

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 แผ่นพื้นรับแรงภายนอก

การวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นรับแรงภายนอก ความหนาของแผ่นพื้นเป็นปัจจัยที่มีความสำคัญในการเลือกทฤษฎีที่จะนำมาใช้เป็นวิธีหาคำตอบ โดยในทฤษฎีนั้นๆ มีสมมติฐานที่จะช่วยลดการคำนวณที่ซับซ้อน และทำให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำมากที่สุด เมื่อพิจารณาถึงลักษณะการเสียรูปของแผ่น ความหนาของแผ่นพื้นมีผลต่อการโก่งตัวของแผ่นพื้นคือ เมื่อความหนามีค่าน้อยมาก การโก่งตัวที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเครียดเฉือนจะมีค่าน้อย แต่เมื่อความหนาของแผ่นบางมีค่ามาก ค่าความเครียดเฉือนจะมีผลมากต่อการโก่งตัวที่เกิดขึ้น ทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้วิเคราะห์แผ่นพื้นมี 2 ทฤษฎี คือ

2.1.1 ทฤษฎีแผ่นพื้นของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff Plate Theory)^{(23),(31),(32)}

เป็นทฤษฎีเริ่มต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดกว้างยาวของแผ่นพื้น ซึ่งมีสมมติฐานดังนี้

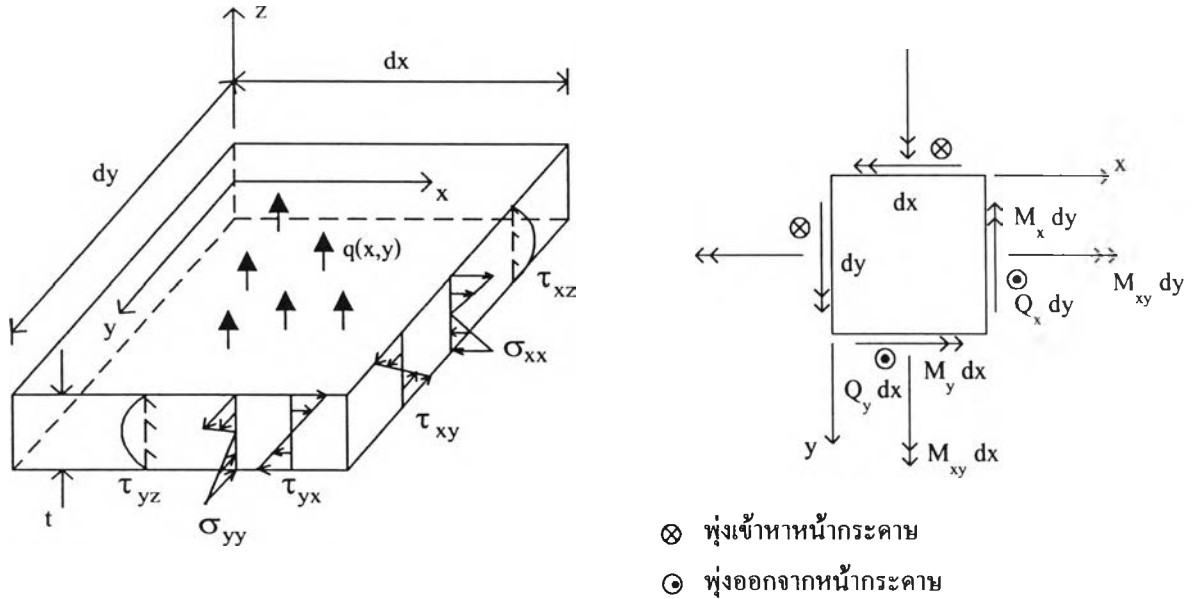
1. วัสดุมีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น เป็นเนื้อเดียวกันตลอดแผ่น และมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง
2. การโก่งตัวที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนาของแผ่นพื้น และระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้น (middle surface) ยังคงเป็นระนาบหลังเกิดการคด ดังนั้นความเครียดในทุกทิศทางที่ระนาบกึ่งกลางเท่ากับศูนย์
3. ความเค้นในแนวตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเค้นในทิศทางอื่น
4. จุดในตำแหน่งใดๆ เมื่อลากเส้นตรงจากจุดนั้นมาตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นบาง เส้นตรงเส้นนั้นยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้นหลังเกิดการเคลื่อนที่ ทำให้การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเครียดเฉือนมีค่าน้อยมากและสามารถตัดทิ้งได้

2.1.2 ทฤษฎีแผ่นพื้นของมินด์ลิน (Mindlin Plate Theory)

เป็นทฤษฎีที่พัฒนาต่อมาจากทฤษฎีแรก โดยพิจารณาผลของการกระจัดที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเครียดเฉือนแนวตั้ง ซึ่งใช้กับแผ่นพื้นที่มีความหนามาก หรือพฤติกรรมในแผ่นพื้นที่ได้รับแรงที่มีน้ำหนักกระทำเฉพาะที่เป็นต้น มีสมมติฐานเหมือนกับทฤษฎีแรกยกเว้น ข้อ 4 ที่ต้องเปลี่ยนเป็น “เส้นตรงซึ่งลากตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นบาง ยังคงเป็นเส้นตรง แต่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางหลังเกิดการคด”

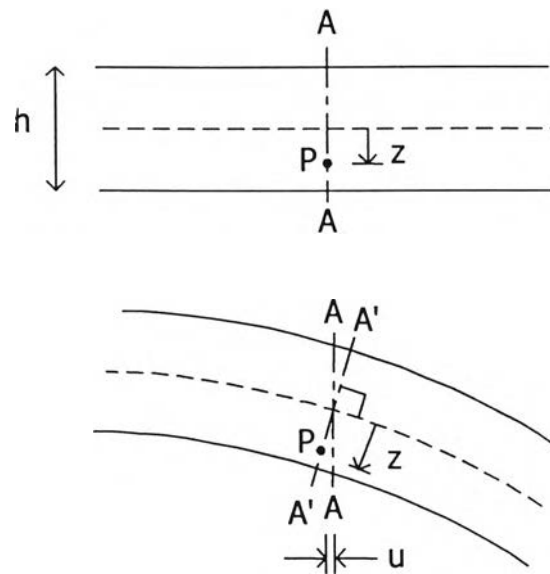
2.2 การวิเคราะห์การค้ำของแผ่นพื้นโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบการกระจัดสอดคล้อง

2.2.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับทฤษฎีแผ่นบางของเคอร์ชอฟฟ์^{(23),(24)}



รูปที่ 2.2.1 ส่วนประกอบของแรงภายในเมื่อแผ่นบางรับแรง⁽²³⁾

จากทฤษฎีแผ่นบางของเคอร์ชอฟฟ์ เมื่อแผ่นบางความหนาเท่ากับ t รับน้ำหนักบรรทุกจากแรงภายนอก พิจารณาแรงภายในที่เกิดขึ้น โดยดูชิ้นส่วนเล็กๆ ของแผ่นนั้น ประกอบด้วยแรงภายในทิศทางต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.2.1 โดยที่ σ_{xx} และ σ_{yy} คือความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นในทิศทาง x และ y ตามลำดับ มีค่าแปรผันเชิงเส้นตามความหนา z และทำให้เกิดเป็นโมเมนต์ M_x และ M_y ความเค้น τ_{xy} และ τ_{yx} คือความเค้นเฉือน แปรผันเชิงเส้นตามความหนา z และทำให้เกิดเป็นโมเมนต์บิด M_{xy} และ M_{yx} ส่วนความเค้น τ_{xz} และ τ_{yz} คือความเค้นเฉือนในแนวค้ำ (มีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์) แปรผันแบบกำลังสองกับระยะ z มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ขอบบนและขอบล่างของแผ่น และมีค่ามากที่สุดที่ระนาบกึ่งกลางแผ่น ($z=0$) ก่อให้เกิดแรงเฉือน Q_x และ Q_y สำหรับ σ_{zz} มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเค้นในทิศทางอื่นจึงตัดทิ้งได้ตามสมมติฐาน ส่วนลักษณะการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นตามสมมติฐานที่กล่าวมา จุดในตำแหน่งใดๆ เมื่อลากเส้นตรงจากจุดนั้นมาตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางก่อนการเสียรูป เส้นตรงเส้นนั้นยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางหลังเกิดการเสียรูป ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อความเครียดเฉือนแนวค้ำมีค่าน้อยมากสามารถตัดทิ้งได้



รูปที่ 2.2.2 การเคลื่อนตัวของจุดใดๆบนแผ่นบางตามสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์

จากรูปที่ 2.2.2 จุด P เป็นจุดใดๆอยู่ห่างจากระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้นเป็นระยะ Z ลากเส้นตรง A-A ผ่านจุด P และตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางก่อนการเสียรูป เมื่อเกิดการเสียรูปเส้นตรง A-A เคลื่อนที่ไปยัง A'-A' ซึ่งยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางอยู่ ดังนั้นการเคลื่อนตัวของจุดใดๆ บนระนาบ xy ที่ระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางจะอยู่ในทิศของแกน z เท่านั้น ส่วนการเคลื่อนตัวของจุดต่างๆ ที่ไม่อยู่ในระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางอยู่ในรูปของผลคูณของมุมที่หมุนไปจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางก่อนการเสียรูปในทิศทาง x และ y คือ $\frac{\partial w}{\partial x}$ และ $\frac{\partial w}{\partial y}$ กับระยะห่างจากจุดนั้นๆ ถึงระนาบกึ่งกลาง ดังสมการที่ (2.2.1)

$$\begin{aligned}
 u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \approx 0 \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \approx 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

โดยที่ u = การกระจัดของจุดใดๆในทิศทาง x
 v = การกระจัดของจุดใดๆในทิศทาง y
 w = การกระจัดของจุดใดๆในทิศทาง z
 z = ระยะจากจุดใดๆ ถึงระนาบที่กลาง ตามแนวแกน z
 ϵ_x และ ϵ_y = ความเครียดในทิศทาง x และ y ตามลำดับ
 γ_{xy} และ γ_{yx} = ความเครียดเฉือนบนระนาบ x และ y ตามลำดับ
 γ_{xz} และ γ_{yz} = ความเครียดเฉือนแนวตั้งบนระนาบ x และ y ตามลำดับ

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง

จากกฎของฮุก กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดคือ เมื่อมีแรงดึงกระทำในแนวแกน x จะเกิดความเครียดในแนวแกน x เท่ากับ $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ รวมทั้งเกิดความเครียดทางข้าง $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\sigma_x \nu}{E}$ (เครื่องหมายลบแสดงว่าเกิดการหดตัว) โดยที่ ϵ_y และ ϵ_z คือความเครียดในแนวแกน y และ z ตามลำดับ E คือ โมดูลัสของความยืดหยุ่น และ ν คือ อัตราส่วนของปัวส์ซอง(Poisson's ratio) ส่วนในแนวแกน y และ z ความสัมพันธ์จะมีลักษณะเดียวกัน เมื่อชิ้นส่วนรับแรงภายนอกและคิดความเครียดทั้งสามแกน สามารถนำความเครียดทั้งสามแกนมารวมกันได้และเขียนเป็นสมการดังสมการที่ (2.2.2)

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

ตามสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ ความเค้นในแนวแกน z σ_z และความเครียดเฉือน γ_{yz} และ γ_{xz} มีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดจึงเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\tag{2.2.3}$$

$$\text{โดยที่ } [C] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \text{ คือ เมตริกซ์สอดคล้อง (compliance matrix)}$$

ความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนทำให้เกิดค่าโมเมนต์คัตโดยสามารถหาค่าได้จากสมการที่ (2.2.4)

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.2.4)$$

โดยที่จากสมการที่ (2.2.4) t คือความหนาของแผ่น z คือระยะจากจุดใดๆ ถึงระนาบกึ่งกลางตามแนวแกน z ส่วน σ_{xx} และ σ_{yy} คือความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x และ y ตามลำดับทำให้เกิดโมเมนต์ M_x และ M_y ส่วน τ_{xy} คือความเค้นเฉือนทำให้เกิดโมเมนต์บิด M_{xy}

ดังนั้นสมการของความเค้นที่ระยะ z ใดๆ คือ

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (2.2.5)$$

สมการที่ (2.2.5) เป็นสมการความสัมพันธ์ของความเค้นกับโมเมนต์ และสมการที่ (2.2.1) เป็นสมการความสัมพันธ์ของความเครียดและความโค้ง นำมาแทนลงในสมการที่ (2.2.3) เพื่อสร้างเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้ง และสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ (2.2.6)

$$\{M\} = -[D_K] \{K\}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$\text{โดยที่ } [D_K] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \text{ คือ เมตริกซ์เฟล็กชิบิลิตีของเคอร์ชอฟฟ์}$$

และ
$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$
 คือเวกเตอร์ความโค้ง(curvature matrix)

การสร้างเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน

จากการที่ไม่พิจารณาการกระจัดที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเครียดเฉือน ทำให้พลังงานความเครียดจะเกิดจาก ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} เท่านั้น ซึ่งความเครียดทั้งสามตัวนี้สามารถคำนวณได้จาก การเคลื่อนที่ในแนวตั้ง w ดังแสดงไว้ในสมการที่ (2.2.1) จากสมการพลังงานความเครียดคือ $U = \int_{V/2} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dV$ โดยที่

$$\{\epsilon\}^T = \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \text{ และ } [C] \text{ คือเมทริกซ์สอดคล้องแสดงไว้ในสมการที่ (2.2.3)}$$

V คือปริมาตรของวัตถุ และเมื่อเขียนสมการพลังงานความเครียดอยู่ในรูปของความโค้งโดยอินทิเกรตตลอดความหนาจาก $-v/2$ ถึง $v/2$ สมการจะเปลี่ยนเป็น

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{K\}^T [D_K] \{K\} dA \quad (2.2.7)$$

โดยที่
$$\{K\}^T = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

A คือ พื้นที่ของแผ่นพื้น

$$[D_K] \text{ แสดงไว้ในสมการที่ (2.2.6)}$$

และเวกเตอร์ของการกระจัดในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะอยู่ในรูปของผลคูณระหว่างฟังก์ชันฐานกับระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อคือ

$$\{u\} = [N] \{d\} \quad (2.2.8)$$

โดยที่ $\{u\}$ คือเวกเตอร์ของการกระจัด $\{w \quad w_x \quad w_y\}^T$ เมตริกซ์ $[N]$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐานและ $\{d\}$ เป็นเวกเตอร์ของระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อ จากนั้นสามารถหาเมตริกซ์ความโค้งในรูปของระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อได้จากการหาอนุพันธ์ของ $\{u\}$

$$\{K\} = [D] \{u\} \quad (2.2.9)$$

แทนค่าสมการที่ (2.2.8) ลงในสมการที่ (2.2.9)

$$\{K\} = \{D\} [N] \{d\}$$

$$\{K\} = [B] \{d\}$$

$$\text{โดยที่ } \{D\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \text{คือเวกเตอร์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์}$$

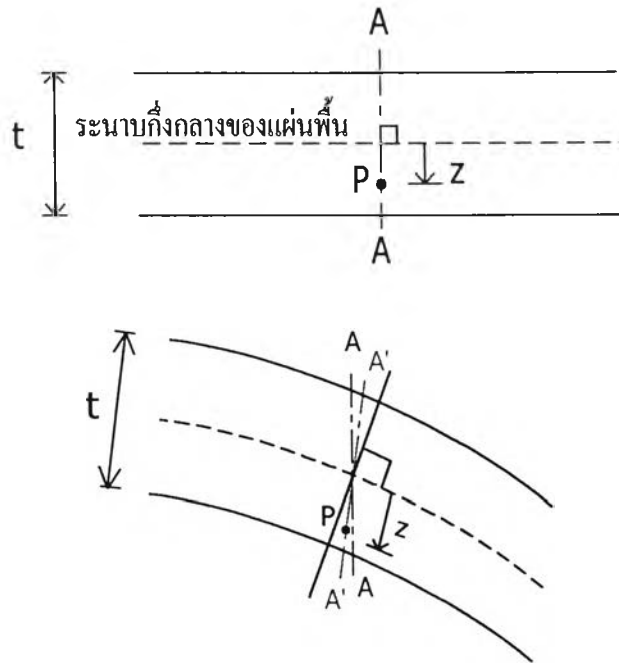
$[B] = \{D\}[N]$ คือ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด
(strain-displacement matrix)

แล้วแทนค่าลงในสมการที่ (2.2.7) จะได้สมการพลังงานความเครียดในรูปของระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อและเมตริกซ์สติเฟเนส ดังนี้

$$\text{พลังงานความเครียด } U = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_A [B]^T [D_K] [B] dA \{d\}$$

$$\text{เมตริกซ์สติเฟเนส } [K] = \int_A [B]^T [D_K] [B] dA \quad (2.2.10)$$

2.2.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับทฤษฎีแผ่นของมินคัลลิน⁽²⁴⁾



รูปที่ 2.2.3 การเคลื่อนตัวของจุดใดๆบนแผ่นบางตามสมมติฐานของมินคัลลิน

สำหรับในกรณีที่ผลของการกระจัดเนื่องจากความเครียดเฉือนแนวตั้งมีค่ามาก เช่นแผ่นพื้นรับแรงที่มีความหนา คำตอบที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของเคอร์ซอฟฟ์จะให้คำตอบที่มีความถูกต้องน้อยลงเนื่องจากไม่คิดผลเนื่องจากความเครียดเฉือนแนวตั้ง ดังนั้นในทฤษฎีของมินคัลลิน จึงมีการปรับสมมติฐานเดิมในข้อที่ 4 เป็น “จุดในตำแหน่งใดๆ เมื่อลากเส้นตรงจากจุดนั้นมาตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้น เส้นตรงเส้นนั้นยังคงเป็นเส้นตรง แต่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้นหลังเกิดการเคลื่อนที่ ” ดังแสดงในรูปที่ 2.2.3 เส้นตรง A'-A' ยังคงเป็นเส้นตรงแต่ไม่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้น

การกระจัดในลักษณะดังกล่าวทำให้มุมที่หมุนไปจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางก่อนการเสียรูปในทิศทาง x และ y มีค่าเท่ากับ θ_x และ θ_y ซึ่งไม่เท่ากับ $\frac{\partial w}{\partial x}$ และ $\frac{\partial w}{\partial y}$ ดังนั้นการเคลื่อนที่ของจุดใดๆ ที่ไม่อยู่บนระนาบกึ่งกลางของแผ่นพื้นจากสมการที่ (2.2.1) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned}
 u &= -z \theta_x \\
 v &= -z \theta_y \\
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง

เมื่อเพิ่มการพิจารณาผลของความเครียดเฉือนแนวคิ่ง ดังนั้นจะต้องเพิ่มพจน์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือนในแนวคิ่งคือ $\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}$ และ $\tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz}$ เข้าไปในสมการที่ (2.2.3) ด้วย ในที่นี้เนื่องจากลักษณะของแผ่นพื้นที่พิจารณามีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทางดังนั้นค่า G_{xz} จึงเท่ากับ G_{yz} และมีค่าเท่ากับ G โดยที่ G คือค่าโมดูลัสเฉือนมีค่าเท่ากับ $\frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & \frac{(1-\nu)}{2} & & \\ & & \frac{(1-\nu)}{2} & & \\ & & & \frac{(1-\nu)}{2} & \\ & & & & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{2.2.12}$$

จากนั้นสามารถนำไปคำนวณแรงเฉือนได้จากสมการ

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \tag{2.2.13}$$

โดยที่ Q_x และ Q_y คือแรงเฉือนที่ระนาบ x และ y ตามลำดับ ความเค้นเฉือน τ_{xz} และ τ_{yz} คือความเค้น

เดือนบนระนาบ x และ y ตามลำดับ สำหรับการวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีความหนาเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจะสมมติให้การกระจายค่าความเค้นเดือนทั้งสองกระจายเท่าๆ กันเป็นรูปสี่เหลี่ยมตลอดความหนาโดยใช้ตัวประกอบรูปร่าง(form factor) เท่ากับ 5/6 ⁽²³⁾ สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้งในสมการที่ (2.2.6) จึงเปลี่ยนเป็น

$$\{M\} = -[D_M] \{K\}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D & \nu D \\ \nu D & D \\ & & \frac{(1-\nu)D}{2} \\ & & & \frac{5}{6}Gt \\ & & & & \frac{5}{6}Gt \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.2.14}$$

โดยที่ $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ค่าความแข็งของการคด (flexural rigidity)

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ค่าโมดูลัสเฉือน (shear modulus)

$$\{D_M\} = \begin{bmatrix} D & \nu D \\ \nu D & D \\ & & \frac{(1-\nu)D}{2} \\ & & & \frac{5}{6}Gt \\ & & & & \frac{5}{6}Gt \end{bmatrix}$$

คือเมตริกซ์เฟลกซิบิลิตีของมินคัลลิน

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \text{ คือเวกเตอร์ความโค้ง}$$

การสร้างเมทริกซ์สติฟเนสของจิ้นส่วน

ในทฤษฎีแผ่นของมินต์ลิน เวกเตอร์ของการกระจัด $\{u\}$ ประกอบด้วยตัวแปรสามตัวคือ การเคลื่อนที่ในแนวโค้ง w และ มุมที่หมุนไปจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางก่อนการเสียรูปในทิศทาง x และ y หรือ θ_x และ θ_y โดยตัวแปรทั้งสามเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นเวกเตอร์ตัวแปรการกระจัดสามารถเขียนได้เป็น

$$\{u\} = [N] \{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i \\ N_i \\ N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.2.15)$$

โดยที่ N_i เป็นฟังก์ชันสัมฐานของตัวแปร และ n เป็นจำนวนจุดต่อในหนึ่งจิ้นส่วน

จากเวกเตอร์การกระจัด นำไปหาเวกเตอร์ของความโค้ง $\{K\}$ และเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด $[B]$ ได้ดังสมการที่ (2.2.16) และ สมการที่ (2.2.18)

$$\{K\} = [D] \{u\} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

เมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ คือ

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

นำสมการที่ (2.2.17) ไปหาเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดจาก

$$[B] = [D] [N] \quad (2.2.18)$$

จากสมการที่ (2.2.18) แทนค่า $[B]$ ลงในสมการ (2.2.16) และสามารถเขียนเวกเตอร์ความโค้งในรูปของเวกเตอร์ของระดับชั้นความเครียดที่จุดต่อ $\{d\}$ ได้โดย $\{K\} = [D]\{d\}$ และจากสมการพลังงานความเครียดของชิ้นส่วนที่มีพื้นที่เท่ากับ A คือ $U = \int_A \frac{1}{2} \{K\}^T [D_m] \{K\} dA$ แทนค่า $\{K\}$ ลงในสมการพลังงานความเครียดดังกล่าวจะได้เมตริกซ์สติเฟนส์คือ

$$K = \int_A [B]^T [D_m] [B] dA \quad (2.2.19)$$

จากเมตริกซ์สติเฟเนสที่สร้างขึ้นจากทฤษฎีแผ่นของมินด์ลินในสมการที่ (2.2.19) เราสามารถแยกเมตริกซ์สติเฟเนสของชิ้นส่วนออกเป็นสองส่วนคือส่วนของแรงค้ำและส่วนของแรงเฉือน $K = K_b + K_s$ โดยกำหนดให้ $[B_b]$ เป็นเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดเนื่องจากการค้ำ และส่วน $[B_s]$ คือเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดเนื่องจากแรงเฉือน

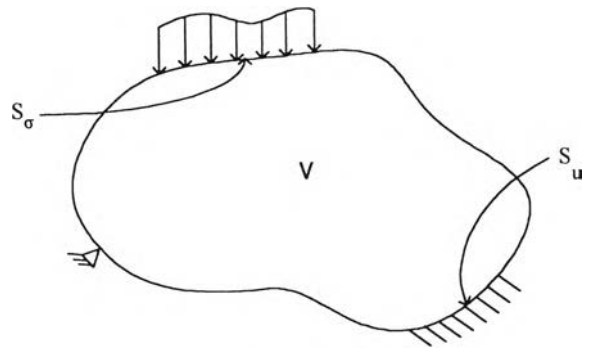
$$K_b = \int_A [B_b]^T [D_M] [B_b] dA \quad (2.2.20)$$

$$K_s = \int_A [B_s]^T [D_M] [B_s] dA \quad (2.2.21)$$

เมื่อพิจารณาที่เมตริกซ์ $[D_M]$ พจน์ที่เป็นผลจากการค้ำคือ $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$ และพจน์

ที่เป็นผลจากแรงเฉือนคือ $\frac{5}{6}Gt$ เมื่อแผ่นค้ำกล่าวมีความหนาแน่นลงจนเข้าใกล้แผ่นบางคือ $t \rightarrow 0$ พจน์ที่เป็นผลของการค้ำจะลดค่าลงอย่างรวดเร็วเพราะพจน์ t^3 ในขณะที่พจน์ที่เป็นผลของแรงเฉือน ค่าจะลดลงช้ากว่าทั้งๆที่ K_s ควรจะมีค่าน้อยมากๆ เมื่อเทียบกับ K_b ในแผ่นบาง ปัญหาที่เกิดขึ้นคือปัญหาการยึด(locking) ซึ่งทำให้ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นน้อยกว่าปกติมาก ปัญหานี้เกิดขึ้นเมื่อใช้ทฤษฎีของมินด์ลินกับแผ่นที่มีความหนาแน่นลงจนเข้าใกล้แผ่นบาง การแก้ปัญหาคือการใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต (selective reduced integration) กล่าวคือ ลดอันดับการอินทิเกรตในการสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสในส่วน of แรงเฉือนลงหนึ่งอันดับ หรือใช้วิธีสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสด้วยวิธีไฟไนต์เอลเมนต์แบบผสม

2.3 การสร้างเมตริกซ์สติฟเนสโดยหลักของการแปรผัน⁽²⁵⁾



รูปที่ 2.3.1 วัตถุใดๆ ปริมาตร V และมีบริเวณขอบรับแรงที่กำหนด Sσ และขอบที่กำหนดการกระจัด Su

โดยทั่วไปในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนที่มีสนามการกระจัดเป็นตัวแปรอิสระจะใช้หลักพลังงานศักย์ต่ำสุด (Principle of Minimum Potential Energy) โดยกล่าวว่า “ถ้าการกระจัดของระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขความต่อเนื่อง และเงื่อนไขขอบของระบบ เมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุล พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นย่อมมีค่าน้อยที่สุด” ซึ่งพลังงานศักย์รวมของระบบคือผลต่างของพลังงานความเครียดและพลังงานศักย์จากแรงภายนอก สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Pi = U - W$$

$$\Pi(u) = \int_V \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{u} \right] dV - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS = \text{มีค่าต่ำที่สุดเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุล} \quad (2.3.1)$$

โดยมีสมการเงื่อนไขบังคับคือ

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \partial \mathbf{u} = 0 \quad \text{ในปริมาตรของชิ้นส่วน V} \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{บนผิวของชิ้นส่วน } S_u \quad (2.3.3)$$

- โดยที่
- U = พลังงานความเครียด
 - W = พลังงานศักย์จากแรงภายนอก (โดยมีเครื่องหมายตรงข้ามกับพลังงานความเครียด)
 - Sσ = ผิวของชิ้นส่วนบริเวณที่กำหนดแรงที่ผิว T
 - u = เวกเตอร์ของการกระจัดของชิ้นส่วน
 - ū = การกระจัดที่รู้ค่าบนผิวของชิ้นส่วน Su
 - ε = เวกเตอร์ของความเครียด

C = เมตริกซ์สอดคล้อง

\bar{F} = เวกเตอร์ของแรงตัว (body force vector) ที่กำหนดขึ้น

\bar{T} = เวกเตอร์ของแรงที่ผิว (surface traction) ที่กำหนดขึ้น = $V\sigma$

V = เมตริกซ์ทิศทางโคไซน์ (direction cosine matrix) ของเส้นตั้งฉากกับผิวของวัตถุ

σ = เวกเตอร์ของความเค้น

∂ = เมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ คือ

เมื่อระบบในสมการที่ (2.3.1) เกิดการเคลื่อนที่ไปด้วยการกระจัดเสมือน δu ตามหลักของงานเสมือน และจากการที่ระบบจะอยู่ในสภาวะสมดุลอีกครั้งเมื่อระบบมีพลังงานศักย์รวมต่ำสุด สมการที่ (2.3.4) เป็นสมการใหม่ที่เกิดขึ้นจากผลของการกระจัดเสมือนและแทนค่า $\varepsilon = \partial u$ ตามสมการที่ (2.3.2) ด้วย Bq โดยที่ B คือเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด

$$\delta \Pi = \int_V [u^T K \delta u - \bar{F}^T \delta u] dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \delta u dS = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\text{โดยที่ } K = \int_V B^T C B dV$$

จากสมการที่ (2.3.1) ถึง (2.3.4) เราสามารถหามเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนได้โดยหลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด ซึ่งต้องสอดคล้องกับสมการเงื่อนไขบังคับตามสมการที่ (2.3.2) และ (2.3.3) นอกจากนี้ค่าของความเค้นและความเครียดคำนวณได้จากความสัมพันธ์เชิงเส้นกับการกระจัด ซึ่งโดยวิธีนี้การกระจัดจะมีความถูกต้องสูงเนื่องจากเป็นการกระจัดที่สอดคล้องที่บริเวณขอบของชิ้นส่วน แต่เมื่อนำมาคำนวณหาความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนจึงทำให้มีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง ซึ่งสามารถลดความคลาดเคลื่อนได้ถ้าแบ่งจำนวนชิ้นส่วนให้มากขึ้น ทำให้การคำนวณต้องใช้เวลามากขึ้นตามไปด้วย

จากวิธีแคลคูลัสของการแปรผัน เราสามารถลดเงื่อนไขบังคับโดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ได้ ดังนั้นเมื่อนำไปใช้กับสมการที่ (2.3.1) โดยลดเงื่อนไขบังคับที่ (2.3.2) และ (2.3.3) ทำให้เรามีความเครียดเป็นตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น และลดเงื่อนไขของการกระจัดที่ขอบ โดยเพิ่มตัวคูณลากรองจ์กับเงื่อนไขทั้งสองลงไปสมการที่ (2.3.1)

$$\Pi(u) = \int_V \left[\frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon - \bar{F}^T u - \lambda_1^T (\varepsilon - \partial u) \right] dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T u dS - \int_{S_u} \lambda_2^T (u - \bar{u}) dS \quad (2.3.5)$$

โดยที่ λ_1 และ λ_2 เป็นตัวคูณลากรองจ์

จากสมการที่ (2.3.5) เมื่อแก้สมการจะได้ค่าตัวคูณลากรองจ์ λ_1 คือ ความเค้น σ และ λ_2 คือแรงกระทำที่ขอบ T โดยที่ $T = V\sigma$ เป็นสมมูลของแรงที่ขอบ ค่า V คือเมตริกซ์ทิศทางโคไซน์ของเส้นตั้งฉากกับผิวของวัตถุ แทนค่า λ_1 และ λ_2 ลงในสมการที่ (2.3.5)

$$\Pi_G(u, \varepsilon, \sigma) = \int_V \left[\frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon - \bar{F}^T u - \sigma^T (\varepsilon - \partial u) \right] dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T u dS - \int_{S_u} T^T (u - \bar{u}) dS \quad (2.3.6)$$

สมการที่ (2.3.6) เป็นสมการหลักของการแปรผันทั่วไป โดยมีตัวแปรอิสระสามตัวคือ การกระจัด u ความเครียด ε และความเค้น σ และไม่มีสมการเงื่อนไขใดๆ สมการนี้มีชื่อเรียกโดยทั่วไปว่า หลักของ ฮู-วาซิชู (Hu-Washizu principle) ซึ่งวิธีการลดสมการเงื่อนไขและใช้ตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวเพื่อสร้างเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนก็คือ วิธีไฟไนต์เอลเมนต์แบบผสม (mixed formulation finite element)

นอกจากนี้เราสามารถลดหรือเลือกตัวแปรที่จะใช้เป็นตัวแปรอิสระได้โดยการใช้สมการเงื่อนไข ยกตัวอย่างเช่น เมื่อต้องการให้ความเค้นและการกระจัดเป็นตัวแปรอิสระ จึงต้องกำจัดตัวแปรความเครียดออกจากสมการที่ (2.3.6) โดยใช้สมการเงื่อนไขที่ว่า $\varepsilon = C^{-1}\sigma$ กำหนดให้ $S = C^{-1}$ คือเมตริกซ์ปริงแตง (constitutive matrix) แทนค่าความเครียดลงในสมการที่ (2.3.6)

$$\Pi_R(u, \sigma) = \int_V \left[-\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma + \sigma^T \partial u - \bar{F}^T u \right] dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T u dS - \int_{S_u} T^T (u - \bar{u}) dS \quad (2.3.7)$$

สมการนี้เรียกว่า หลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (Hellinger-Reissner principle) ใช้ตัวแปรอิสระสองตัวคือ การกระจัดและความเค้น ซึ่งเมื่อทำการแปรผันเทียบกับตัวแปรการกระจัด u และตัวแปรความเค้น σ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$S \sigma = D u \quad \text{ในปริมาตร } V \quad (2.3.8)$$

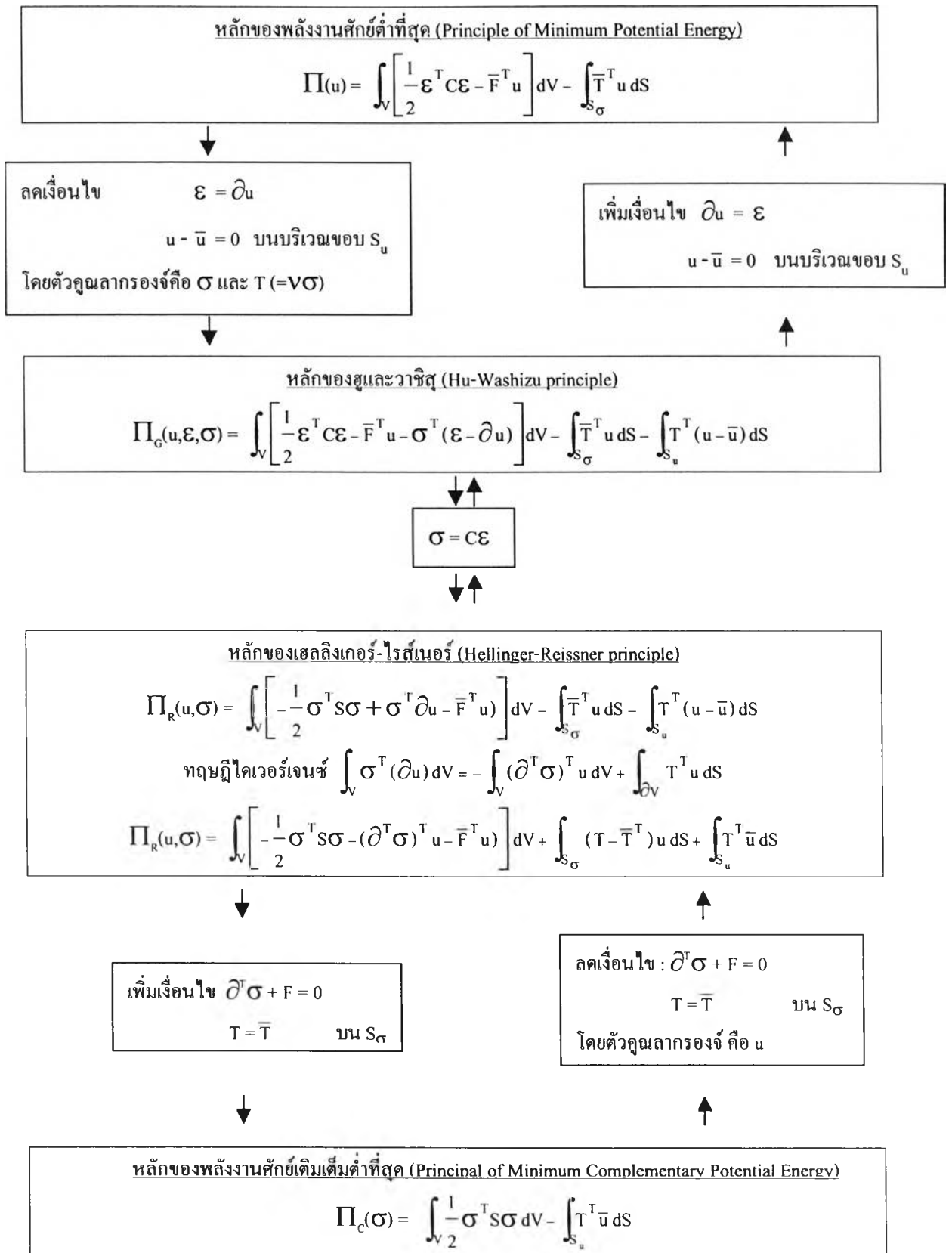
$$\partial^T \sigma + \bar{F} = 0 \quad \text{ในปริมาตร } V \quad (2.3.9)$$

โดยที่ D คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์

หรือถ้าใช้การแปลงรูปโดยทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ดังสมการที่ (2.3.10) แทนเข้าไปในสมการที่ (2.3.6) ก็จะได้หลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ในอีกรูปแบบหนึ่งดังสมการที่ (2.3.11)

$$\int_V \sigma^T (\partial u) dV = - \int_V (\partial^T \sigma)^T u dV + \int_{\partial V} T^T u dS \quad (2.3.10)$$

$$\Pi_R(u, \sigma) = \int_V \left[-\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma - (\partial^T \sigma)^T u - \bar{F}^T u \right] dV + \int_{S_\sigma} (T - \bar{T}^T) u dS + \int_{S_u} T^T \bar{u} dS \quad (2.3.11)$$



รูปที่ 2.3.2 แผนผังความสัมพันธ์ของหลักของการแปรผันต่างๆ⁽²⁵⁾

จากสมการที่ (2.3.11) เมื่อความเค้นอยู่ในสภาวะสมดุลในปริมาตร V ตามสมการที่ (2.3.9) และสอดคล้องกับแรงกระทำที่ขอบตามสมการ $\bar{T} = \nu\sigma$ บนขอบ S_σ ทำให้เราสามารถกำจัดตัวแปรการกระจัดออกจากสมการที่ (2.3.11) ได้ และกลายเป็นสมการหลักของพลังงานศักย์เต็มเต็ม (Principle of Minimum Complementary Potential Energy)

$$\Pi_C(\sigma) = -\Pi_R(u, \sigma) = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \bar{u} dS \quad (2.3.12)$$

จากสมการที่ (2.3.5) จนถึงสมการที่ (2.3.12) แสดงการเปลี่ยนหลักของพลังงานศักย์ต่ำสุดโดยใช้แคลคูลัสของการแปรผันจนกระทั่งได้หลักของพลังงานศักย์เต็มเต็มต่ำสุด ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังรูปที่ 2.3.1

2.4 การสร้างเมตริกซ์สติฟเนสโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์⁽²⁵⁾

2.4.1 วิธีการกระจัดสมมติ (Assumed Displacement Method)

เมื่อแบ่งแผ่นรับแรงที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยจำนวนจำกัดแล้ว หลักของพลังงานศักย์ต่ำสุดสามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\Pi(u) = \sum_i \left[\int_V \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon - u^T \bar{F} \right\} dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \bar{u} dS \right] \quad (2.4.1)$$

โดยที่ V = ปริมาตรของชิ้นส่วนที่ i
 S_σ = ผิวของชิ้นส่วนบริเวณที่กำหนดแรงที่ผิว \bar{T}
 ϵ = ความเครียด
 u = เวกเตอร์ของการกระจัด
 C = เมตริกซ์สอดคล้อง
 \bar{F} = เวกเตอร์ของแรงตัว (body force vector) ที่กำหนดขึ้น
 \bar{T} = เวกเตอร์ของแรงที่ผิว (surface traction) ที่กำหนดขึ้น = $\nu\sigma$

ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์การกระจัดของชิ้นส่วน $\{u\}$ จะถูกสมมติอยู่ในพจน์การประมาณของการกระจัดที่จุดต่อ

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (2.4.2)$$

โดยที่ $[N]$ คือเมตริกซ์ของฟังก์ชันฐาน
 $\{q\}$ คือการกระจัดที่จุดต่อ

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดของชิ้นส่วนกับการกระจัดของชิ้นส่วน $\{\mathcal{E}\} = [D]\{u\}$ โดยที่ $[D]$ คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของความเครียดของชิ้นส่วนกับการกระจัดที่จุดต่อได้เป็น $\{\mathcal{E}\} = [B]\{q\}$ โดยที่ $[B] = [D][N]$ แทนค่า \mathcal{E} ในสมการที่ (2.4.1) ด้วย q

$$\Pi(u) = \sum_i \left[\frac{1}{2} q^T K_i q - q^T Q_i \right] \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \quad K_i &= \int_V B^T C B dV \\ Q_i &= \int_V N^T \bar{F} dV + \int_{S_\sigma} N^T \bar{T} dS \end{aligned}$$

เมื่อรวมเมตริกซ์สติฟเนสย่อย K_i และเมตริกซ์ของแรง Q_i ของแต่ละชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแล้วจะได้เมตริกซ์สติฟเนสรวม K และเมตริกซ์ผลรวมของแรง Q สมการที่ (2.4.3) เปลี่ยนเป็น

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T Q \quad (2.4.4)$$

สมการที่ (2.4.4) แปรผันเทียบกับ q แล้วอยู่ในสถานะคงที่คือ $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$ ดังนั้นจะได้ $Kq = Q$ เป็นความสัมพันธ์ของเมตริกซ์แรงรวมที่กระทำกับการกระจัดที่จุดต่อทั้งหมดของแผ่นรับแรง

2.4.2 วิธีสมดุลของแรง (Equilibrium Method)

ในวิธีนี้ใช้หลักของพลังงานศักย์เคมเต็มต่ำสุด โดยเมื่อแบ่งแผ่นพื้นที่ต้องการพิจารณาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยจำนวนจำกัด แล้วสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\Pi_c(\sigma) = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV - \int_{S_u} T^T \bar{u} dS \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \quad \bar{u} &= \text{การกระจัดที่รู้ค่าบนผิวของชิ้นส่วน } S_u \\ S &= C^{-1} \text{ เมตริกซ์ปรุงแต่ง (constitutive matrix)} \\ T &= \text{เวกเตอร์ของแรงที่ผิว (surface traction)} = \nu \sigma \\ \nu &= \text{เมตริกซ์ทิศทางโคไซน์ (direction cosine matrix) ของเส้นตั้งฉากกับผิวของวัตถุ} \\ \sigma &= \text{เวกเตอร์ของความเค้น} \end{aligned}$$

V = ปริมาตรของชิ้นส่วน

S_u = บริเวณผิวที่กำหนดการกระจัด \bar{u}

เริ่มต้นด้วยการสมมติความเค้นในพจน์ของพารามิเตอร์ β โดยความเค้นจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล $\partial^T \sigma + F = 0$ โดยที่ ∂ คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (2.4.6)$$

จากนั้นหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำที่ขอบกับความเค้นภายใน $T = V\sigma$ และสามารถเขียนค่า T ในรูปของพารามิเตอร์ β ได้เป็น

$$\{T\} = \{R\} \{\beta\} \quad (2.4.7)$$

โดยที่ $\{R\} = [V] \{P\}$

กำหนดการกระจัดที่ขอบ \bar{u} ให้อยู่ในพจน์ของการกระจัดที่จุดต่อ q โดยใช้ตัวแปร L เป็นฟังก์ชันฐานของการกระจัดที่ขอบกับการกระจัดที่จุดต่อ $\bar{u} = Lq$ จากนั้นแทนค่าความเค้น แรงกระทำที่ขอบและการกระจัดที่ขอบในสมการที่ (2.4.5)

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T G q \quad (2.4.8)$$

$$\text{โดยที่} \quad H = \int_V P^T S P dV$$

$$G = \int_{S_u} R^T L dS$$

ในสมการที่ (2.4.8) ทำการแปรผันเทียบกับพารามิเตอร์ β แล้วอยู่ในสถานะคงที่ คือ $\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0$ ได้ผลลัพธ์คือ $H\beta = Gq$ ดังนั้นสามารถเปลี่ยนพารามิเตอร์ β ให้อยู่ในรูปของการกระจัดที่จุดต่อ q ได้คือ $\beta = H^{-1}Gq$

จากสมการที่ 2.4.5 พลังงานความเครียด คือ $\int_V \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV = \frac{1}{2} \beta^T H \beta = \frac{1}{2} q^T K q$ ดังนั้นเมตริกซ์สติเฟเนสคือ

$$K = G^T H^{-1} G \quad (2.4.9)$$

2.4.3 วิธีการสมมติความเค้นพันธุ์ทาง (Assumed Stress Hybrid Method)

วิธีนี้ใช้การสมมติความเค้นและสมมติการกระจัด จากสมการที่ 2.3.7 เราสามารถสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสได้จากหลักของเฮลลิงเกอร์ - ไรส์เนอร์ ซึ่งถ้าไม่พิจารณาแรงตัว(body force) และแรงที่ผิวของวัตถุ(surface traction) แล้วสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\Pi_R(\sigma, u) = \int_V -\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma \, dV + \sigma^T (Bq) \, dV \quad (2.4.10)$$

โดยที่ σ = เวกเตอร์ของความเค้น

$S = C^{-1}$ เมตริกซ์ปรุงแต่ง (constitutive matrix)

B = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด

V = ปริมาตรของชิ้นส่วน

เริ่มต้นสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสโดยสมมติความเค้นในรูปของพารามิเตอร์ β และสร้างการกระจัดที่สอดคล้องในชิ้นส่วนในพจน์ของ q

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (2.4.11)$$

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (2.4.12)$$

แทนค่าความเค้นจากสมการที่ (2.4.11) ลงในสมการที่ (2.4.10)

$$\Pi_R = -\frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T G q \quad (2.4.13)$$

$$\text{โดยที่} \quad H = \int_V P^T S P \, dV$$

$$G = \int_V P^T B \, dV$$

จากการแปรผันสมการที่ 2.4.3.4 เทียบกับตัวแปร β $\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0$ ได้ผลลัพธ์คือ

$$H\beta = Gq \quad (2.4.14)$$

ดังนั้นสามารถเปลี่ยนพารามิเตอร์ β ให้อยู่ในรูปของการกระจัดที่จุดต่อ q ได้คือ

$$\beta = H^{-1}Gq$$

จากสมการที่ 2.4.2.2 พลังงานความเครียด คือ $\int_V \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV = \frac{1}{2} \beta^T H \beta = \frac{1}{2} q^T K q$ ดังนั้น
เมตริกซ์สติเฟเนสคือ

$$K = G^T H^{-1} G \quad (2.4.15)$$

จากสมการของ Π_R และ Π_C มีส่วนที่ต่างกันคือ เมตริกซ์ G เป็นการอินทิเกรตบนปริมาตรของชิ้นส่วนและการอินทิเกรตที่ผิวของชิ้นส่วนตามลำดับ ซึ่งสำหรับในชิ้นส่วนที่เป็นสามมิติ เช่น ชิ้นส่วนรูปลูกบาศก์ การอินทิเกรตที่ผิวจะต้องอินทิเกรตถึง 6 ผิว แต่ถ้าอินทิเกรตบนปริมาตรสามารถอินทิเกรตเพียงครั้งเดียว ทำให้การใช้ Π_R มีประสิทธิภาพในการคำนวณมากกว่า

2.4.4 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสม (Mixed Finite Element Method)

วิธีนี้โดยทั่วไปคือการใช้ตัวแปรที่สมมติขึ้นมากกว่าหนึ่งตัวซึ่งรวมถึงวิธีการสมมติความเค้นพันธุ์ทางในข้อที่ 2.4.3 ด้วย ตัวแปรที่นิยมใช้ในการสมมติคือ การกระจัด ความเค้น และความเครียด โดยที่ความสัมพันธ์ของตัวแปรจะต้องเป็นไปตามกฎกลศาสตร์ของวัสดุ จากนั้นจะใช้หลักของการแปรผันต่างๆ ที่ได้กล่าวผ่านมาแล้วในการสร้างเมตริกซ์สติเฟเนส หรืออาจจะปรับปรุงหลักของการแปรผันขึ้นมาใหม่เพื่อให้เหมาะสมกับตัวแปรที่สมมติขึ้น ในที่นี้ยกตัวอย่างการสมมติตัวแปรสามตัวโดยใช้การกระจัด ความเค้น และความเครียด และใช้หลักของ ฮู-วาซิอุในการหาเมตริกซ์สติเฟเนส โดยไม่คิดแรงในวัตถุและแรงที่ผิวของวัตถุ

$$\Pi_G(\sigma, \epsilon, u) = \int_V \frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon - \sigma^T \epsilon + \sigma^T (\partial u) dV \quad (2.4.16)$$

โดยที่ V = ปริมาตรของชิ้นส่วน
 ϵ = ความเครียด
 σ = ความเค้น
 u = เวกเตอร์ของการกระจัด
 C = เมตริกซ์สอดคล้อง
 ∂ = เมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์

สมมติฟังก์ชันสัมฐานสำหรับแต่ละตัวแปรดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \{\epsilon\} &= [E] \{s\} \\ \{\sigma\} &= [P] \{\beta\} \\ \{u\} &= [N] \{q\} \end{aligned} \right\} (2.4.17)$$

แทนค่าตัวแปรต่างๆ ที่สมมติขึ้นในสมการที่ (2.4.16)

$$\Pi_G = \frac{1}{2} s^T \bar{E} s - \beta^T \bar{P} s + \beta^T \bar{B} q \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } \bar{E} &= \int_V E^T C E \, dV \\ \bar{P} &= \int_V P^T E \, dV \\ \bar{B} &= \int_V P^T \partial N \, dV \end{aligned}$$

เมื่อแปรผันสมการที่ 2.4.18 เทียบกับตัวแปรทั้งสามจะ ได้ความสัมพันธ์ของตัวแปรแต่ละตัวดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0 ; \quad \bar{E} s - \beta^T \bar{P} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0 ; \quad -\bar{P} s + \bar{B} q &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 ; \quad \beta^T \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

จากสมการที่ (2.4.19) สร้างความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของความเครียดในรูปของการกระจัดที่จุดต่อ คือ $s = (\bar{P}^{-1} \bar{B}) q$ ดังนั้นจากสมการพลังงานความเครียด

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} s^T \bar{E} s \\ U &= \frac{1}{2} q^T (\bar{P}^{-1} \bar{B})^T \bar{E} (\bar{P}^{-1} \bar{B}) q \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$\text{เมตริกซ์สติฟเนสคือ } \mathbf{K} = (\bar{P}^{-1} \bar{B})^T \bar{E} (\bar{P}^{-1} \bar{B}) \quad (2.4.21)$$

ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนแล้ว เมื่อได้คำตอบในรูปของการกระจัดหรือความเค้นแล้ว คำตอบที่ได้จำเป็นต้องพิจารณาการลู่เข้าค่าแม่นยำตรง (convergence) ด้วย เพื่อเป็นตัวบอกระสิทธิภาพของชิ้นส่วน วิธีหนึ่งที่ใช้ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบคือการทดสอบชิ้นส่วนแบบห่อม^{(26),(27)} ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป สิ่งที่ต้องพิจารณาอีกอย่างคือจำนวนพจน์ที่ใช้สำหรับสมมติฐานของตัวแปรจะต้องเพียงพอที่จะไม่ทำให้เกิดรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัด (zero energy mode or spurious kinematic mode) อันหมายถึงการที่ได้คำตอบของการกระจัดอันไม่ก่อให้เกิดพลังงานในชิ้นส่วน การสร้างชิ้นส่วน จำเป็นต้องป้องกันเกิดการเกิดรูปแบบการเคลื่อนที่ลักษณะนี้ ซึ่งอาจเกิดขึ้นจากค่าอันดับ (rank) ของเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน น้อยกว่าการกระจัดทั้งหมดของชิ้นส่วนลบด้วยรูปแบบการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งทั้งสามรูปแบบ ซึ่งก็คือการ

ตรวจสอบเสถียรภาพของชิ้นส่วน^{(26),(27)} ทั้งนี้สามารถอธิบายในทางคณิตศาสตร์ได้ โดยยกตัวอย่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ผสม ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.22)$$

โดยที่สมมติให้ x และ y เป็นสนามของตัวแปรอิสระ มีขนาดของระดับขั้นความเสรีเท่ากับ m และ n ตามลำดับ เมื่อลดรูปสมการที่ 2.4.22 โดยกำจัดตัวแปร x ออกไปแล้วเขียนสมการใหม่เป็น

$$(B^T A^{-1} B) y = -f_2 + B^T A^{-1} f_1 \quad (2.4.23)$$

พิจารณาสมการนี้ การที่จะได้คำตอบเดียวจากสมการ ค่าอันดับของเมทริกซ์ A จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ n หรือหมายความว่า $m \geq n$ เสมอ นอกจากนี้ยังต้องดูคำตอบ y ที่ได้ โดย $By \neq 0$ เสมอเมื่อค่า $y \neq 0$

นอกจากนี้ชิ้นส่วนที่ใช้คำนวณจำเป็นต้องมีความยืดหยุ่น(invariance)⁽²⁴⁾ นั่นคือคำตอบที่ได้จะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าจะวางชิ้นส่วนในลักษณะใด สุดท้ายการที่จะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในการคำนวณให้มีประสิทธิภาพนั้น อัลกอริทึม(algorithm) สำหรับสร้างเมทริกซ์สติเฟเนสของชิ้นส่วนจะต้องมีการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนเพื่อประหยัดเวลาในการคำนวณ ชิ้นส่วนที่มีการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนจะถือว่ามีประสิทธิภาพทางการคำนวณ