บทที่ 3

การตรวจพบและวินิจฉัยความผิดพร่องด้วยตัวประมาณออนไลน์

การนำโครงสร้างของตัวประมาณออนไลน์มาใช้ในการตรวจพบความผิดพร่อง ได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ M.M. Polycapou และ A.J. Helmicki [17] ในปี ค.ศ. 1995 วิธีการดังกล่าวจัดอยู่ในพวกการตรวจพบโดยใช้แบบจำลอง การนำตัวประมาณออนไลน์มาใช้ในการตรวจพบความผิดพร่องอาศัยความสามารถในการประมาณฟังก์ชันของโครงสร้างที่นำมาสร้างตัวประมาณฟังก์ชันเพื่อประมาณส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะปกติ ในงานของ M.M. Polycapou และ A.J. Helmicki ได้มีการศึกษาถึงวิธีในการเรียนรู้ เสถียรภาพของการเรียนรู้ และนำค่าที่ประมาณได้ไปใช้ในการปรับระบบ นอกจากนี้ยังได้มีการศึกษาในเรื่องความคงทนต่อความไม่แน่นอนของวิธีการดังกล่าวและการประยุกต์ใช้งานในงานวิจัยของ A.T. Vemuri [19]

ในบทนี้จะกล่าวถึงตัวประมาณออนไลน์ในการตรวจพบความผิดพร่องที่นำเสนอโดย M.M. Polycapou, A.J. Helmicki และ A.T. Vemuri ในหัวข้อที่ 3.1 -3.4 และนำเสนอการปรับปรุงเพื่อใช้ในการวินิจฉัยความผิดพร่องในหัวข้อที่ 3.5

3.1 รูปแบบการจำลองความผิดพร่อง (Representation of Failure)

รูปแบบทั่วไปของการจำลองสภาวะที่เกิดความผิดพร่องจะอยู่ในรูปของระบบพลวัตที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์ ดังนี้

$$\dot{x} = \xi(x,u) + \beta(t-T) f(x,u) \tag{3.1}$$

เมื่อ $x \in \Re^n$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรสถานะ

$u \in \Re^m$ คือ เวกเตอร์ของสัญญาณเข้า

$\xi : \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$ คือ สนามเวกเตอร์เรียบ (smooth vector fields) ของระบบในสภาวะปกติ

$\beta : \Re \to \Re$ คือ ฟังก์ชันที่แทนช่วงเวลา และลักษณะที่เกิดความผิดพร่องขึ้น ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่เกิดความผิดพร่องแบบทันทีทันใด β จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันแบบขั้นบันได

โดย $\beta = 1$ เมื่อ $t \geq T$ และ $\beta = 0$ เมื่อ $t < T$ หรือในกรณีความผิดพร่องเริ่มเกิด อาจแทนช่วงเวลาที่เกิดความผิดพร่อง β ด้วยฟังก์ชันลาดเอียง (ramp function)

$f : \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$ คือ สนามเวกเตอร์เรียบไม่ทราบค่า ใช้แทนส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะปกติของระบบอันเนื่องมาจากความผิดพร่อง

การจำลองสภาวะที่เกิดความผิดพร่องในสมการที่ (3.1) ไม่ได้จำกัดอยู่แค่เพียงความผิดพร่องแบบเพิ่มพูนเท่านั้น เราสามารถใช้สมการ (3.1) อธิบายความผิดพร่องแบบทวีคูณได้ เช่น ระบบที่เปลี่ยนจาก $\dot{x} = -x^3$ ไปเป็น $\dot{x} = -x^5$ เมื่อเกิดความผิดพร่อง เราสามารถแทนสภาวะดังกล่าวได้ด้วยสมการ (3.1) โดยกำหนดให้ $f(x) = x^3 - x^5$ เป็นต้น

จุดเด่นที่แตกต่างของการจำลองสภาวะความผิดพร่องด้วยสมการ (3.1) กับวิธีการทั่วไปคือ วิธีการทั่วไปจะแทนส่วนที่เบี่ยงเบนด้วยฟังก์ชันของสัญญาณเข้าจากภายนอก เช่น

$$\dot{x} = \xi(x,u) + f(t)$$

ในขณะที่การจำลองสภาวะความผิดพร่องด้วยสมการ(3.1) จะแทนส่วนที่เบี่ยงเบนด้วยฟังก์ชันของตัวแปรสถานะและสัญญาณเข้า ซึ่งเหมาะที่จะแทนความผิดพร่องมากกว่าในทางปฏิบัติ

3.2 แบบจำลองที่ใช้ประมาณ (Estimated Model)

ในส่วนนี้เป็นการสร้างตัวประมาณแบบไม่เป็นเชิงเส้น เพื่อประมาณส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะปกติ โดยอาศัยการแทนระบบด้วยสมการ (3.1) และสมมติฐานดังนี้ คือ

1. ตัวแปรสถานะทุกตัวสามารถวัดได้
2. รู้แบบจำลองของระบบในสภาวะปกติ $\dot{x}_N = \xi(x_N, u)$

จากสมมติฐานข้างต้น และสมการ (3.1) จะได้ตัวประมาณอยู่ในรูป

$$\dot{\hat{x}} = \xi(x,u) + \hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + G(\hat{x} - x) \tag{3.2}$$

เมื่อ $\hat{x} \in \Re^n$ คือ ตัวแปรสถานะของตัวประมาณ

$\hat{f}$ คือ ตัวประมาณที่ใช้ประมาณส่วนที่เบี่ยงเบน

$\hat{\theta} \in \Re^q$ คือ พารามิเตอร์ที่ปรับค่าได้

G คือ เมตริกซ์จตุรัสมิติ n ที่เป็นเมตริกซ์เสถียร

โดยที่ ค่าเริ่มต้นของพารามิเตอร์ของตัวประมาณ $\hat{\theta}(0) = \theta^0$ จำเป็นต้องเลือก θ^0 ที่ทำให้ $\hat{f}(x,u;\theta^0) = 0$ สำหรับทุกค่า (x,u) ซึ่งตรงกับสภาวะปกติ และค่าเริ่มต้นของตัวแปรสถานะของตัวประมาณ $\hat{x}(0) = x(0)$

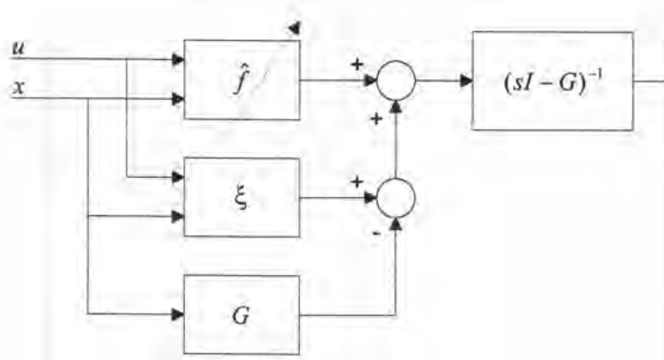
เมื่อเริ่มจากค่าเริ่มต้นดังกล่าว เป้าหมายของวิธีการนี้คือ การปรับค่าพารามิเตอร์ $\hat{\theta}$ โดยอาศัยข้อมูลตัวแปรสถานะและสัญญาณออก เพื่อทำให้ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ ประมาณฟังก์ชันไม่ทราบค่า $\beta(t-T)f(x,u)$ ให้ใกล้เคียงที่สุด

ให้ $\tilde{f}$ แทนส่วนที่แตกต่างกันระหว่าง βf กับ $\hat{f}$ นั่นคือ $\tilde{f} := \beta f - \hat{f}$ และ e คือค่าผิดพลาดในการประมาณเอาต์พุต, $e := x - \hat{x}$ จากสมการ (3.1) และ (3.2) จะได้

$$\dot{e} = Ge + \tilde{f} \tag{3.3}$$

หรือ $e = W(s)\left[\tilde{f}\right]$ เมื่อ $W(s) = (sI - G)^{-1}$ โดยที่ s คือ ตัวดำเนินการลาปลาซ

เนื่องจาก e สามารถวัดได้ ในขณะที่ $\tilde{f}$ ไม่สามารถวัดได้ e จึงเหมือนตัวกรอง $\tilde{f}$ ซึ่งสามารถใช้แทน $\tilde{f}$ ในการวัดความผิดพลาดที่เกิดจากการปรับค่าพารามิเตอร์ $\hat{\theta}$ และจากโครงสร้างที่กล่าวข้างต้นสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมของตัวประมาณได้ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 บล็อกไดอะแกรมของตัวประมาณ

3.3 ตัวประมาณออนไลน์ (on - line approximator)

ตัวประมาณส่วนเบี่ยงเบนที่ปรับค่าพารามิเตอร์ได้ $\hat{f}$ ในสมการ (3.2) จะอยู่ในรูปของตัวประมาณออนไลน์ ซึ่งอาจมองได้ในรูปของข่ายงานที่มีเวกเตอร์ขนาด (n+m) , $z := (x,u)$ เป็นสัญญาณเข้า มี $\hat{\theta} \in \Re^q$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ปรับค่าได้ และมี $\phi := \hat{f}(z;\hat{\theta})$ เป็นสัญญาณออกของข่ายงาน

ตัวประมาณออนไลน์ที่กล่าวถึงข้างต้น มีด้วยกันหลายรูปแบบ เช่น ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ข่ายงานประสาทหลายชั้น ข่ายงานเรเดียลเบซิส ระบบฟัซซี่ลอจิก ข่ายงานเวฟเล็ต ตัวประมาณออนไลน์สามารถแยกได้เป็น

- ตัวประมาณที่มีการปรับพารามิเตอร์แบบเป็นเชิงเส้น เช่น ข่ายงานเรเดียลเบซิส ที่มีการกำหนดจุดศูนย์กลาง และความกว้างตายตัว

- ตัวประมาณที่มีการปรับพารามิเตอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น เช่น ข่ายงานประสาทหลายชั้น

อย่างไรก็ตาม การเลือกชนิดและโครงสร้างของตัวประมาณออนไลน์ค่อนข้างจะมีผลอย่างมากต่อความสามารถในการประมาณ ปัญหาในการเลือกตัวประมาณให้เหมาะสมกับฟังก์ชันที่ต้องการประมาณยังคงเป็นที่ศึกษาและวิจัยกันอยู่ในปัจจุบัน สำหรับในงานวิจัยนี้เลือกใช้ข่ายงานเรเดียลเบซิส เป็นตัวประมาณ ในรูปของฟังก์ชันเกาเซียนต์

$$\phi_i(z;\hat{\theta}) = \sum_{j}^{N} \hat{\theta}_{ij} e^{-\frac{\|z-c_j\|^2}{\sigma^2}} \tag{3.4}$$

เมื่อ c_j และ σ_j คือ จุดศูนย์กลางและความกว้างตามลำดับ

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้ คือ

- ■ เป็นตัวประมาณที่ดีในคอมแพคโดเมนที่สนใจ
- ■ มีการปรับค่าพารามิเตอร์แบบเป็นเชิงเส้น

3.4 วิธีการเรียนรู้ (Learning Scheme)

วิธีการเรียนรู้พลวัตที่เปลี่ยนไปจากสภาวะปกติของระบบในที่นี้ก็คือ การปรับค่าพารามิเตอร์ $\hat{\theta}$ เพื่อให้ฟังก์ชัน $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ เรียนรู้ส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะปกติ $\beta(t-T)f(x,u)$

จาก $\tilde{f}$ ข้างต้น เราสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x,u,\hat{\theta},t) &= \beta(t-T)f(x,u)-\hat{f}(x,u,\hat{\theta})\\ &= \beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*)-\hat{f}(x,u,\hat{\theta})+\nu(t)\end{aligned} \tag{3.5}$$

เมื่อ $\hat{\theta}^*$ คือ ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม หรือคือ ค่าพารามิเตอร์ $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ระยะระหว่าง $f(x,u)$ และ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีค่าน้อยที่สุดในคอมแพคโดเมน D ที่ต้องการเรียนรู้ นั่นคือ

$$\hat{\theta}^* := \arg\min_{\hat{\theta}\in M_{\hat{\theta}}}\left\{\sup_{(x,u)\in D}\left|f(x,u)-\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*)\right|\right\} \tag{3.6}$$

โดยที่ $M_{\hat{\theta}}$ คือ โดเมนของพารามิเตอร์

$\nu(t)$ คือ ค่าผิดพลาดในการประมาณ (approximation error) หรือคือ ส่วนแตกต่างที่น้อยที่สุดระหว่างฟังก์ชันไม่ทราบค่า f กับตัวประมาณออนไลน์ $\hat{f}$ นั่นคือ

$$\nu(t) := \beta(t-T)\left[f(x(t),u(t))-\hat{f}(x(t),u(t);\hat{\theta}^*)\right] \tag{3.7}$$

โดยปกติ ในทางอุดมคติเราต้องการให้ $\nu(t)=0$ ซึ่งเป็นไปได้ยากในความเป็นจริง อย่างไรก็ตาม $\nu(t)$ สามารถทำให้มีค่าน้อยได้ โดยเลือกชนิดของตัวประมาณออนไลน์ที่เหมาะสม

จากสมการที่ (3.3) และ (3.5) จะได้ว่า

$$\dot{e} = Ge+\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*)-\hat{f}(x,u;\hat{\theta})+\nu \tag{3.8}$$

จากสมการ (3.8) ข้างต้นเราสามารถหากฎการปรับค่าพารามิเตอร์ที่มีเสถียรภาพได้ โดยใช้วิธีเลียปูนอฟ(Lyapunov) ในการหากฎการปรับค่า พิจารณาฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V=\frac{1}{2}e^Te+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} \qquad \text{เมื่อ } \tilde{\theta}=\hat{\theta}-\hat{\theta}^* \tag{3.9}$$

กฎการปรับค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ $\dot{V}$ มีค่าเป็นลบสามารถหาได้ดังนี้คือ

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma Z e \tag{3.10}$$

เมื่อ $Z := \left[\dfrac{\partial \hat{f}(x,u;\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \right]^T$ เรียกว่า ฟังก์ชันความไว (sensitivity function)

และ $\Gamma = \Gamma^T > 0$ เรียกว่า เมตริกซ์อัตราการเรียนรู้ (learning rate matrix)

จากวิธีการเรียนรู้ที่แสดงในสมการ (3.8) และ (3.10) สามารถแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติทางด้านเสถียรภาพของการเรียนรู้ในกรณีที่เกิดความผิดพร่องเฉียบพลันที่เวลาไม่รู้ค่า T โดยที่พลวัตที่เปลี่ยนไปของระบบยังคงมีตัวแปรสถานะที่มีขอบเขต คุณสมบัติด้านเสถียรภาพสามารถสรุปได้ตามทฤษฎีข้างล่าง

ทฤษฎี 3.1 [19] วิธีการเรียนรู้ในสมการ (3.8) และ(3.10) จะมีคุณสมบัติด้านเสถียรภาพดังต่อไปนี้

(ก) ถ้าตัวประมาณออนไลน์ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีการปรับค่าพารามิเตอร์แบบเป็นเชิงเส้น และมี $\hat{\theta}^* \in M_{\hat{\theta}}$ ที่ทำให้ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*) = f(x,u)$ สำหรับทุกค่า (x,u) ที่อยู่ในโดเมนที่สนใจ D แล้ว $e(t)$ จะลู่เข้าสู่ศูนย์

(ข) ถ้าตัวประมาณออนไลน์ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีการปรับค่าพารามิเตอร์แบบเป็นเชิงเส้น และ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) \neq f(x,u)$ แล้วจะได้ว่า ที่เวลา t_f มี λ_1, λ_2 ที่ทำให้

$$\int_0^{t_f} |e(t)|^2 \, dt \le \lambda_1 + \lambda_2 \int_0^{t_f} |v(t)|^2 \, dt \tag{3.11}$$

(ค) ถ้าตัวประมาณออนไลน์ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีการปรับพารามิเตอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น แล้วจะได้ว่า ที่เวลา t_f มี λ_1, λ_2 ที่ทำให้

$$\int_0^{t_f} |e(t)|^2 \, dt \le \lambda_1 + \lambda_2 \int_0^{t_f} \left| v(t) - \hat{f}_0(x,u;\hat{\theta}) \right|^2 dt \tag{3.12}$$

เมื่อ $\hat{f}_0(x,u;\hat{\theta})$ คือ เทอมอันดับสูงจากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ รอบจุด $(x,u;\hat{\theta}^*)$

พิสูจน์

พิจารณาข้อ (ก) จากสมมติฐานที่ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีการปรับค่าพารามิเตอร์แบบเป็นเชิงเส้น และไม่มีค่าผิดพลาดจากการประมาณ จะได้ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) = \Omega(x,u)^T \hat{\theta}$ และ $\nu = 0$ และเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ให้ $G = -gI$ โดย $g > 0$ จะได้

$$\dot{e} = -ge - Z\widetilde{\theta} \tag{3.13}$$

เมื่อ $Z = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\theta}} = \Omega(x,u)^T$ และ $\widetilde{\theta} = \hat{\theta} - \hat{\theta}^*$

พิจารณาเวลาหลังเกิดความผิดพร่อง $t > T$ จากฟังก์ชันเลียปูนอฟในสมการ (3.9)

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\widetilde{\theta}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้

$$\dot{V} = e^T e + \widetilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \tag{3.13}$$

แทนค่าจากสมการ (3.8) และ (3.10)

$$\dot{V} = -g|e|^2 - e^T Z\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta} Ze$$

$$\dot{V} = -g|e|^2 \tag{3.14}$$

จาก $V \in L_\infty$ จะได้ว่า $e, \widetilde{\theta} \in L_\infty$ และจาก V เป็นฟังก์ชันที่ไม่เพิ่มขึ้นตามเวลาและมีขอบล่าง ดังนั้นจึงมี $\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty$ จากสมการ(3.14) อินทิเกรตทั้งสองข้างจาก 0 ถึง ∞ จะได้ว่า $e \in L_2$ และจากความจริงที่ว่า $\dot{e} \in L_\infty$ โดย บทตั้งของBarbalat [21] สรุปได้ว่า $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

พิจารณาข้อ (ข) ในกรณีนี้มีค่าผิดพลาดจากการประมาณ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -g|e|^2 + e^T \nu \\ &= -\frac{g}{2}|e|^2 - \frac{g}{2}\left(|e|^2 - \frac{2}{g}e^T\nu + \frac{1}{g^2}|\nu|^2\right) + \frac{1}{2g}|\nu|^2 \\ &\le -\frac{g}{2}|e|^2 + \frac{1}{2g}|\nu|^2\end{aligned} \tag{3.15}$$

จากอสมการ (3.15) จะการันตีว่า $\dot{V} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $|e| > |\nu|/g$ และเมื่ออินทีเกรตอสมการ (3.15) ทั้งสองข้างจาก $t = 0$ ถึง $t = t_f$ จะได้

$$\int_0^{t_f} |e(t)|^2 dt \le \frac{2}{g}\left[V(0) - V(t_f)\right] + \frac{1}{g^2}\int_0^{t_f} |v(t)|^2 dt$$

$$\le \lambda_1 + \lambda_2 \int_0^{t_f} |v(t)|^2 dt \tag{3.16}$$

อสมการ (3.16) แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่าง สมรรถนะในการเรียนรู้กับเทอมที่ผิดพลาดจากการประมาณ ν ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\|e_t\|_2$ จะมีขอบเขตแปรตาม $\|\nu_t\|_2$

พิจารณาข้อ (ค) $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ มีการปรับค่าพารามิเตอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นจะได้

$$\dot{e} = -ge + \hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*) - \hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + \nu$$

เมื่อกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ รอบจุด $(x,u;\hat{\theta}^*)$ จะได้

$$\dot{e} = -ge - Z\tilde{\theta} - f_0(x,u;\hat{\theta}) + \nu(t)$$

เมื่อ ให้ $\bar{\nu} = \nu - f_0$ จะได้ว่าการวิเคราะห์จะเหมือนในส่วนของข้อ (ข)

3.5 การปรับปรุงสำหรับการวินิจฉัยความผิดพร่อง

จากสมการ(3.1) เป็นการมองความผิดพร่องในรูปของส่วนที่ทำให้พลวัตของระบบเปลี่ยนไป ซึ่งในงานวิจัยของ A.T.Vermuri [18] ได้อาศัยตัวประมาณออนไลน์ประมาณส่วนที่ผิดไปดังกล่าวเพื่อนำไปทำการปรับระบบ สำหรับในการวินิจฉัยความผิดพร่องมีวิธีวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

จากสมการ (3.1) เมื่อพิจารณาลักษณะที่ความผิดพร่องกระทำต่อระบบสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\dot{x} = \xi(x,u) + E\beta(t-T)f(x,u) \tag{3.17}$$

โดย

- E คือเมตริกซ์ขนาด $n \times m$ โดย n เป็นอันดับของระบบ และ m เป็นจำนวนความผิดพร่องที่เกิดขึ้น
- f คือคอลัมน์เวกเตอร์ของฟังก์ชันความผิดพร่องขนาด m

ดังนั้นตัวประมาณที่จะใช้ในการประมาณในสมการที่ (3.17) จึงมีการปรับปรุงใหม่โดยเพิ่มเมตริกซ์ E เข้าไป

$$\dot{\hat{x}} = \xi(x,u) + E\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + G(\hat{x}-x) \tag{3.18}$$

สำหรับกฎการปรับค่าพารามิเตอร์ เมื่อพิจารณาฟังก์ชันเลียปูนอฟ ในสมการ (3.9) สามารถหากฎการปรับค่าพารามิเตอร์ได้ใหม่คือ

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma Z E^{T} e \tag{3.19}$$

กฎการปรับค่าพารามิเตอร์ใหม่ในสมการ(3.19) ยังคงมีคุณสมบัติด้านเสถียรภาพตามทฤษฎี 3.1 อย่างไรก็ตาม ตัวประมาณในสมการที่ (3.18) สามารถวินิจฉัยความผิดพร่องที่เกิดขึ้นทั้งความผิดพร่องอย่างเดียวหรือหลายอย่างได้ถูกต้องก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ E สอดคล้องกับทฤษฎีข้างล่างนี้

ทฤษฎี 3.2 ระบบในสมการ (3.17) จะสามารถวินิจฉัยได้ ถ้าเมตริกซ์ $E^{T}E$ สามารถหาตัวผกผัน (inverse)ได้

พิสูจน์

จากระบบ (3.17)

$$\dot{x} = \xi(x,u) + E\beta(t-T)f(x,u)$$

และตัวประมาณ (3.18)

$$\dot{\hat{x}} = \xi(x,u) + E\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + G(\hat{x}-x)$$

จะได้พลวัตของความผิดพลาดเป็น

$$\dot{e} = Ge + E\Big(\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^{*}) - \hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + \nu\Big) \tag{3.20}$$

เนื่องจากกฎการปรับค่าที่เลือก ทำให้ค่าเลียปูนอฟฟังก์ชันมีค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นลบ ดังนั้น เมื่อ $t \to \infty$ จะได้ $\dot{e} \to 0$ และ $\dot{\theta} \to 0$ ซึ่งจะสมการ (3) จะได้

$$Ge + E\Big(\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^{*}) - \hat{f}(x,u;\hat{\theta}) + \nu\Big) = 0$$

$$E\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) = Ge + E\Big(\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^{*}) + \nu\Big)$$

$$E^{T}E\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) = E^{T}\Big\{Ge + E\Big(\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^{*}) + \nu\Big)\Big\}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ $E^{T}E$ สามารถหาตัวผกผันได้ ดังนั้นจะได้

$$\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) = \left(E^T E\right)^{-1} E^T \left\{Ge + E\left(\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*) + \nu\right)\right\} \tag{3.21}$$

ในกรณีที่ไม่เกิดความผิดพลาดในการประมาณฟังก์ชัน $\nu = 0$ และ $e = 0$

$$\hat{f}(x,u;\hat{\theta}) = \left(E^T E\right)^{-1} E^T E\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*)$$

$$= \beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*) \tag{3.20}$$

ดังนั้น ตัวประมาณ $\hat{f}(x,u;\hat{\theta})$ สามารถประมาณความผิดพร่อง $\beta(t-T)\hat{f}(x,u;\hat{\theta}^*)$ ได้

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ทดสอบและพัฒนาวิธีการใช้ตัวประมาณออนไลน์ในการตรวจพบและวินิจฉัยความผิดพร่องสำหรับระบบสามถัง และระบบถังปฏิกรณ์เคมีชนิดต่อเนื่อง ซึ่งจะนำเสนอต่อไปในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับ