โครงการวิจัยย่อยลำดับที่ 6
เรื่อง ซอฟต์แวร์คำนวณวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและโฟโตนิกส์ ปีที่ 5

ผู้รับผิดชอบโครงการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ทับทิม อ่างแก้ว

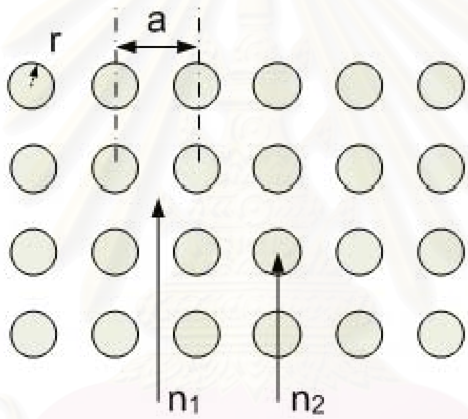
โครงการวิจัยเรื่องซอฟท์แวร์วิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและโฟโตนิกส์ในปีที่ 5 เป็นการวิจัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical analysis method) เพื่อนำมาพัฒนาเป็นซอฟท์แวร์ช่วยออกแบบทางวิศวกรรม สำหรับปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า หัวข้อวิจัยในปีที่ 5 ประกอบด้วยหัวข้อย่อย 2 เรื่อง กล่าวคือเรื่องแรกเป็นงานวิจัยที่ เกี่ยวกับการวิเคราะห์คลื่นแสงที่เดินทางในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ ซึ่งเป็นงานวิจัยที่ต่อเนื่องจากงานวิจัยในปีที่ 4 จุดเด่นของงานวิจัยในหัวข้อที่ 1 คือการวิจัยที่นำเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมมาใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์คลื่นแสงที่เดินทางในวงจรนำคลื่นแสงภายในโครงสร้างผลึกโฟโตนิกส์เพื่อลดเวลาคำนวณ หัวข้อวิจัยย่อยเรื่องที่ 2 คือการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใดๆ ในสนามจากข้อมูลสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนผิวขอบเขตโดยใช้สมการอินทีกรัลในรูปของเลขคลิฟฟอรด์ (Clifford number) งานวิจัยในหัวข้อนี้เป็นองค์ความรู้ใหม่ที่นำเข้าใช้ในการวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า รายงานผลการวิจัยจะกล่าวเป็นลำดับไป

หัวข้อที่ 1:

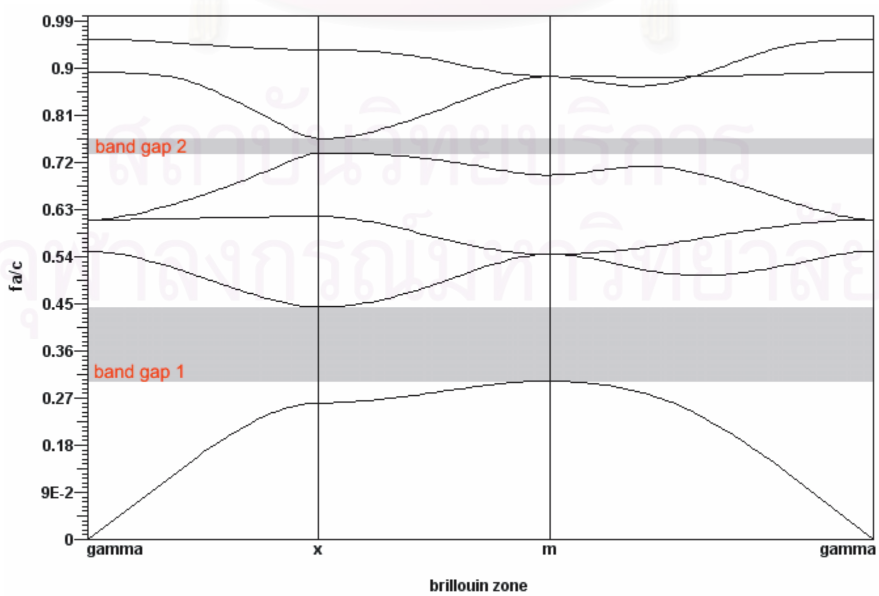
ซอฟท์แวร์วิเคราะห์วงจรนำคลื่นแสงในผลึกโฟโตนิกส์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์-บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาและการใช้เอลิเมนต์หลายเหลี่ยม

1.1 ปัญหาและที่มาของงานวิจัย

งานวิจัยนี้ริเริ่มมาจากการนำคุณสมบัติทางไฟฟ้าที่สำคัญของผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystal) (รูปที่ 1.1) มาประยุกต์ใช้ในการส่งสัญญาณทางแสงต่างๆ คุณสมบัติทางไฟฟ้าดังกล่าวคือ แถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic band gap) (รูปที่ 1.2) โดยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่อยู่ในช่วงของแถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์จะไม่สามารถเคลื่อนที่ผ่านโครงสร้างของผลึกโฟโตนิกส์นั้นไปได้

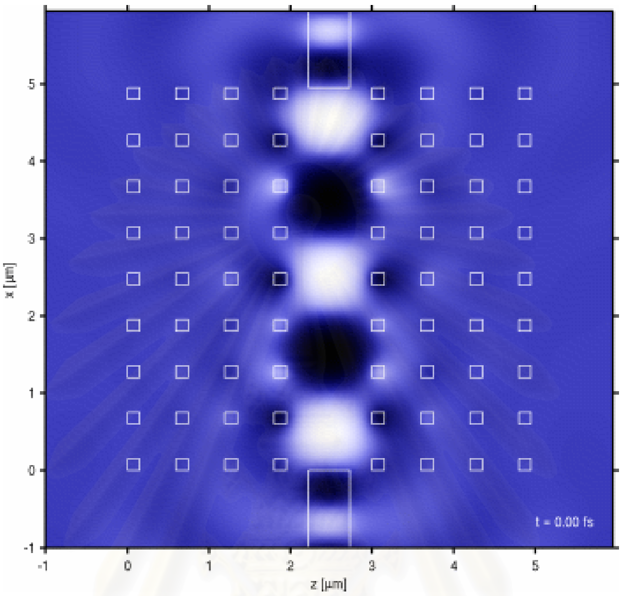


รูปที่ 1.1 ผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystal)



รูปที่ 1.2 แถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic band gap)

ด้วยคุณสมบัติแถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์ดังที่กล่าวไปข้างต้น จึงได้มีการนำผลึกโฟโตนิกส์มาทำเป็นส่วนของแคลดดิ้ง (Cladding) ของท่อนำคลื่นแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystal waveguide) (รูปที่ 1.3) และให้คลื่นแสงเคลื่อนที่ไปตามส่วนคอร์ (Core) ของท่อนำคลื่นแสงนั้น โดยคลื่นแสงที่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ก็จะต้องมีความถี่อยู่ในช่วงของแถบช่องความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์ที่นำมาทำเป็นแคลดดิ้ง



รูปที่ 1.3 ท่อนำคลื่นแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystal waveguide)

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบการส่งสัญญาณทางแสงในช่วงประมาณ 10 ปีที่ผ่านมานี้ พบว่าท่อนำคลื่นแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์ ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการส่งสัญญาณแสง และมีการออกแบบท่อนำคลื่นแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์ให้มีรูปร่างลักษณะต่างๆ ตามการประยุกต์ใช้งานในระบบส่งสัญญาณทางแสง อย่างเช่น รูปตัว T หรือ ตัว Y เพื่อประยุกต์ทำเป็น บีมสปลิทเตอร์ (Beam Splitter) หรือ ประยุกต์เป็นคัปเปลอร์แบบมีทิศทาง (Directional coupler) เป็นต้น รูปร่างลักษณะต่างๆ เหล่านี้เรียกว่าวงจรผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic Crystal Circuits)

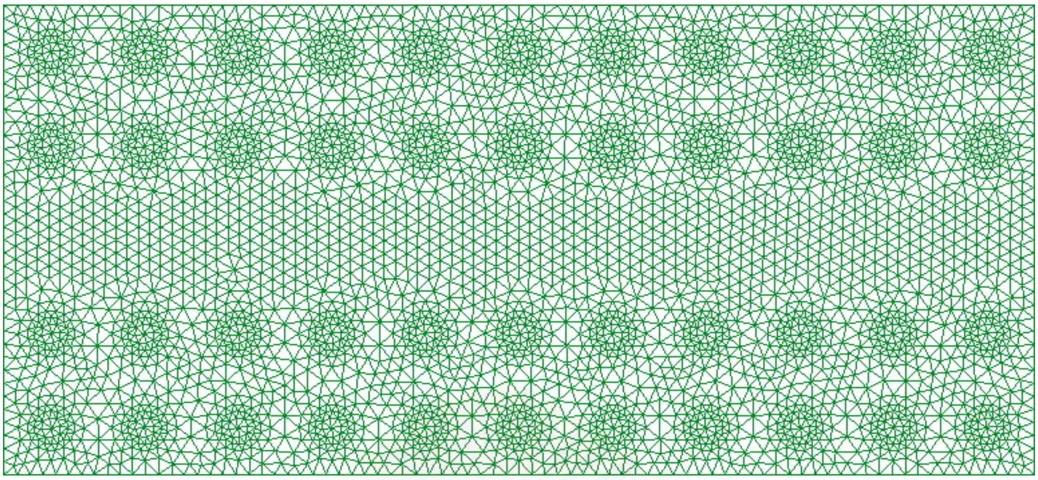
ในการออกแบบวงจรผลึกโฟโตนิกส์นั้น เป็นเรื่องจำเป็นที่จะต้องทำการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงที่จะเกิดขึ้นก่อนที่จะทำการสร้างจริง จึงได้มีงานวิจัยหลายงานที่นำเสนอระเบียบวิธีหรือเทคนิคต่างๆเพื่อการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์ เช่นระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชัน (Beam propagation method) [1], ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์ในโดเมนเวลา (FDTD) [2], ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (Time-domain finite-difference beam propagation method) [3] และ ระเบียบวิธี

ไฟไนต์เอลิเมนต์ บีมโพรพาเกชัน ในโดเมนเวลา (Time-domain finite-element beam propagation method) [4]-[6] เป็นต้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำเสนอระเบียบวิธีในการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์พบว่า ในช่วงประมาณ 5 ปีที่ผ่านมา ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา คือระเบียบวิธีที่มีประสิทธิภาพและเป็นที่นิยมในการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงมากที่สุด หลักการของระเบียบวิธีนี้ กล่าวโดยสรุปคือ เป็นการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาคำนวณคลื่นแสงที่บางตำแหน่ง ในบริเวณของท่อนำสัญญาณแสง และใช้ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันในการคำนวณสัญญาณแสงที่ตำแหน่งเดียวกัน ณ จุดเวลาต่างๆ

ระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา มีข้อดีคือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถคำนวณสัญญาณแสงที่ตำแหน่งต่างๆ (โหนด) ในบริเวณของท่อนำสัญญาณแสงได้เป็นอย่างดี โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ให้มีขนาดใดๆ ก็ได้ตามความหมาะสม กล่าวคือ สามารถแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่ต้องการทราบค่าของสัญญาณแสงอย่างละเอียด และ แบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณที่เราไม่ต้องการทราบค่าของสัญญาณแสงอย่างละเอียดมากนัก นอกจากนี้การแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งเป็นมาตรฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำให้สามารถแบ่งเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับรูปร่างของปัญหาที่พิจารณาที่เป็นลักษณะโค้งได้เป็นอย่างดี จากข้อดีที่กล่าวมา ทำให้ระเบียบวิธีโดเมนเวลา-ไฟไนต์เอลิเมนต์คือระเบียบวิธีที่มีความแม่นยำในการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงและน่าจะนำมาพัฒนาให้ระเบียบวิธีดังกล่าวมีสมรรถนะในการคำนวณที่ดีขึ้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาใช้วิเคราะห์ลักษณะสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์พบว่า ลักษณะของสัญญาณแสงที่แต่ละจุดเวลานั้นจะสามารถหาคำตอบได้ด้วยการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยขนาดของระบบสมการเชิงเส้นจะเท่ากับจำนวนโหนด (Nodal point) ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ สามารถกล่าวได้ว่า ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในแต่ละจุดเวลาจะขึ้นอยู่กับขนาดของระบบสมการเชิงเส้นหรือจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์



รูปที่ 1.4 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์โดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด

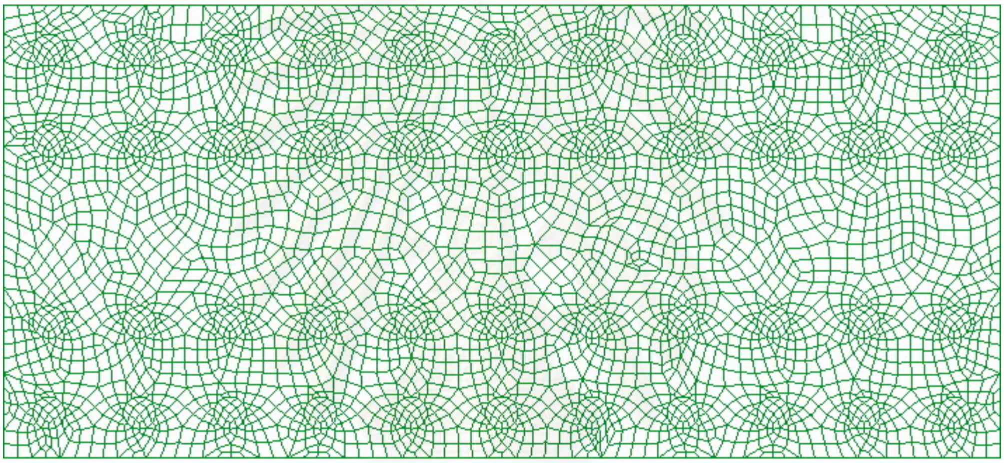
แม้ว่าการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีนี้จะสามารถให้ผลการคำนวณที่แม่นยำ แต่ก็ต้องใช้เอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากในการคำนวณดังตัวอย่างในรูปที่ 1.4 โดยเฉพาะการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในบริเวณที่เป็นวงกลมที่ส่วนแคลดดิ้งของท่อนำคลื่นแสง ซึ่งแม้ว่าจะไม่ต้องการทราบลักษณะของสัญญาณแสงอย่างละเอียดมากนักในบริเวณนั้น แต่ก็จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากพอสมควรเพื่อที่จะประกอบกันเป็นรูปวงกลม ทำให้จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นมีมากเกินความจำเป็น และส่งผลให้การวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในแต่ละจุดเวลาใช้ระยะเวลานานเกินไปซึ่งยังไม่มีงานวิจัยใดที่แก้ไขปัญหาตรงจุดนี้ ในงานวิจัยนี้จึงคิดวิธีการลดจำนวนโหนดจากการแบ่งเอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นโดยไม่จำเป็น เพื่อให้ใช้ระยะเวลาในการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในแต่ละจุดเวลาสั้นลง

1.2 แนวคิดของงานวิจัย

ในปี ค.ศ. 2003 ได้มีงานวิจัยที่คิดค้นการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม (Poygonal element) ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [7],[8] ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้สำหรับการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมคือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส (Wachspress shape function) ในกรณีที่เอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรสจะมีลักษณะเหมือนกับฟังก์ชันรูปร่างแบบโพลิโนเมียลอันดับหนึ่ง (1^{st} order or linear shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างมาตรฐานที่ใช้กันมานานในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือ สามารถกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า ฟังก์ชันรูปร่างที่เป็น linear shape function สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเป็นสับเซตของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส สำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมใดๆ

การแบ่งเอลิเมนต์และใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซเสปรส เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมโยธา แต่ยังไม่ถูกนำมาใช้มากนักในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และจากการศึกษางานวิจัยที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาเพื่อการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสง พบว่ายังไม่มีงานวิจัยใดที่นำเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมทั่วไปมาใช้ระเบียบวิธีนี้เลย

ในงานวิจัยนี้จึงมีแนวคิดที่จะใช้การแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปหลายเหลี่ยมสำหรับการคำนวณดังรูปที่ 1.5 ซึ่งจะทำให้ลดจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และคาดว่าจะสามารถลดระยะเวลาในการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาลงได้



รูปที่ 1.5 ตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงในท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์โดยใช้รูปหลายเหลี่ยม

1.3 จุดประสงค์ของงานวิจัย

1. วิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงที่เคลื่อนที่ในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะต่างๆ ตามการประยุกต์ใช้งานในการสื่อสารทางแสง โดยใช้ระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Elements)

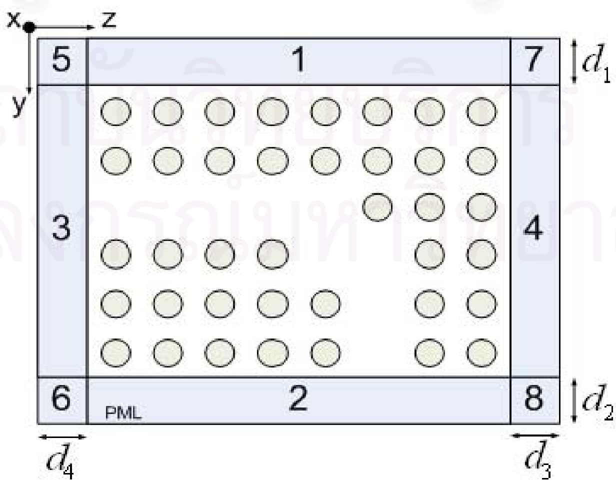
2. เปรียบเทียบสมรรถนะในการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวัตถุประสงค์ข้อ 1 ระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งเป็นเทคนิคที่งานวิจัยนี้นำเสนอ กับ ระเบียบวิธีเดียวกันแต่ใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือรูปสามเหลี่ยม โดยจะพิจารณาเปรียบเทียบในเรื่องของความ

สอดคล้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้ และระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณของทั้งสองเทคนิคดังกล่าว

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาทฤษฎีและระเบียบวิธีต่างๆ เพื่อการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์จากงานวิจัยที่ผ่านมา
2. ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา
3. ศึกษาการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยมและลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรสซึ่งถูกนำมาใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
4. เขียนโปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์คลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะต่างๆ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยม
5. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม

1.5 สมการสำหรับวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์



รูปที่ 1.6 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบ PML

เมื่อพิจารณาคลื่นแสงที่เคลื่อนที่ไปตามวงจรผลึกโฟโตนิกส์ดังรูปที่ 1.6 โดยสมมติให้คลื่นแสงมีการเปลี่ยนแปลงเฉพาะในแนวแกน y และ z โดยไม่มีการเปลี่ยนในแนวแกน x

เนื่องจากแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กซึ่งเป็นองค์ประกอบของคลื่นแสงจึงมีความสัมพันธ์เป็นไปตามสมการแมกซ์เวลในโดเมนของเวลา (Maxwell's equation in time domain) ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดตัวกลางภายใน เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบแอนไอโซโทรปิก PML (Perfectly match layer) [9] ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์จะสามารถหาได้จากสมการคลื่น TE และ TM โหมดดังสมการที่ (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

โดย

$$\Phi = E_x, p = 1, q = n^2 \qquad \text{สำหรับ TE โหมด} \qquad (2)$$

$$\Phi = H_x, p = \frac{1}{n^2}, q = 1 \qquad \text{สำหรับ TM โหมด} \qquad (3)$$

ซึ่งความหมายของตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในสมการ (1) – (3) แสดงได้ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ความหมายของตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในสมการคลื่น TE และ TM โหมด

E_x	องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x
H_x	องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวแกน x
t	เวลา
c	ความเร็วของแสงในอากาศว่าง (Free space)
n	ดัชนีหักเหของแสง (Refractive index)
s_y และ s_z	ค่าพารามิเตอร์ PML ซึ่งจะมีค่าขึ้นอยู่กับหมายเลขของพื้นที่ของ PML ในรูปที่ 5 ตามตารางที่ 2.2

ตารางที่ 1.2 พารามิเตอร์ของ PML

พารามิเตอร์	**บริเวณของ PML**							
PML	1	2	3	4	5	6	7	8
s_y	s_1	s_2	1	1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_z	1	1	s_3	s_4	s_3	s_3	s_4	s_4

เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ Conventional PML [9] และ พารามิเตอร์ของ PML s_1, s_2, s_3 และ s_4 จะเป็นไปตามสมการ

$$s_i = 1 - j\left(\frac{\rho}{d_i}\right)^2 \tan\delta_i \tag{4}$$

โดย ρ คือ ระยะจากจุดเริ่มต้นของ PML layer, d_i คือความหนาของ PML ที่ด้านต่างๆ ดังรูปที่ 5 และ δ_i คือ loss angle [9]

คำตอบของสมการคลื่นในสมการที่ (1), $\Phi(y,z,t)$ ก็คือลักษณะของคลื่นแสง ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับตำแหน่งใน 2 แนวแกนคือ y, z และเวลาคือ t

1.6 การวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

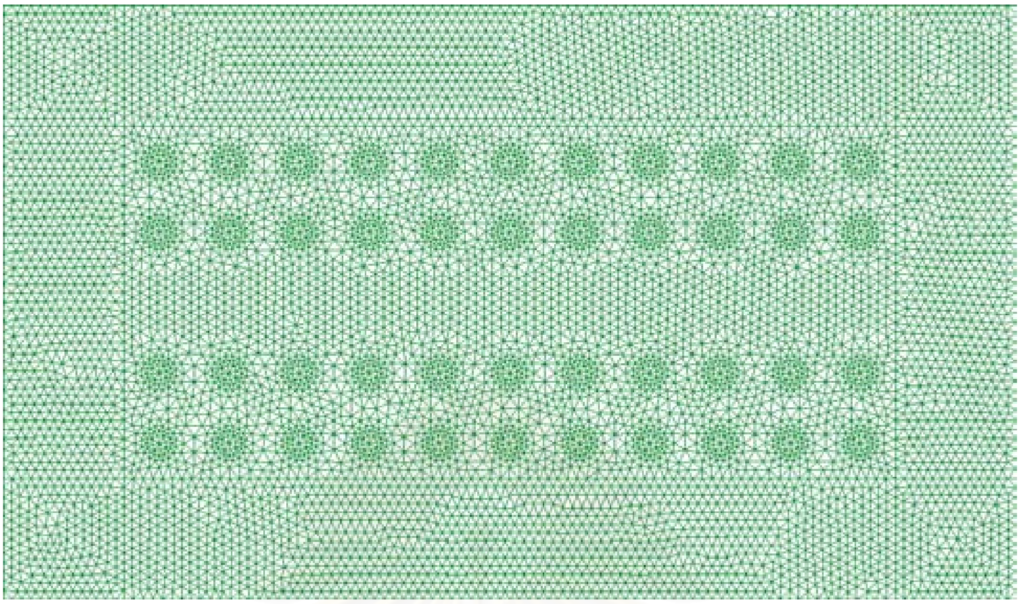
สมมติให้คลื่นแสงอยู่ในรูปของผลคูณของสัญญาณข้อมูล (Slow varying amplitude) กับคลื่นพาห์ที่มีความถี่สูงโดยมีความถี่เชิงมุมเท่ากับ ω_0 ดังนั้น

$$\Phi(y,z,t) = \phi(y,z,t)\exp(j\omega_0 t) \tag{6}$$

เมื่อแทนสมการที่ (6) ลงในสมการที่ (1) จะได้สมการ Partial Differential Equation ของ $\phi(y,z,t)$ เขียนได้ดังสมการที่ (7)

$$-\frac{s_y s_z q}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2j\frac{s_y s_z \omega_0 q}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \frac{s_y s_z \omega_0^2 q}{c^2}\phi = 0 \tag{7}$$

ในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดเมนที่เราต้องการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงจะถูกแบ่ง (discretized) ให้เป็นโดเมนย่อยจำนวนจำกัดดังตัวอย่างในรูปที่ 1.7 เรียกโดเมนย่อยแต่ละอันว่าเอลิเมนต์ (elements)



รูปที่ 1.7 โดเมนสำหรับวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสามเหลี่ยม (Triangular elements)

ค่าของ $\phi(y,z,t)$ ในแต่ละเอลิเมนต์จะถูกประมาณให้อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function or Interpolating function), $N_i^e(y,z)$ กับฟังก์ชันของเวลาที่ไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งโหนดของแต่ละเอลิเมนต์, $\phi_i^e(t)$ จำนวน n พจน์ดังสมการที่ (8) โดย n มีค่าเท่ากับจำนวนโหนดย่อยของแต่ละเอลิเมนต์ เช่น $n=3$ สำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

$$\phi^e(y,z,t)=\sum_{i=1}^{n}N_i^e(y,z)\phi_i^e(t) \tag{8}$$

เมื่อแทนสมการที่ (8) ลงในสมการที่ (7) และประมาณคำตอบของสมการที่ (7) ตามระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกาเลอคิน (Galerkin's weight residual method) โดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเป็นฟังก์ชันตัวเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง [10],[11] จะได้ชุดสมการหนึ่งที่เป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับสองของ ϕ โดยจำนวนสมการในชุดสมการนั้นจะเท่ากับจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ตามกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาที่เกิดขึ้นนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (9)

$$-\frac{1}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{d^2\{\phi\}}{dt^2}-2j\frac{\omega_0}{c^2}[\mathbf{M}]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t}+\left([\mathbf{K}]+\frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{9}$$

โดย

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามที่โหนดต่างๆ ในโดเมน โดย สมาชิกแถวที่ i ของ $\{\phi\}$ คือสัญญาณข้อมูล ที่โหนดที่ i ในโดเมน, $\phi_i(t)$ และ $\{0\}$ คือ เวกเตอร์ศูนย์ (Null vector)

เมทริกซ์ $\left[\mathbf{K}\right]$ และ $\left[\mathbf{M}\right]$ ในสมการที่ (9) สามารถหาได้จากสมการที่ (10) - (13)

$$\left[\mathbf{K}\right]=\sum_{e}\left[\mathbf{K}^{e}\right] \tag{10}$$

$$\left[\mathbf{M}\right]=\sum_{e}\left[\mathbf{M}^{\mathbf{e}}\right] \tag{11}$$

$$\left[\mathbf{K}^{\mathbf{e}}\right]=\iint_{e}\left[-p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^{T}}{\partial y}-p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^{T}}{\partial z}\right]dydz \tag{12}$$

$$\left[\mathbf{M}^{\mathbf{e}}\right]=\iint_{e}\left[s_y s_z q\{N\}\{N\}^{T}\right]dydz \tag{13}$$

โดย

$\{N\}$ คือเวกเตอร์ของฟังก์ชันรูปร่าง

เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาในสมการที่ (9) ได้ด้วยอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm) ดังที่จะได้กล่าวต่อไป จึงต้องทำการประมาณสมการที่ (9) ให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลาอันดับหนึ่งเสียก่อน

จากสมการที่ (9) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\mathbf{M}\right]\frac{d\{\phi\}}{dt}=-\frac{\left(\left[\mathbf{K}\right]+\frac{\omega_0^2}{c^2}\left[\mathbf{M}\right]\right)\{\phi\}}{1-\frac{j}{2\omega_0}\frac{d}{dt}} \tag{14}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ของ Pade recurrence [12] กับสมการที่ (14) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}=\frac{c^2}{2j\omega_0}\left[\mathbf{M}\right]^{-1}\left(\left[\mathbf{K}\right]+\frac{\omega_0^2}{c^2}\left[\mathbf{M}\right]\right) \tag{15}$$

เมื่อแทนสมการที่ (14) และ (15) ลงในสมการที่ (9) เราจะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลาดังสมการที่ (16)

$$-2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial t}+\left(\left[\mathbf{K}\right]+\frac{\omega_0^2}{c^2}\left[\mathbf{M}\right]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{16}$$

โดย

$$\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]=\left[\mathbf{M}\right]-\frac{c}{4\omega_0^2}\left(\left[\mathbf{K}\right]+\frac{\omega_0^2}{c^2}\left[\mathbf{M}\right]\right) \tag{17}$$

จากนั้นจึงทำการประมาณคำตอบของสมการที่ (16) โดยใช้อัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm) ซึ่งเป็นสมการบีมโพรพาเกชัน คำตอบของสมการที่ (16) ที่

ประมาณได้จะอยู่ในรูปของเวกเตอร์ของสนามที่จุดเวลาต่างๆ, $\{\phi\}_i$ โดยที่ i คือจำนวนเต็มที่ระบุลำดับที่ของจุดเวลา ดังสมการที่ (18)

$$[\mathbf{A}]_i \{\phi\}_{i+1} = [\mathbf{B}]_i \{\phi\}_i \tag{18}$$

โดย

$$[\mathbf{A}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i + \theta\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{19}$$

$$[\mathbf{B}]_i = -2j\frac{\omega_0}{c^2}\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]_i - (1-\theta)\Delta t\left([\mathbf{K}]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2}[\mathbf{M}]_i\right) \tag{20}$$

โดย Δt คือ ระยะเวลาระหว่างจุดเวลาแต่ละจุด และ θ คือพารามิเตอร์สำหรับควบคุม stability ของระเบียบวิธีนี้ ซึ่ง ค่าพารามิเตอร์ θ ที่ทำให้ระเบียบวิธีนี้มี stability จะอยู่ในช่วง $\theta = 0.5 - 0.8$ [5]

เพื่อความถูกต้องและ stability ของการประมาณคำตอบในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา จะต้องแบ่งขนาดของเอลิเมนต์และระยะเวลาระหว่างจุดเวลาให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของ คูแรนด์-เฟดริช-เลวี (Courant-Friedrich-Levy condition) [13] เงื่อนไขนี้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแบ่งระยะเวลาระหว่างจุดเวลาแต่ละจุดในระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันกับขนาดของเอลิเมนต์ที่แบ่งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังอสมการที่ (21)

$$\Delta t < \frac{\min(l)}{c} \tag{21}$$

โดย $\min(l)$ คือ ความยาวที่สั้นที่สุดของระยะขอบของเอลิเมนต์ที่แบ่ง

รูปแบบของการคำนวณค่าของสนามที่โหนดต่างๆ และที่แต่ละจุดเวลาในสมการที่ (18) จะเป็นการใช้ค่าของสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาแรก (สนามอินพุท) มาคำนวณสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาที่สอง และ ใช้ค่าของสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาที่สอง มาคำนวณสนามที่โหนดต่างๆ ณ จุดเวลาถัดไป เป็นเช่นนี้เรื่อยไป

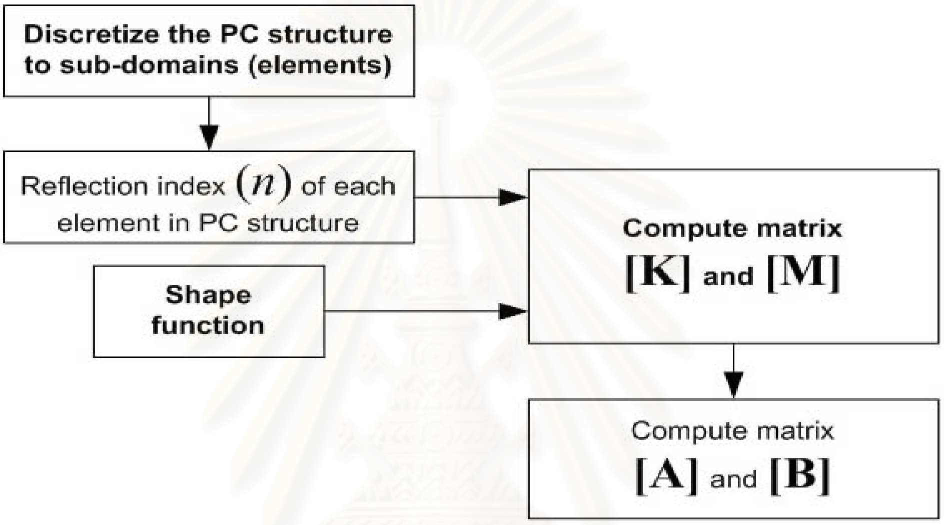
1.7 ขั้นตอนในการโปรแกรมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

โปรแกรมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอนใหญ่ๆ คือ ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite-element scheme) และ ขั้นตอนอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสัน (Clank-Nicholson algorithm or Two-point recurrence scheme)

1.7.1 **ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์**

ขั้นตอนนี้จะเป็นการใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาแก้ปัญหาที่ตำแหน่งต่างๆ ในโดเมนของวงจรผลึกโฟโตนิกส์ โดยนำค่าของดัชนีหักเหของแสงที่เอลิเมนต์ต่างๆ และฟังก์ชันรูปร่างมาคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ ตามสมการที่ 10 ถึง 13 และ นำเมทริกซ์ $[\mathbf{K}]$ และ $[\mathbf{M}]$ มาคำนวณเมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ ตามสมการที่ 17, 19 และ 20

ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่กล่าวมา สามารถสรุปได้ดังรูปที่ 1.8

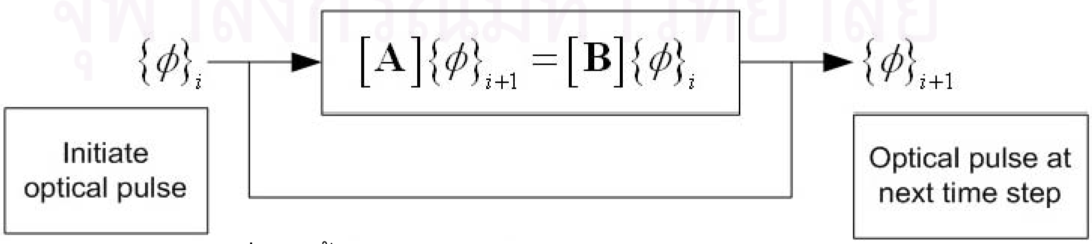


รูปที่ 1.8 ขั้นตอนของไฟไนต์เอลิเมนต์ในโปรแกรม (Finite-element scheme)

1.7.2 **ขั้นตอนอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสัน**

ขั้นตอนนี้จะเป็นการป้อนคลื่นแสงที่จุดเวลาเริ่มต้น, $\{\phi\}_i$ และแก้สมการเชิงเส้นขนาดใหญ่เพื่อคำนวณลักษณะของคลื่นแสงที่จุดเวลาถัดไป, $\{\phi\}_{i+1}$ โดยใช้เมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ ที่คำนวณได้จากขั้นตอนของไฟไนต์เอลิเมนต์

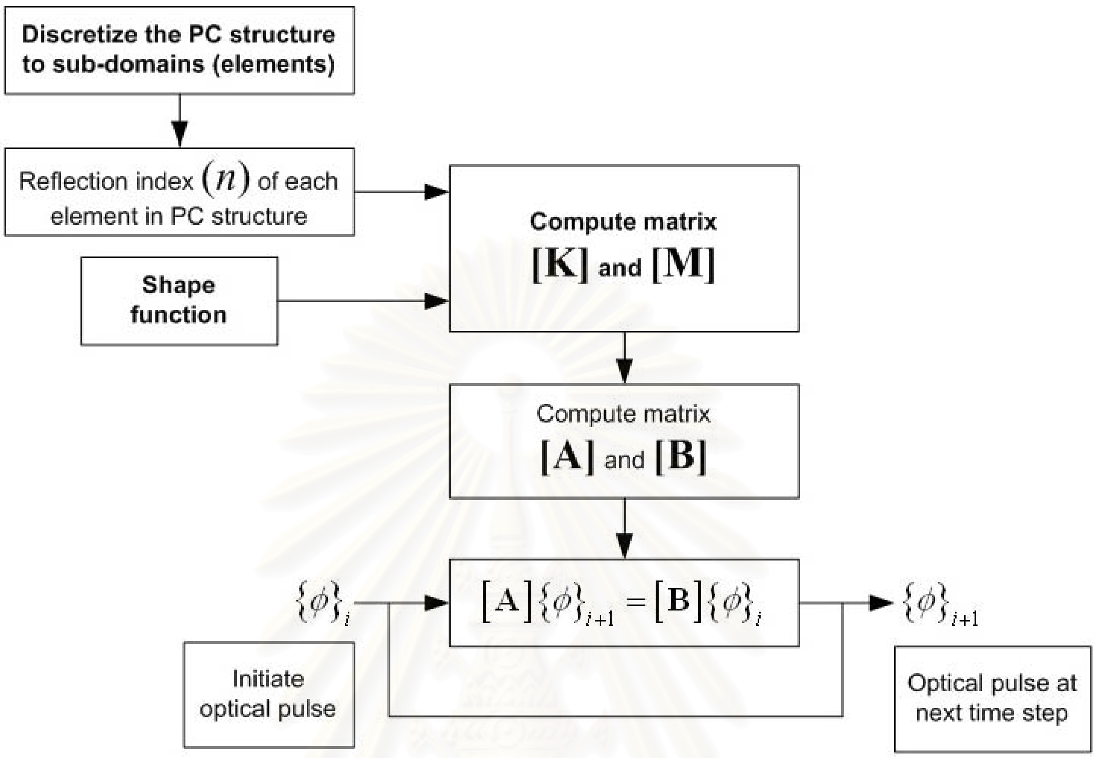
ขั้นตอนอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสันดังที่กล่าวมา สามารถสรุปได้ดังรูปที่ 1.9



รูปที่ 1.9 ขั้นตอนอัลกอริทึมของแคลง-นิโคลสันในโปรแกรม

(Clank-Nicholson algorithm or Two-point recurrence scheme)

ดังนั้นอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาทั้งหมดจึงสามารถเขียนรวมได้ดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 โปรแกรมอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาทั้งหมด

1.8 **ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม** (TD-FEM with Polygonal element)

จากทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาสำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ ดังที่กล่าวไปแล้วจะเห็นได้ว่า ลักษณะของการคำนวณคลื่นแสงในแต่ละจุดเวลาจะเป็นการแก้สมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ โดยที่ขนาดของสมการเชิงเส้นนั้นจะมีค่าเท่ากับจำนวนโหนด (Nodal point) ที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และไม่ว่าจะแก้สมการเชิงเส้นที่เกิดขึ้นนั้นด้วยวิธีใด ระยะเวลาที่ใช้ในการแก้สมการนั้นก็จะขึ้นอยู่กับขนาดของสมการเชิงเส้นนั่นเอง เพราะฉะนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์คือปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อสมรรถนะในเชิงระยะเวลาที่ใช้คำนวณ (Computation time) ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาจะแก้ปัญหาสนามที่ตำแหน่งต่างๆ (Space) ได้ดี แต่ก็มีข้อจำกัดที่ผู้ทำวิจัยพบอยู่บางประการที่ทำให้ระเบียบวิธีนี้ใช้ระยะเวลานานในการคำนวณโดยไม่จำเป็น

1. เมื่อนำระเบียบวิธีนี้ไปวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่มีขนาดค่อนข้างใหญ่ จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ก็จะมีมาก ส่งผลให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณของระเบียบวิธีนี้สูงตามไปด้วย

2. การแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีนี้โดยทั่วไปแล้วใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด เมื่อแก้ปัญหาสนามในบริเวณที่เป็นวงกลมที่ส่วนแคลดดิ้งของท่อนำคลื่นแสง แม้ว่าจะไม่ต้องการทราบลักษณะของสัญญาณแสงอย่างละเอียดมากนักในบริเวณนั้น แต่ก็จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากพอสมควรเพื่อที่จะประกอบกันเป็นรูปวงกลม มีผลทำให้จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นมีมากเกินความจำเป็น

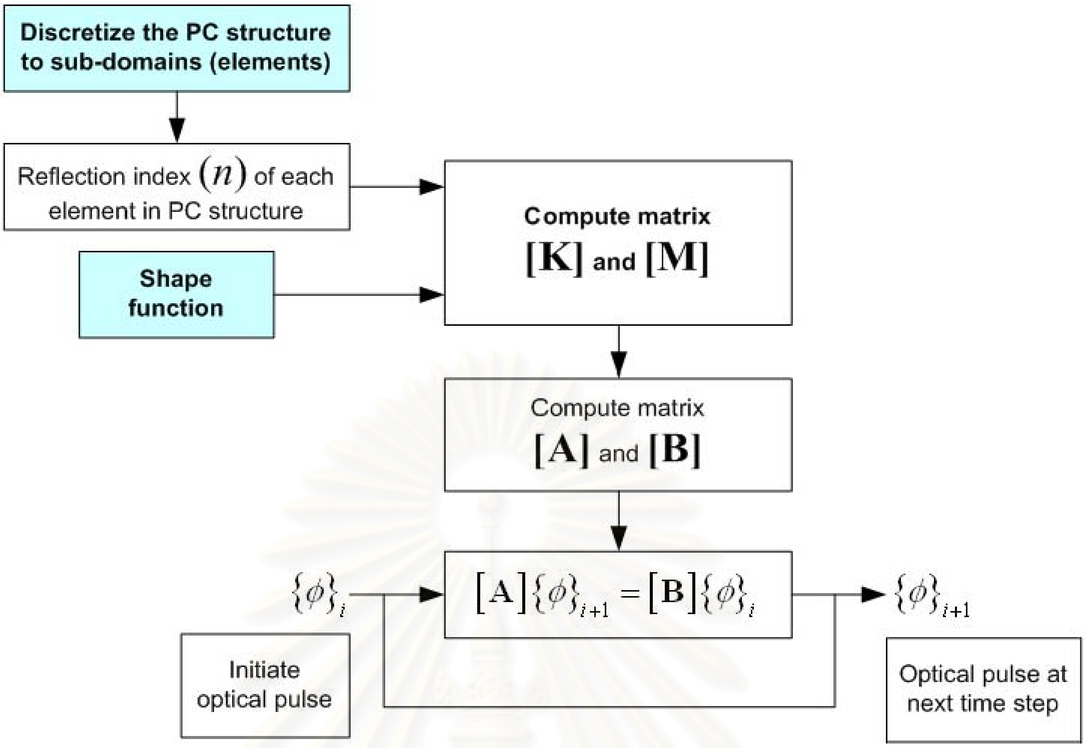
จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์จะมีข้อเสียในเรื่องระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณอันเนื่องมาจากข้อจำกัดในการแบ่งเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมในกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นเอง ในงานวิจัยนี้จึงคิดวิธีการแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบใหม่คือรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal element) เพื่อพัฒนาสมรรถนะของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาให้ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยลง

1.8.1 การเปลี่ยนแปลงในอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาของงานวิจัยนี้

งานวิจัยนี้ได้เปลี่ยนแปลงบางส่วนของอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา คือ

1. การแบ่งเอลิเมนต์จากเดิมรูปสามเหลี่ยมเป็นรูปหลายเหลี่ยม

2. ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในการอินทิเกรตเพื่อคำนวณเมทริกซ์ $[\mathbf{A}]$ และ $[\mathbf{B}]$ จากเดิมคือฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งหรือสอง (linear or quadratic shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม ในงานวิจัยนี้ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรซ (Wachspress shape function)

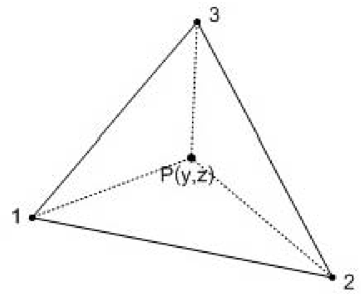


รูปที่ 1.11 การเปลี่ยนแปลงในอัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาของงานวิจัยนี้

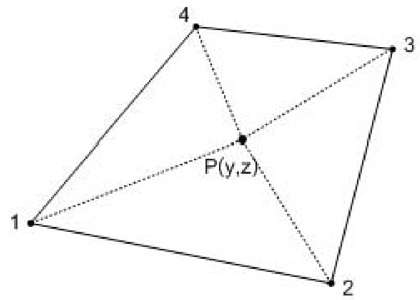
1.8.2 ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

ในหัวข้อนี้จะเป็นการกล่าวถึงที่มาของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

จากทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา ค่าของ $\phi(y,z,t)$ ในแต่ละเอลิเมนต์จะถูกประมาณให้อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function or Interpolating function), $N_i^e(y,z)$ กับฟังก์ชันของเวลาที่ไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งโหนดของแต่ละเอลิเมนต์, $\phi_i^e(t)$ จำนวน n พจน์ดังสมการที่ (22) โดย n มีค่าเท่ากับจำนวนโหนดย่อยหรือจำนวนเหลี่ยมของแต่ละเอลิเมนต์ เช่น $n=3$ สำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ในรูปที่ 6, $n=4$ สำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมใดๆ



รูปที่ 1.12 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 1.13 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม

$$\phi^e(y,z,t) = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(y,z)\phi_i^e(t) \tag{22}$$

ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้สำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมทั่วไป เรียกว่า ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส (Wachspress shape function) ซึ่งจะถูกเขียนให้อยู่ในเทอมของแบรีเซ็นทริก โคออดิเนต (Barycentric coordinate) ดังสมการที่ (23) [8]

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_i^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} \tag{23}$$

โดย $w_j^e(y,z)$ คือ barycentric coordinate สำหรับเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมทั่วไป (n-gon) ถูกเรียกว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ของโหนดที่ j ของเอลิเมนต์ จำนวนฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักจะมีเท่ากับ n ตัวหรือเท่ากับจำนวนเหลี่ยมของเอลิเมนต์ที่แบ่ง ซึ่งฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่จุด $p(y,z)$ สามารถคำนวณได้จากพื้นที่สามเหลี่ยม 3 อันดังสมการที่ (24)

$$w_j^e(y,z) = \frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)} \tag{24}$$

โดย

$A(j-1,j,j+1)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบไปด้วยโหนดที่ $j-1,j,j+1$ ตามลำดับ

$A(p,j-1,j)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบไปด้วยโหนดที่ $j-1,j$ และจุด $p(y,z)$

$A(p,j,j+1)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบไปด้วยโหนดที่ $j,j+1$ และจุด $p(y,z)$

จะเห็นได้ว่า $A(j-1, j, j+1)$ จะเป็นตัวเลขซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชัน ในขณะที่ $A(p, j-1, j)$ และ $A(p, j, j+1)$ จะเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งของ y และ z

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม $n=3$;

กำหนดให้พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเท่ากับ A

จำนวนฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้จึงมี $=3$ ตัว คือ $N_1^e(y,z)$, $N_2^e(y,z)$ และ $N_3^e(y,z)$

จำนวนฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weight function) $=3$ ตัว คือ $w_1^e(y,z)$, $w_2^e(y,z)$ และ $w_3^e(y,z)$ โดย

$$w_1^e(y,z) = \frac{A(0,1,2)}{A(p,0,1)A(p,1,2)} = \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)}$$

$$w_2^e(y,z) = \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)}$$

$$w_3^e(y,z) = \frac{A(2,3,4)}{A(p,2,3)A(p,3,4)} = \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z) &= \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)} + \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)} \\ &= \frac{A(3,1,2)A(p,2,3) + A(1,2,3)A(p,3,1) + A(2,3,1)A(p,1,2)}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)} \\ &= \frac{A(3,1,2)\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)}\end{aligned}$$

จากสมการของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส จะได้ว่า

$$N_1^e(y,z) = \frac{w_1^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{\dfrac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)}}{\dfrac{A(3,1,2)\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)}}$$

$$= \frac{A(p,2,3)}{\left[A(p,2,3) + A(p,3,1) + A(p,1,2)\right]}$$
$$= \frac{A(p,2,3)}{A}$$
$$= \frac{\left[(y_2 z_3 - y_3 z_2) + (z_2 - z_3)y + (y_3 - y_2)z\right]}{2A}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าของ $N_2^e(y,z)$ และ $N_3^e(y,z)$ จะได้ว่า

$$N_2^e(y,z) = \frac{w_2^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{A(p,1,3)}{A} = \frac{\left[(y_1 z_3 - y_3 z_1) + (z_1 - z_3)y + (y_3 - y_1)z\right]}{2A}$$
$$N_3^e(y,z) = \frac{w_3^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^e(y,z)} = \frac{A(p,1,2)}{A} = \frac{\left[(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 - z_2)y + (y_2 - y_1)z\right]}{2A}$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่หาได้จะเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับหนึ่ง (Linear shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างมาตรฐานแบบโพลีโนเมียลอันดับหนึ่งสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [10]

สำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมทั่วไป $(n > 3)$ เมื่อใช้สมการที่ (23) และ (24) ในการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส จะพบว่า ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรสสำหรับเอลิเมนต์ n เหลี่ยมจะอยู่ในรูปของอัตราส่วนของฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ $n-2$ เช่น สำหรับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม $(n = 4)$ ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรสจะอยู่ในรูปอัตราส่วนของฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ $n-2=2$ หรือเขียนได้เป็น

$$N_i(y,z) = \frac{a_{1i} + a_{2i}y + a_{3i}z + a_{4i}yz + a_{5i}y^2 + a_{6i}z^2}{b_{1i} + b_{2i}y + b_{3i}z + b_{4i}yz + b_{5i}y^2 + b_{6i}z^2} \quad i = 1,2,3,4$$

โดยสัมประสิทธิ์ทุกตัวจะเป็นตัวแปรที่ทราบค่า

1.8.3 วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส จะต้องคำนึงถึงความเหมาะสมสำหรับการเขียนโปรแกรมด้วย ในงานวิจัยนี้ทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชเสปรส โดยมองว่าฟังก์ชันนี้เป็นเศษส่วนของฟังก์ชันโพลีโนเมียลดังสมการที่ (25) และใช้หลักการหาอนุพันธ์ของเศษส่วนของฟังก์ชันดังที่จะกล่าวต่อไป

$$N_i^e(y,z) = \frac{w_j^e(y,z)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^e(y,z)} = \frac{f_1(y,z)}{f_2(y,z)} \tag{25}$$

อนุพันธ์เทียบกับ y และ z ของฟังก์ชันรูปร่างในสมการที่ (25) คือ

$$\frac{dN_i^e}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 \frac{df_1}{dy} - f_1 \frac{df_2}{dy}}{(f_2)^2} \tag{26}$$

$$\frac{dN_i^e}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 \frac{df_1}{dz} - f_1 \frac{df_2}{dz}}{(f_2)^2} \tag{27}$$

หลังจากนั้นทำการหา $\frac{df_1}{dy}, \frac{df_1}{dz}, \frac{df_2}{dy}$ และ $\frac{df_2}{dz}$ ได้ว่า

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{dw_j^e}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{28}$$

$$\frac{df_1}{dz} = \frac{dw_j^e}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{29}$$

$$\frac{df_2}{dy} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^e\right)}{dy} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\left(w_j^e\right)}{dy} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{30}$$

$$\frac{df_2}{dz} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^e\right)}{dz} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\left(w_j^e\right)}{dz} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right) \tag{31}$$

อนุพันธ์ $\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right)$ และ $\frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right)$ ในสมการที่ (28)-(31) จะสามารถหาได้โดยใช้การหาอนุพันธ์ของเศษส่วนของฟังก์ชันดังต่อไปนี้

เพื่อความสะดวกจึงกำหนดให้ $A(j-1,j,j+1)=A_{edge}$, $A(p,j-1,j)=A_1$ และ $A(p,j,j+1)=A_2$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{A_{edge}}{A_1A_2}\right)=-\frac{A_{edge}}{\left(A_1A_2\right)^2}\left(A_1\frac{dA_2}{dy}+A_2\frac{dA_1}{dy}\right) \quad (32)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{A(j-1,j,j+1)}{A(p,j-1,j)A(p,j,j+1)}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{A_{edge}}{A_1A_2}\right)=-\frac{A_{edge}}{\left(A_1A_2\right)^2}\left(A_1\frac{dA_2}{dz}+A_2\frac{dA_1}{dz}\right) \quad (33)$$

1.8.4 **การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างและอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซเสปรสสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมทั่วไป**

จากสมการที่ (12) และ (13) สมาชิกแถวที่ i และหลักที่ j ใน $\left[\mathbf{K^e}\right]$ และ $\left[\mathbf{M^e}\right]$ สามารถหาได้ตามสมการที่ (34) และ (35) ตามลำดับ

$$K_{ij}^e=\iint_e\left[-p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}-p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]dydz \quad (34)$$

$$M_{ij}^e=\iint_e\left[s_ys_zqN_iN_j\right]dydz \quad (35)$$

ในการคำนวณค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ $\left[\mathbf{K^e}\right]$ และ $\left[\mathbf{M^e}\right]$ ของแต่ละเอลิเมนต์ตามสมการที่ (34) และ (35) จะเห็นว่าต้องทำการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างเพื่อคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $\left[\mathbf{M^e}\right]$ และอินทิเกรตอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเพื่อคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ $\left[\mathbf{K^e}\right]$

ในงานวิจัยนี้ทำการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างและอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างโดยใช้เทคนิคการประมาณของซิมพ์สัน (Simpson's rule) ในการคำนวณสมาชิกของ $\left[\mathbf{K^e}\right]$ และ $\left[\mathbf{M^e}\right]$ ในสมการที่ (34) และ (35) จะแทน kernel ของการอินทิเกรตด้วย $k(y,z)$ และ $m(y,z)$ ตามลำดับโดย

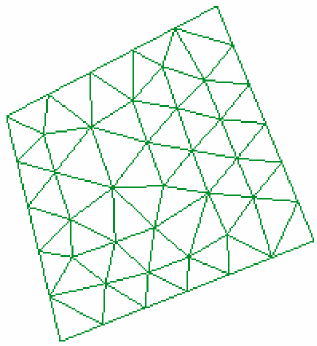
$$k(y,z)=-p\frac{s_z}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}-p\frac{s_y}{s_z}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z} \quad (34)$$

$$m(y,z)=s_ys_zqN_iN_j \quad (35)$$

สมการที่ (34) และ (35) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$K_{ij}^e=\iint_e k(y,z)dydz \quad (36)$$

$$M_{ij}^e=\iint_e m(y,z)dydz \quad (37)$$



รูปที่ 1.14 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม 1 เอลิเมนต์ ถูกแบ่งให้เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย เพื่อการประมาณค่าของการอินทิเกรตโดยใช้ Simpson's rule

เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจะถูกแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมย่อยดังรูปที่ 3.4 โดยจำนวนสามเหลี่ยมที่แบ่ง $= m$ และใช้เทคนิคการประมาณตามกฎของซิมพ์สัน กับสมการที่ (36) และ (37) จะได้ว่า

$$K_{ij}^{e} = \sum_{i=1}^{m} k(y_i, z_i) A_i \qquad (36)$$

$$M_{ij}^{e} = \sum_{i=1}^{m} m(y_i, z_i) A_i \qquad (37)$$

โดย

$k(y_i, z_i)$ และ $m(y_i, z_i)$ คือค่าของฟังก์ชันที่จุด centroid ของสามเหลี่ยมย่อยลำดับที่ i

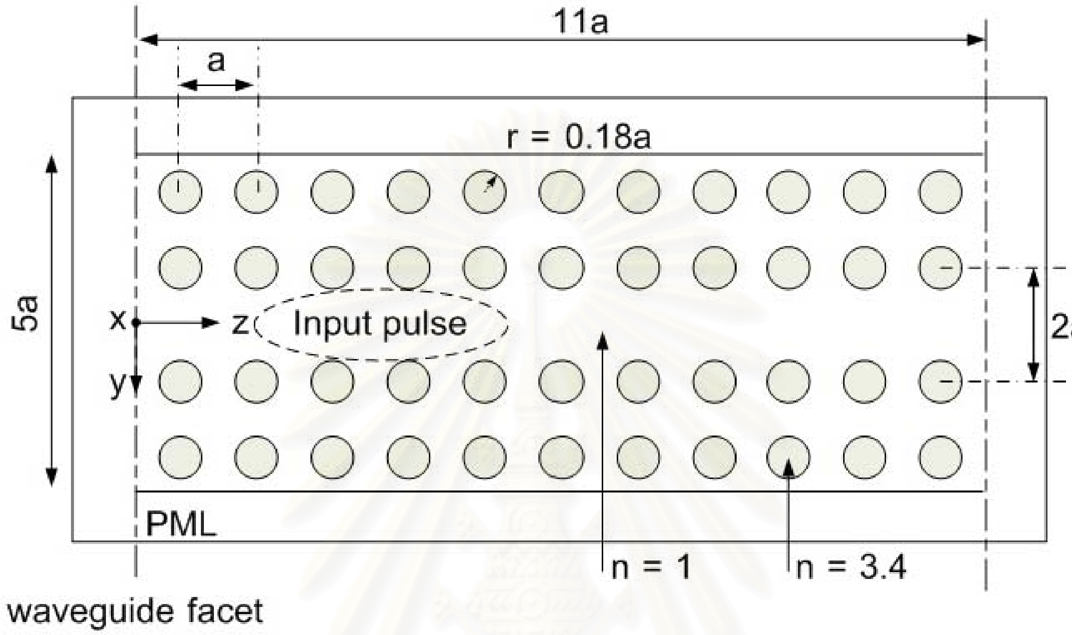
A_i คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมย่อยลำดับที่ i

1.9 ผลการวิจัย

เพื่อให้การวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงที่เคลื่อนที่ไปตามท่อนำสัญญาณแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามีประสิทธิภาพมากขึ้นในเรื่องของการลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณสนาม ณ จุดเวลาต่างๆ ผู้ทำวิจัยจึงได้นำเสนอหลักการของการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมมาใช้ในการคำนวณ โดยในงานวิจัยเบื้องต้นนี้ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสี่เหลี่ยมใดๆ และนำผลการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์จากระเบียบวิธี TD-FE-BPM มาตรฐานที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด อีกทั้งยังเปรียบเทียบระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณสนามในแต่ละจุดเวลาด้วย

ตัวอย่างของวงจรผลึกโฟโตนิกส์ที่นำมาพิจารณาในเบื้องต้นก็คือ ท่อนำสัญญาณแสงแบบตรง และ ล้อมรอบไปด้วยวัสดุดูดกลืนคลื่นแบบ Perfectly match layer (PML) ดังรูปที่ 1.15

ผลึกโฟโตนิกส์ที่นำมาพิจารณาจะเป็น Dielectric rod ที่มีดัชนีหักเห $n = 3.4$ ตั้งอยู่บนตัวกลางที่เป็นอากาศซึ่งมีดัชนีหักเห $n = 1$ ซึ่ง โดยมี lattice constant, $a = 0.58\ \mu m.$ และ รัศมีของ Dielectric rod, $r = 0.18a$ ผลึกโฟโตนิกส์ดังที่กล่าวมานี้มีแถบช่องความถี่สำหรับ TE โหมดอยู่ในช่วง $\omega = 0.302 \times 2\pi a / c$ ถึง $\omega = 0.443 \times 2\pi a / c$ [2]

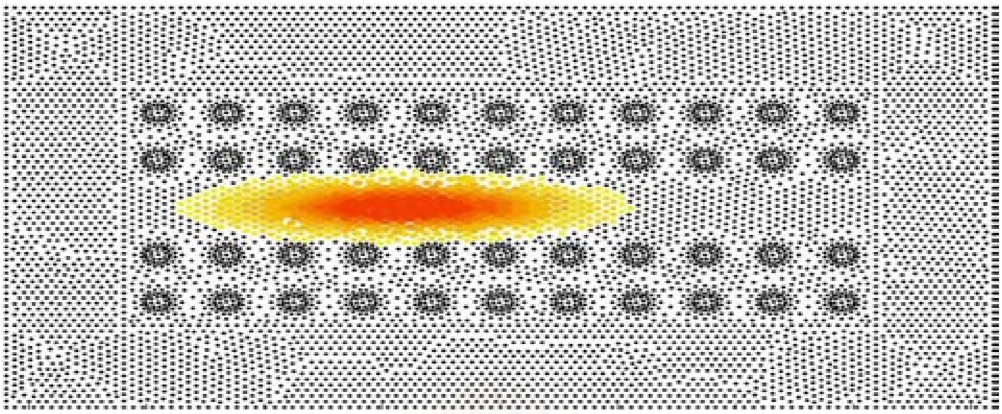


รูปที่ 1.15 ท่อนำคลื่นแสงแบบผลึกโฟโตนิกส์แบบตรง ล้อมรอบด้วย PML

สนามไฟฟ้าอินพุทในรูปที่ 1.15 มีลักษณะเป็นรูปเกาส์เซียน (Gaussian pulse) ที่มีขนาดมากที่สุด $= A$ ที่จุด (y_0, z_0), ขนาดจุด (spot size) ตามแนวแกน y และ z $= W_y$ และ W_z ตามลำดับและ มี propagation constant $= \beta$ แสดงได้ดังสมการที่ (38) ความยาวคลื่นของคลื่นพาห์ที่ใช้นำสัญญาณแสงที่งานวิจัยนี้ใช้, $\lambda = 1.5 \mu m$ ซึ่งอยู่ในแถบช่องความถี่ TE Mode

$$\phi(y,z,t=0) = A\exp\left[-\left(\frac{y-y_0}{W_y}\right)^2 - \left(\frac{z-z_0}{W_z}\right)^2\right] \times \exp\left[-j\beta(z-z_0)\right] \quad (38)$$

รูปของสนามไฟฟ้าอินพุทสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 1.16



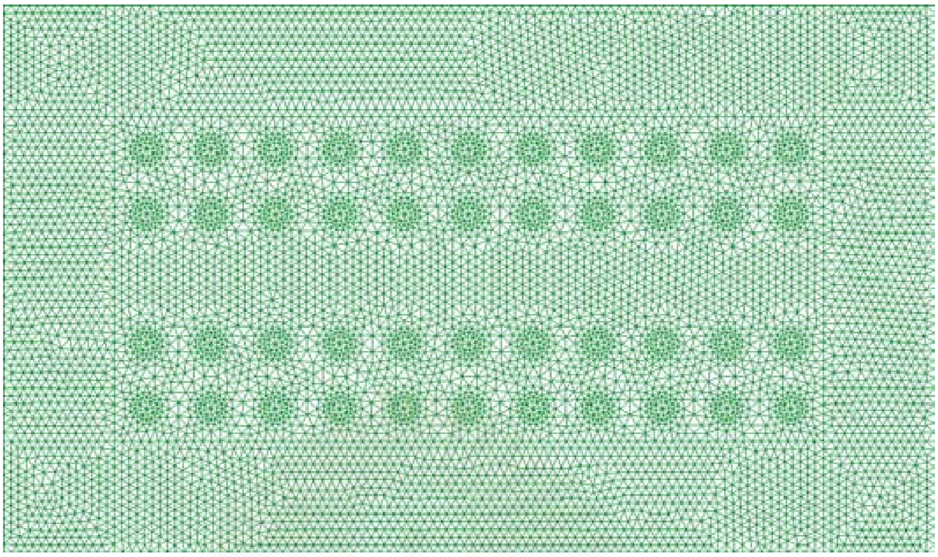
รูปที่ 1.16 สนามไฟฟ้าอินพุท

ช่วงระยะระหว่างจุดเวลาที่งานวิจัยนี้ใช้, $\Delta t = 1.0\ \mathrm{fs}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของ คูแรนด์-เฟดริช-เลวี (Courant-Friedrich-Levy condition) [13]

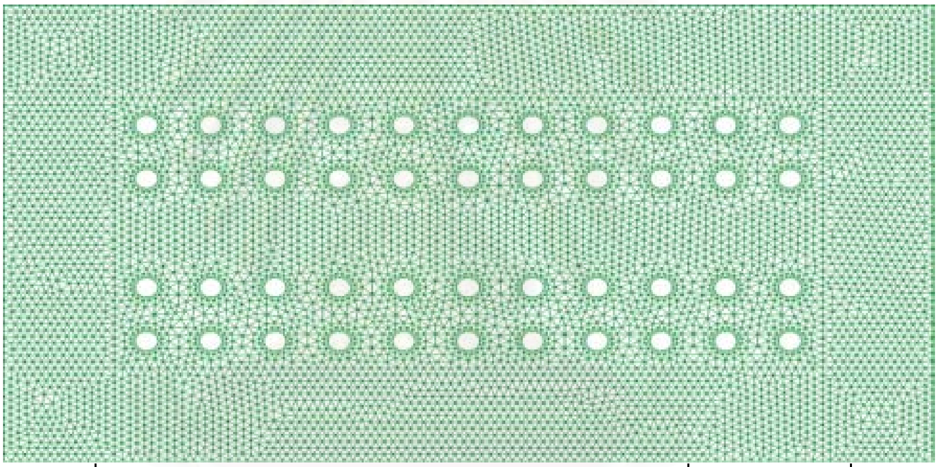
ผู้วิจัยได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์ในท่อนำสัญญาณแสงในรูปที่ 1.15 เป็น 4 แบบก็คือ แบบสามเหลี่ยมทั้งหมดดังรูปที่ 1.17 ซึ่งเป็นเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานและใช้ผลการคำนวณอ้างอิงในการทดลองนี้, แบบรูปผสมระหว่างสามเหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม ดังรูปที่ 1.18, แบบรูปสี่เหลี่ยมทั้งหมดดังรูปที่ 1.19 และ แบบรูปผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยมดังรูปที่ 1.20 ซึ่งการแบ่งเอลิเมนต์ในรูปที่ 1.17 – 1.120 นี้เป็นเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์ที่งานวิจัยนี้นำเสนอ จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบสามารถสรุปได้ในตารางที่ 1.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่า จำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมนั้นมีน้อยกว่าแบบรูปสามเหลี่ยมมาตรฐาน

ตารางที่ 1.3 จำนวนโหนดและจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ทั้ง 2 แบบ

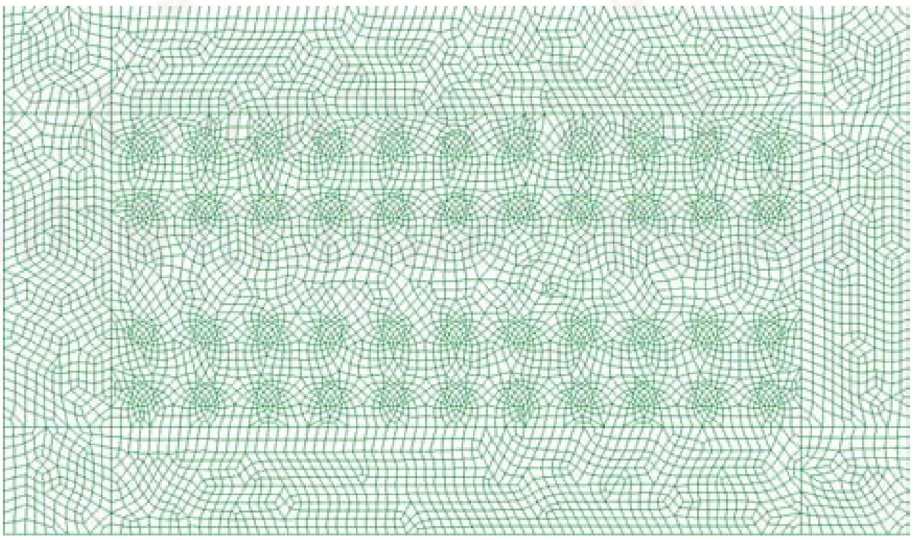
การแบ่งเอลิเมนต์	**จำนวนโหนด**
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.3.1)	4,586
รูปผสมระหว่างสามเหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม (รูปที่ 4.3.2)	4,190
รูปสี่เหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.3.3)	3,953
รูปผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม(รูปที่ 4.3.4)	3,557



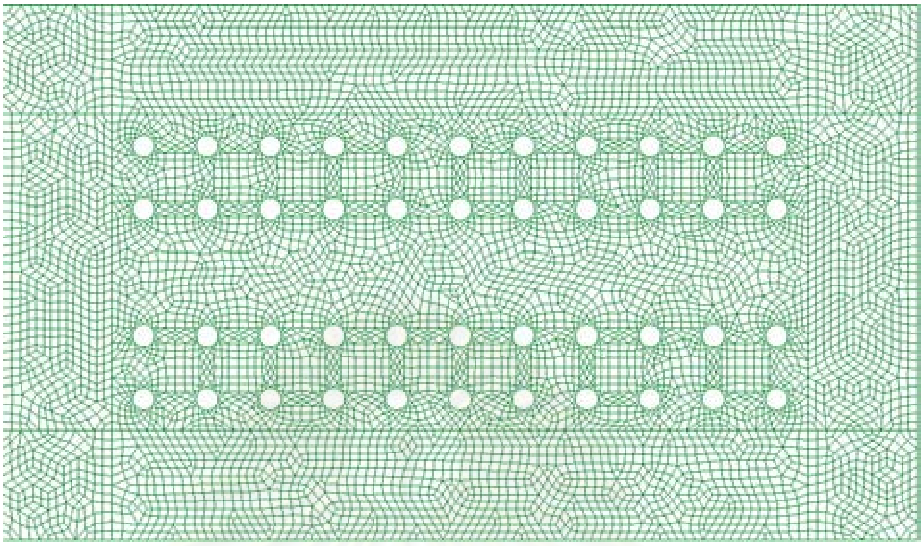
รูปที่ 1.17 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด



รูปที่ 1.18 การแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบผสมระหว่างสามเหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม



รูปที่ 1.19 การแบ่งเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมทั้งหมด

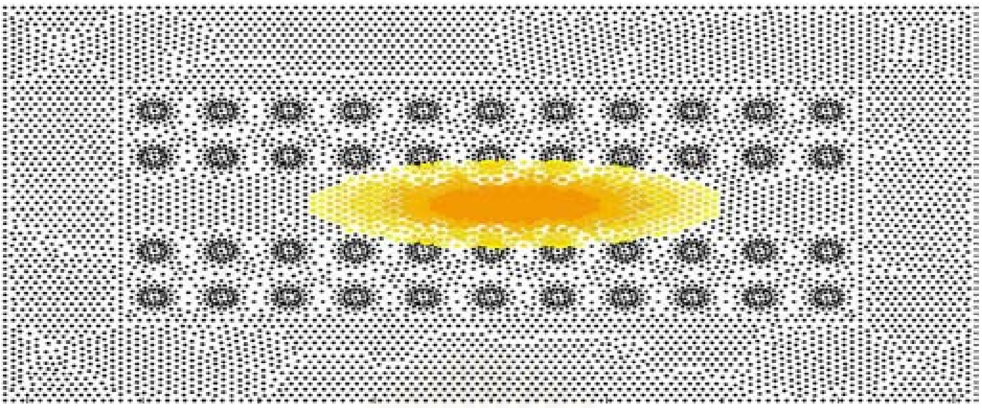


รูปที่ 1.20 การแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม

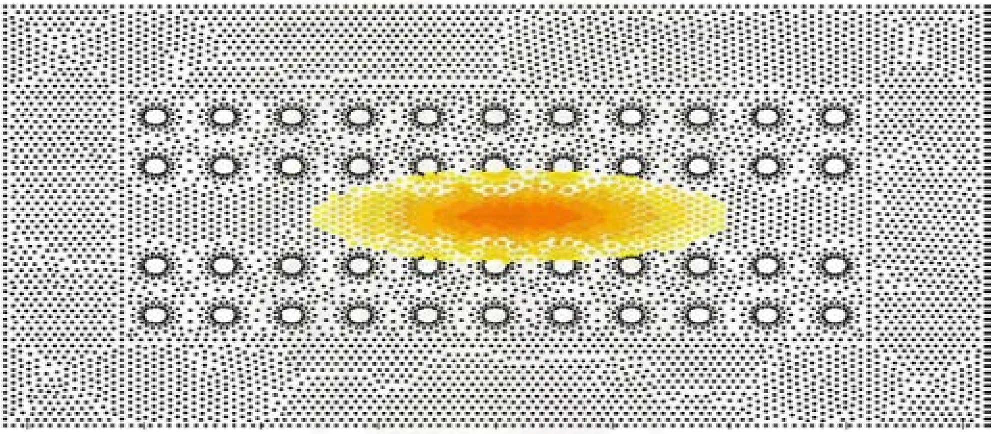
รูปที่ 1.21 ถึง 1.24 แสดงผลการวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นแสงที่ได้ ณ เวลา 10 fs นับจากป้อนสนามอินพุท โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 1.17) และแบบรูปหลายเหลี่ยมทั่วไปแบบต่างๆ ที่งานวิจัยนี้ทดลองแบ่ง (รูปที่ 1.17-1.20) ตามลำดับ ซึ่งพบว่าผลการวิเคราะห์สนามที่ได้จากการแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้นมีความใกล้เคียงกับการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด

รูปที่ 1.25 แสดงลักษณะของสนามไฟฟ้าตามขวางในแนวแกน y ของสัญญาณแสงที่ระยะห่างจากตำแหน่ง Waveguide facet =6a ณ เวลา 10 fs โดยขนาดของสนามไฟฟ้านั้นจะถูก normalize โดยขนาดของสนามอินพุท, A

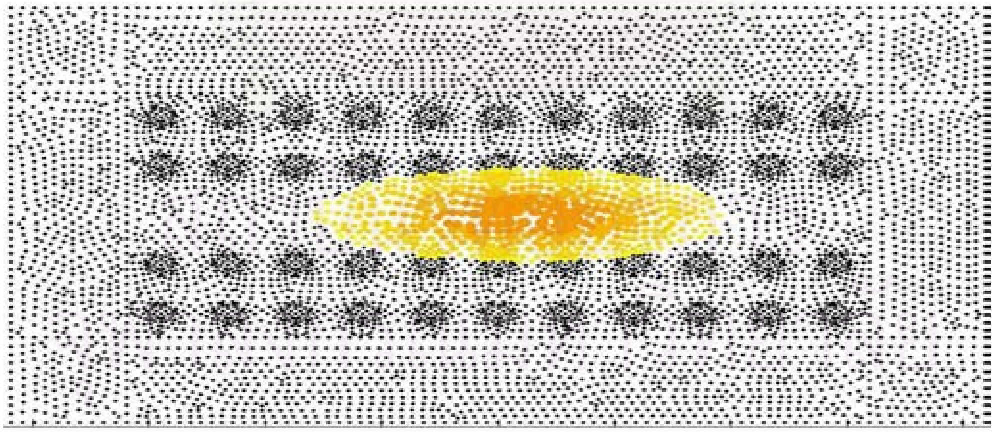
จากผลการคำนวณที่แสดงในรูปที่ 4.4.1-4.4.4 ซึ่งแสดงผลการคำนวณ Electric pattern และรูปที่ 1.25 ซึ่งแสดงผลของสนามไฟฟ้าตามขวางในแนวแกน y จะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลาซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมกับแบบรูปสามเหลี่ยมมีความใกล้เคียงกัน



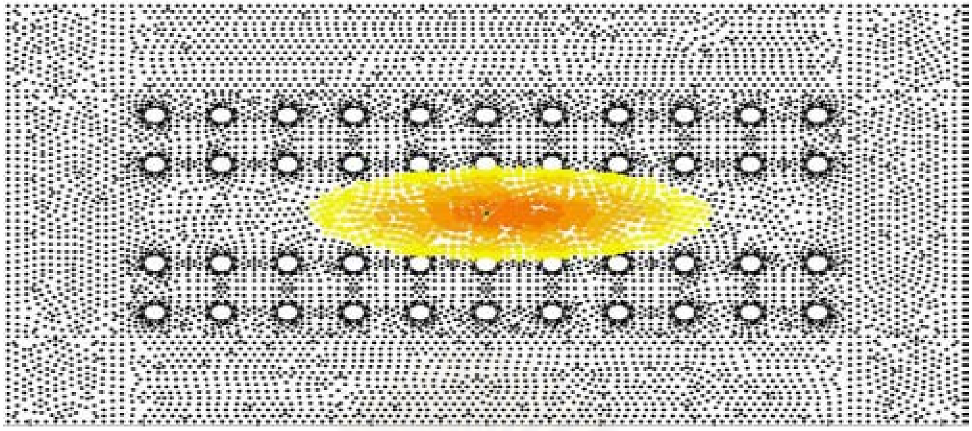
รูปที่ 1.21 แบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด



รูปที่ 1.22 แบ่งเอลิเมนต์แบบผสมระหว่างรูปสามเหลี่ยมกับรูป 16 เหลี่ยม

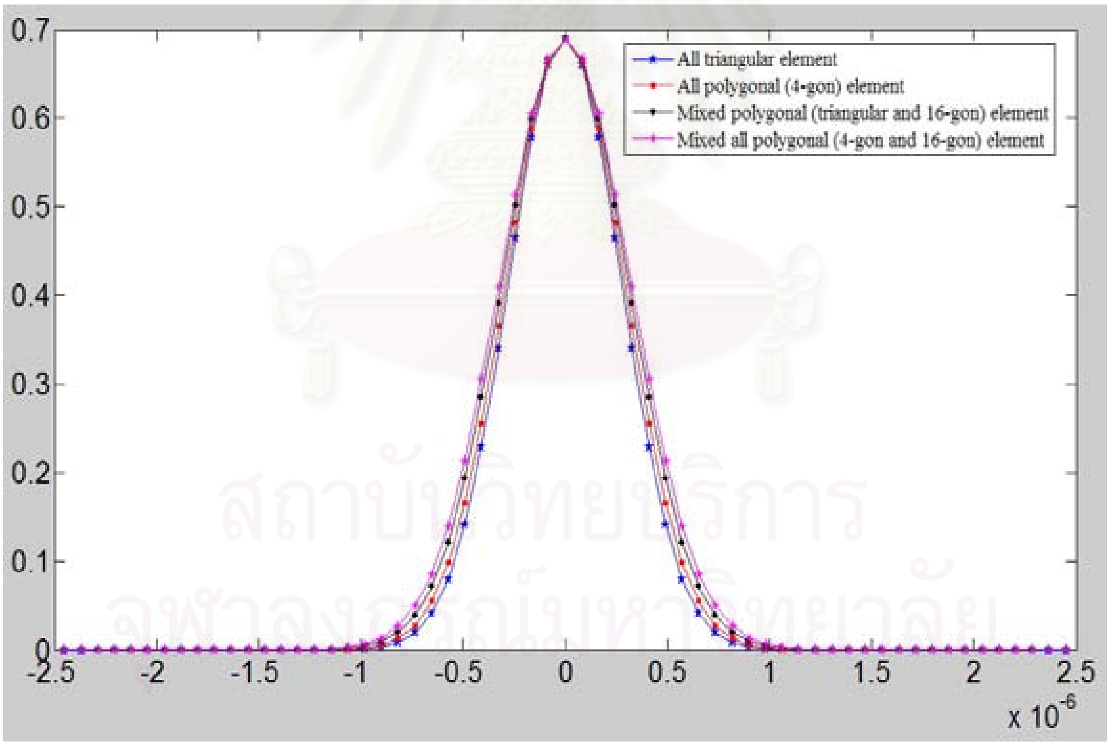


รูปที่ 1.23 แบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสี่เหลี่ยมทั้งหมด



รูปที่ 1.24 แบ่งเอลิเมนต์แบบผสมระหว่างรูปสี่เหลี่ยมกับรูป 16 เหลี่ยม

ผลการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณแสงโดยใช้ระเบียบวิธี TD-FEM โดยใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบต่างๆ



รูปที่ 1.25 สนามไฟฟ้าตามขวางในแนวแกน y ที่ระยะห่างจากตำแหน่ง Waveguide facet $= 6a$ ณ เวลา 10 fs

ในตารางที่ 1.4 จะแสดงให้เห็นถึงระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจากระเบียบวิธี TD-FEM มาตรฐานเป็น % เมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยมในลักษณะต่างๆ ซึ่งจะเห็นได้ว่าการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธี TD-FEM ซึ่งใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมทั่วไปนั้นใช้ระยะเวลาการคำนวณน้อยกว่าการใช้การแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐานคือรูปสามเหลี่ยม เนื่องจากจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์ที่งานวิจัยนี้นำเสนอมีน้อยกว่าการแบ่งเอลิเมนต์แบบมาตรฐาน ทำให้ขนาดของสมการเชิงเส้นสำหรับคำนวณสนามในแต่ละจุดเวลานั้นเล็กลง

ตารางที่ 1.4 ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลงจาก TD-FEM มาตรฐานของระเบียบวิธี TD-FEM ที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์ในรูปแบบต่าง ๆ

การแบ่งเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	ระยะเวลาในการคำนวณที่ลดลง (%)
รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.3.1)	4,586	-
รูปผสมระหว่างสามเหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม (รูปที่ 4.3.2)	4,190	18%
รูปสี่เหลี่ยมทั้งหมด (รูปที่ 4.3.3)	3,953	27%
รูปผสมระหว่างสี่เหลี่ยมกับ 16 เหลี่ยม(รูปที่ 4.3.4)	3,557	38%

1.9 สรุป

จากการศึกษาวิจัยในขั้นต้นพบว่าสมรรถนะในเชิงระยะเวลาในการคำนวณ (Computation time) ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลานั้นขึ้นอยู่กับจำนวนโหนด (Nodal points) ที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite-element scheme) ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal element) เพื่อลดจำนวนโหนดที่เกิดขึ้นดังกล่าว และ พบว่าสามารถลดระยะเวลาในการคำนวณของระเบียบวิธีนี้ได้ โดยที่ยังให้ผลการคำนวณที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลามาตรฐานที่ใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

งานวิจัยที่จำทำต่อไปคือการนำไปใช้คำนวณกับกรณีตัวอย่างท่อนำคลื่นรูปที่ไม่เป็นท่อตรง เช่นท่อหักมุมฉาก การคัปปลิ้งระหว่างท่อนำคลื่นแสงในผลึกโฟตินกส์เป็นต้น ผลการวิจัยจะนำไปสร้างเป็นซอฟท์แวร์ที่ใช้ง่าย (user-friendly) เพื่อใช้วิเคราะห์สำหรับการออกแบบวงจรนำคลื่นแสงโฟโตนิกส์ต่อไป

1.10 การเผยแพร่งานวิจัย

บทความวิจัยนำเสนอในที่ประชุมวิชาการระดับชาติ

1. Thiwan Chowanadisai and Tuptim Angkaew. Analysis of Photonic Crystal Waveguide in Time-Domain by Finite-Element Beam Propagation Method with Polygonal Elements. _Accepted paper for EECON-30 held on October 25-26,2007_

บทความวิจัยนำเสนอในที่ประชุมวิชาการระดับนาชาติ

2. Thiwan Chowanadisai and Tuptim Angkaew. Time-Domain Finite-Element Beam Propagation Method with Generalized Polygonal Elements for Photonic Crystal Waveguides Analysis. _Accepted paper for Asia Pacific Microwave Conference 2007 on December 11-14,2007_

1.11 เอกสารอ้างอิง

[1] H.-P. Nolthing and R. März, “Results of benchmark tests for different numerical BPM algorithms”,*J. Lightwave Technol.*, vol. 13, pp. 216-224, Feb. 1995.

[2] A.Mekis,J.C.Chen, I.Kurland, S.Fan, P.R.Villeneuve,and J.D.Joannopoulos “High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides”, *Phys.rev.Lett.*,vol.77,pp3787-3790,Oct.1996

[3] R. Y. Chan and J. M. Liu, “Time-domain wave propagation in optical structures”, *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 6, pp. 1001–1003, Aug. 1994.

[4] M. Koshiba, Y. Tsuji, and M. Hikari, “Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits”, *J. Lightwave Technol.*, vol. 18, pp. 102–110, Jan. 2000.

[5] T. Fujisawa and M. Koshiba, “Time-domain beam propagation method for nonlinear optical propagation analysis and its application to photonic crystal circuits”, *J. Lightwave Technol.*, vol. 22, pp. 684-690, Feb. 2004.

[6] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman, and H. A. El-Mikati, “New full-vectorial numerically efficient propagation algorithm based on the finite element method,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 18, pp. 409–415, Mar. 2000.

[7] N. Sukumar and E.A. Malsch, “Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants”, Arhcives of Computational Methods in Engineering, Vol. 13, No. 1, pp. 129-163, 2006

[8] M. Meyer, et.al., “Generalized barycentric coordinates on irregular polygons”, J*ournal of Graphic Tools*, Vol. 7, No. 1, page 13-22, 2002.

[9] M. Koshiba, Y. Tsuji, and S. Sasaki, “High-performance absorbing boundary conditions for photonic crystal waveguide simulations”, *IEEE microwave wireless compon. lett.*, vol. 11, pp. 152-154, April 2001.

[10] Jianming Jin, *The finite element method in electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[11] K. Kawano and T.Kitoh, *Introduction to optical waveguide analysis: solving maxwell's equations and the schrodinger equation*, John Wiley & Sons, Inc., 2001

[12] G. R. Hadley, “Wide-angle beam propagation using padé approximant operators”, *Opt.lett.*, vol. 17, pp.1426 -1428, Oct. 1992.

[13] A. Taflove, Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method, Artech House, 1995.

หัวข้อที่ 2:
การคำนวณวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับบริเวณเปิดโล่งด้วยสมการอินทีกรัลในรูปของพีชคณิตคลิฟฟอร์ด

2.1 บทนำ

นักฟิสิกส์จำเป็นต้องใช้เครื่องมือทางวิทยาศาสตร์ เพื่อใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ซึ่งเครื่องมือเหล่านั้น คือ คณิตศาสตร์ เวคเตอร์เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันดี ซึ่งใช้ในการบรรยายขนาดและทิศทางของปริมาณต่างๆ เช่น สนามแม่เหล็กไฟฟ้า กระแสน้ำ เป็นต้น นอกจากเวคเตอร์แล้ว ยังมีเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่นิยมใช้กันอยู่แพร่หลาย เช่น Tensor, Quaternion Geometric, Algebraและ Clifford Algebra เป็นต้น

ปี ค.ศ. 1878 Clifford Algebra ถูกสร้างขึ้นโดย William Kingdon Clifford โดยการนำคุณสมบัติเวคเตอร์ของ Quaternion Algebras และคุณสมบัติของการ Exterior Product ของ Grassmann's variable ซึ่งจะทำให้เกิดประโยชน์ เนื่องจากสามารถแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้ อย่างไรก็ตาม Clifford Algebras ไม่เกิดความแพร่หลายมากนัก เนื่องจาก William K. Clifford ได้เสียชีวิตอย่างกะทันหัน ทำให้ Clifford Algebra และในขณะเดียวกันนั้น Josiah Willard Gibbs ซึ่งเป็นนักวิศวกร ได้ทำการศึกษาและใช้งานเวคเตอร์จนกระทั่งสามารถแก้ปัญหาต่างๆ ได้ จนเป็นที่ยอมรับแพร่หลายในเวลานั้น รวมทั้งยังสามารถนำมาใช้ในการบรรยายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ ต่อมาเมื่อนักวิทยาศาสตร์เริ่มสนใจใน quantum theory จึงทำให้ Clifford Algebra กลับมาเป็นที่สนใจอีกครั้ง เนื่องจากเวคเตอร์ไม่สามารถนำมาใช้ในการอธิบายทฤษฎีดังกล่าวได้

2.2 เลขคลิฟฟอร์ด (Clifford number)

เลขคลิฟฟอร์ด เป็นจำนวนใดๆ ที่ใช้ในการบ่งบอกถึงปริมาณของขนาดและทิศทาง ซึ่งสามารถแสดงถึงค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้เป็นอย่างดี ในการศึกษาเกี่ยวกับ เลขคลิฟฟอร์ด ในเบื้องต้นนั้น เราจะกล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญ เพื่อความเข้าใจในหลักการคำนวณต่างๆ เช่น

- มิติของปัญหา เลขคลิฟฟอร์ด
- สมาชิกภายใน เลขคลิฟฟอร์ด
- การบวกของ เลขคลิฟฟอร์ด
- การคูณของ เลขคลิฟฟอร์ด

2.2.1 มิติของ เลขคลิฟฟอร์ด (Dimensions)

เลขคลิฟฟอร์ด สามารถบรรยายและใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ในหลายมิติ เช่น สนามไฟฟ้าสถิตย์และสนามแม่เหล็กสถิตย์ ซึ่งจำเป็นต้องแก้ปัญหาในระบบสามมิติ

และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามโดเมนของเวลา ซึ่งจำเป็นต้องแก้ปัญหาในระบบสี่มิติ โดยประกอบด้วยมิติของการกระจัดสามมิติ และมิติของโดเมนเวลาหนึ่งมิติ นอกจากนั้นในแต่ละมิติของ เลขคลิฟฟอร์ด จะมีจำนวนของสมาชิกที่แตกต่างกัน ยกตัวอย่าง เลขคลิฟฟอร์ด ในระบบสามมิติ และในระบบสี่มิติ ดังนี้

$$A_3 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_1e_2 + a_4e_3 + a_5e_1e_3 + a_6e_2e_3 + a_7e_1e_2e_3 \quad (1)$$

$$A_4 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_1e_2 + a_4e_3 + a_5e_1e_3 + a_6e_2e_3 + a_7e_1e_2e_3$$
$$+a_8e_4 + a_9e_1e_4 + a_{10}e_2e_4 + a_{11}e_1e_2e_4 + a_{12}e_3e_4 + a_{13}e_1e_3e_4 + a_{14}e_2e_3e_4 + a_{15}e_1e_2e_3e_4$$
(2)

2.2.2 สมาชิกของ เลขคลิฟฟอร์ด (Components)

สมาชิกภายใน เลขคลิฟฟอร์ด จำนวนหนึ่งตัวนั้น จะมีจำนวนสมาชิกขึ้นอยู่กับมิติของ เลขคลิฟฟอร์ด นั้นๆ ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสมาชิกของ เลขคลิฟฟอร์ด และมิติ คือ $p(n) = 2^n$ โดยที่ n เป็นขนาดของมิติที่พิจารณา และ $p(n)$ เป็นจำนวนสมาชิกของ เลขคลิฟฟอร์ด สมาชิกของ เลขคลิฟฟอร์ด ประกอบด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ ค่าสัมประสิทธิ์ และสัญลักษณ์ที่ใช้ในการกำหนดทิศทาง (unit)

- ค่าสัมประสิทธิ์ของ เลขคลิฟฟอร์ด เป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ซึ่งแตกต่างจากเวคเตอร์ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ของ Vector นั้นเป็นเพียงจำนวนจริง (Real Number) ตัวอย่างเช่น $(2+i), (3+4i)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ เลขคลิฟฟอร์ด
- สัญลักษณ์ที่ใช้ในการกำหนดทิศทาง (unit) เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้ในการแสดงถึงทิศทางใดๆ ของ เลขคลิฟฟอร์ด เพื่อความเข้าใจง่ายขึ้น อาจเทียบเคียงกับ unit ของ vector ซึ่งจะเป็น the orthogonal vector แต่ unit ของ เลขคลิฟฟอร์ด นั้น ยังมีส่วนเพิ่มเติมมาอีก คือ unit ที่เกิดจากการ multiplication ของ orthogonal vector เช่น e_1e_2 เป็น unit ที่เกิดจากการ multiplication ของ e_1 , e_2

นอกจากนั้น ยังสามารถแบ่งกลุ่มของ เลขคลิฟฟอร์ด ใดๆ ได้ตามชนิดของ unit ซึ่งจะสามารถใช้ในการอธิบายความหมายทางฟิสิกส์ได้ง่ายขึ้น เช่น

$$A_4 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_1e_2 + a_3e_1e_2e_3 + a_4e_1e_2e_3e_4 \quad (3)$$

โดยที่

- unit เป็น 1 ใช้ในการแสดงถึง scalar ซึ่งจัดเป็นสมาชิกที่มี Grade เท่ากับ 0
- unit เป็น e_1 ใช้ในการแสดงถึง vector ซึ่งจัดเป็นสมาชิกที่มี Grade เท่ากับ 1
- unit เป็น e_1e_2 ใช้ในการแสดงถึง bi-vector ซึ่งจัดเป็นสมาชิกที่มี Grade เท่ากับ 2
- unit เป็น $e_1e_2e_3$ ใช้ในการแสดงถึง tri-vector ซึ่งจัดเป็นสมาชิกที่มี Grade เท่ากับ 3

2.2.3 **การบวกของ เลขคลิฟฟอร์ด** (Addition)

การบวกกันของ เลขคลิฟฟอร์ด มีวิธีการเช่นเดียวกับการบวกกันของ Vector ซึ่งเป็นการบวกกันระว่างค่าสัมประสิทธิ์ที่มี unit เดียวกัน เช่น

$$A_3 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_1e_2 + a_4e_3 + a_5e_1e_3 + a_6e_2e_3 + a_7e_1e_2e_3 \quad (4)$$

$$B_3 = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_1e_2 + b_4e_3 + b_5e_1e_3 + b_6e_2e_3 + b_7e_1e_2e_3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_3 &= A_3 + B_3 \\ &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+(a_3+b_3)e_1e_2 \\ &\quad +(a_4+b_4)e_3+(a_5+b_5)e_1e_3+(a_6+b_6)e_2e_3+(a_7+b_7)e_1e_2e_3 \\ &= c_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_1e_2 + c_4e_3 + c_5e_1e_3 + c_6e_2e_3 + c_7e_1e_2e_3 \end{aligned} \quad (6)$$

2.2.4 **การคูณของ เลขคลิฟฟอร์ด** (Multiplication)

การคูณของ เลขคลิฟฟอร์ด จำเป็นต้องมีกฎการรวมของ unit ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- กฎข้อที่หนึ่ง คือ เมื่อ $i = j$ ดังนั้น

$$e_ie_j = e_ie_i = -1 \quad (7)$$

- กฎข้อที่สอง คือ เมื่อ $i \neq j$ ดังนั้น

$$e_ie_j = -e_je_i \quad (8)$$

ตัวอย่างของการคูณ เลขคลิฟฟอร์ด

กำหนดให้ a,b,c เป็น เลขคลิฟฟอร์ด

$$a = 2 + e_1$$

$$b = 2 + e_1 + 3e_2$$

$$
\begin{aligned}
c = ab &= \left(2+e_1\right)\left(2+e_1+3e_2\right) \\
&= 2\left(2+e_1+3e_2\right)+e_1\left(2+e_1+3e_2\right) \\
&= 2\left(2\right)+2\left(e_1\right)+2\left(3e_2\right)+e_1\left(2\right)+e_1\left(e_1\right)+e_1\left(3e_2\right) \\
&= 4+2e_1+6e_2+2e_1+(-1)+3e_1e_2 \\
&= 5+4e_1+6e_2+3e_1e_2
\end{aligned}
$$

2.2.5 ตัวอย่างของ เลขคลิฟฟอร์ด

ในระบบสามมิติ

$$
\begin{aligned}
A_3 = {} & (3+4i)+(2i)e_1+(3)e_2+(1+2i)e_1e_2 \\
& +(3-2i)e_3+(-1+2i)e_1e_3+(3-3i)e_2e_3+(i)e_1e_2e_3
\end{aligned} \tag{9}
$$

ในระบบสี่มิติ

$$
\begin{aligned}
A_4 = {} & (3-4i)+(3)e_1+(3i)e_2+(1-2i)e_1e_2 \\
& +(3+2i)e_3+(1-2i)e_1e_3+(3+3i)e_2e_3+(i)e_1e_2e_3 \\
& +(2-3i)e_4+(3+4i)e_1e_4+(2-5i)e_2e_4+(2-4i)e_1e_2e_4 \\
& +(3)e_3e_4+(1+2i)e_1e_3e_4+(5-8i)e_2e_3e_4+(4+9i)e_1e_2e_3e_4
\end{aligned} \tag{10}
$$

2.3. ผลคูณ (Product)

ในหัวนี้จะบรรยายและแสดงให้เห็นว่า เลขคลิฟฟอร์ด สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปริมาณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้เช่นเดียวกับเวคเตอร์ ซึ่งเวคเตอร์จะถูกบรรยายโดยการคูณที่สำคัญ โดยแบ่งออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

- Inner Product
- Cross Product
- Outer Product

กำหนดให้ $\vec{p}$ และ $\vec{q}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ ในระบบสามมิติ

$$\vec{p} = p_x\vec{a}_x + p_y\vec{a}_y + p_z\vec{a}_z \tag{11}$$

$$\vec{q} = q_x\vec{a}_x + q_y\vec{a}_y + q_z\vec{a}_z \tag{12}$$

สามารถเขียนเวคเตอร์ $\bar{p}$ และ $\bar{q}$ ให้อยู่ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด u และ v ได้ดังนี้

$$u = p_x e_1 + p_y e_2 + p_z e_3 \tag{13}$$

$$v = q_x e_1 + q_y e_2 + q_z e_3 \tag{14}$$

2.3.1 Inner Product

Inner Product ในรูปแบบของเวคเตอร์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z \tag{15}$$

Inner Product ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด สามารถเขียนได้ดังนี้

$$p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z = -\frac{(uv + vu)}{2} \tag{16}$$

2.3.2 Cross Product

Cross Product ในรูปแบบของเวคเตอร์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{p} \times \bar{q} = (p_y q_z - p_z q_y)\hat{a}_x - (p_x q_z - p_z q_x)\hat{a}_y + (p_x q_y - p_y q_x)\hat{a}_z \tag{17}$$

Cross Product ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด สามารถเขียนได้ดังนี้

$$(p_y q_z - p_z q_y)e_1 - (p_x q_z - p_z q_x)e_2 + (p_x q_y - p_y q_x)e_3 = -\frac{(uv - vu)}{2} e_1 e_2 e_3 \tag{18}$$

2.3.4 Outer Product

Outer Product ในรูปแบบของเวคเตอร์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$p \Lambda q = (p_x q_y - p_y q_x)\hat{a}_x \hat{a}_y + (p_x q_z - p_z q_x)\hat{a}_x \hat{a}_z + (p_y q_z - p_z q_y)\hat{a}_y \hat{a}_z \tag{19}$$

Outer Product ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด สามารถเขียนได้ดังนี้

$$(p_x q_y - p_y q_x)e_1e_2 + (p_x q_z - p_z q_x)e_1e_3 + (p_y q_z - p_z q_y)e_2e_3 = \frac{(uv - vu)}{2} \quad (20)$$

จะเห็นได้ว่า เลขคลิฟฟอร์ด สามารถที่จะแสดงถึงปริมาณของการ Product ทั้งสามชนิดได้เช่นเดียวกับเวคเตอร์

2.4 **การหาอนุพันธ์** (Differentiation)

ในหัวนี้จะบรรยายและแสดงให้เห็นว่า เลขคลิฟฟอร์ด สามารถใช้ในการวิเคราะห์การอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้เช่นเดียวกับเวคเตอร์ โดยแบ่งออกเป็นโอเปอเรเตอร์ที่สำคัญ 3 ชนิด คือ Divergence Gradient และ Curl

ในส่วนนี้จะกำหนดค่าสนามในรูปแบบของเวคเตอร์และ เลขคลิฟฟอร์ด รวมทั้งการเขียนโอเปอเรเตอร์ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด มีรายละเอียดดังนี้

- สนามใดๆ

กำหนดให้ $\bar{F}$ เป็นเวคเตอร์ใดๆ ในระบบสามมิติ และ ϕ เป็นฟังก์ชั่นสเกลาร์

$$\bar{F} = F_x \bar{a}_x + F_y \bar{a}_y + F_z \bar{a}_z \quad (21)$$

สามารถเขียนเวคเตอร์ $\bar{F}$ และ ϕ ให้อยู่ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด u ได้ดังนี้

$$u = \phi + F_x e_1 + F_y e_2 + F_z e_3 \quad (22)$$

- โอเปอเรเตอร์ของการอนุพันธ์

กำหนดให้ ∇ เป็นโอเปอเรเตอร์ของการอนุพันธ์ในรูปแบบของเวคเตอร์ในระบบสามมิติ เช่น

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\bar{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z \quad (23)$$

สามารถเขียนเวคเตอร์ $\bar{F}$ และ ϕ ให้อยู่ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด u ได้ดังนี้

$$D = \frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3 \quad (24)$$

พิจารณาการคูณระหว่าง โอเปอเรเตอร์ และ เลขคลิฟฟอร์ด มีรายละเอียดดังนี้

$$
\begin{aligned}
Du &= \left(\frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3\right)\left(\phi + F_x e_1 + F_y e_2 + F_z e_3\right) \\
&= \begin{cases}
-\left(\dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}\right) \\
+\dfrac{\partial \phi}{\partial x}e_1 + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}e_2 + \dfrac{\partial \phi}{\partial z}e_3 \\
+\left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)e_1e_2 + \left(\dfrac{\partial F_z}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial z}\right)e_1e_3 + \left(\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right)e_2e_3
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

2.4.1 Divergence

จากสมการ () จะเห็นได้ว่า มี Divergence of $\bar{F}$ คือ

$$
-\left(\nabla \cdot \bar{F}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x}e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}e_3 \tag{26}
$$

2.4.2 Gradient

จากสมการ () จะเห็นได้ว่า มี Gradient of ϕ คือ

$$
\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}e_3 \tag{27}
$$

2.4.3 Curl

จากสมการ () จะเห็นได้ว่า มี Curl of $\bar{F}$ คือ

$$
-\left(\nabla \times \bar{F}\right)e_1e_2e_3 = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)e_1e_2 + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)e_1e_3 + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)e_2e_3 \tag{28}
$$

2.5 **สมการแมกซ์แวล** (Maxwell's Equation)

สมการของแมกซ์แวลเป็นสมการที่อธิบายถึงคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ส่วนใหญ่การทำงานของวิศวกรนำสมการของแมกซ์แวลที่เขียนในรูปแบบของเวคเตอร์มาทำการหาผลเฉลยของสมการ โดยการแปลงสมการแมกซ์แวลเป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งถูกเรียกว่า สมการคลื่น(Wave Equation)

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึง สมการอนุพันธ์อับดับที่หนึ่งของแมกซ์แวลทั้ง 4 สมการ สามารถเขียนรวบรวมเป็นสมการอนุพันธ์อับดับที่หนึ่งเพียงสมการ โดยเป็นไปตามแนวคิดของ William Kingdon Clifford ซึ่งได้อธิบายสมการแมกซ์แวลด้วย Clifford Algebras และเรียกสมการอนุพันธ์อับดับที่หนึ่งว่า Dirac Equation โดยสมการที่ถูกเขียนขึ้นนี้จะเป็นการพิจารณาในตัวกลางที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (Source-Free region)

นอกจากนั้น จะกล่าวถึงผลเฉลยของ Dirac Equation ในระบบ 2 และ 3 มิติ และแสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยของสมการแมกซ์แวลในรูปแบบของเวคเตอร์ สอดคล้องกับสมการ Dirac Equation

2.5.1 **สมการแมกซ์แวลในรูปแบบของ** Clifford Algebras

การกล่าวถึงสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด อาจทำให้เกิดความสับสน ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จึงนำเอาการอธิบายสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในรูปแบบของเวคเตอร์ เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจ สมการแมกซ์แวลในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด รวมทั้งโอเปอเรเตอร์ที่สำคัญ คือ Dirac Operator

2.5.1.1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในรูปของ เลขคลิฟฟอร์ด

โดยทั่วไปๆ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก สามารถเขียนในระบบคาร์ทีเซียน(Cartesian System) ซึ่งมีฟังก์ชันของ $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา ถูกเขียนในรูปของเวคเตอร์ $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในสมการ (29) และ (30) ตามลำดับ เมื่อพิจารณาในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด สามารถเขียนเวคเตอร์ทั้งสองเป็น เลขคลิฟฟอร์ด ได้ตามสมการ (31) ดังนี้

$$\vec{E} = E_x\vec{a}_x + E_y\vec{a}_y + E_z\vec{a}_z \tag{29}$$

$$\vec{H} = H_x\vec{a}_x + H_y\vec{a}_y + H_z\vec{a}_z \tag{30}$$

$$u = -i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(E_x e_0 e_1 + E_y e_0 e_2 + E_z e_0 e_3\right) + \mu^{\frac{1}{2}}\left(H_x e_2 e_3 - H_y e_1 e_3 + H_z e_1 e_2\right) \tag{31}$$

โดยที่

$\varepsilon : Permittivity\ (farads/meter)$

$\mu : Permeability\ (henries/meter)$

2.5.1.2 ดิฟเฟอร์เรนเชียลโอเปอเรเตอร์ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด

ดิฟเฟอร์เรนเชียลโอเปอเรเตอร์(Differential Operator) ที่สำคัญ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของเลขคลิฟฟอร์ด คือ Dirac Operator เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ใช้ในการหาอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนระยะทางและเวลา มีรูปแบบตามสมการดังนี้

$$D_t = i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}e_0 + \frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3 \qquad (32)$$

โดยที่

e_0 เป็น unit ของโดเมนเวลา

e_1, e_2 และ e_3 เป็น unit ของโดเมนระยะทาง

2..1.3 การอนุพันธ์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด

จากหัวข้อ 3.1.1 และ 3.1.2 ในทั้งสองหัวข้อที่ผ่านมานั้น สามารถนำสนามในสมการ (31)และโอเปอเรเตอร์ในสมการ (32) มาใช้คำนวณร่วมกัน เพื่อเขียนสมการแมกซ์แวลในรูปแบบของ Clifford ได้ดังต่อไปนี้

$$D_t u = 0 \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} D_t u = &\left(i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}e_0 + \frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3\right)\Big(-i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(E_x e_0 e_1 + E_y e_0 e_2 + E_z e_0 e_3\right) \\ &+\mu^{\frac{1}{2}}\left(H_x e_2 e_3 - H_y e_1 e_3 + H_z e_1 e_2\right)\Big) = 0 \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} D_t u = &-\mu^{\frac{1}{2}}\left(\nabla\cdot H\right)\sigma + \mu^{\frac{1}{2}}\left(\nabla\times H\right) - i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\nabla\cdot E\right)e_0 + i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\nabla\times E\right)\sigma e_0 \\ &+ i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu\frac{\partial H}{\partial t}\sigma e_0 - \mu^{\frac{1}{2}}\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad (35)$$

โดยที่ E, H : เลขคลิฟฟอร์ด

$E = E_x e_1 + E_y e_2 + E_z e_3$

$H = H_x e_1 + H_y e_2 + H_z e_3$

จะเห็นได้ว่า สมการ (35) เป็นการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งบรรจุสมการของแมกซ์แวลทั้งสี่สมการไว้เพียงสมการหนึ่งสมการเท่านั้น เพื่อเพิ่มความเข้าใจจึงได้แสดงให้เห็นในแต่ละเทอมของสมการ (35) โดยแยกตาม grade ของ เลขคลิฟฟอร์ด จะได้ว่า

Grad Λ^1:

$$\mu^{\frac{1}{2}}\nabla\times H-\mu^{\frac{1}{2}}\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times H-\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=0 \tag{36}$$

$$i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla\cdot E=0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot E=0 \tag{37}$$

Grad Λ^3:

$$i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla\times E+i\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu\frac{\partial H}{\partial t}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times E+\mu\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{38}$$

$$\mu^{\frac{1}{2}}\nabla\cdot H=0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot H=0 \tag{39}$$

- The Fundamental solution of Dirac Equation

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งหรือ Dirac Equation และแสดงให้เห็นถึงการบรรจุสมการของแมกซ์แวล ในหัวข้อนี้จึงกล่าวถึงผลเฉลยของสมการดังกล่าว แต่อยู่ใน Frequency Domain เนื่องจากปัญหาเกี่ยวกับงานวิจัยนี้เป็นปัญหาเกี่ยว mono-chromatic fields ซึ่งผลเฉลยนั้นอยู่ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด และเพื่อง่ายต่อการทดสอบผลลัพธ์ที่ได้ในเบื้องต้น จึงเปรียบเทียบกับผลเฉลยของสมการ Helmholtz

ผลเฉลยของสมการ Helmholtz ในรูปแบบของเวคเตอร์ คือ ฟังก์ชันของกรีน (Green Function) ซึ่งถูกใช้งานอย่างแพร่หลายเกี่ยวกับการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ทั้งในระบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้กล่าวถึง การใช้กรีนฟังก์ชั่นในระเบียบวิธีบราว์ดารี่เอลิเมนต์ (Boundary Element Method) ในระเบียบวิธีนี้กรีนฟังก์ชั่นเปรียบเสมือน delta function ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญในการคำนวณหาสนามภายในขอบเขตจากสนามที่ขอบเขตบริเวณที่พิจารณา หรือเรียกอีกอย่างได้ว่า วิธีการ Integral Method

ผลเฉลยของสมการ Dirac Equation ในรูปแบบ เลขคลิฟฟอร์ด มีคุณสมบัติในการนำไปใช้คล้ายกับผลเฉลยของ Helmholtz แต่มีสิ่งที่แตกต่างกัน คือ ฟังก์ชั่นของกรีนเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ส่วนผลเฉลยของ Dirac Equation เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยของสมการทั้งสองนั้น จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการแมกซ์แวล การนำไปใช้งานเกี่ยวกับผลเฉลยของ Dirac Equation จะขอกล่าวในหัวข้อต่อไป

ผลเฉลยของสมการ Dirac Equation ในระบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ซึ่งจะถูกแสดงในสมการ (40) และ (41) ตามลำดับ ดังนี้

$$F_k\left(x\right)=-\frac{ik}{4}\left\{H_1^{(1)}(k|x|)\frac{x}{|x|}+e_0H_0^{(1)}(k|x|)\right\} \tag{40}$$

$$F_k(x) = \left\{ -\frac{x}{|x|^2} + ik\left(ie_0 + \frac{x}{|x|} \right) \right\} \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{41}$$

โดยที่ $k = \frac{\omega}{c}$ คือ ค่าคงที่ทางเฟส (Phase constant) มีหน่วย Radius per meter

x คือ จำนวน เลขคลิฟฟอร์ด ที่ใช้ในการบอกตำแหน่งใดๆ

- **การพิสูจน์** Dirac Equation

จากหัวข้อ 5.1 ได้แสดงให้เห็นว่า สามารถเขียนสมการแมกซ์แวลให้อยู่ใน Dirac Equation ได้ ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะแสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยของสมการแมกซ์แวลจะเป็นผลเฉลยของ Dirac Equation ด้วยเช่นเดียวกัน จึงจะใช้ผลเฉลยที่ได้รับการยอมรับในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นผลเฉลยของ Helmholtz Equation ในส่วนแรกจะทำการแสดงให้เห็นก่อนว่า ผลเฉลยของ Helmholtz Equation มีความสอดคล้องกับสมการแมกซ์แวลได้จริง และหลังจากนั้นจึงนำไปใช้ในการพิสูจน์กับ Dirac Equation

สมการแมกซ์แวลในรูปแบบของเวคเตอร์ สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \tag{42}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{43}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{44}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{45}$$

- การพิสูจน์ผลเฉลยของสมการ Helmholtz

Helmholtz Equation เป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งได้จากการอนุพันธ์สมการแมกซ์แวล ซึ่งจะแยกออกเป็น 2 สมการ โดยแยกออกตามสมการของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าดังต่อไปนี้

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \tag{46}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = 0 \tag{47}$$

เมื่อพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางไปในทิศทางของแกน z เพียงทิศทางเดียว จะได้ผลเฉลยดังต่อไปนี้

$$E(x,y,z) = \hat{a}_x E_0 e^{-j\beta_z z} \quad (48)$$

$$H(x,y,z) = \hat{a}_y H_0 e^{-j\beta_z z} \quad (49)$$

จากสมการ (48) และ (49) สามารถแปลงให้เป็นผลเฉลยของ Helmholtz wave equation ในรูปของ Instantaneous form ได้ดังนี้

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \hat{a}_x E_0 e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t} \quad (50)$$

$$\vec{H}(x,y,z) = \hat{a}_y H_0 e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t} \quad (51)$$

โดยที่

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (52)$$

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (53)$$

- เมื่อนำสนามไฟฟ้าในสมการ (50) และสนามแม่เหล็กในสมการ (51) ลงในสมการ (42) จะได้ว่า

เทอมด้านซ้ายมือ: $$\nabla \times \vec{H} = [j\beta H_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_x \quad (54)$$

เทอมด้านขวามือ: $$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = [j\omega\varepsilon_0 E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_x$$

$$= [j\omega\varepsilon_0 \left(\frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}} H_0\right) e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_x$$

$$= [j\beta H_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_x \quad (55)$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (54) และ สมการ (55) มีค่าเท่ากัน ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของ Helmholtz Equation สอดคล้องกับสมการแมกซ์แวล ตามสมการ (42)

- เมื่อนำสนามไฟฟ้าในสมการ (50) และสนามแม่เหล็กในสมการ (51) ลงในสมการ (43) จะได้ว่า

เทอมด้านซ้ายมือ: $$\nabla \times \vec{E} = [-j\beta E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_y \quad (56)$$

เทอมด้านขวามือ: $$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = [-j\omega\mu_0 H_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_y$$

$$= [-j\omega\mu_0 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0\right) e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_y$$

$$= [-j\beta E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}]\vec{a}_y \quad (57)$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (56) และ สมการ (57) มีค่าเท่ากัน ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของ Helmholtz Equation สอดคล้องกับสมการแมกซ์แวล ตามสมการ (43)

- เมื่อนำสนามไฟฟ้าในสมการ (50) และสนามแม่เหล็กในสมการ (51) ลงในสมการ (44) และ (45) จะพบว่า สมการจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งเป็นจริงตามสมการ

สรุปได้ว่า ผลเฉลยของ Helmholtz wave equation ตามสมการ (50) และ (51) สอดคล้องกับสมการแมกซ์แวล

- การพิสูจน์ของสมการ Dirac Equation

จากข้างต้นแสดงถึง “Maxwell’s Equations” ในรูปแบบเวคเตอร์ ซึ่งสามารถแก้สมการหาผลเฉลยได้ตามสมการ (50) และ (51) ซึ่งผลเฉลยดังกล่าวเป็นผลเฉลยของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถูกเรียกว่า “Plane wave”

ในส่วนนี้ จะแสดงถึงความสอดคล้องของผลเฉลยของสมการแมกซ์แวลในรูปแบบเวคเตอร์ และสมการอนุพันธ์ในรูปแบบ เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งบรรจุสมการของแมกซ์แมกทั้ง 4 สมการ ซึ่งมีรูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$Du = \left(\frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 + \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_4 \right) u = 0 \qquad (58)$$

สมการ (58) ถูกเรียกว่า “Dirac-equation D” ซึ่งสามารถบรรจุสมการแมกซ์แวลทั้ง 4 สมการ

เนื่องจากสมการ “Dirac-equation” ถูกเขียนบน เลขคลิฟฟอร์ด ดังนั้น จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนผลเฉลยของสมการแมกซ์แวลในรูปของเวคเตอร์ให้เป็นรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด และสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนของเวลาให้อยู่ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ได้ดังนี้

$$u = aH\sigma + jbEe_4 \qquad (59)$$

โดยกำหนด $a = (\mu)^{1/2}$

$b = (\varepsilon)^{1/2}$

$\sigma = -e_1 e_2 e_3$

ดังนั้น สามารถเขียน $E-field$ และ $H-field$ จากสมการ (50) และ (51) ลงใน เลขคลิฟฟอร์ด: u ตามสมการ (59) ได้ดังนี้

$$\bar{E}(x,y,z,t)=\hat{a}_x E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} \xrightarrow[encoding]{} E=E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_1$$

$$\bar{H}(x,y,z,t)=\hat{a}_x H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} \xrightarrow[encoding]{} H=H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_2$$

ดังนั้น สามารถเขียนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า u ได้ดังนี้

$$u=\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_2\sigma + j\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_1 e_4 \qquad (60)$$

สมการ (60) เป็นสมการที่ทำการ Encoding the vector to เลขคลิฟฟอร์ด

การพิสูจน์ถึงความสอดคล้องของผลเฉลยในสมการ (60) และสมการแมกซ์แวลในรูปของ Dirac Equation ในสมการ (58) ดังต่อไปนี้

$$Du=\left(\frac{\partial}{\partial x}e_1+\frac{\partial}{\partial y}e_2+\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)u$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}e_1+\frac{\partial}{\partial y}e_2+\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)\left(\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_2\sigma + j\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_1 e_4\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}e_1+\frac{\partial}{\partial y}e_2+\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)\left(\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_2\sigma\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}e_1+\frac{\partial}{\partial y}e_2+\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)\left(j\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_1 e_4\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)\left(\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_2\sigma\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}e_3+\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}e_4\right)\left(j\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)} e_1 e_4\right)$$

$$=\left\langle -j\beta\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_3 e_2\sigma$$
$$+\left\langle \frac{-\omega}{c}\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_4 e_2\sigma$$

$$+\left\langle \beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_3e_1e_4$$
$$+\left\langle \frac{-j\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_4e_1e_4$$

$$=\left\langle j\beta\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1$$
$$+\left\langle \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1e_3e_4$$
$$+\left\langle -\beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1e_3e_4$$
$$+\left\langle \frac{-j\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1$$

$$=\left\langle j\beta\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1+\left\langle \frac{-j\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1$$
$$+\left\langle \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_0}H_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1e_3e_4+\left\langle -\beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0 e^{j(\omega t-\beta_z z)}\right\rangle e_1e_3e_4$$

$$=\left[j\beta\sqrt{\mu_0}H_0-\frac{j\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}E_0\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1$$
$$+\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_0}H_0-\beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1e_3e_4 \qquad (61)$$

นำสมการ (52) และ (53) มาพิจารณาเพื่อแปลงพารามิเตอร์ จะได้ว่า

$$=\left[j\beta\sqrt{\mu_0}H_0-\frac{j\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}}H_0\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1$$
$$+\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_0}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}E_0-\beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1e_3e_4$$

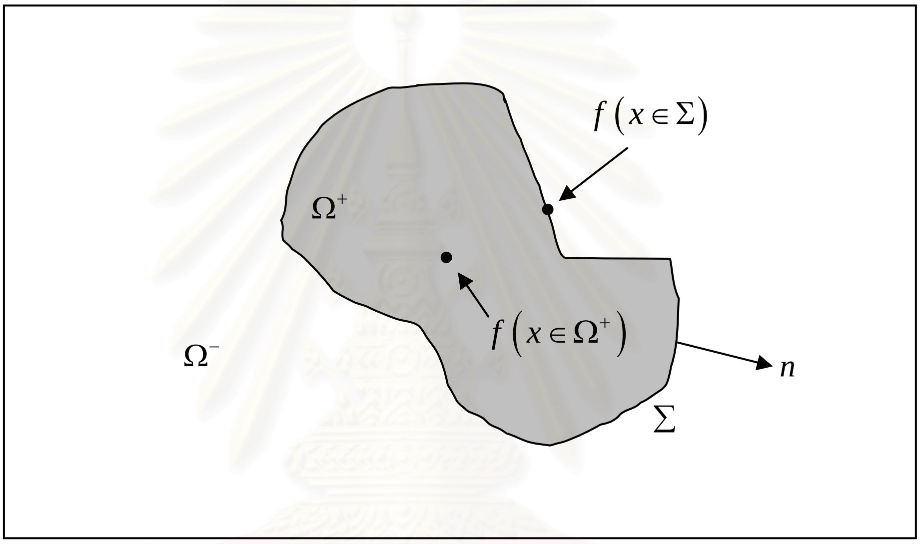
$$=j\beta\sqrt{\mu_0}H_0\left[1-1\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1+\beta\sqrt{\varepsilon_0}E_0\left[1-1\right]e^{j(\omega t-\beta_z z)}e_1e_3e_4$$

$$=0 \qquad (62)$$

จะเห็นได้ว่า สมการอนุพันธ์ Dirac-equation สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการ Maxwell's Equation ในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด

2.7 . Singular Integral Equations

สมการอินทิกรัลเป็นวิธีการหนึ่งที่มีการนำมาใช้อย่างแพร่หลาย โดยจะถูกสร้างเป็นระเบียบวิธีบราว์ดารี่เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นระเบียบเชิงตัวเลข เพื่อใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมโยธา ด้านวิศวกรรมเครื่องกล และด้านวิศวกรรมไฟฟ้า การนำไปใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า ซึ่งเกี่ยวกับการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ระเบียบวิธีบราว์ดารี่เอลิเมนต์จำเป็นต้องใช้ผลเฉลยของสมการคลื่นหรือกรีนฟังชั่นซึ่งอยู่ในรูปแบบของเวคเตอร์ โครงสร้างของการคำนวณด้วยวิธีบราว์ดารี่เอลิเมนต์จะมีลักษณะคล้ายคลึงกับงานวิจัยฉบับนี้



ภาพประกอบ 6-1 แสดงบริเวณที่ต้องการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการอินทิกรัลในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด โดยเป็นผลมาจากการศึกษาทฤษฎีบท Boundary Theorem ซึ่งทฤษฎีบทที่ถูกนำมาใช้งานเกี่ยวกับฟังก์ชั่นของเลขคลิฟฟอร์ด แม้ว่าทฤษฎีบท Boundary Theorem ถูกพัฒนามาจากทฤษฎีบทของ Stoke's Theorem แต่ถือได้ว่าเป็นทฤษฎีบทที่มีความเป็นสากล สามารถนำไปใช้ประยุกต์กับปัญหาหลายปัญหา

ทฤษฎีบท Boundary Theorem เขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\int_{\partial\Omega} v(y)\otimes f(y)d\sigma(y)=\int_{\Omega}\nabla\times F(x)dx \tag{63}$$

โดยกำหนดให้

V เป็น finite dimensional linear space

$F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน $\bar{\Omega} \to V$

$v(y)$ เป็น the outward pointing normal

$f(y)$ $:= F|_{\Sigma}$ เป็นค่าฟังก์ชันบน boundary

$d\sigma(y)$ เป็น scalar surface measure

ในข้างต้นของการวิจัย จะเริ่มศึกษาการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยเรียกสนามแม่เหล็กไฟฟ้าชนิดนี้ว่า mono-chromatic electromagnetic field ซึ่งเป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีค่าความถี่เพียงหนึ่งค่า นำมาใช้กับสมการอินทิกรัล ซึ่งถูกเรียกว่า Reproducing Formula สมการนี้ได้ถูกประยุกต์จากทฤษฎีบท Boundary Theorem ซึ่งได้ถูกคิดขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามสามารถใช้กับฟังก์ชันบางฟังก์ชั่น ซึ่งต้องมีคุณสมบัติเป็นไปตามสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแบบ mono-chromatic

Reproducing Formula เป็นสมการอินทิกรัล ซึ่งคำนวณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งโดเมนของ x อยู่ในบริเวณภายในขอบเขตที่พิจารณา $(x \in \Omega^{+})$ โดยที่ใช้ค่าของฟังก์ชั่น $f(y)$ ซึ่งโดเมนของ y อยู่บริเวณบนเส้นขอบเขต Σ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$f(x) = \int_{\Sigma} E_k(y-x)n(y)f(y)d\sigma(y) \tag{64}$$

ในสมการ (64) ฟังก์ชั่น E_k เป็นฟังก์ชั่นที่มีความสัมพันธ์กับผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (Dirac Equation) F_k ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชั่น E_k และ F_k ในภายหลัง

2.8 **การดำเนินการทางเรขาคณิต** (Geometric Operations)

การคำนวณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของเวคเตอร์ จำเป็นต้องมีโอเปอเรเตอร์ ซึ่งใช้ในการแปลงเวคเตอร์จากพิกัดหนึ่งไปยังพิกัดหนึ่ง ในขณะเดียวกันนั้นการคำนวณในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ก็มีความจำเป็นต้องมีโอเปอเรเตอร์ในการแปลง เลขคลิฟฟอร์ด จากพิกัดหนึ่งไปยังอีกพิกัดหนึ่งด้วยเช่นกัน นอกจากนั้น การ projection ของ เลขคลิฟฟอร์ด ยังเป็นอีกหนึ่งโอเปอเรเตอร์มีความสำคัญ ยกตัวอย่างเช่น การแยกส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณเส้นขอบเขต ซึ่งแยกออกเป็นส่วนประกอบ ที่มีแนวขนานและตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกับเส้นขอบเขต

2.8.1 Boundary Data Projection Operators

2.8.1.1 Reflection Operator

Refection Operator (Q) เป็นโอเปอร์เราเตอร์ของ เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ตามสมการดังนี้

$$Qu = nun \tag{65}$$

โดยที่ n เป็นเวคเตอร์ใดๆ ซึ่งถูกเขียนในรูป เลขคลิฟฟอร์ด

คุณสมบัติที่สำคัญของ Reflection Operator คือ อินเวอร์ของ Reflection operator ใดๆ เป็น Reflection operator นั้นๆ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Q^2u &= n\left(nun\right)n \\ &= n^2un^2 \\ &= (-1)u(-1) \\ &= Iu \end{aligned} \tag{66}$$

ดังนั้น $$QQ = I \tag{67}$$

2.8.1.2 Two Boundary Projection Operators

Projection Operators เป็นการนำ Reflection operator มาใช้ในการแยกส่วนประกอบของ เลขคลิฟฟอร์ด ออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรก คือ ส่วนที่ขนานกับทิศทางของ normal vector และส่วนที่สอง คือ ส่วนที่ตั้งฉากกับทิศทางของ normal vector ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ตามสมการ (68) และ (69) ตามลำดับ ดังนี้

$$Q^{+}u = \frac{1}{2}\left(I + Q\right)u \tag{68}$$

$$Q^{-}u = \frac{1}{2}\left(I - Q\right)u \tag{69}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของ Projection Operator มีดังนี้

$$\left(Q^{+}\right)^{2} = Q^{+} \tag{70}$$

$$\left(Q^{-}\right)^{2} = Q^{-} \tag{71}$$

$$Q^{+}Q^{-} = Q^{-}Q^{+} = 0 \tag{72}$$

$$Q^{+} + Q^{-} = I \tag{73}$$

- A Vector and Field Rotation Operators

Rotation Operator เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ใช้เป็นส่วนหนึ่งของการแปลงพิกัด ซึ่งใช้ในการหมุน เลขคลิฟฟอร์ด จากพิกัดหนึ่งไปยังอีกพิกัดหนึ่ง อย่างไรก็ตามโอเปอร์เรเตอร์นี้ถูกสร้างขึ้นมาจาก Reflection Operator

การหมุนของ เลขคลิฟฟอร์ด เป็นการใช้ Reflection Operator ที่มีโอเปอเรเตอร์สองจำนวน ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Theta u = n_2 n_1 u n_1 n_2 \tag{74}$$

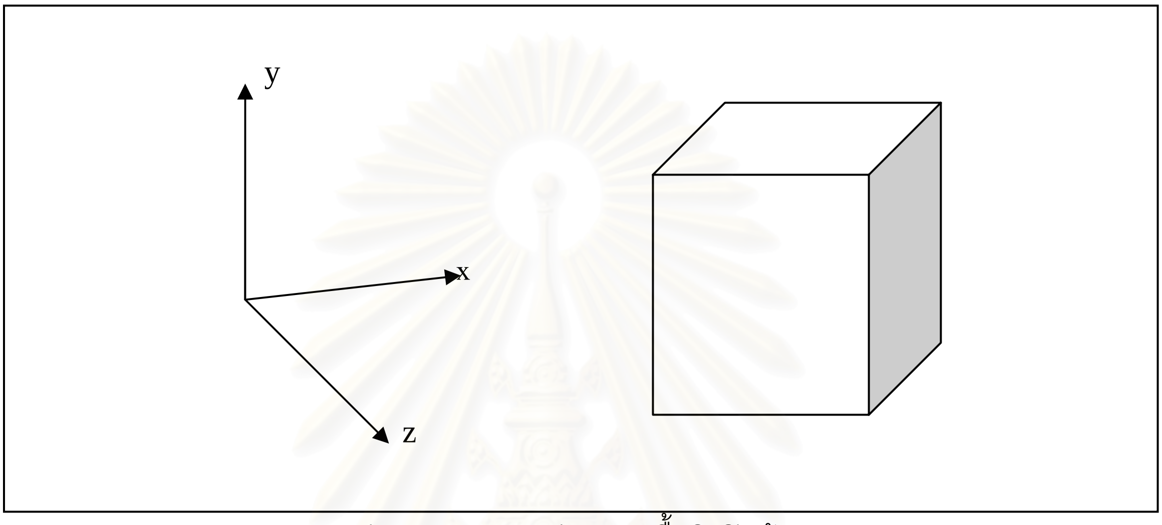
2.9 ตัวอย่างการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

ในหัวข้อนี้ได้แสดงถึงการใช้สมการอินทิกรัล เพื่อคำนวณผลเฉลยของสมการแมกแวลล์ โดยกำหนดให้ค่าขอบเขตเป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ บางบริเวณของพื้นผิวขอบเขต และรูปร่างของพื้นผิวขอบเขตเป็นพื้นผิวของลูกบาศก์ นอกจากนั้น เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพ และการประยุกต์ใช้ในงานทางด้านแม่เหล็กไฟฟ้า จึงแบ่งการทดสอบออกเป็น 2 กรณีตามจุดที่ต้องการพิจารณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนี้

กรณีแรก คือ การคำนวณสมนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในบริเวณใดๆ ซึ่งมีขอบเขตปิดล้อม หรือเรียกว่า Bounded Domain เช่น การคำนวณสมนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่น เพื่อวิเคราะห์การเดินทางของคลื่นภายในท่อนำคลื่น เป็นต้น

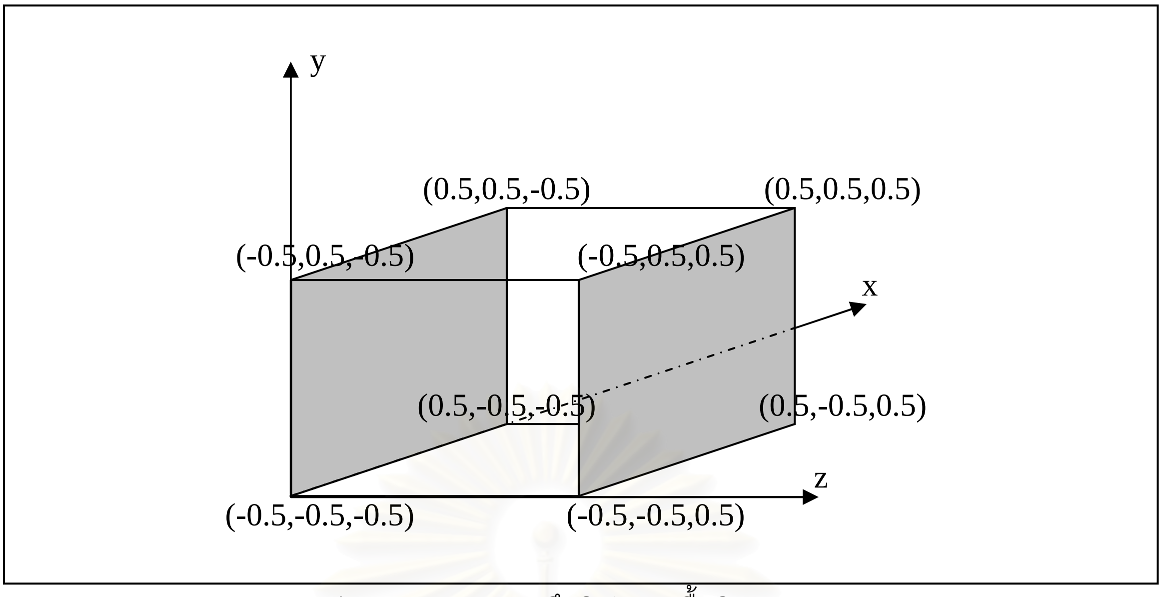
กรณีที่สอง คือ การคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณใดๆ ซึ่งไม่มีขอบเขตปิดล้อม หรือเรียกว่า Unbounded Domain เช่น การคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกจากสายอากาศ เพื่อใช้ในการออกแบบสายอากาศรูปแบบต่างๆ เป็นต้น

2.9.1 **กรณีขอบเขตปิดล้อม** Bounded Domain



ภาพประกอบ 2.9.1 รูปร่างของพื้นผิวปิดล้อม

กำหนดให้รูปร่างของพื้นผิวปิดล้อมเป็นพื้นผิวของลูกบาศก์ ซึ่งเป็นรูปร่างพื้นฐานและง่ายต่อการทดสอบสมการอินทิกรัล ดังภาพประกอบ 8-1 พิกัดของพื้นผิวปิดล้อมถูกบรรยายด้วยพิกัดแบบคาร์ทีเซียน ในที่นี้พื้นผิวขอบเขตที่กำหนดขึ้นนั้น มีเงื่อนไขขอบเขต คือ สามารถส่งผ่านคลื่นได้ทั้งหมด หรือ เรียกว่า Perfect Transmission



ภาพประกอบ 8-2 แสดงถึงพิกัดของพื้นผิวขอบเขต

ภาพประกอบ 2.9.2 แสดงถึงตำแหน่งของพื้นผิวขอบเขตในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งเป็นพื้นผิวของลูกบาศก์ที่มีขนาดกว้าง 1 เมตร ยาว 1 เมตร และสูง 1 เมตร

การกำหนด สนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นผิวขอบเขต

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นผิวขอบเขตนั้น กำหนดให้มีคุณสมบัติเป็น Uniform Plane wave ซึ่งมีฟังก์ชันของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสอดคล้องตามสมการของแมกแวลล์ และมีทิศทางการเคลื่อนที่ของสนามเป็นไปตามภาพประกอบ 2.9.3 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าดังกล่าว ถูกอธิบายในรูปแบบของเวคเตอร์ ตามสมการดังนี้

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\beta z}\vec{a}_x \tag{75}$$

$$\vec{H} = H_0 e^{-j\beta z}\vec{a}_y \tag{76}$$

โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

E_0 : *The Magnitude of Electric field*

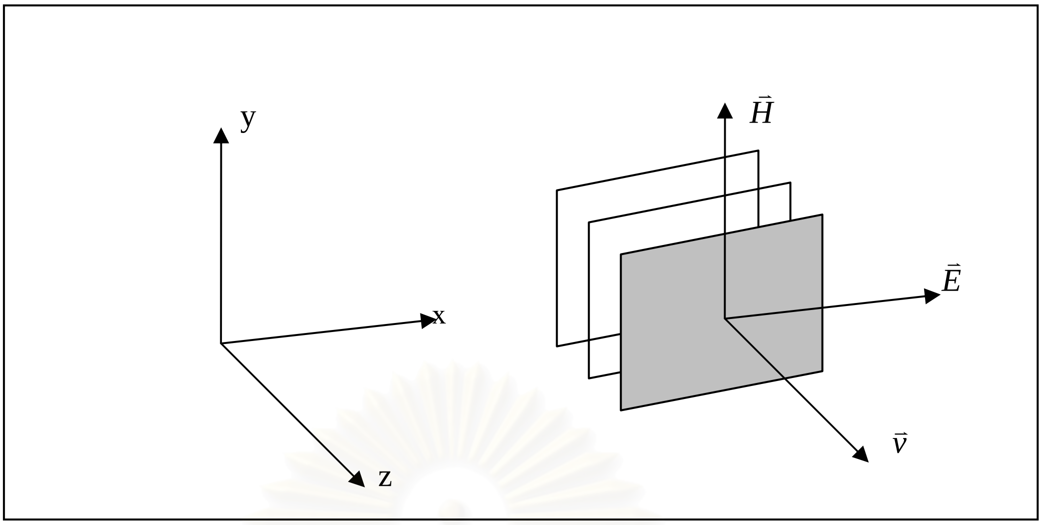
H_0 : *The Magnitude of Magnetic field*

$$\eta_0 = \frac{E_0}{H_0} = 120\pi\ \Omega$$

$$\beta^2 = w^2\mu\varepsilon$$

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}\ henries/meter$$

$$\varepsilon = 8.8541 \times 10^{-12}\ (farad/meter)$$



ภาพประกอบ 2.9.3 แสดงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของ Uniform Plane wave

ในภาพประกอบ 2.9.3 กำหนดให้ สนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีการเคลื่อนที่มีทิศทางตามแนวแกน z โดยที่สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอ เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งสามารถบรรยายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในจำนวนเดียวกันได้ตามทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น ดังนั้นจึงทำการแปลงเวคเตอร์ของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าให้อยู่ในรูป เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งเป็นไปตามสมการ ดังนี้

$$u = \mu^{1/2} H_0 e^{-j\beta z} e_2 \sigma + i \varepsilon^{1/2} E_0 e^{-j\beta z} e_1 e_4 \tag{77}$$

กำหนดให้สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในรูปแบบของเวคเตอร์ มีพารามิเตอร์ ดังนี้

$$E_0 = 120.0\pi \ V/m$$

$$H_0 = 1.0 \ A/m$$

$$\beta = 1.0$$

$$\omega = \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \rightarrow f = 4.7714 \times 10^7 \ Hz$$

ผลการคำนวณด้วยสมการอินทิกรัลในกรณีขอบเขตปิดล้อม

ในหัวข้อนี้จะแบ่งผลการคำนวณออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนแรก เป็นผลการคำนวณสนามแม่ เหล็กไฟฟ้าที่ อยู่ภายในบริเวณที่พิจารณา ซึ่งในส่วนนี้ใช้วิธีการอินทิกรัลเชิงตัวเลขด้วยวิธีของ Gauss-Legendre Numerical Integration และในส่วนที่สอง เป็นผลการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นผิวขอบเขต ซึ่งในส่วนนี้ใช้วิธีการอินทิกรัลเชิงตัวเลขแบบเฉพาะ โดยถูกสร้างขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการเกิด Singular Integration

- ผลการคำนวณภายในพื้นผิวขอบเขต

การคำนวณภายในพื้นผิวขอบเขตแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ โดยแบ่งออกตามบริเวณที่ต้องการคำนวณ เนื่องจากการคำนวณในรูปแบบที่หนึ่งเป็นวิธีการดั้งเดิม ซึ่งมีการคำนวณที่ง่ายและรวดเร็ว อย่างไรก็ตาม รูปแบบดังกล่าวนี้เหมาะสำหรับการคำนวณสนามแม่เหล็กในบริเวณที่มีระยะห่างจากพื้นผิวขอบเขต ในงานวิจัยได้พัฒนาการคำนวณให้มีความแม่นยำเพิ่มมากขึ้น ซึ่งพิจารณาการอินทิกรัลพื้นผิวขอบเขตด้วยวิธีใหม่

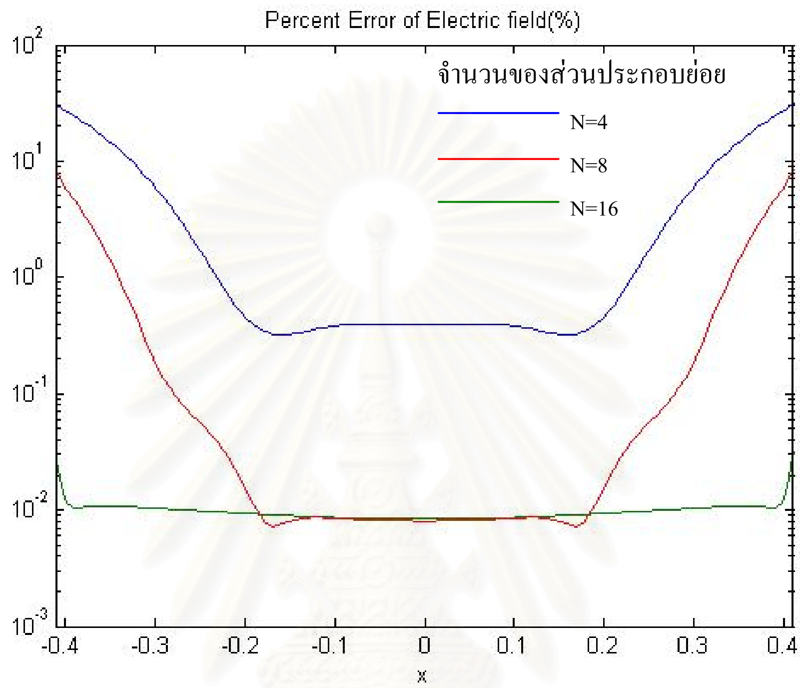
ตารางที่หนึ่ง แสดงผลการคำนวณด้วยรูปแบบวิธีเก่า ค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.0,0.0,0.0) ซึ่งเป็นจุดภายในพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x , y , z) = (0.0,0.0,0.0)

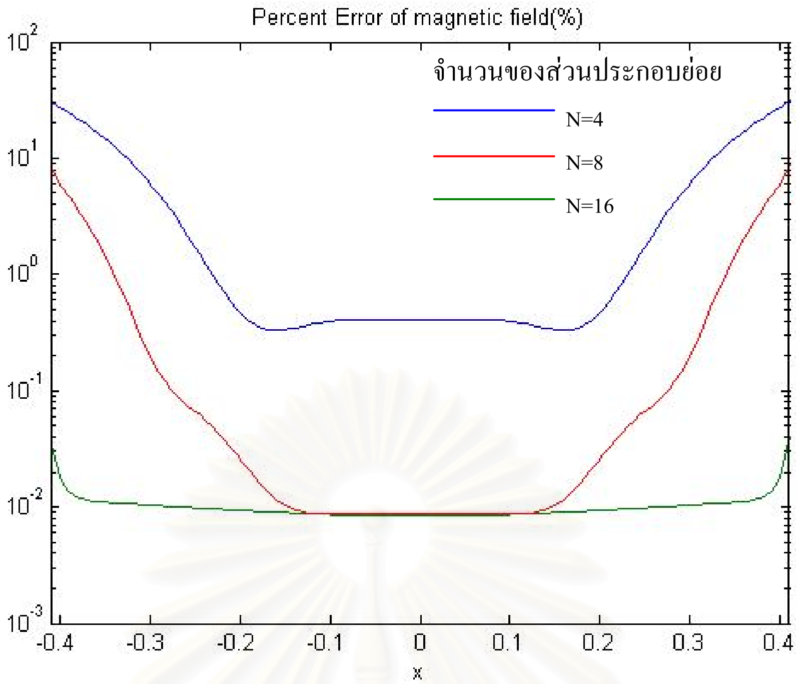
ลำดับของเอลิเมนต์	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-1.120998E-03	0.00	-1.120923E-03	0.000051E-03
7	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	1.121850E-03	0.000051E-03	1.121820E-03
11	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 16 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 1.324509 E-07

นอกจากนั้น เพื่อง่ายต่อการพิจารณาการคำนวณจุดต่างๆ ที่อยู่บริเวณภายในพื้นผิวขอบเขต แต่มีระยะที่ห่างออกจากพื้นผิวขอบเขต จึงแสดงค่าคลาดเคลื่อนของค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ตามภาพประกอบที่ 2.9.4 และ 2.9.5 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 2.9.4 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.4, 0.4],\ z = 0.0$



ภาพประกอบ 2.9.5 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.4, 0.4],\ z = 0.0$

ในรูปแบบการคำนวณแบบที่สอง ได้ทำการการพัฒนารูปแบบในการคำนวณอินทิกรัล เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในบริเวณที่ใกล้กับพื้นผิวขอบเขตมากขึ้น โดยแสดงผลการคำนวณค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.0,0.0,-0.45) ตามตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x , y , z) = (0.0,0.0,0.-45)

ลำดับของเอลิเมนต์	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-1.009396E-03	-4.875956E-04	-1.0091782-03	-4.87779E-04
7	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00

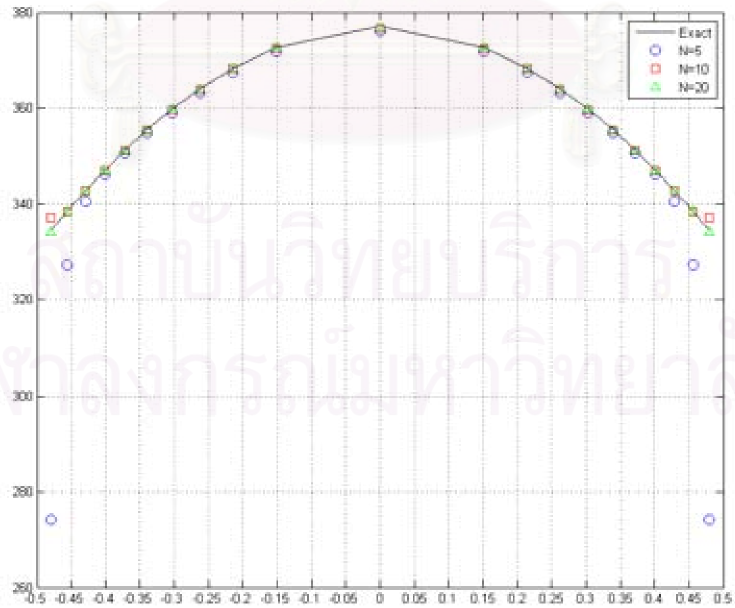
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	-4.879331E-04	1.010098E-03	-4.877357E-04	1.010070E-03
11	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 20 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 2.208687 E-04

นอกจากนั้น ได้แสดงค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ ที่มีระยะใกล้กับพื้นที่ขอบเขตมากขึ้น รวมทั้งบริเวณที่ห่างจากพื้นผิวขอบเขตด้วย โดยแบ่งการแสดงค่าของสนามทั้งสองดังต่อไปนี้

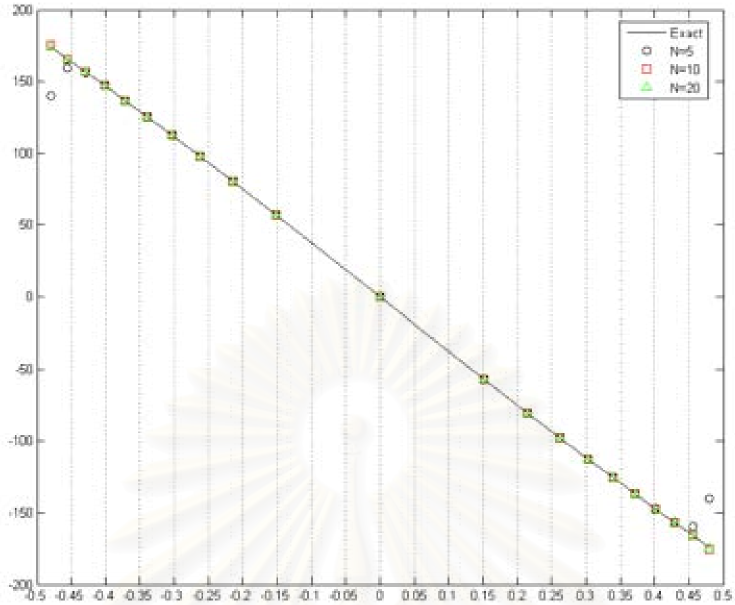
- ค่าของสนามไฟฟ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ในภาพประกอบ 2.9.6 และ 2.9.7 ตามลำดับ

- ค่าของสนามแม่เหล็กทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ในภาพประกอบ 2.9.8 และ 2.9.9 ตามลำดับ



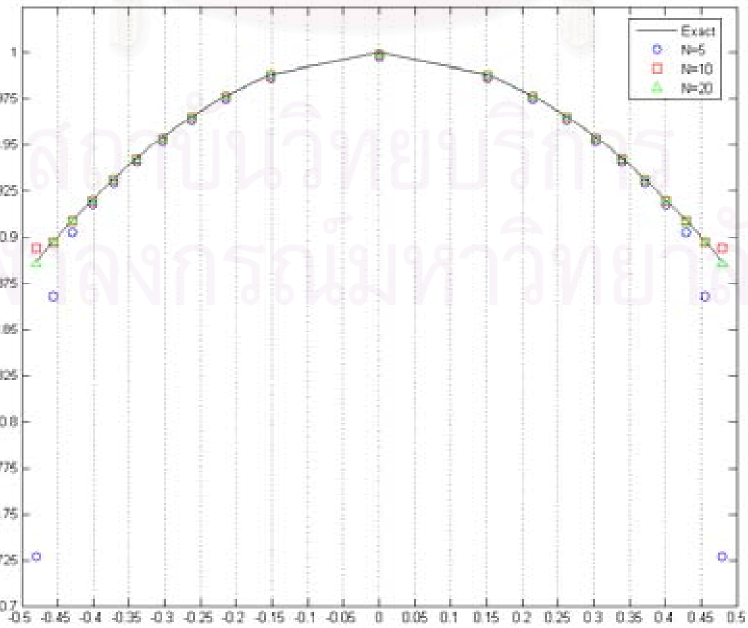
ภาพประกอบ 2.9.6 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้า โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$$x = y \in [-0.5, 0.5],\ \ z = 0.0$$



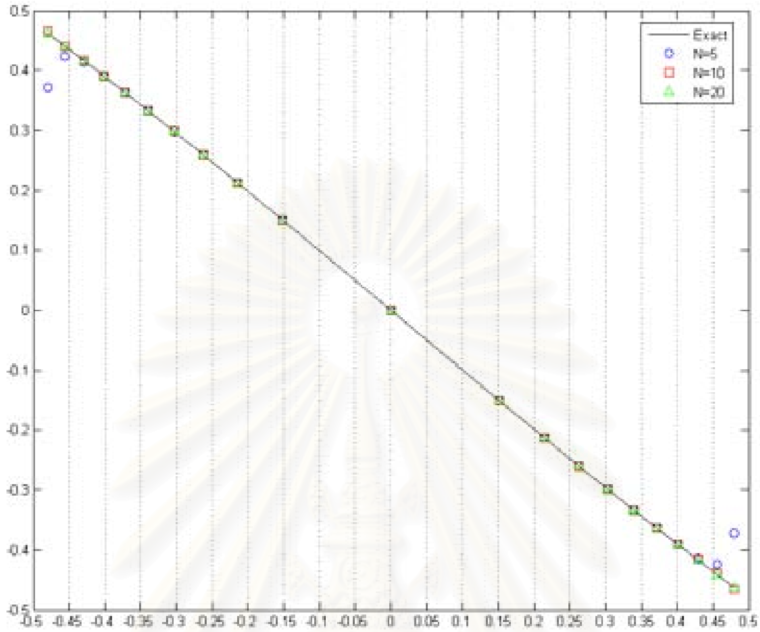
ภาพประกอบ 2.9.7 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้า โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$$



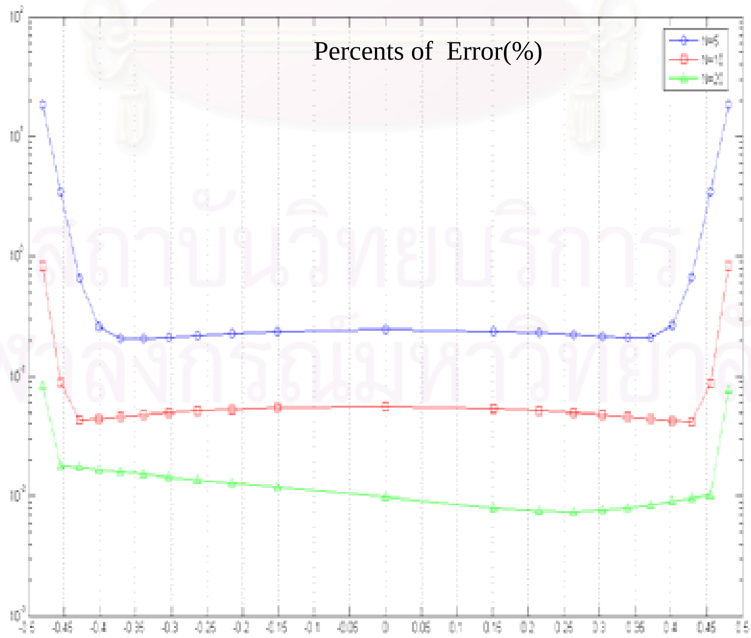
ภาพประกอบ 2.9.8 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็ก โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$



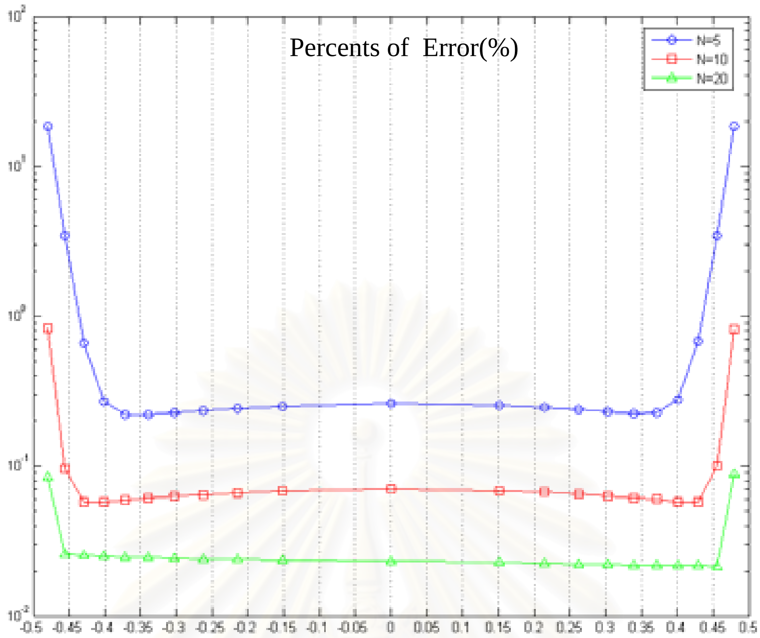
ภาพประกอบ 2.9.9 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็ก โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$

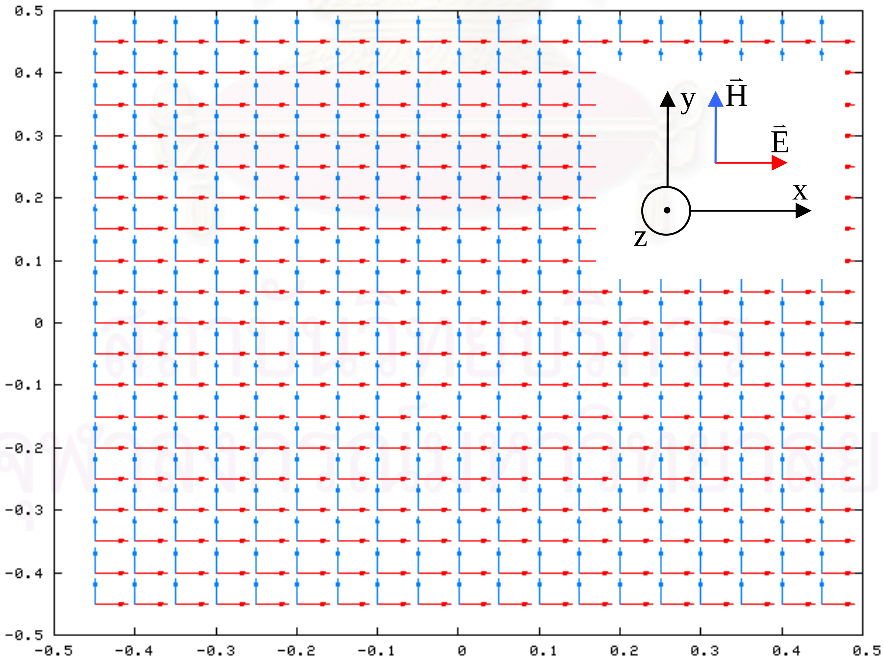


ภาพประกอบ 2.9.10 แสดงถึง เปอร์เซ็นค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณ

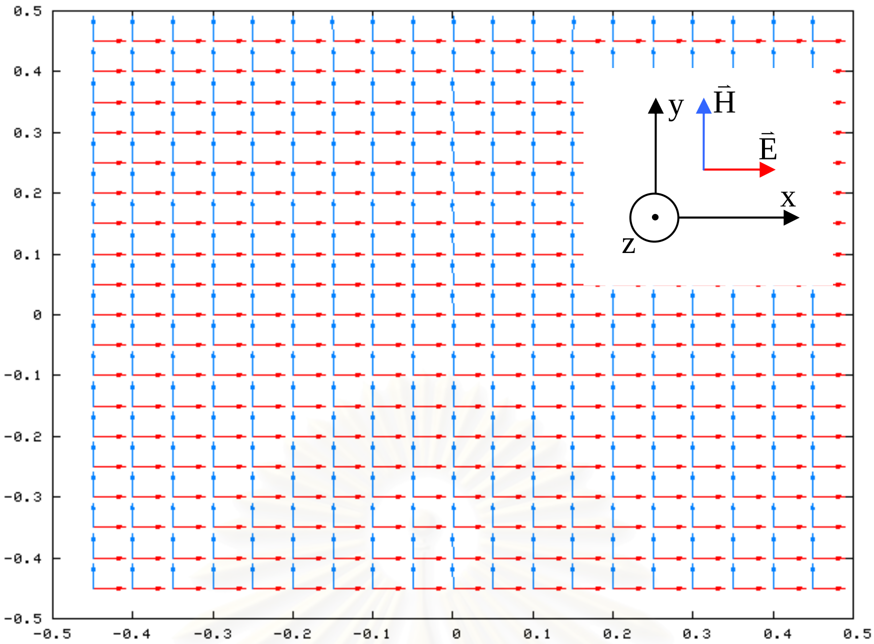
เทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$



ภาพประกอบ 2.9.11 แสดงถึง เปอร์เซ็นของค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$



ภาพประกอบ 2.9.12 แสดงถึง ทิศทางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$



ภาพประกอบ 2.9.13 แสดงถึง ทิศทางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากการคำนวณโดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$

ภาพประกอบ 2.9.10 และ 2.9.11 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก ตามลำดับ ณ จุดต่างต่างใน $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = 0.0$ ภายในพื้นที่ผิวขอบเขต เมื่อค่าคงที่เฟสเท่ากับ 1.0 $(\beta = 1.0)$ นอกจากนั้น ได้แสดงทิศทางของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้เพื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎี ตามภาพประกอบ 2.9.12 และ 2.9.13

- ผลการคำนวณบนพื้นผิวขอบเขต

ผลการคำนวณแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ เช่นเดียวกับการคำนวณสนามภายในพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา โดยแสดงผลการคำนวณด้วยวิธีเก่า ค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.4,0.4,-0.5) ตามตารางที่ 2.3

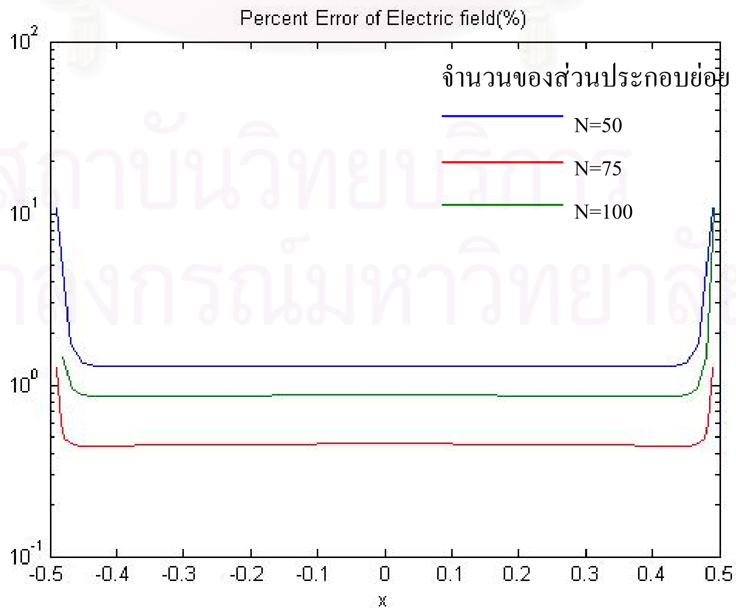
ตารางที่ 2.3 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x , y , z) = (0.4,0.4,-0.5)

ลำดับของเอลิเมนต์	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00

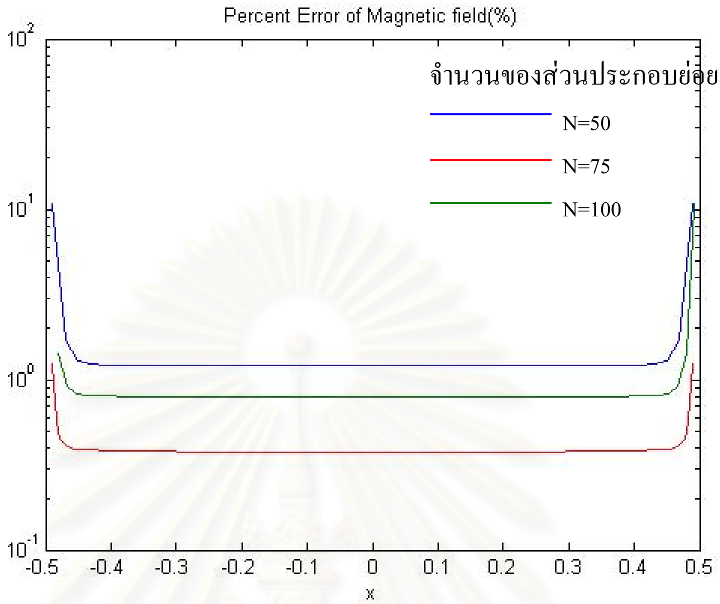
4	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-9.837685E-04	-5.374352E-04	-9.881857E-04	-5.296345E-04
7	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	-5.378072E-04	9.844496E-04	-5.293926-04	9.891320E-04
11	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 75 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 1.319742 E-05

นอกจากนั้น เพื่อง่ายต่อการพิจารณาการคำนวณจุดต่างๆ ที่อยู่บริเวณภายในพื้นผิวขอบเขต จึงแสดงค่าคลาดเคลื่อนของค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ตามรูปภาพประกอบ 2.9.14 และ 2.9.15 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 2.9.14 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.4, 0.4],\ z = -0.5$



ภาพประกอบ 2.9.15 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.4, 0.4],\ z = -0.5$

ในรูปแบบการคำนวณแบบที่สอง ได้ทำการการพัฒนารูปแบบในการคำนวณอินทิกรัลเพื่อเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในบริเวณที่ใกล้กับพื้นผิวขอบเขตมากขึ้น โดยแสดงผลการคำนวณค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.45,0.45,-0.45) ตามตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของเลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x , y , z) = (0.45,0.45,-0.5)

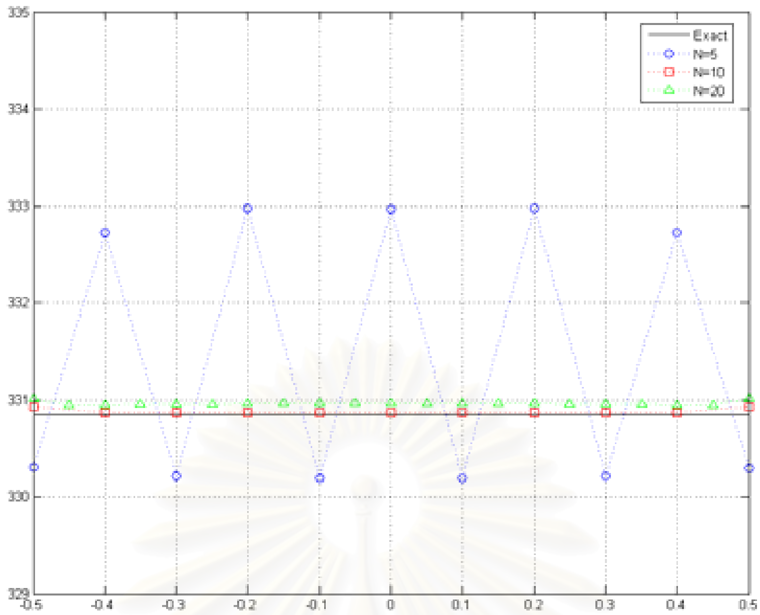
ลำดับของ	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
เอลิเมนต์	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-9.837685E-04	-5.374352E-04	-9.838481E-04	-5.369226E-04
7	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	-5.378072E-04	9.844496E-04	-5.367456E-04	9.847531E-04
11	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 20 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 8.137671E-04

นอกจากนั้น ได้แสดงค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ ที่มีระยะใกล้กับพื้นที่ขอบเขตมากขึ้น รวมทั้งบริเวณที่ห่างจากพื้นผิวขอบเขตด้วย โดยแบ่งการแสดงค่าของสนามทั้งสองดังต่อไปนี้

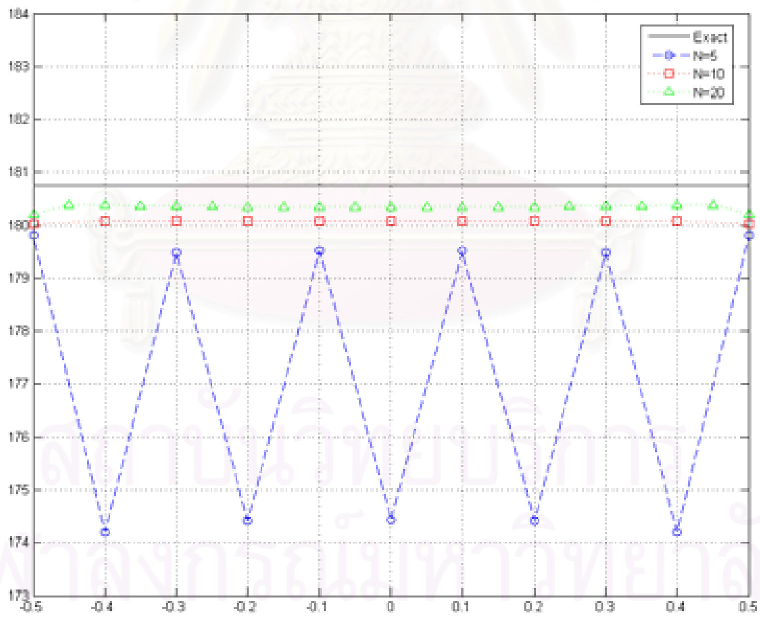
- ค่าของสนามไฟฟ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ในภาพประกอบ 2.9.16 และ 2.9.17 ตามลำดับ

- ค่าของสนามแม่เหล็กทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ในภาพประกอบ 2.9.18 และ 2.9.19 ตามลำดับ



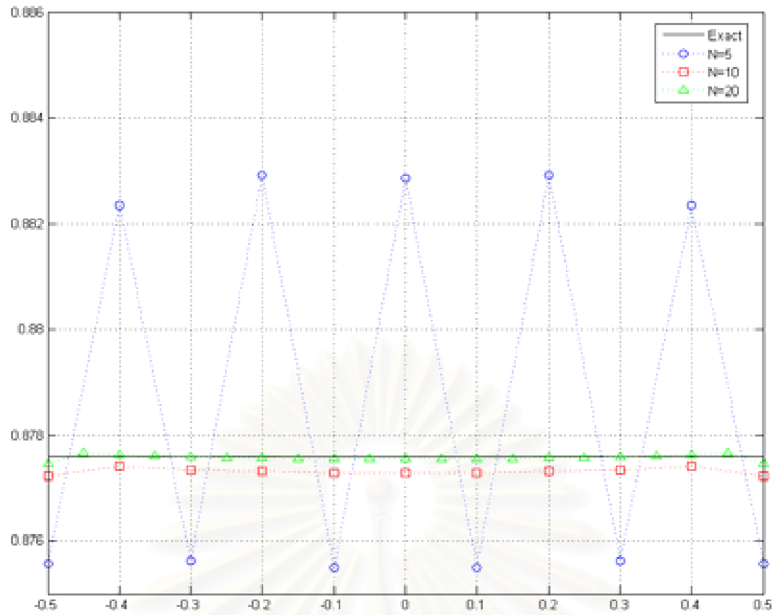
ภาพประกอบ 2.9.16 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้า โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$



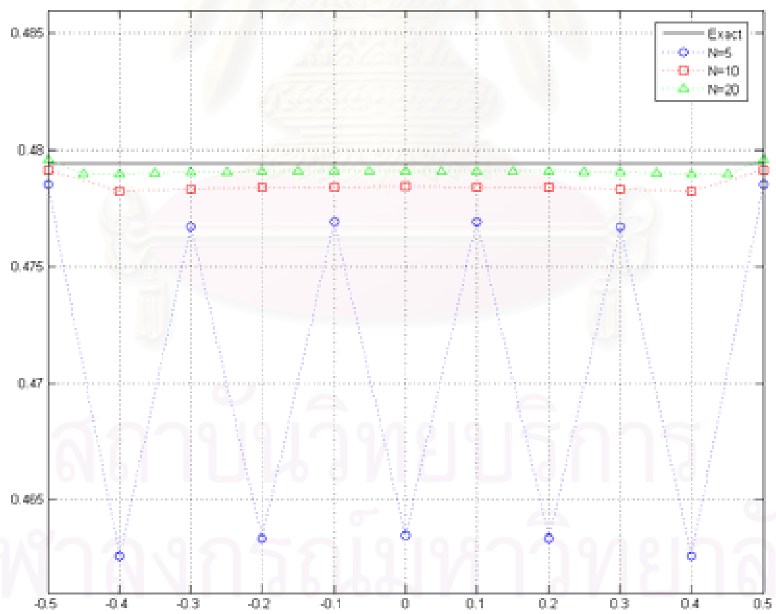
ภาพประกอบ 2.9.17 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้า โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$



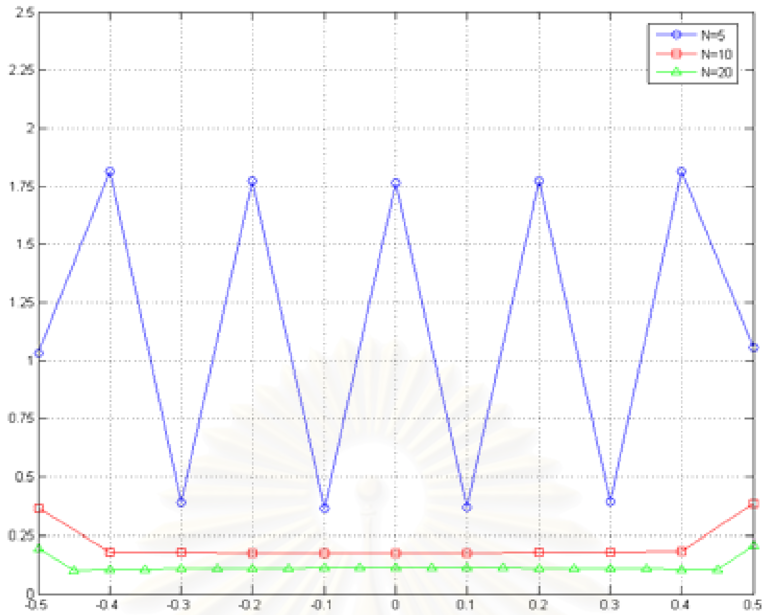
ภาพประกอบ 2.9.18 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็ก โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$

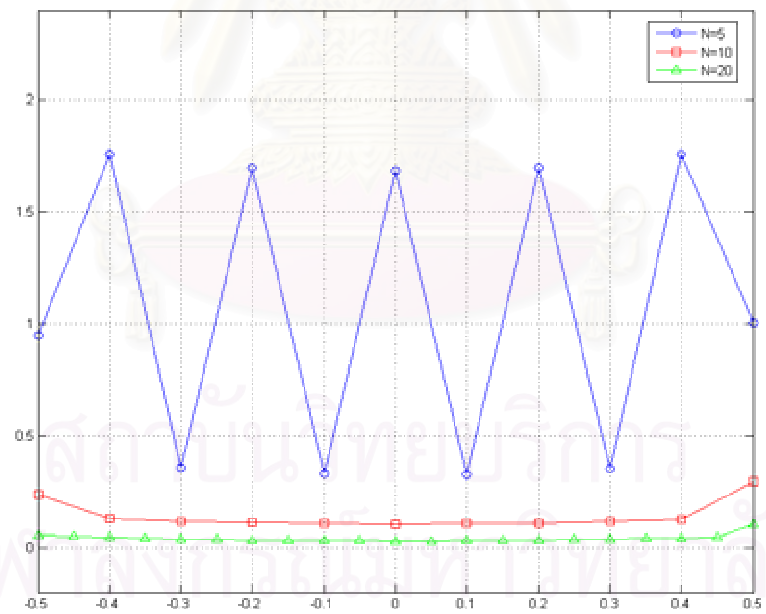


ภาพประกอบ 2.9.19 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็ก โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

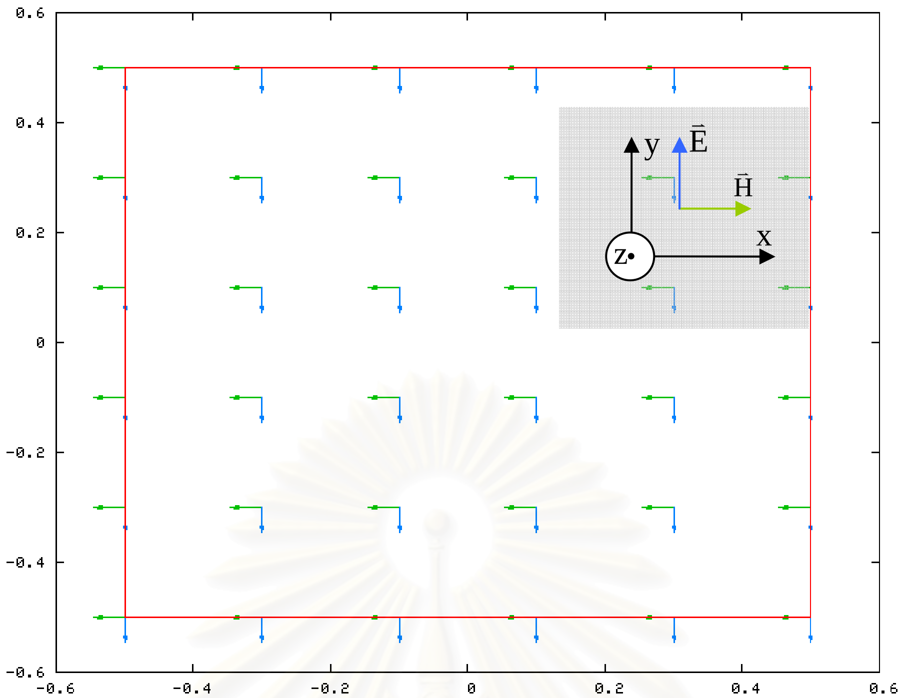
$x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$



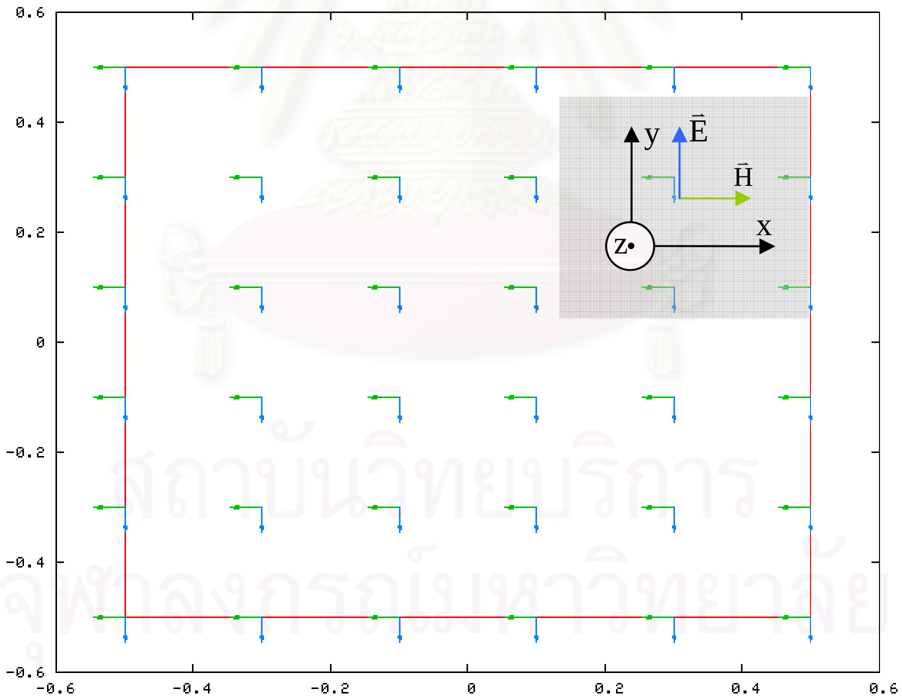
ภาพประกอบ 2.9.20 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = -0.5$



ภาพประกอบ 2.9.21 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = -0.5$



ภาพประกอบ 2.9.22 แสดงถึง ทิศทางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x, y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$



ภาพประกอบ 2.9.23 แสดงถึง ทิศทางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากการคำนวณโดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x, y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$

- ภาพประกอบ 2.9.20 และ 2.9.21 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก ตามลำดับ ณ จุดต่างต่างใน $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$ และภาพประกอบ 2.9.22 และ

2.9.23 แสดงทิศทางของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามค่าทางทฤษฎีและค่าที่คำนวณได้ ในบริเวณ $x = y \in [-0.5, 0.5],\ z = -0.5$ ภายในพื้นที่ผิวขอบเขต เมื่อค่าคงที่เฟสเท่ากับ 1.0 $(\beta = 1.0)$

2.9.2 **กรณีไร้ขอบเขตปิดล้อม** Unbounded Domain

- **รูปร่างของขอบเขตปิดล้อม**

กำหนดให้รูปร่างของพื้นผิวปิดล้อมเป็นพื้นผิวของลูกบาศก์ ซึ่งเป็นรูปร่างพื้นฐานและง่ายต่อการทดสอบสมการอินทิกรัล ดังภาพประกอบ 8-1 พิกัดของพื้นผิวปิดล้อมถูกบรรยายด้วยพิกัดแบบคาร์ทีเซียน ในที่นี้พื้นผิวขอบเขตที่กำหนดขึ้นนั้น มีเงื่อนไขขอบเขต คือ สามารถส่งผ่านคลื่นได้ทั้งหมด หรือ เรียกว่า Perfect Transmission

- **สนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นผิวขอบเขต**

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นผิวขอบเขตนั้น กำหนดให้มีคุณสมบัติเป็นคลื่นที่แพร่จากสายอากาศแบบ Short Dipole Antenna ซึ่งมีฟังก์ชันของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสอดคล้องตามสมการของแมกแวลล์ และมีทิศทางการเคลื่อนที่ของสนามเป็นไปตามภาพประกอบ 8-24 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าดังกล่าว ถูกอธิบายในรูปแบบของเวคเตอร์ ตามสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,y,z) &= \vec{E}(r,\theta,\phi) = E_r\vec{a}_r + E_\theta\vec{a}_\theta \\ &= \frac{I_0 l}{4\pi}e^{-i\beta r}\left(\frac{2\eta}{r^2}+\frac{2}{i\omega\varepsilon r^3}\right)\cos\theta\vec{a}_r + \frac{I_0 l}{4\pi}e^{-i\beta r}\left(\frac{i\omega\mu}{r}+\frac{1}{i\omega\varepsilon r^3}+\frac{\eta}{r^2}\right)\sin\theta\vec{a}_\theta\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(x,y,z) &= \vec{H}(r,\theta,\phi) = H_\phi\vec{a}_\phi \\ &= \frac{I_0 l}{4\pi}e^{-i\beta r}\left(\frac{i\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\vec{a}_\phi\end{aligned} \tag{76}$$

โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

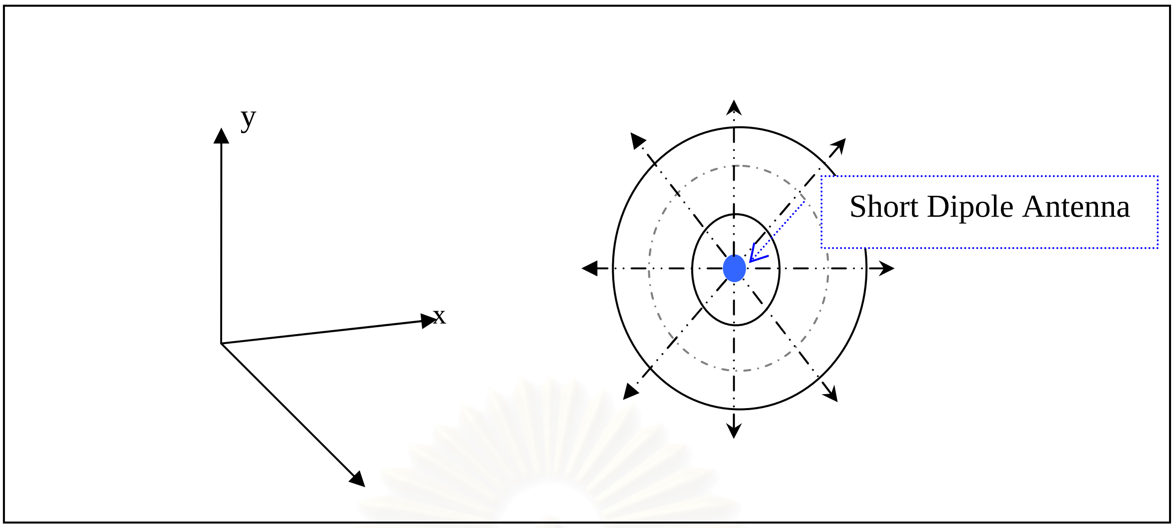
I_0 : ค่ากระแสไฟฟ้าบนสายอากาศ

l : ความยาวของสายอากาศ

$\beta^2 = w^2\mu\varepsilon$

$\mu = 4\pi\times10^{-7}\ henries/meter$

$\varepsilon = 8.8541\times10^{-12}\ (farad/meter)$



ภาพประกอบ 8-24 แสดงถึงทิศทางการแพร่ของคลื่นจาก Short Dipole Antenna

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอ เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งสามารถบรรยายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในจำนวนเดียวกันได้ตามทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น ดังนั้นจึงทำการแปลงเวคเตอร์ของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าให้อยู่ในรูป เลขคลิฟฟอร์ด ซึ่งเป็นไปตามสมการ ดังนี้

$$u = \mu^{1/2} H_0 e^{-j\beta z} e_2 \sigma + i\varepsilon^{1/2} E_0 e^{-j\beta z} e_1 e_4 \qquad (77)$$

กำหนดให้สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในรูปแบบของเวคเตอร์ มีพารามิเตอร์ ดังนี้

$$I_0 = 1.0\ A$$

$$l = 0.04\ meter$$

$$\beta = 1.0$$

$$\omega = \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \rightarrow f = 4.7714 \times 10^7\ Hz$$

- **ผลการคำนวณด้วยสมการอินทิกรัลในกรณีไร้ขอบเขตปิดล้อม**

ในหัวข้อนี้จะแบ่งผลการคำนวณออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนแรก เป็นผลการคำนวณสนามแม่ เหล็กไฟฟ้าที่อยู่บนพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา ซึ่งในส่วนนี้ใช้วิธีการอินทิกรัลเชิงตัวเลขแบบเฉพาะ โดยถูกสร้างขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการเกิด Singular Integration และในส่วนที่สอง เป็นผลการคำนวณสนามแม่ เหล็กไฟฟ้า ณ จุดใดๆ ภายนอกพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา ซึ่งในส่วนนี้ใช้วิธีการอินทิกรัลเชิงตัวเลขด้วยวิธีของ Gauss-Legendre Numerical Integration

- ผลการคำนวณบนพื้นผิวขอบเขต

ตารางที่ 2.5 แสดง ค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.0,0.0,0.5) ซึ่งเป็นจุดบนพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา

ตารางที่ 2.5 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของ เลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x, y, z) = (0.0, 0.0, 0.5)

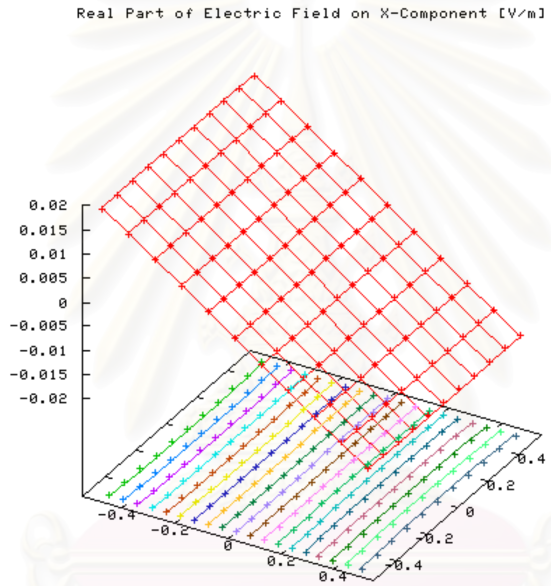
ลำดับของ	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
เอลิเมนต์	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	1.995495E-08	-5.783769E-09
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	-7.958784E-19	8.721495E-19
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	2.179766E-12	-2.235344E-13
7	0.00	0.00	-5.555669E-13	-6.975199E-13
8	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	-4.155675E-09	1.490264E-10
11	0.00	0.00	-4.152881E-09	1.505832E-10
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	6.378859E-05	-2.319890E-06	6.088075E-05	-2.298323E-06
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	7.284301E-19	-4.014142E-19

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 16 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 1.324509 E-07

นอกจากนั้น ได้แสดงค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ ที่มีระยะใกล้กับพื้นที่ขอบเขตมากขึ้น รวมทั้งบริเวณที่ห่างจากพื้นผิวขอบเขตด้วย โดยแบ่งการแสดงค่าของสนามทั้งสองดังต่อไปนี้

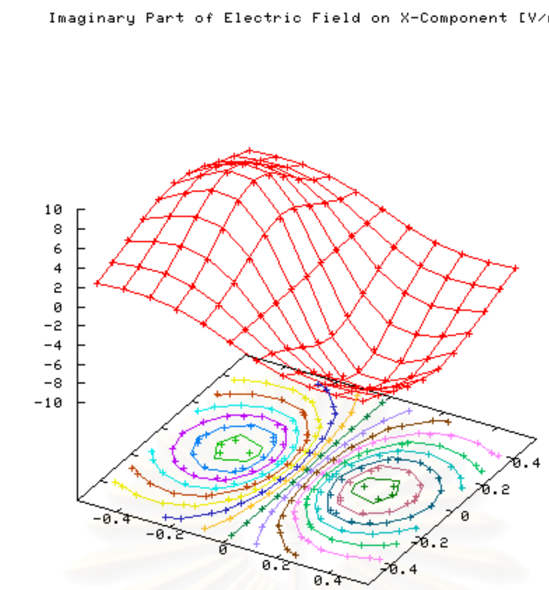
- ค่าของสนามไฟฟ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพตามแนวแกนของ x y และ z ดังในภาพประกอบระหว่าง 8-25 และ 8-30 ตามลำดับ และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้เทียบกับค่าทางทฤษฎีดังแสดงในภาพประกอบ 8-31

- ค่าของสนามแม่เหล็กทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพตามแนวแกนของ x y และ z ดังในภาพประกอบระหว่าง 8-32 และ 8-37 ตามลำดับ และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้เทียบกับค่าทางทฤษฎีดังแสดงในภาพประกอบ 8-38

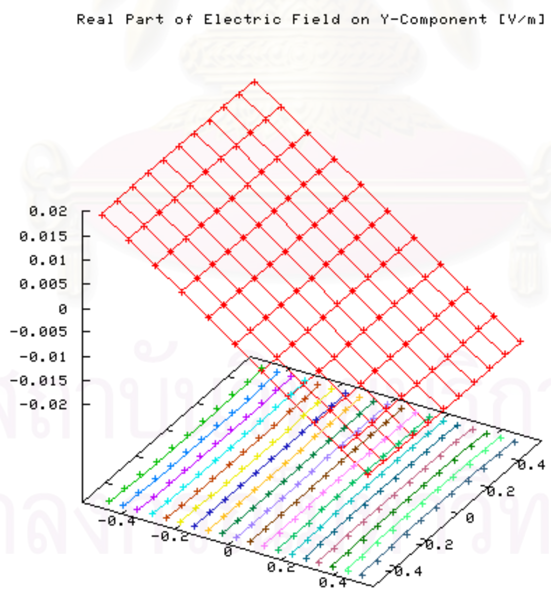


ภาพประกอบ 8-25 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง

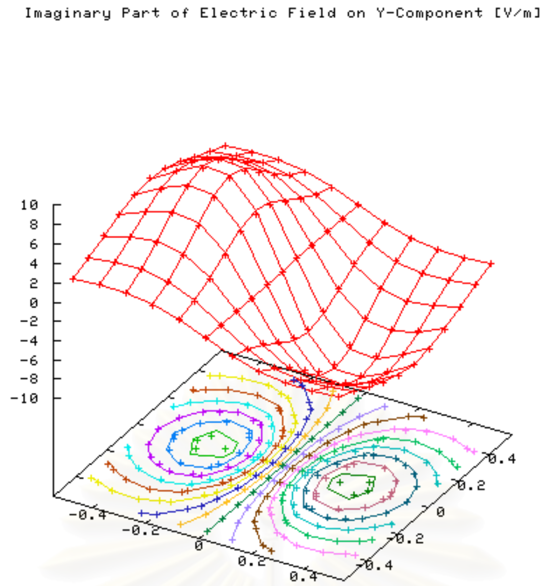
$$x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$$



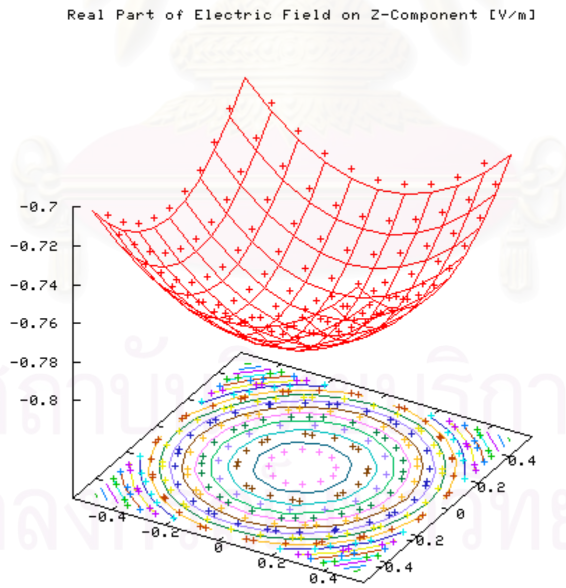
ภาพประกอบ 8-26 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



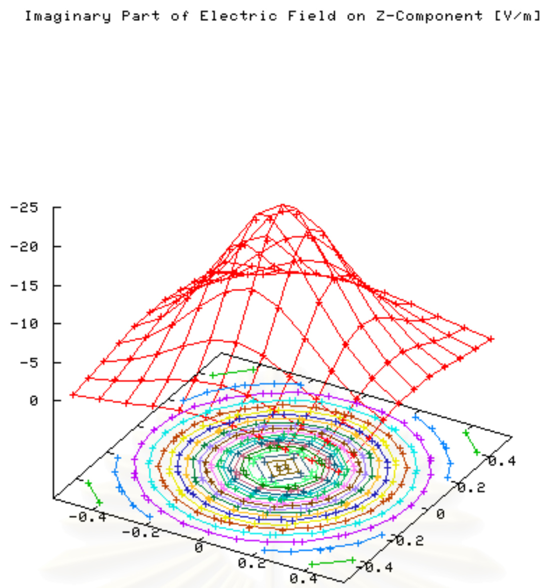
ภาพประกอบ 8-27 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



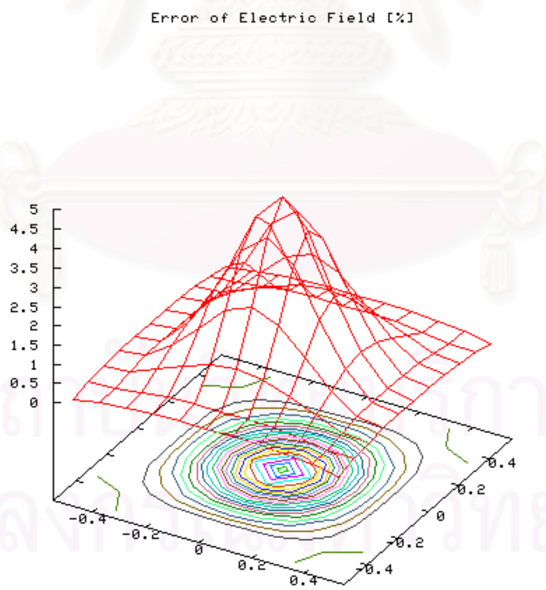
ภาพประกอบ 8-28 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



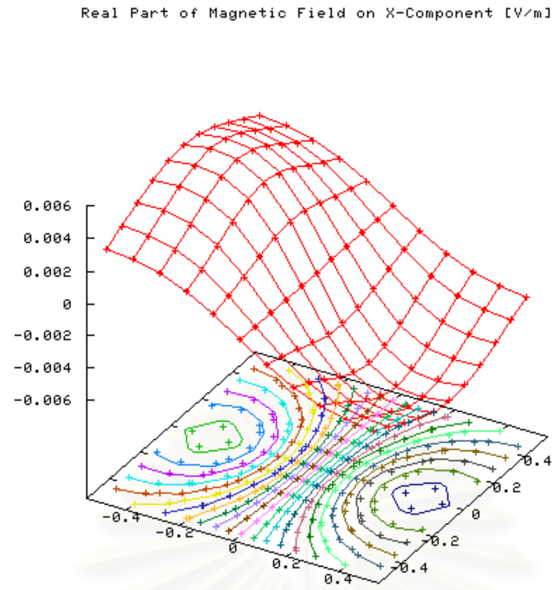
ภาพประกอบ 8-29 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



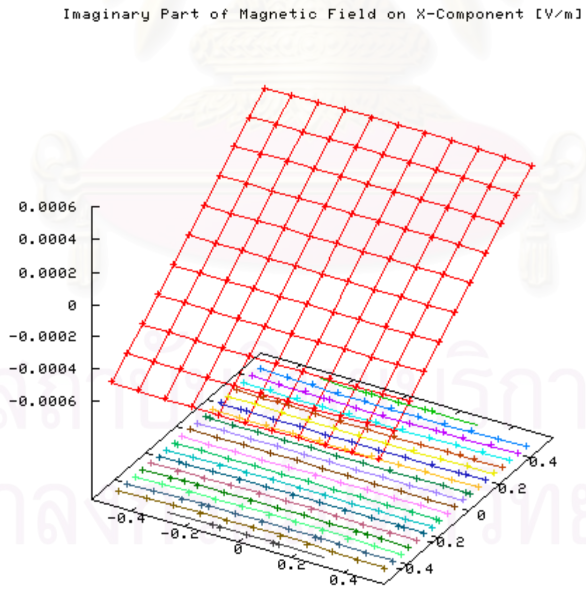
ภาพประกอบ 8-30 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



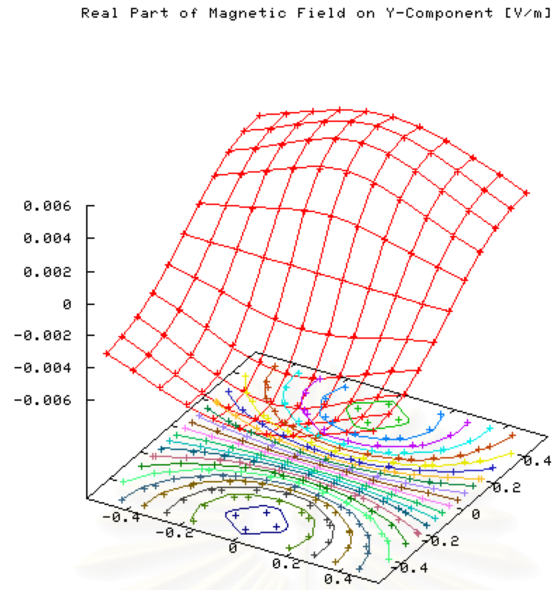
ภาพประกอบ 8-31 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



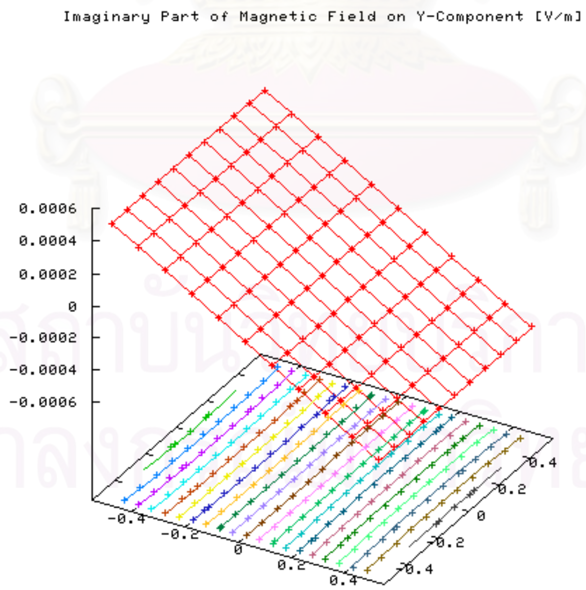
ภาพประกอบ 8-32 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



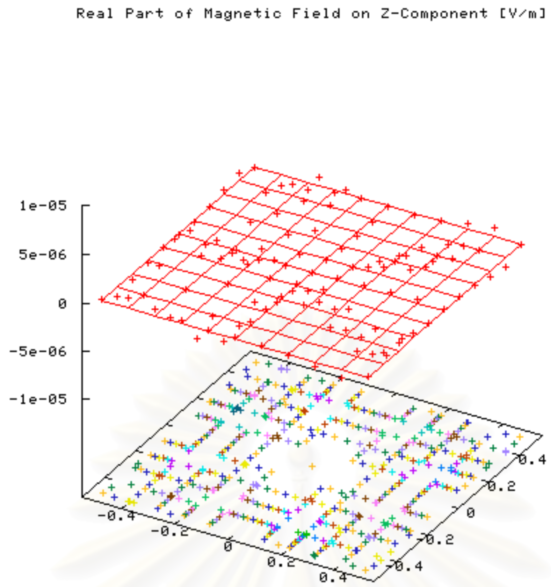
ภาพประกอบ 8-33 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



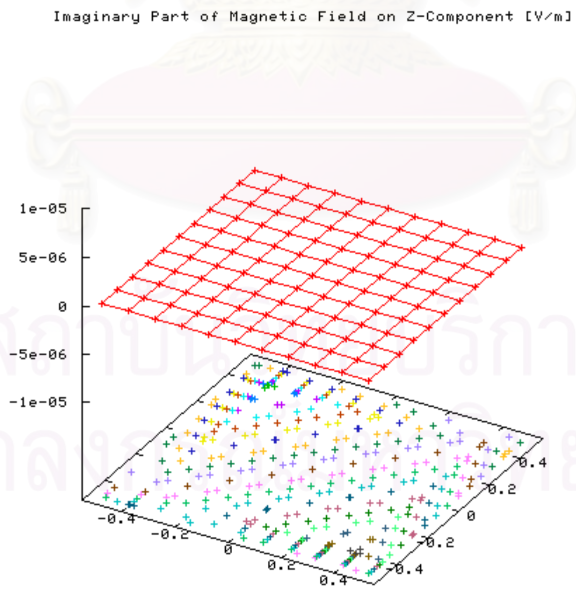
ภาพประกอบ 8-34 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



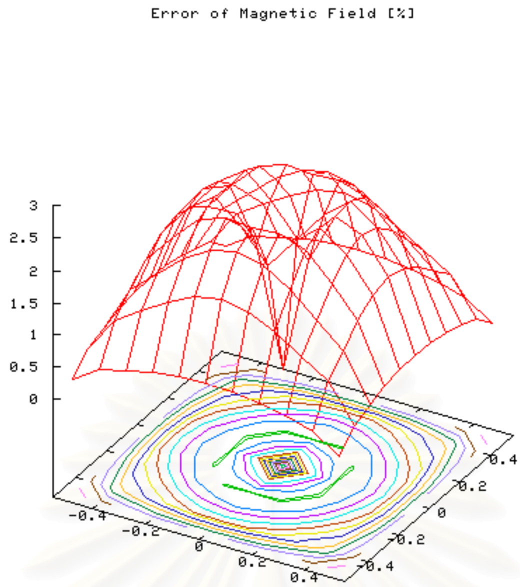
ภาพประกอบ 8-35 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



ภาพประกอบ 8-36 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



ภาพประกอบ 8-37 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$



ภาพประกอบ 8-38 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y \in [-0.5, 0.5], z = 0.5$

- ผลการคำนวณภายนอกพื้นผิวขอบเขต

ตารางที่ 6 แสดงผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละคอมโพแนนท์ ณ จุดพิกัด (0.0, 0.0, 1.0) ซึ่งเป็นจุดภายในพื้นผิวขอบเขตที่พิจารณา

ตารางที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบของเลขคลิฟฟอร์ด ณ จุดพิกัด (x, y, z) = (0.0, 0.0, 1.0)

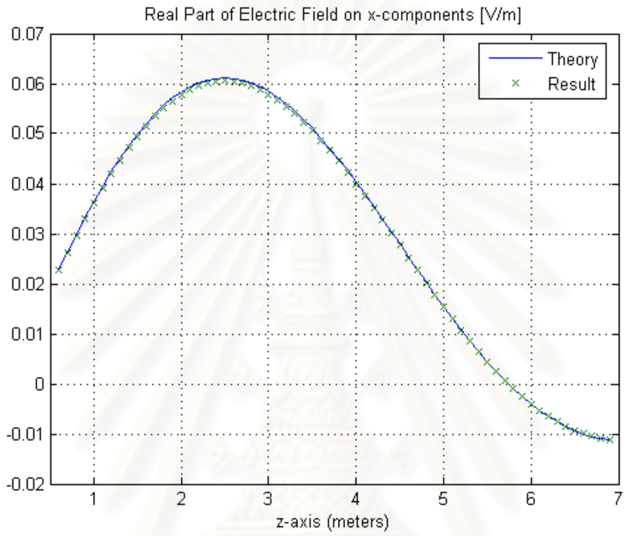
ลำดับของ	ค่าจากทฤษฎี		ค่าที่ได้จากคำนวณ	
เอลิเมนต์	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ	ค่าจริง	ค่าจินตภาพ
1	0.00	0.00	2.560184E-08	-7.430476E-09
2	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	-1.729587E-19	7.087929E-19
5	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	1.717288E-12	-5.796173E-13
7	0.00	0.00	-1.975344E-13	-7.381077E-13
8	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	-1.100098E-12	-9.769422E-13
11	0.00	0.00	1.064373E-12	-1.337422E-13
12	0.00	0.00	0.00	0.00
13	9.861020E-06	-2.149289E-06	1.948187E-05	-4.276311E-06
14	0.00	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	9.816814E-19	-4.773527E-19

*เมื่อใช้จำนวนของส่วนประกอบย่อยเท่ากับ 16 ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า 1.324509 E-07

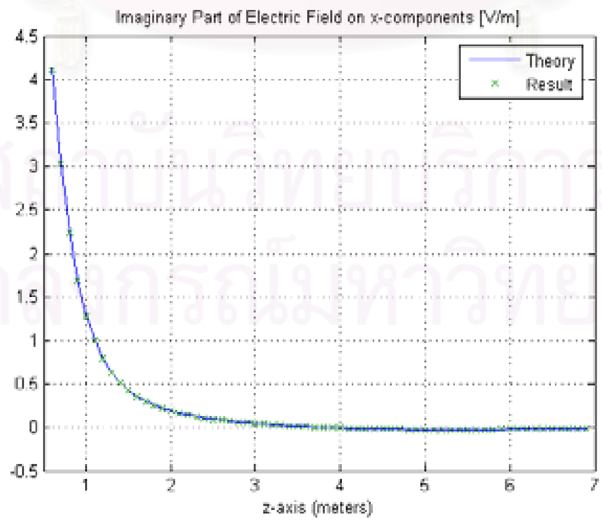
นอกจากนั้น ได้แสดงค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ ที่มีระยะใกล้กับพื้นที่ขอบเขตมากขึ้น รวมทั้งบริเวณที่ห่างจากพื้นผิวขอบเขตด้วย โดยแบ่งการแสดงค่าของสนามทั้งสองดังต่อไปนี้

- ค่าของสนามไฟฟ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพตามแนวแกนของ x y และ z ดังในภาพประกอบระหว่าง 8-39 และ 8-44 ตามลำดับ และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้เทียบกับค่าทางทฤษฎีดังแสดงในภาพประกอบ 8-45

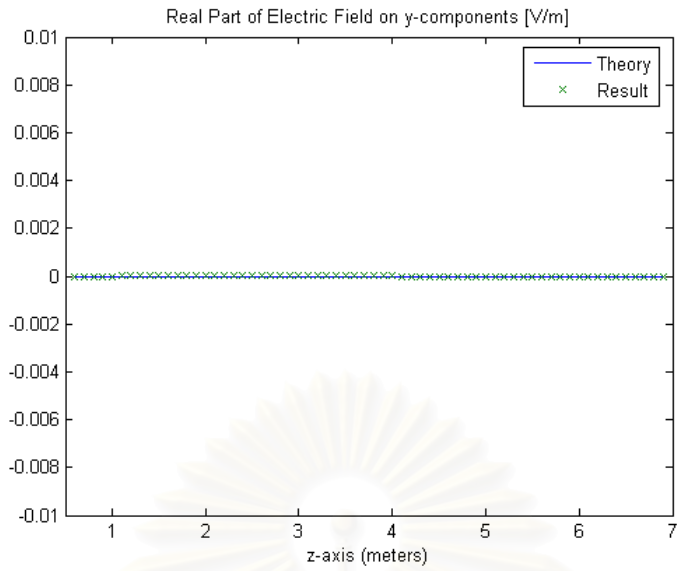
- ค่าของสนามแม่เหล็กทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพตามแนวแกนของ x y และ z ดังในภาพประกอบระหว่าง 8-46 และ 8-51 ตามลำดับ และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้เทียบกับค่าทางทฤษฎีดังแสดงในภาพประกอบ 8-50



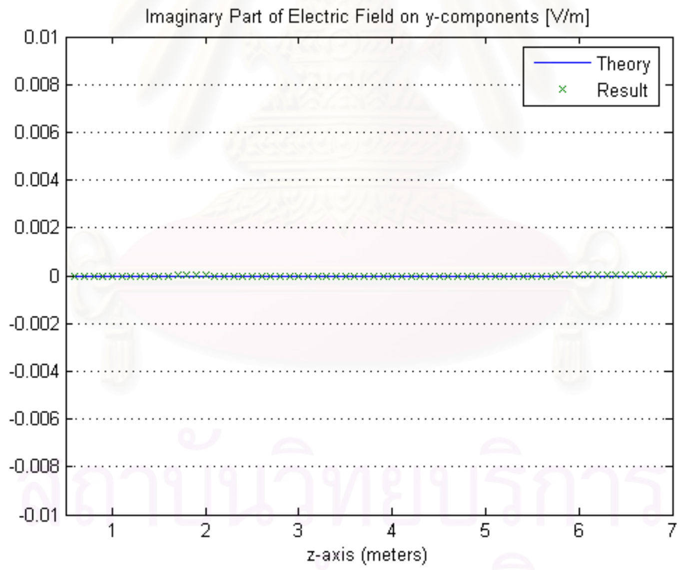
ภาพประกอบ 8-39 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



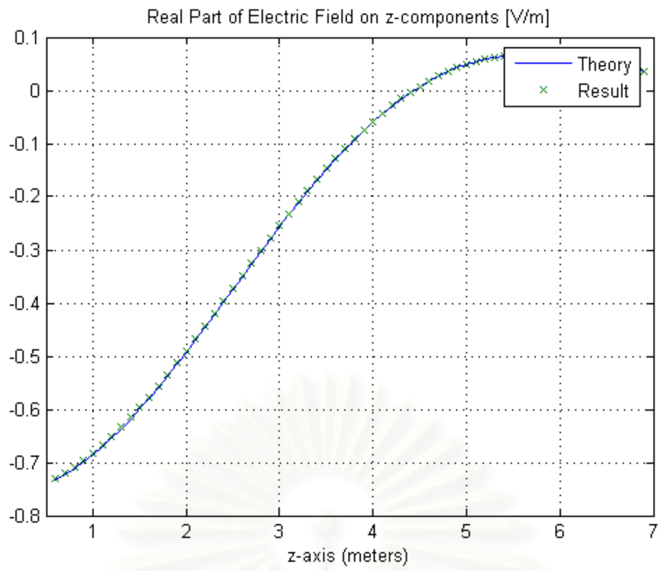
ภาพประกอบ 8-40 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



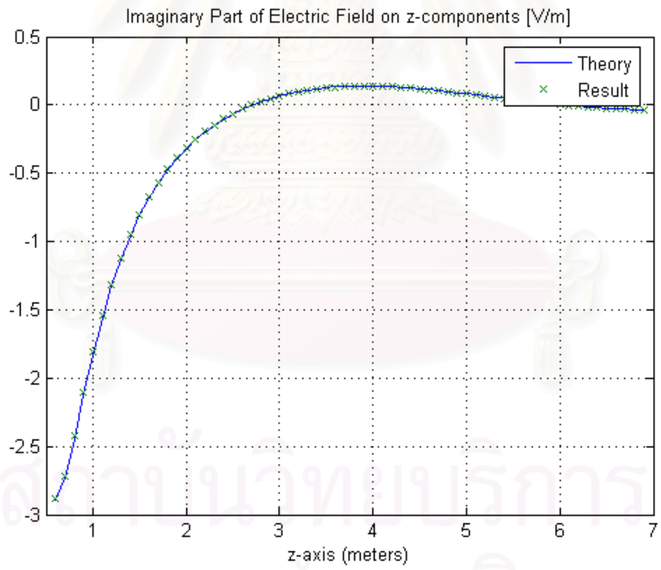
ภาพประกอบ 8-41 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



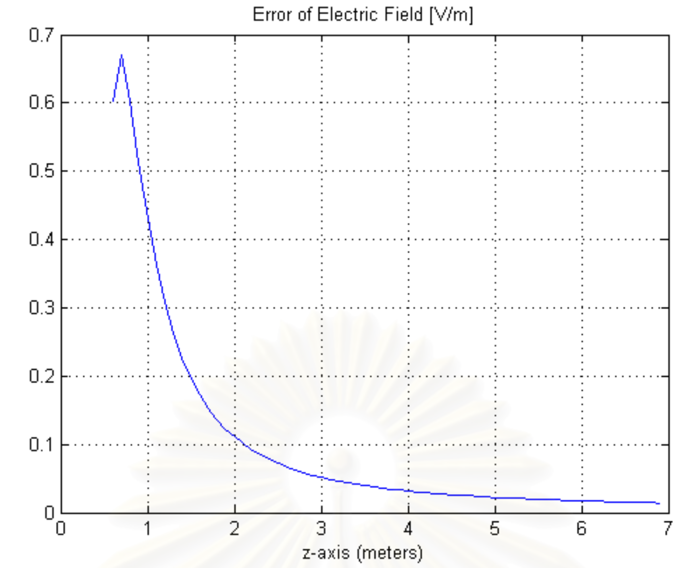
ภาพประกอบ 8-42 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



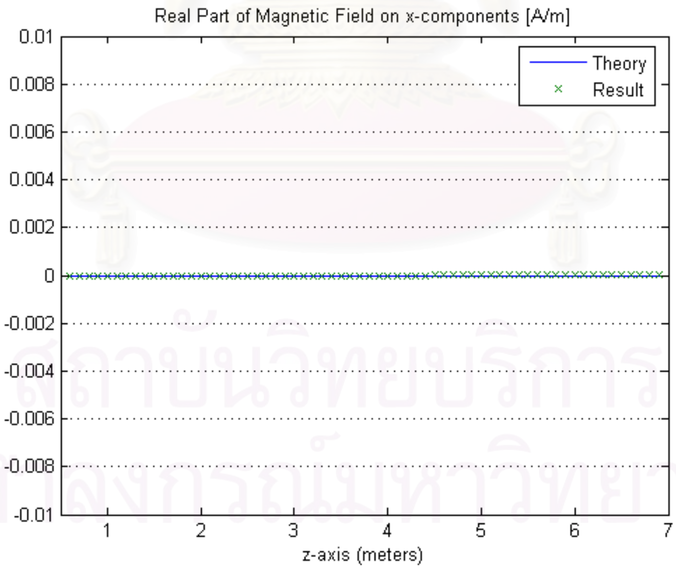
ภาพประกอบ 8-43 แสดงถึง ค่าจริงของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



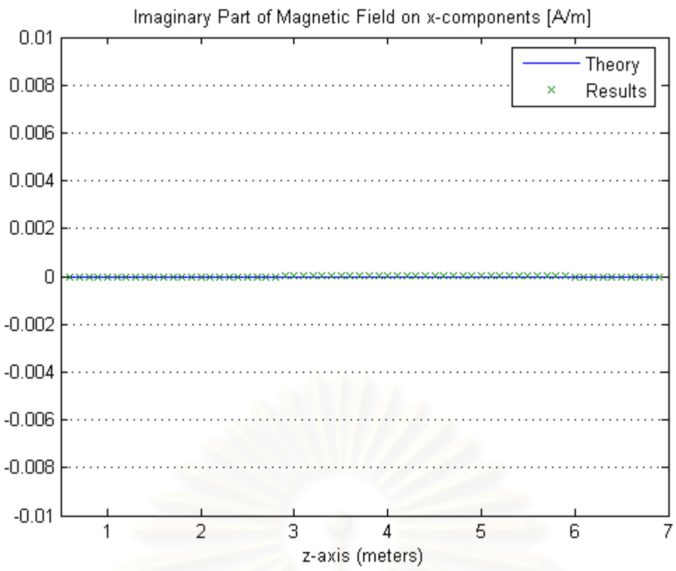
ภาพประกอบ 8-44 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



ภาพประกอบ 8-45 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$

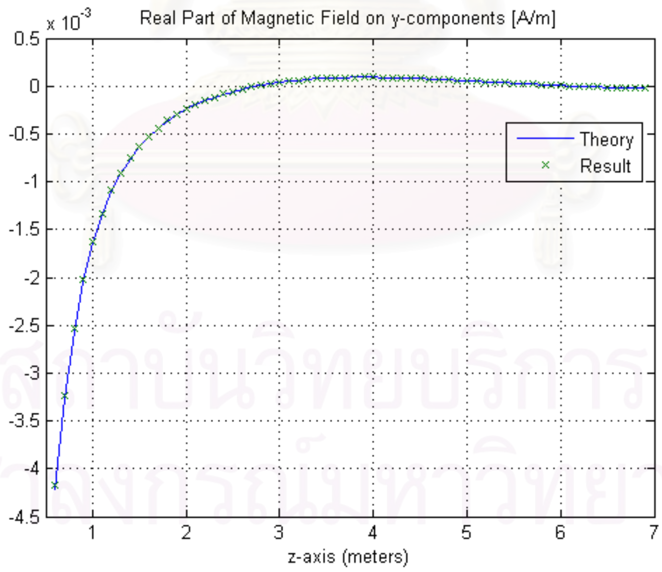


ภาพประกอบ 8-46 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



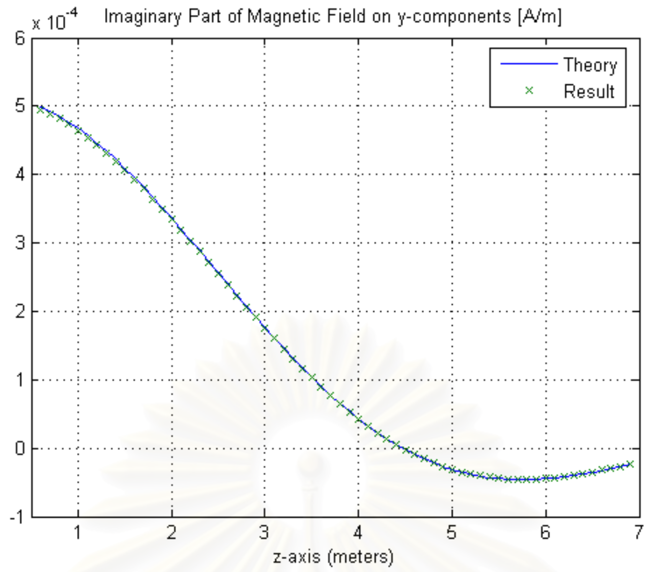
ภาพประกอบ 8-47 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน x โดยพิจารณาจุดพิกัด

ในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



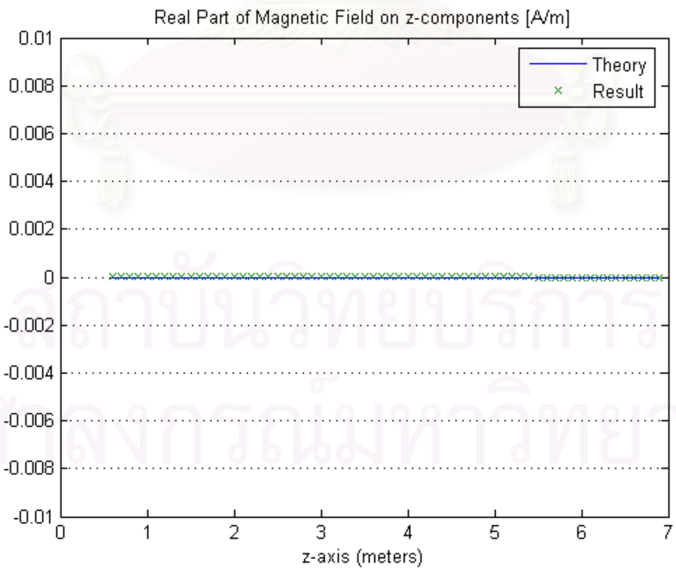
ภาพประกอบ 8-48 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัด

ในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



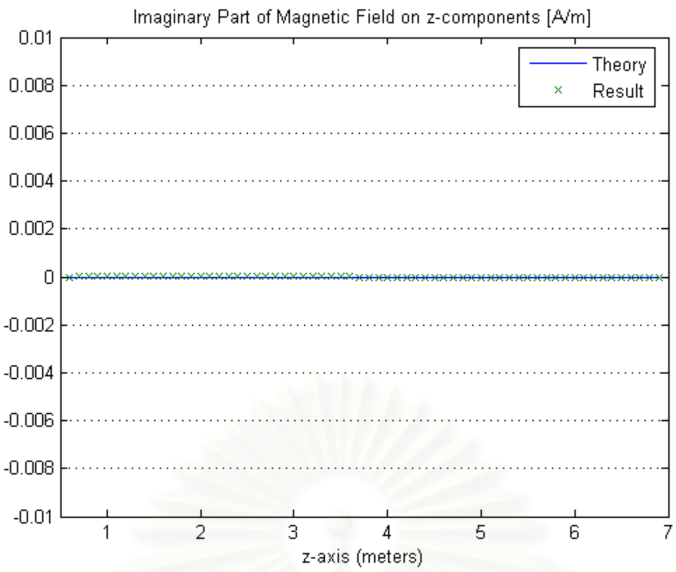
ภาพประกอบ 8-49 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน y โดยพิจารณาจุดพิกัด

ในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$

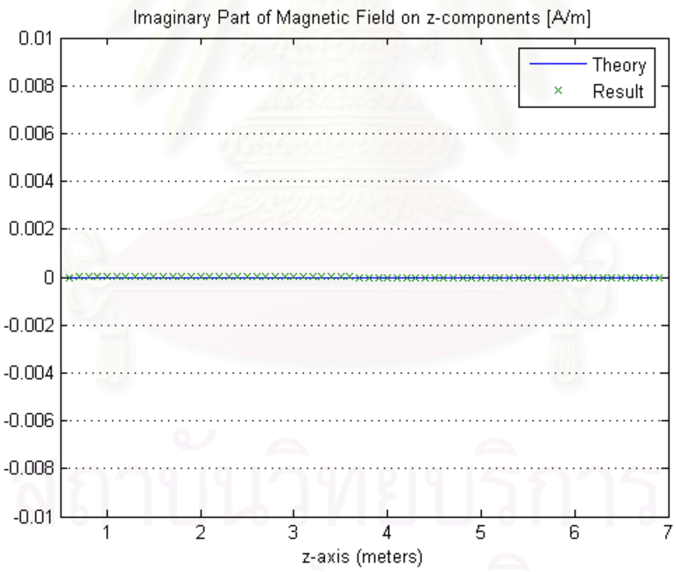


ภาพประกอบ 8-50 แสดงถึง ค่าจริงของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัด

ในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



ภาพประกอบ 8-51 แสดงถึง ค่าจินตภาพของสนามแม่เหล็กตามแนวแกน z โดยพิจารณาจุดพิกัด ในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$



ภาพประกอบ 8-52 แสดงถึง ค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณเทียบกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาจุดพิกัดในช่วง $x = y = 0.0$ และ $z \in [0.6, 7.0]$

2.10 สรุปผลการคำนวณ

ในส่วนของผลการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดพิกัด ที่อยู่ภายในพื้นที่ที่พิจารณานั้น สามารถคำนวณได้อย่างถูกต้อง ซึ่งเมื่อพิจารณาตารางที่ 1 ถึง 5 ซึ่งแสดงแต่ละส่วนของจำนวน เลขคลิฟฟอร์ด จะเห็นได้ เห็นได้ว่า ส่วนประกอบที่บรรจุสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าสามารถคำนวณได้อย่างถูกต้อง และนอกจากนั้น ในส่วนประกอบอื่นๆ นั้น มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งเป็นไปตามค่าทางทฤษฎี ทั้งนี้ภาพประกอบ 8-3 ถึง 8-12 แสดงให้เห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า ณ จุดพิกัดที่อยู่ภายในพื้นที่ที่พิจารณา ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้น เป็นไปตามทฤษฎีของการอินทิกรัลเชิงตัวเลข คือ เมื่อทำการเพิ่มจำนวนส่วนประกอบย่อยของการอินทิกรัล จะทำให้ผลการคำนวณมีค่าถูกต้องเพิ่มมากขึ้น

ในส่วนของการคำนวณส่วนที่สอง เป็นการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดพิกัด ที่อยู่บนพื้นผิวขอบเขต ผลจากการคำนวณให้ค่าถูกต้องใกล้เคียงกับค่าทางทฤษฎี โดยพิจารณาได้จากผลการคำนวณในตารางที่ 6 ถึง 10 ซึ่งแสดงแต่ละส่วนของจำนวน เลขคลิฟฟอร์ด มีลักษณะเดียวกันกับผลการคำนวณในส่วนที่หนึ่ง ในภาพประกอบ 8-13 ถึง 8-22 แสดงให้เห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนของสนามแม่เหล็กและสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ จุดพิกัดที่อยู่บนพื้นที่ที่พิจารณา ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้น เป็นไปตามทฤษฎีของการอินทิกรัลเชิงตัวเลขเช่นเดียวกัน และเมื่อคำนวณจุดพิกัดที่มีระยะห่างจากพื้นผิวขอบเขตน้อยลงจะมีค่าความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น

2.11 สรุปงานวิจัย

สมการแมกซ์แวล เป็นสมการที่สามารถบรรยายความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งผลเฉลยของสมการนี้ จึงเป็นประโยชน์ในงานทางด้านวิศวกรรมอย่างมาก อย่างไรก็ตาม การหาผลเฉลยของสมการแมกซ์แวลโดยตรงยังเป็นเรื่องที่ยากมาก เนื่องจากสมการแมกซ์แวลเป็นสมการอนุพันธ์อับดับที่หนึ่ง ปัจจุบันนี้การแก้ผลเฉลยของสมการดังกล่าว จึงจำเป็นต้องประยุกต์เป็นสมการรูปแบบอื่น ตัวอย่างเช่น สมการแฮมป์โฮท์ต สมการศักย์ เป็นต้น ซึ่งล้วนแล้วล้วนเป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ทำให้ผลเฉลยของสมการไม่สามารถคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในเวลาเดียวกันได้ งาน วิจัยนี้อาจกล่าวได้ว่า เป็นก้าวแรกของการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สอดคล้องกับสมการของแมกซ์แวลโดยแท้จริง เนื่องจากสามารถคำนวณค่าสนามทั้งสองในเวลาเดียวกันได้

อย่างไรก็ตาม ในอนาคตงานวิจัยชิ้นนี้ สามารถประยุกต์การคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในงานที่มีซับซ้อนมากขึ้น เพื่อใช้งานในทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า

2.12 การเผยแพร่งานวิจัย

Ajalawit Chantaveerod, Andrew D. Seagar, and Tuptim Angkaew, “Calculation of Electromagnetic Field with Integral Equation Based on Clifford Algebra”, PIERS Proceedings, 62 - 71, August 27-30, Prague, Czech Republic, 2007