{Bmatrix}\Delta R_1\\ \Delta R_2\\ \Delta R_3\\ \Delta R_4\\ \Delta R_5\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}-\frac{K_{16}^2}{K_{66}} & K_{12}-\frac{K_{16}K_{62}}{K_{66}} & K_{13}-\frac{K_{16}K_{63}}{K_{66}} & K_{14}-\frac{K_{16}K_{64}}{K_{66}} & K_{15}-\frac{K_{16}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & K_{22}-\frac{K_{26}^2}{K_{66}} & K_{23}-\frac{K_{26}K_{63}}{K_{66}} & K_{24}-\frac{K_{26}K_{64}}{K_{66}} & K_{25}-\frac{K_{26}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & K_{33}-\frac{K_{36}^2}{K_{66}} & K_{34}-\frac{K_{36}K_{64}}{K_{66}} & K_{35}-\frac{K_{36}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & & K_{44}-\frac{K_{46}^2}{K_{66}} & K_{45}-\frac{K_{46}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & \textit{Sym.} & & & K_{55}-\frac{K_{56}^2}{K_{66}} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\Delta r_1\\ \Delta r_2\\ \Delta r_3\\ \Delta r_4\\ \Delta r_5\\ \Delta r_6\end{Bmatrix} \qquad (2.67)$$

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลายจัดรูปของเมตริกซ์สติฟเนสได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{13} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{23} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{35} & K_{33} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{43} & K_{46} \\ & Sym. & & & K_{53} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

$$\Delta R_3 = \Delta R_6 = 0$$

หรือจัดในรูปเมตริกซ์ย่อยได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta\{R\}_a \\ \Delta\{R\}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\{r\}_a \\ \Delta\{r\}_b \end{Bmatrix} \tag{2.69}$$

เมื่อ $\Delta\{R\}_a$ เป็นเวกเตอร์ของแรงกระทำที่ไม่เป็นศูนย์

$\Delta\{R\}_b$ เป็นเวกเตอร์ของแรงกระทำที่เป็นศูนย์ $\Delta R_3$ และ $\Delta R_6$

$$\Delta\{R\}_b = 0$$

$$\Delta\{R\}_b = [K]_{ba}\Delta\{r\}_a + [K]_{bb}\{r\}_b = 0$$

$$\Delta\{r\}_b = -[K]_{bb}^{-1}\left([K]_{ba}\Delta\{r\}_a\right)$$

$$\Delta\{R\}_a = \left( [K]_{aa} - [K]_{ab}[K]_{bb}^{-1}[K]_{ba} \right)\Delta\{r\}_a \tag{2.70}$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\Delta\{R\}_a = -[K]' \Delta\{r\}_a \tag{2.71}$$

<u>สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์อิลาสติก-พลาสติกอันดับที่สองของโครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็ก</u>

การวิเคราะห์อิลาสติก-พลาสติกอันดับที่สองของโครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็กกระทำโดยการรวมขั้นตอนการวิเคราะห์การเกิดจุดหมุนพลาสติก และ การวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิง-เส้นทางเรขาคณิตและทางวัสดุเข้าด้วยกัน ลำดับการวิเคราะห์มีดังนี้

1.ที่ขั้นตอนใด ๆ ที่ตัวประกอบน้ำหนักมีค่าเป็น$\lambda_i$หาแรงภายในของชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วน

2.นำผลของแรงภายในที่ได้ไปปรับปรุงค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนตามลำดับ

3. ทำการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างโดยวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง

4. เพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น $\lambda_{i+1}$

5.ทำการวิเคราะห์โดยการกำจัดแบบเกาซ์เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายในแล้วหาผลต่างระหว่างแรงภายในขั้นตอนที่ i และ ขั้นตอนที่ i+1 ได้เวคเตอร์ของแรงคงค้างในการทำซ้ำรอบแรก

6. คำนวณค่ายูคลีเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง (unbalanced force vector) โดยคำนวณได้จากสมการ(2.47) ( Bathe and Wilson,1976 )

$$\| Q \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$$

7.เปรียบเทียบค่ายูคลีเดียนนอร์มของแรงคงค้างกับยูคลีเดียนนอร์มของแรงเริ่มต้นโดยงานวิจัยนี้ใช้เงื่อนไขการลู่เข้าหาคำตอบจากสมการ(2.48) ( Zienkiewics and Taylor,1991 )

$$\| Q \| \leq \frac{0.1}{100} \| \Delta R \|$$

หากค่ายูคลีเดียนนอร์มของแรงคงค้างเป็นไปตามเงื่อนไข ก็จะทำในขั้นตอนที่ 8 ต่อไป แต่ถ้าหากค่ายูคลีเดียนนอร์มไม่เป็นไปตามเงื่อนไข จะต้องกระทำในขั้นตอนที่ 1 ถึง 7 ใหม่โดยให้เวคเตอร์ของแรงกระทำคือเวคเตอร์ของแรงคงค้าง

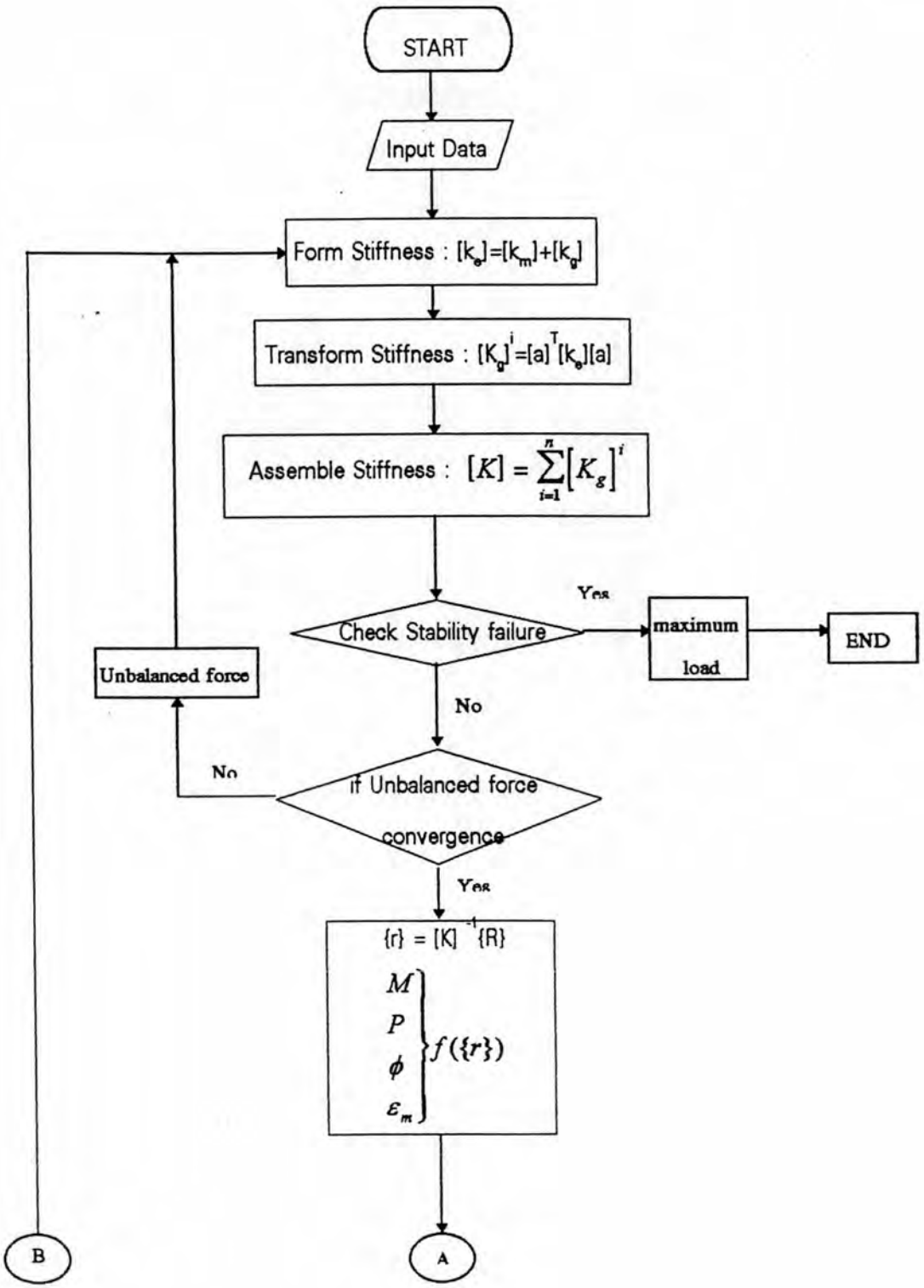
8. จากวิธีการวิเคราะห์หน้าตัดหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและค่าความโค้งเพื่อปรับปรุงสติฟเนสด้วยวิธีcentral difference ได้สติฟเนสเมตริกซ์สัมผัสใหม่ ในขั้นตอนการวิเคราะห์นี้สามารถตรวจสอบการเกิดจุดหมุนพลาสติกพร้อมกันไปด้วย, ถ้าตรวจสอบพบทำการเปลี่ยนสภาพของจุดต่อไปเป็นแบบข้อหมุนและปรับลดดีกรีความอิสระของโครงสร้างต่อไป

9. คำนวณหาตำแหน่งจุดต่อที่เปลี่ยนไปของโครงสร้าง เพื่อเป็นตำแหน่งอ้างอิงทางเรขาคณิตของโครงสร้างใหม่แล้วทำการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น $\lambda_{i+2}$ เป็นขั้นตอนถัดไป

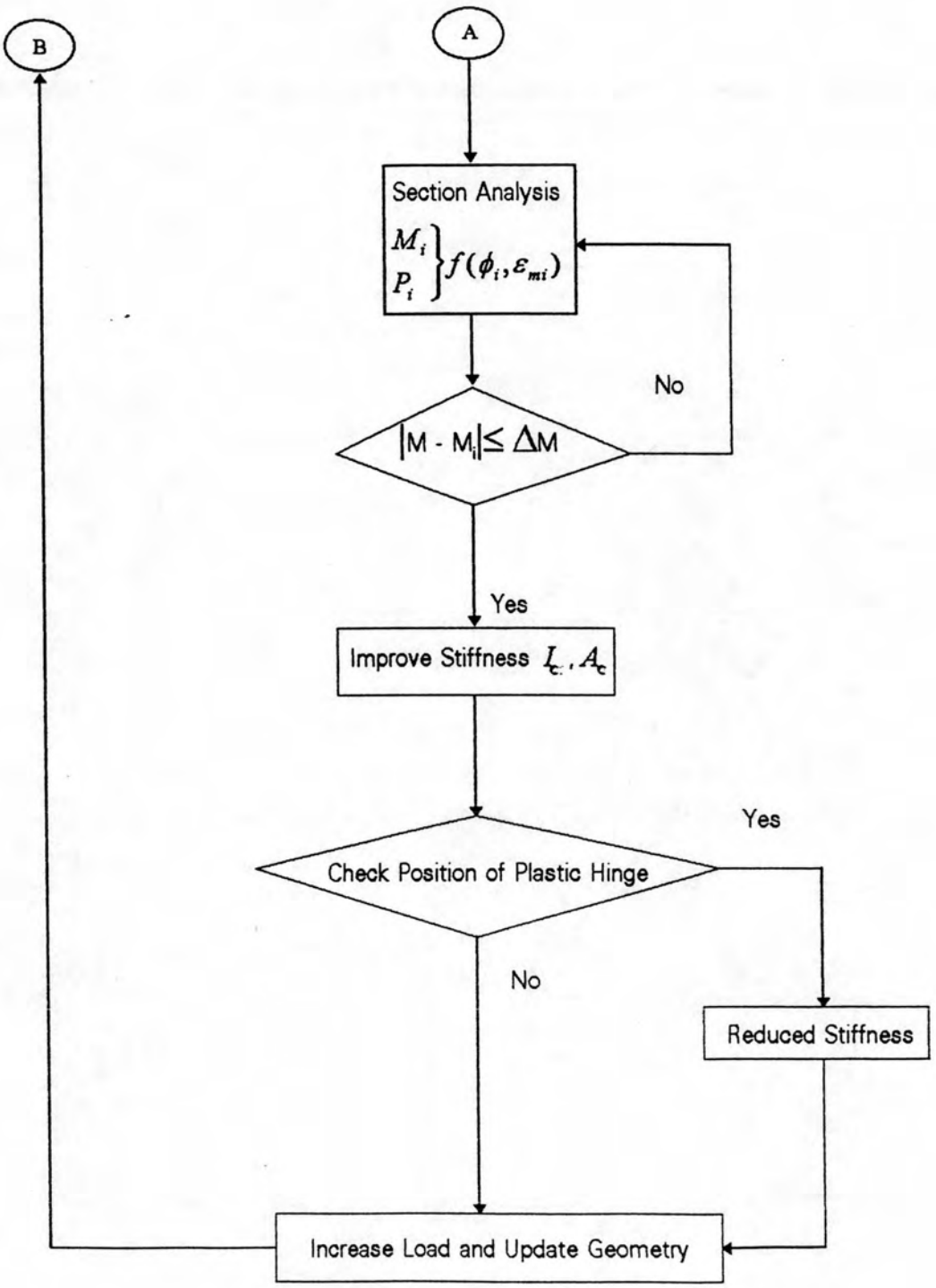
10. หลังจากการกำจัดแบบเกาซ์ของส่วนเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างทุกครั้งจะต้องทำการตรวจสอบเสถียรภาพของโครงสร้างโดยการตรวจสอบค่าของสมาชิกแต่ละตัวตามแนวทะแยง ( diagonal elements ) ของเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง ถ้าโครงสร้างมีเสถียรภาพค่าของสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สติฟเนสทุกตัวจะมีค่ามากกว่าศูนย์ แต่ถ้าหากสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สติฟเนสตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีค่าเปลี่ยนเป็นค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โครงสร้างจะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง ( rigid body motion ) เสถียรภาพของโครงสร้างจะหมดไป

11. เมื่อมีจุดหมุนพลาสติกมากพอโครงสร้างจะมีการเปลี่ยนตำแหน่งมากอย่างไม่จำกัดและไม่สามารถรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้นได้อีก, แสดงว่าโครงสร้างหมดเสถียรภาพ

แผนภูมิขั้นตอนการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 2.12




รูปที่ 2.12 แสดงแผนภูมิขั้นตอนการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้




รูปที่ 2.12(ต่อ) แสดงแผนภูมิขั้นตอนการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้