

### ชิ้นส่วนไฟไนต์เอลเมนต์ผสม

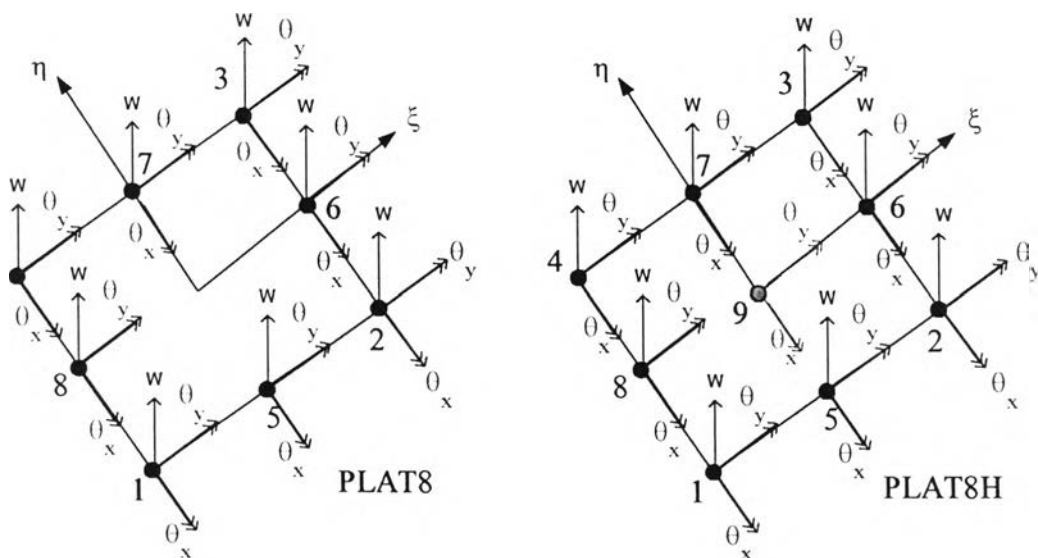
ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาด้วยวิธีไฟไนต์เอลเมนต์ตามทฤษฎีของมินคลิน มีปัญหาที่ต้องพิจารณาเป็นพิเศษ สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน (shear locking)
2. รูปแบบการเคลื่อนที่แบบไร้พลังงานหรือรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัด (zero energy mode or spurious kinematic mode)

ในบทนี้จะกล่าวถึงที่มาของแต่ละชิ้นส่วนที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาข้างต้น และการสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสโดยใช้หลักของการแปรผันต่างๆ

#### 3.1 ชิ้นส่วน PLAT8<sup>(8)</sup>

ชิ้นส่วนนี้เสนอโดย ลีและวอง การสร้างเมตริกซ์สติเฟเนสใช้หลักการแปรผันของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ดัดแปร ดังสมการที่ (3.1.1)



- 3 ระดับขั้นความเสรี ประกอบด้วย  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$
- 2 ระดับขั้นความเสรี ประกอบด้วย  $\theta_x$  และ  $\theta_y$

รูปที่ 3.1.1 ลักษณะและระดับขั้นความเสรีที่ขั้วของชิ้นส่วน PLAT8 และ PLAT8H

$$\Pi_{MR} = \int_A \frac{1}{2} \mathbf{K} D_{\mathbf{K}} \mathbf{K} \, dx dy + \int_A \left( \bar{\gamma}^T D_{\gamma} \gamma - \frac{1}{2} \bar{\gamma}^T D_{\gamma} \bar{\gamma} \right) dx dy - W \quad (3.1.1)$$

โดยที่

$$\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \text{เวกเตอร์ความเครียดคดในพจน์ของ } \theta_x \text{ และ } \theta_y$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \text{เวกเตอร์ความเครียดเฉือนแนวคดในพจน์ของ } w, \theta_x \text{ และ } \theta_y$$

$$D_{\mathbf{K}} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ \nu & 1 & & \\ & & & 1-\nu \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_{\gamma} = \beta G t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_r = 5/6$$

$t$  = ความหนาของแผ่นพื้น

$E$  = ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น

$\nu$  = อัตราส่วนของปัวส์ซอง

$G$  = โมดูลัสเฉือน

$W$  = งานเนื่องจากแรงภายนอก

ชิ้นส่วนนี้ใช้วิเคราะห์แผ่นพื้นตามทฤษฎีของมินคัลลินคือ คัดผลเนื่องจากความเครียดเฉือนแนวคดด้วย ชิ้นส่วนมี 2 ลักษณะคือ ชิ้นส่วนที่หนึ่งเป็นชิ้นส่วน 8 ขั้ว โดยแต่ละขั้วมีระดับชั้นความเสรีเท่ากับสาม ประกอบด้วย การเคลื่อนที่ในแนวคด  $w$  และมุมที่เปลี่ยนไปของระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ( $\theta_x$  และ  $\theta_y$ ) โดยที่มุมหมุนทั้งสองนั้นเป็นอิสระจากการเคลื่อนที่ในแนวคด ส่วนชิ้นส่วนที่สองมีลักษณะเหมือนชิ้นส่วนที่หนึ่ง แต่มี 9 ขั้ว โดยเพิ่มขั้วที่เก้าที่กึ่งกลางชิ้นส่วน ซึ่งที่ขั้วดังกล่าวมีเพียงสองระดับชั้นความเสรีคือ  $\theta_x$  และ  $\theta_y$

จากสมการที่ (3.1.1) สนามของตัวแปรประกอบด้วยสนามการกระจัด  $w$   $\theta_x$  และ  $\theta_y$  และสนามของความเครียดเฉือนแนวตั้ง  $\gamma_{xz}$  กับ  $\gamma_{yz}$  โดยแต่ละสนามของตัวแปรใช้ฟังก์ชันฐานในการสร้างสมการดังนี้

ชิ้นส่วน PLAT8

$$\{w\} = [N] \{q\} \quad (3.1.2)$$

โดยที่  $\{w\} = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T$   
 $w$  = การกระจัดในแนวตั้ง  
 $\theta_x$  = มุมหมุนรอบแกน  $y$   
 $\theta_y$  = มุมหมุนรอบแกน  $x$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_8+N_5)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5+N_6)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6+N_7)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_7+N_8)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

(3.1.3)

$$\{q\}^T = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \cdots \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk}\}^T$$

สำหรับชิ้นส่วน PLAT8H ฟังก์ชันฐานแยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นฟังก์ชันฐานสำหรับตัวแปรการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง  $w$  มีฟังก์ชันเท่ากับ  $N_1$  ถึง  $N_8$  ในสมการที่ (3.1.3) ส่วนที่สองเป็นฟังก์ชันฐานสำหรับมุมหมุนทั้งสองแกน มีลักษณะดังสมการที่ (3.1.4)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & \cdots & 0 & L_8 & 0 & L_9 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & \cdots & 0 & 0 & L_8 & 0 & L_9 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(L_8+L_5) - \frac{1}{4}L_9 \\ L_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(L_5+L_6) - \frac{1}{4}L_9 \\ L_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(L_6+L_7) - \frac{1}{4}L_9 \\ L_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(L_7+L_8) - \frac{1}{4}L_9 \\ L_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) - \frac{1}{2}L_9 \\ L_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}L_9 \\ L_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) - \frac{1}{2}L_9 \\ L_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}L_9 \\ L_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta^2) \end{aligned} \right\} (3.1.4)$$

$$\{q\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \cdots \quad w_8 \quad \theta_{x8} \quad \theta_{y8} \quad \theta_{x9} \quad \theta_{y9}\}^T$$

การสมมติฟังก์ชันฐานของสนามความเครียดเฉือนมีลักษณะดังสมการที่ (3.1.5) โดยเมตริกซ์ [P] เป็นฟังก์ชันในพิกัดธรรมชาติ ซึ่งลักษณะของเมตริกซ์ [P] จะกล่าวถึงต่อไป

$$\{\bar{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [P] \{\alpha\} \quad (3.1.5)$$

โดยที่  $\gamma_{xz}$  คือความเครียดเฉือนแนวตั้งบนระนาบ xz  
 $\gamma_{yz}$  คือความเครียดเฉือนแนวตั้งบนระนาบ yz  
[P] คือเมตริกซ์ฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามของความเครียดเฉือนแนวตั้ง  
 $\{\alpha\}$  คือเวกเตอร์พารามิเตอร์ของความเครียดเฉือนแนวตั้ง

จากที่ผ่านมามีฟังก์ชันพื้นฐานทั้งของสนามการกระจัดและสนามความเคียวจะอยู่ในพิกัดธรรมชาติ แต่ในการแปรผันต่างๆจะอยู่ในพิกัดหลักจึงต้องแปลงจาก  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  และ  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  ให้เป็น  $\frac{\partial}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial}{\partial y}$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.1.6)$$

โดยที่  $[J]$  คือ เมตริกซ์จาโคเบียนและมีค่าเท่ากับ

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}; n \text{ คือจำนวนจุดต่อในชิ้นส่วน} \quad (3.1.7)$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (3.1.2), (3.1.3) และ (3.1.5) ลงในสมการที่ (3.1.1) สมการจะเปลี่ยนเป็น

$$\Pi_{MR} = \sum_{e=1}^n Et^3 \left[ \frac{1}{2} q^T k_B q + \frac{\beta_f G}{E} \left( \frac{L}{t} \right)^2 (\alpha^T G_\alpha q - \frac{1}{2} \alpha^T H_\alpha \alpha) \right] - w \quad (3.1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{โดยที่ } k_B &= \int_A B_K^T D_K B_K dx dy = \int_A [B_K]^T [D_K] [B_K] |J| d\xi d\eta \\ G_\alpha &= \int_A P^T D_\gamma B_\gamma dx dy = \int_A [P]^T [D_\gamma] [B_\gamma] |J| d\xi d\eta \\ H_\alpha &= \int_A P^T D_\gamma P dx dy = \int_A [P]^T [D_\gamma] [P] |J| d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

$$|J| = \det [J]$$

$$[B_K] = [D_K][N] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \quad (3.1.10)$$

$$[B_y] = [\partial_y][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} [N] \quad (3.1.11)$$

สมการที่ (3.1.10) และสมการที่ (3.1.11) คือเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด สำหรับความเครียดคัตและความเครียดเฉือนตามลำดับ แทนค่าเมตริกซ์  $[N]$  ของชิ้นส่วน PLAT8 จากสมการที่ (3.1.3) ลงในสมการทั้งสองจะได้

$$[B_K] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

$$[B_y] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & \dots & -\frac{\partial N_8}{\partial x} & N_8 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & \dots & -\frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

สำหรับชิ้นส่วน PLAT8H เนื่องจากมีระดับชั้นความเสรีที่ต่างไปจากชิ้นส่วน PLAT8 คือมีจุดต่อที่ 9 ซึ่งมีระดับชั้นความเสรีเพียงสองตัวคือมุมหมุนทั้งสองทิศทาง และในการแทนค่าเมตริกซ์  $[N]$  ลงในสมการที่ (3.1.10) และ (3.1.11) จะใช้ฟังก์ชันฐานทั้งสองแบบคือ ฟังก์ชันฐานของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง  $w$  ใช้จากสมการที่ (3.1.3) แต่ฟังก์ชันฐานของมุมหมุนทั้งสองจะใช้จากสมการ (3.1.4) ดังนี้

$$[B_K] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_8}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_9}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial L_8}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_9}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial L_8}{\partial y} & \frac{\partial L_8}{\partial x} & \frac{\partial L_9}{\partial y} & \frac{\partial L_9}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

$$[B_y] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial x} & L_1 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & L_2 & 0 & \dots & -\frac{\partial N_8}{\partial x} & L_8 & 0 & L_9 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & L_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & L_2 & \dots & -\frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & L_8 & 0 & L_9 \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

เมื่อแปรผันสมการที่ (3.1.8) เทียบกับตัวแปร  $\alpha$  จะได้สมการ  $G_\alpha q = H_\alpha \alpha$  ดังนั้นสามารถกำจัดตัวแปร  $\alpha$  โดยเปลี่ยนให้อยู่ในรูป  $\alpha = H_\alpha^{-1} G_\alpha q$  จากนั้นแทนค่ากลับไปในสมการที่ (3.1.8)

$$\Pi_{MR} = \sum_{e=1}^n Et^3 \left[ \frac{1}{2} q^T k_B q + \frac{\beta_f G}{E} \left( \frac{L}{t} \right)^2 \left( \frac{1}{2} q^T G_\alpha^T H_\alpha^{-1} G_\alpha q \right) \right] - W \quad (3.1.16)$$

กำหนดให้  $k_c$  แทนพจน์  $Et^3 \left[ k_B + \frac{\beta_f G}{E} \left( \frac{L}{t} \right)^2 G_\alpha^T H_\alpha^{-1} G_\alpha \right]$  ในสมการที่ (3.1.16) จะได้เมทริกซ์สติเฟนสของชิ้นส่วนและกำหนดให้งานภายนอก  $W=q^T Q$  ดังนั้นสามารถจัดรูปสมการที่ (3.1.16) ได้ใหม่

$$\Pi_{MR} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} q^T k_c q - q^T Q \quad (3.1.17)$$

เมื่อประกอบทุกชิ้นส่วนเข้าด้วยกัน โดยรวมเมทริกซ์สติเฟนสและแรงกระทำของแต่ละชิ้นส่วนเป็นเมทริกซ์สติเฟนสรวมและแรงกระทำบนโครงสร้าง และจากนั้นแปรผันกับตัวแปร  $q$  จะได้

$$Kq = Q \quad (3.1.18)$$

โดยที่  $K$  = เมทริกซ์สติเฟนสรวมของโครงสร้าง  
 $q$  = เวกเตอร์รวมของการกระจัดที่จุดต่อ  
 $Q$  = เวกเตอร์รวมของแรงกระทำบนโครงสร้าง

จากสมการที่ (3.1.18) เราสามารถแก้สมการหาการกระจัดที่จุดต่อได้ และนำค่าการกระจัดไปหาแรงภายในของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นได้ โดยเมทริกซ์ของโมเมนต์และแรงเฉือนแสดงในสมการที่ (3.1.19)

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D_K K = -D_K B_K q$$

$$\text{และ} \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = -D_\gamma \gamma = -D_\gamma P \alpha = -D_\gamma P H_\alpha^{-1} G_\alpha q \quad (3.1.19)$$

พิจารณาสมการที่ (3.1.16) เมื่อแผ่นพื้นมีความหนาลดลงจน  $\frac{\beta_t G}{E} \left(\frac{L}{t}\right)^2 \rightarrow \infty$  ดังนั้นพจน์

$\frac{1}{2} q^T G_\alpha^T H_\alpha^{-1} G_\alpha q$  จึงต้องมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ หรือ  $G_\alpha q = 0$  เพื่อลดผลอันเกิดจากความเครียดเฉือน ดังนั้นเมตริกซ์  $G_\alpha$  จึงต้องมีขนาดเล็กที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งจำนวนแถวของเมตริกซ์  $G_\alpha$  ขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ของ  $\alpha$  ที่ใช้ แต่อย่างไรก็ตามจำนวนพจน์ของ  $\alpha$  ถ้ากำหนดให้มีจำนวนน้อยเกินไปจะเกิดปัญหาการเคลื่อนที่แบบไร้พลังงานขึ้น ดังนั้นจึงต้องเลือกจำนวนพจน์ของ  $\alpha$  ให้ที่เหมาะสม ซึ่งในที่นี้ได้เสนอจำนวนพจน์ของความเครียดเฉือนมา 3 ลักษณะคือ

$$(1) 8\alpha \quad \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\ \gamma_{yz} &= \alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$$(2) 6\alpha \quad \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\ \gamma_{yz} &= \alpha_4 + \alpha_5 \eta + \alpha_6 \xi \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

$$(3) 5\alpha \quad \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\ \gamma_{yz} &= \alpha_4 + \alpha_3 \xi + \alpha_5 \eta \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

โดยที่  $\alpha$  คือพารามิเตอร์ของความเครียดเฉือนแนวตั้ง

โดยในกรณีของ  $5\alpha$  นั้นปรับปรุงมาจาก  $6\alpha$  โดยกำหนดให้  $\alpha_6 = \alpha_3$  เนื่องจากพจน์  $\xi\eta$  ในอนุพันธ์  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  มีสัมประสิทธิ์ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงทดลองลดจำนวนพจน์ลงเหลือเพียง 5 และพบว่าปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนจะมีผลน้อยลงเมื่อจำนวนพจน์ของความเครียดเฉือนที่สมมติขึ้นมีค่าน้อย แต่ทั้งนี้ต้องควบคุมไม่ให้เกิดรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัดด้วย ซึ่งจากการทดสอบปรากฏว่าสำหรับจำนวนพจน์ในแบบ  $5\alpha$  และ  $6\alpha$  นั้นเกิดรูปแบบการเคลื่อนที่แบบไร้พลังงานอยู่สองแบบ ซึ่งทั้งสองแบบสามารถกำจัดได้ถ้ามีการยึดครั้งค่า  $w$  ทั้งหมดที่ข้างใดข้างหนึ่งของชิ้นส่วน ยกตัวอย่างเช่น แผ่นที่มีที่รองรับแบบยึดหมุน (simply-supported plates) และแผ่นที่มีที่รองรับแบบยึดแน่น (clamped plates) เป็นต้น แต่สำหรับปัญหาแผ่นที่มีที่รองรับแบบยึดหมุนที่มุมทั้งสี่ ยังคงมีรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัดอยู่ดี

ในการอินทิเกรตจะใช้แบบ  $2 \times 2$  และ  $3 \times 3$  เพื่อทดสอบชิ้นส่วน PLAT8 สำหรับชิ้นส่วน PLAT8-8 $\alpha$  ใช้การอินทิเกรตแบบ  $2 \times 2$  จะให้ผลลัพธ์เหมือนกับชิ้นส่วน 8 ขั้วธรรมดาที่ใช้การอินทิเกรตแบบ  $2 \times 2$  ซึ่งพบว่าทั้งสองชิ้นส่วนมีแนวโน้มที่จะเกิดการยึด และการทดสอบชิ้นส่วน PLAT8H ใช้การอินทิเกรตแบบ  $3 \times 3$  สำหรับพจน์ของแรงคด และอินทิเกรตแบบ  $2 \times 2$  สำหรับพจน์ของแรงเฉือน ซึ่งพบว่าชิ้นส่วน PLAT8H-8 $\alpha$  ให้ผลลัพธ์เหมือนชิ้นส่วนเฮโดโรซิสของฮิวส์ (Hughes heterosis element หรือชิ้นส่วน IPBQQ ใน GTSTRUDL)<sup>(9)</sup> คือให้



ผลลัพธ์ที่ดีกว่าชิ้นส่วน 8 ขั้วธรรมดา จนกระทั่งอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความหนาของแผ่นพื้น (L/t) มีค่าตั้งแต่  $10^6$  ขึ้นไปจึงจะเกิดปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน

### 3.1.1 การลดการอินทิเกรต (Reduced Integration)<sup>(36)</sup>

เป็นวิธีที่ใช้แก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน โดยมีสองอย่างคือ อย่างที่หนึ่งได้แก่การลดการอินทิเกรตแบบเท่ากันหมด (uniform reduced integration) เหมาะสำหรับชิ้นส่วนที่มีจุดต่ออยู่เฉพาะที่ขอบของชิ้นส่วน (serendipity element) เช่น ชิ้นส่วน 8 จุดต่อ และชิ้นส่วน 12 จุดต่อ เป็นต้น วิธีนี้จะลดจำนวนจุดเกาส์ลงหนึ่งจุดจากจำนวนจุดที่ให้ค่าแม่นยำตรง อย่างที่สองคือการเลือกการอินทิเกรต (selective reduced integration) ซึ่งเหมาะกับชิ้นส่วนที่มีจุดต่ออยู่ในชิ้นส่วน (Lagrangian element) การอินทิเกรตแบบนี้แบ่งเป็นสองส่วนคือ พจน์ของแรงคดอินทิเกรต โดยใช้จำนวนจุดเกาส์ที่เพียงพอทำให้ได้ค่าแม่นยำตรง ส่วนพจน์ของแรงเฉือนอินทิเกรตโดยลดจำนวนจุดเกาส์ลงหนึ่งจุด

วิธีการลดการอินทิเกรตทั้งสองอย่าง สามารถแก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนได้ แต่ไม่อาจจัดรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัดได้ แต่ถ้าใช้ชิ้นส่วนเฮกเซโดโรฮิสของอิวิสต์ ร่วมกับการเลือกการอินทิเกรตจะสามารถแก้ปัญหทั้งสองได้ ลีและวองจึงใช้การเลือกการอินทิเกรตในชิ้นส่วน PLAT8H ซึ่งในการทดสอบจะใช้ชื่อของชิ้นส่วนเป็น PLAT8HR-5 $\alpha$  6 $\alpha$  และ 8 $\alpha$

### 3.2 ชิ้นส่วนฟังก์ชันพองสบู่<sup>(20)</sup>

การวิเคราะห์แผ่นพื้นตามทฤษฎีของไรส์เนอร์-มินด์ลิน (Reissner - Mindlin theory) เดิมใช้วิธีความเค้นพันธุทาง (hybrid stress method) ซึ่งใช้หลักการแปรผันของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (Hellinger - Reissner principle) ในการสร้างเมตริกซ์สติเฟนส และมีส่วนสำคัญอยู่ที่การเลือกสมมติฟังก์ชันของสนามความเค้น โดยฟังก์ชันของความเค้นที่สมมติขึ้นนั้นจะต้องเป็นไปตามสมการสมดุล ทำให้ฟังก์ชันที่นำมาสมมติความเค้นจำเป็นต้องอยู่ในพิกัดหลัก(global coordinates) วิธีความเค้นพันธุทางนี้ถึงแม้จะให้คำตอบที่ใกล้เคียงค่าแม่นยำตรง แต่เนื่องจากการที่จะต้องเลือกสมมติความเค้นให้เป็นไปตามสมการสมดุลจะทำให้เกิดปัญหาอยู่สามประการคือ ประการที่หนึ่งความเค้นแต่ละตัวต้องขึ้นแก่กันและกัน (coupling) ทำให้ลักษณะของเมตริกซ์ฟลักซิเบิลิตี (flexibility matrix) ไม่ค่อยจะเป็นแถบ (band) ซึ่งจะค่อนข้างยุ่งยากในการทำเมตริกซ์ผกผัน ประการที่สอง ฟังก์ชันที่ใช้สมมติความเค้นจำเป็นต้องอยู่ในพิกัดหลัก ทำให้ชิ้นส่วนที่ได้ไม่มีความยืดหยุ่น และคำตอบที่ได้ อาจมีความผิดพลาดมากขึ้นถ้าชิ้นส่วนมีลักษณะบิดเบี้ยว ประการสุดท้ายคือ ฟังก์ชันที่ใช้สมมติความเค้นจะมีอันดับต่ำอาจเกิดปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนได้

ต่อมาจึงมีการใช้วิธีชิ้นส่วนผสม (mixed element method) แทน ซึ่งมีลักษณะสำคัญคือ สร้างเมตริกซ์สติเฟนสโดยใช้หลักการแปรผันของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ และสมมติสนามของแต่ละตัวแปรอย่างเป็นอิสระต่อกันในพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates) ดังนั้นถ้าใช้สนามความเค้นเป็นสนามของตัวแปร ฟังก์ชันของความเค้นที่สมมติขึ้นก็ไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล โดยจะมีสมการเงื่อนไขเพื่อให้เป็นไปตามสมการสมดุล สม

การเงื่อนไขนี้จะอยู่ในรูปพารามิเตอร์ของการกระจัดภายใน ซึ่งมีลักษณะเป็นฟังก์ชันฟองสบู่ (bubble function) คือฟังก์ชันฐานที่มีการเคลื่อนที่ในแนวตั้งที่กึ่งกลางชิ้นส่วน ให้ค่าการกระจัดเป็นศูนย์ที่ขอบของชิ้นส่วน

ในการสร้างสมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มด้วยการแบ่งสนามการกระจัดออกเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งคือสนามการกระจัดปกติ  $u_q$  และส่วนที่สองคือส่วนของฟังก์ชันฟองสบู่  $u_\lambda$  โดยการกระจัดทั้งสองส่วนจะสัมพันธ์กับระดับชั้นความเร็วที่จุดต่อที่ ประกอบด้วย  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ฟังก์ชันที่ใช้สมมติอยู่ในทฤษฎีธรรมชาติ  $(\xi, \eta)$  บนระนาบกึ่งกลางของชิ้นส่วน และสัมพันธ์กับตัวแปร  $\zeta$  ซึ่งแปรผันตามความหนาของแผ่นจาก  $-1/2$  ถึง  $1/2$

กำหนดให้  $e$  เท่ากับความหนาของแผ่นพื้น และ  $h = e/2$  สมการของความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ

$$\begin{aligned} w_q &= w_q(\xi, \eta) \\ u_q &= -h\zeta\theta_{xq}(\xi, \eta) \\ v_q &= -h\zeta\theta_{yq}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{และ } w_\lambda &= w_\lambda(\xi, \eta) \\ u_\lambda &= -h\zeta\theta_{x\lambda}(\xi, \eta) \\ v_\lambda &= -h\zeta\theta_{y\lambda}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

โดยที่	$w_q$	คือการกระจัดในแนวตั้ง
	$w_\lambda$	คือการกระจัดส่วนเพิ่มของการกระจัดในแนวตั้ง
	$\theta_{xq}, \theta_{yq}$	คือมุมหมุนทั้งสองทิศทาง
	$\theta_{x\lambda}$ และ $\theta_{y\lambda}$	คือมุมหมุนส่วนเพิ่มของมุมหมุนทั้งสองทิศทาง
	$h$	คือระยะจากระนาบกึ่งกลางถึงขอบของชิ้นส่วน = $e/2$
	$\zeta$	คือระยะจากระนาบกึ่งกลางถึงจุดใดๆ วัดตามแนวแกน $z$

หลักการแปรผันของเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์ ที่ใช้คือ

$$\Pi_R = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \sigma^T s \sigma + \sigma^T (\partial u_q) - \sigma^T (\partial u_\lambda) \right] dV - \int_{S_\sigma} \left[ (u_q + u_\lambda) \bar{T} \right] ds \quad (3.2.3)$$

- โดยที่  $\sigma$  คือความเค้น  
 $S$  คือเมตริกซ์ปรุงแต่ง (constitutive matrix)  
 $V$  คือปริมาตรของชิ้นส่วน  
 $S_0$  คือบริเวณขอบที่มีการกำหนดค่าแรง  $T$   
 $D$  คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์

เมื่อแปรผันสมการที่ (3.2.3) เทียบกับ  $u_x$  จะได้  $D^T \sigma = 0$  เป็นสมการสมมูลที่ใช้บังคับสมดุลของความเค้นที่สมมติขึ้น สำหรับความเค้นต่างๆ สามารถคำนวณได้จากความเค้นที่สมมติขึ้น คือ

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= h \zeta \bar{\sigma}_{xx}(\xi, \eta) \\
 \sigma_{yy} &= h \zeta \bar{\sigma}_{yy}(\xi, \eta) \\
 \sigma_{xy} &= h \zeta \bar{\sigma}_{xy}(\xi, \eta) \\
 \sigma_{xz} &= \frac{h^2}{2} (1 - \zeta^2) \bar{\sigma}_{xz}(\xi, \eta) \\
 \sigma_{yz} &= \frac{h^2}{2} (1 - \zeta^2) \bar{\sigma}_{yz}(\xi, \eta) \\
 \sigma_{zz} &= \frac{h^3}{6} (\zeta^3 - 3\zeta - 2) \bar{\sigma}_{zz}(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

โดยที่  $\bar{\sigma}$  เป็นฟังก์ชันของความเค้นที่สมมติขึ้นในพิกัดธรรมชาติ

ฟังก์ชันของการกระจัดสมมติให้เป็นฟังก์ชันของระดับชั้นความเสรีทั้งสามตัว โดยฟังก์ชันที่ใช้เป็นฟังก์ชัน  
 สัมฐานลากรองจ์(Lagrange interpolation function) มีรูปแบบดังนี้

$$\begin{Bmatrix} w_q \\ \theta_{xq} \\ \theta_{yq} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{NN} N^i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} w_{qi} \\ \theta_{xqi} \\ \theta_{yqi} \end{Bmatrix} \tag{3.2.5}$$

โดยที่  $NN$  คือจำนวนจุดต่อในชิ้นส่วน และ  $N^i(\xi, \eta)$  คือฟังก์ชันสัมฐานลากรองจ์ที่จุดต่อ  $i$  ดังนั้นจากสมการที่ (3.2.1) สามารถเขียนความสัมพันธ์ของการกระจัดกับระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ เป็น  $\{u_q\} = [N]\{q\}$  โดยเมตริกซ์  $[N]$  เป็นฟังก์ชันสัมฐานดังสมการที่ (3.2.6)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & & \\ & h\zeta N_1 & & & & & \\ & & N_2 & & & & \\ & & & h\zeta N_2 & & & \\ & & & & N_3 & & \\ & & & & & h\zeta N_3 & \\ & & & & & & N_4 \\ & & & & & & & h\zeta N_4 \\ & & & & & & & & h\zeta N_4 \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

และจากที่ได้  $\{u\}$  นำไปหาเมทริกซ์ความเครียด  $\epsilon_q^T = \langle \epsilon_{xxq} \quad \epsilon_{yyq} \quad \epsilon_{xyq} \quad \epsilon_{xzq} \quad \epsilon_{yzq} \rangle$  และเขียนให้อยู่ในรูปของระดับชั้นความเครียดที่จุดต่อต่างๆ  $q$  ได้ดังนี้

$$\epsilon_q(\xi, \eta) = B_q(\xi, \eta) \mathbf{q} \quad (3.2.7)$$

โดยที่  $B_q(\xi, \eta) = [D][N]$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B_q] = \begin{bmatrix} 0 & h_5 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & h_5 \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & h_5 \frac{\partial N_1}{\partial y} & h_5 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & h_5 \frac{\partial N_2}{\partial y} & h_5 \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & h_5 \frac{\partial N_3}{\partial y} & h_5 \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & h_5 \frac{\partial N_4}{\partial y} & h_5 \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & hN_1 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & hN_2 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & hN_3 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & hN_4 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & hN_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & hN_2 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & hN_3 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & hN_4 \end{bmatrix}$$

$$(3.2.8)$$

สำหรับการสมมติฟังก์ชันของการกระจัดส่วนที่เพิ่มขึ้น  $w_\lambda$ ,  $\theta_{x\lambda}$  และ  $\theta_{y\lambda}$  จะอยู่ในรูปของพารามิเตอร์  $\lambda_1, \dots, \lambda_j$  กับฟังก์ชันสัมฐานที่เป็นฟังก์ชันพองสุง  $\Theta$

$$\begin{Bmatrix} w_\lambda \\ \theta_{x\lambda} \\ \theta_{y\lambda} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{NB} \Theta_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \end{Bmatrix} \quad (3.2.9)$$

โดยที่ NB คือจำนวนพจน์  $\lambda$  และ  $\Theta_j(\xi, \eta)$  คือฟังก์ชันพองสุงพจน์ที่  $j$  และเช่นเดียวกับการกระจัดปกติ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ของการกระจัดส่วนที่เพิ่มขึ้นกับระดับชั้นความเสรี คือ  $\{u_\lambda\} = [\Theta]\{\lambda\}$  โดยที่  $[\Theta]$  คือ ฟังก์ชันสัมฐานของฟังก์ชันพองสุง

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \dots & \Theta_A & & & & & & & \\ & & & & h\zeta\Theta_1 & h\zeta\Theta_2 & \dots & h\zeta\Theta_B & & & \\ & & & & & & & & h\zeta\Theta_1 & h\zeta\Theta_2 & \dots & h\zeta\Theta_C \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

โดยที่ A คือจำนวนพจน์ของฟังก์ชันสัมฐานสำหรับตัวแปร  $w_\lambda$

B คือจำนวนพจน์ของฟังก์ชันสัมฐานสำหรับตัวแปร  $\theta_{x\lambda}$

C คือจำนวนพจน์ของฟังก์ชันสัมฐานสำหรับตัวแปร  $\theta_{y\lambda}$

$$A + B + C = NB$$

และความสัมพันธ์ของความเครียดและตัวแปร  $\lambda$  คือ

$$\varepsilon_\lambda(\xi, \eta) = B_\lambda(\xi, \eta) \lambda \quad (3.2.11)$$

โดยที่  $B_\lambda(\xi, \eta) = [D][\Theta]$  และค่า  $[D]$  เหมือนในสมการที่ (3.2.7) ดังนั้น เมตริกซ์  $[B_\lambda]$  เท่ากับ

$$[B_\lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & h\zeta \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} & h\zeta \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} & \dots & h\zeta \frac{\partial \Theta_B}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h\zeta \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} & h\zeta \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} & \dots & h\zeta \frac{\partial \Theta_{NB}}{\partial y} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h\zeta \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} & h\zeta \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} & \dots & h\zeta \frac{\partial \Theta_B}{\partial y} & h\zeta \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} & h\zeta \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} & \dots & h\zeta \frac{\partial \Theta_{NB}}{\partial x} \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \Theta_A}{\partial x} & h\Theta_1 & h\Theta_2 & \dots & h\Theta_B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \Theta_A}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 & h\Theta_1 & h\Theta_2 & \dots & h\Theta_{NB} \end{bmatrix}$$

การสมมติฟังก์ชันของความเค้น  $\bar{\sigma}$  แทนด้วย

$$\bar{\sigma} = P(\xi, \eta) \beta \quad (3.2.13)$$

โดยที่  $P$  คือเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันของความเค้นในพิกัดธรรมชาติและ  $\beta$  คือพารามิเตอร์ของความเค้น แทนค่าจากสมการที่ (3.2.7), (3.2.11) และ (3.2.13) ลงในสมการที่ (3.2.3) สามารถเขียนเป็นสมการได้ใหม่คือ

$$\prod_{e=1}^n \left[ -\frac{1}{2} \beta^T H \beta + \beta^T G q + \beta^T R \lambda - F_1^T q - F_2^T \lambda \right] \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \quad H &= \frac{2h^3}{3} \int_V P^T S P dV \\ G &= \frac{2h^3}{3} \int_V P^T B_q dV \\ R &= \frac{2h^3}{3} \int_V P^T B_\lambda dV \\ F_1^T q &= \int_{S_\sigma} u_q \bar{T} dS \\ F_2^T \lambda &= \int_{S_\sigma} u_\lambda \bar{T} dS \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

แปรผันสมการที่ (3.2.14) เทียบกับ  $\beta$  และ  $\lambda$

$$\beta = H^{-1} (G q + R \lambda) \quad (3.2.16)$$

$$R^T \beta = F_2 \quad (3.2.17)$$

จากสมการทั้งสองข้างต้น

$$\lambda = -(R^T H^{-1} R)^{-1} (R^T H^{-1} G q - F_2) \quad (3.2.18)$$

แทนค่าสมการที่ (3.2.18) ลงในสมการที่ (3.2.16)

$$\beta = H^{-1} \tilde{G} q + H^{-1} R (R^T H^{-1} R)^{-1} F_2 \quad (3.2.19)$$

$$\text{โดยที่} \quad \tilde{G} = G - R (R^T H^{-1} R)^{-1} R^T H^{-1} G \quad (3.2.20)$$

แทนค่าสมการที่ (3.2.19) และ (3.2.20) ลงในสมการที่ (3.2.14) เพื่อกำจัดตัวแปร  $\beta$  และ  $\lambda$

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \left[ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} \right] \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.2.22)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{R}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{F}_2 \quad (3.2.23)$$

โดยที่  $\mathbf{k}$  คือเมทริกซ์สติเฟนของชิ้นส่วน

เมื่อหาค่าการกระจัดที่จุดต่อได้นำค่าการกระจัด  $\{q\}$  ไปหาแรงภายในได้โดย

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [D_\kappa] & 0 \\ 0 & [D_\gamma] \end{bmatrix} [B_q] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3.2.24)$$

### 3.2.1 การเลือกฟังก์ชันของความเค้นและฟังก์ชันพองสฟู

พิจารณาหลักของการแปรผันในสมการที่ (3.2.3) เมื่อแปรผันเทียบกับ  $u_\lambda$  จะได้สมการเงื่อนไขสำหรับความเค้นเพื่อให้เป็นไปตามสมการสมดุล และเมื่อแปรผันเทียบกับความเค้นจะได้สมการความสัมพันธ์ของวัสดุระหว่างความเค้นและการกระจัดทั้ง  $u_q$  กับ  $u_\lambda$  ในที่นี้จะพิจารณาถึงการเลือกจำนวนพารามิเตอร์ในฟังก์ชันของความเค้นและฟังก์ชันพองสฟู เพื่อดำรงเสถียรภาพของชิ้นส่วนและเพื่อบังคับสมการสมดุล จำนวนของพารามิเตอร์ทั้งสองจำเป็นต้องสอดคล้องกัน โดยหลักในการพิจารณาเลือกจะกล่าวถึงในอันดับต่อไป

การเลือกสมมติฟังก์ชันของความเค้นนั้น โดยทั่วไปความเค้นแต่ละตัวจะเป็นอิสระต่อกัน และฟังก์ชันจะไม่สอดคล้องกับสมการสมดุล และแต่ละพจน์ของฟังก์ชันจะอยู่ในพิกัดธรรมชาติ ซึ่งจะทำให้ชิ้นส่วนมีความยืดหยุ่นเสมอแม้ว่าฟังก์ชันพหุนามที่ใช้จะ ไม่มีความบริบูรณ์ก็ตาม นอกจากนี้การเลือกฟังก์ชันของความเค้นแต่ละตัวที่เป็นอิสระต่อกันนั้นทำให้การสร้างเมทริกซ์เฟล็กซิบิลิตี  $\{H\}$  มีลักษณะเป็นแถบ ทำให้มีประสิทธิภาพในการคำนวณเมทริกซ์ผกผัน  $\{H^{-1}\}$

พิจารณาหลักการแปรผันในสมการที่ (3.2.14) แปรผันสมการดังกล่าวเทียบกับตัวแปร  $\beta$   $q$  และ  $\lambda$  ตามลำดับจะได้ผลลัพธ์ดังสมการที่ (3.2.1.1) และนำไปเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (3.2.1.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} ; \quad & -H\beta + Gq + R\lambda = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q} ; \quad & G^T \beta = f_q \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} ; \quad & R^T \beta = f_\lambda \end{aligned} \right\} (3.2.1.1)$$

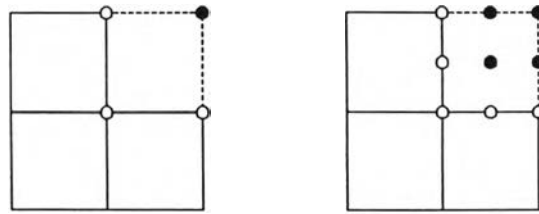
$$\begin{bmatrix} -H & G & R \\ G^T & 0 & 0 \\ R^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_q \\ f_\lambda \end{bmatrix} \quad (3.2.1.2)$$

พิจารณาเมทริกซ์ในสมการที่ (3.2.1.2) ในแถวที่หนึ่งจะเป็นสมการกฎของวัสดุ (constitutive equation) ซึ่งจำนวนแถวทั้งหมดนั้นจะมีค่าเท่ากับ  $n_\beta$  คือจำนวนพารามิเตอร์ทั้งหมดของความเค้น  $\beta$  ที่ใช้ ส่วนแถวที่สองและสามนั้นจะเป็นสมการสมดุล (equilibrium equations) โดยจำนวนแถวจะเท่ากับจำนวนของพารามิเตอร์ของการกระจัดทั้งหมด ซึ่งประกอบด้วยจำนวนระดับชั้นความเสถียรของจุดต่อทั้งหมดรวมกับจำนวนพจน์ของพารามิเตอร์ของฟังก์ชันพองสฟู เมื่อแยกพิจารณาเพียงหนึ่งชั้นส่วน อัตราส่วนระหว่างจำนวนของสมการกฎของวัสดุกับจำนวนของสมการสมดุล คือ  $r_c$  สำหรับในสมการไฟไนต์เอเลเมนต์อัตราส่วน  $r_c$  คือ

$$r_c = \frac{n_\beta}{(n_q + n_\lambda)} \quad (3.2.1.3)$$

โดยที่  $n_\beta$  คือจำนวนพารามิเตอร์ของความเค้น  $n_q$  คือจำนวนของระดับชั้นความเสถียรของจุดต่อที่ไม่ถูกยึดรั้งเมื่อเพิ่มชั้นส่วนในแผ่นพื้น เช่น เมื่อเพิ่มชั้นส่วน 4 จุดต่อและ 9 จุดต่อชั้นหนึ่งชั้น มีค่า  $n_q$  เท่ากับ 3 และ 12 ตามลำดับ โดยแสดงในรูปที่ 3.2.1 ในหน้าถัดไป และ  $n_\lambda$  คือจำนวนพารามิเตอร์ของฟังก์ชันพองสฟูในชั้นส่วน จากการคำนวณจากสมการหลักของการแปรผัน ค่า  $r_c$  ควรมีค่าเท่ากับ 2 และถ้า  $r_c$  มีค่าน้อยกว่า 2 มากหมายถึงมีสมการบังคับความสมดุลมากเกินไป ในทางกลับกันเมื่อค่า  $r_c$  มีค่ามากกว่า 2 มากนั้น สมการบังคับความสมดุลของความเค้นจะไม่เพียงพอ ทำให้คำตอบของความเค้นอาจจะมีค่าไม่ถูกต้อง





(ก)

(ข)

- จุดต่อของชั้นส่วนใหม่ที่ถูกรื้อครั้ง
- จุดต่อของชั้นส่วนใหม่ที่ไม่ถูกรื้อครั้ง

รูปที่ 3.2.1 (ก) กรณีชั้นส่วน 4 จุดต่อ เมื่อเพิ่มชั้นส่วนใหม่จะมีหนึ่งจุดต่อที่ไม่ถูกรื้อครั้ง ดังนั้น  $n_q = 3$   
 (ข) กรณีชั้นส่วน 9 จุดต่อ เมื่อเพิ่มชั้นส่วนใหม่จะมีสี่จุดต่อที่ไม่ถูกรื้อครั้ง ดังนั้น  $n_q = 12$

โดยทั่วไปในปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์ค่า  $r_c$  จะมีค่ามากกว่า 2 หมายถึงคำตอบที่ได้จะแสดงออกมาว่า ชั้นส่วนมีสตีเฟนสมากเกินไป เช่น ในชั้นส่วนความเค้นพันธุ์ทาง 4 จุดต่อ เมื่อใช้ค่า  $n_\beta = 20$  ค่า  $n_q = 3$  ค่า  $r_c = 6.67$  และในทำนองเดียวกัน ชั้นส่วน 9 จุดต่อ เมื่อใช้ค่า  $n_\beta = 45$  ค่า  $n_q = 12$  ค่า  $r_c = 3.75$  ซึ่งชั้นส่วนทั้งสองแบบนี้จะเป็นชั้นส่วนที่มีสตีเฟนสมากเกินไป เมื่อเพิ่มฟังก์ชันพองสฟู  $n_\lambda$  เข้าไป เราสามารถเลือกจำนวน  $n_\lambda$  เพื่อให้ค่า  $r_c$  ในสมการที่ (3.2.1.3) มีค่าใกล้เคียงกับ 2 มากที่สุด

สำหรับชั้นส่วน 4 จุดต่อที่ใช้ฟังก์ชันพองสฟู ในที่นี้ใช้จำนวนพารามิเตอร์ของความเค้น  $n_\beta = 20$  ค่า  $n_q = 3$  และเลือกใช้จำนวนพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันพองสฟู  $n_\lambda = 9$  ดังนั้นค่า  $r_c = 1.67$

ฟังก์ชันของสนามความเค้นสำหรับชั้นส่วน 4 จุดต่อ

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{20} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.4)$$

โดยที่  $P_1 = P_2 = \{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \}$

ฟังก์ชันพองสบู่ของสนามการกระจัดที่เพิ่มขึ้นสำหรับชิ้นส่วน 4 จุดต่อ

$$\begin{Bmatrix} w_\lambda \\ \theta_{x\lambda} \\ \theta_{y\lambda} \end{Bmatrix} = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.5)$$

โดยที่  $L_1 = L_2 = \{1 \quad \xi \quad \eta\}$

สำหรับชิ้นส่วน 9 จุดต่อที่ใช้ฟังก์ชันพองสบู่ ในที่นี้ใช้จำนวนพารามิเตอร์ของความเค้น  $n_\beta = 46$  ค่า  $n_q = 12$  และเลือกใช้จำนวนพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันพองสบู่  $n_\lambda = 11$  ดังนั้นค่า  $r_c = 2.0$

ฟังก์ชันของความเค้นสำหรับชิ้นส่วน 9 จุดต่อ

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{46} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.6)$$

โดยที่  $P_1 = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3\}$

$P_2 = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2\}$

ฟังก์ชันพองสบู่ของสนามการกระจัดที่เพิ่มขึ้นสำหรับชิ้นส่วน 9 จุดต่อ

$$\begin{Bmatrix} w_\lambda \\ \theta_{x\lambda} \\ \theta_{y\lambda} \end{Bmatrix} = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{11} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.7)$$

โดยที่  $L_1 = \xi^2\eta^2 \{ \xi \quad \eta \quad \xi\eta \}$

$L_2 = \xi^2\eta^2 \{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \}$

การใช้ฟังก์ชันพองสั่นนอกจากจะใช้ควบคุมสมดุลของความเค้นแล้วยังใช้แก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนได้ด้วย พิจารณาสมการของความเค้นในสมการที่ (3.2.23) และ (3.2.25) จัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_b \\ \bar{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b & 0 \\ 0 & P_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_b \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } \bar{\sigma}_b^T &= \langle \bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy} \quad \bar{\sigma}_{xy} \rangle \\ \bar{\sigma}_s^T &= \langle \bar{\sigma}_{xz} \quad \bar{\sigma}_{yz} \rangle \end{aligned}$$

สำหรับสมการของความเครียด จัดรูปใหม่ให้อยู่ในลักษณะเดียวกันดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_{qb} \\ \epsilon_{qs} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{qb} \\ B_{qs} \end{bmatrix} \{q\} \\ \begin{Bmatrix} \epsilon_{\lambda b} \\ \epsilon_{\lambda s} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{\lambda b} \\ B_{\lambda s} \end{bmatrix} \{\lambda\} \end{aligned} \quad (3.2.1.9)$$

- โดยที่  $\epsilon_{qb}$  = ความเครียดจากการกระจัดในส่วนของแรงคัต  
 $\epsilon_{qs}$  = ความเครียดจากการกระจัดในส่วนของแรงเฉือน  
 $B_{qb}$  = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดในส่วนของแรงคัต  
 $B_{qs}$  = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดในส่วนของแรงเฉือน  
 $\epsilon_{\lambda b}$  = ความเครียดจากการกระจัดส่วนเพิ่มในส่วนของแรงคัต  
 $\epsilon_{\lambda s}$  = ความเครียดจากการกระจัดส่วนเพิ่มในส่วนของแรงเฉือน  
 $B_{\lambda b}$  = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดส่วนเพิ่มในส่วนของแรงคัต  
 $B_{\lambda s}$  = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดส่วนเพิ่มในส่วนของแรงเฉือน

แทนค่าสมการที่ (3.2.1.8) และ (3.2.1.9) ลงในสมการที่ (3.2.3) แล้วแปรผันเทียบกับ  $\beta_s$  จะได้

$$\frac{2h^3}{3} \int_V P_s^T \left( -S_s P_s \beta_s + B_{qs} q + B_{\lambda s} \lambda \right) dV = 0 \quad (3.2.1.10)$$

จัดรูปของสมการใหม่เป็น

$$-H_s \beta_s + \frac{2h^3}{3} \int_V P_s^T \left( B_{qs} q + B_{\lambda s} \lambda \right) dV = 0 \quad (3.2.1.11)$$

$$\text{โดยที่ } H_s = \frac{8h^5 (1+U)}{15E} \int_V P_s^T P_s dV = \text{เมตริกซ์เฟลกซ์IBILิตีสำหรับแรงเฉือน}$$

ในกรณีที่แผ่นพื้นเข้าใกล้เป็นแผ่นพื้นบาง ค่า  $H_s \approx 0$  สมการที่ (3.2.1.11) ลดรูปเหลือ

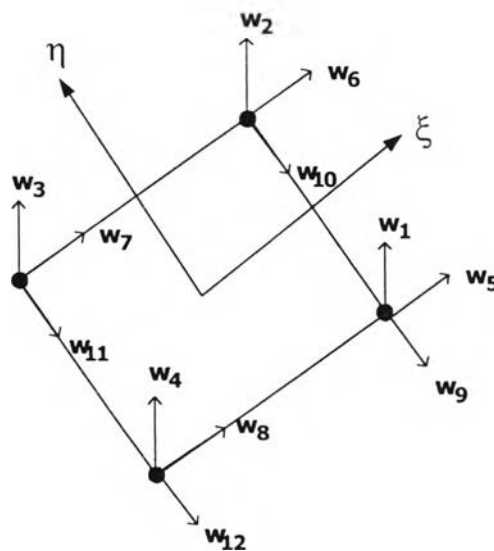
$$\int_V P_s^T (B_{qs} q + B_{\lambda_s} \lambda) dV = 0 \quad (3.2.1.12)$$

การใช้ฟังก์ชันพองสบู่เพื่อลดปัญหาการขีดที่เกิดขึ้นในสมการที่ (3.2.1.12) แสดงให้เห็นได้โดยพิจารณาชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากับ 2 หน่วย เรียงลำดับระดับชั้นความเสรีที่จุดต่อตามรูปที่ 3.2.1 แทนค่าฟังก์ชันพื้นฐานและฟังก์ชันพองสบู่ลงในสมการที่ (3.2.5) และ (3.2.9) จะได้ฟังก์ชันการกระจัดดังนี้

$$w = (w_1 + \lambda_1) + w_2 \xi + w_3 \eta + w_4 \xi \eta - \lambda_1 \xi^2 - \lambda_1 \eta^2 - \lambda_2 \xi^3 - \lambda_3 \xi^2 \eta - \lambda_2 \xi \eta^2 - \lambda_3 \eta^3 + \lambda_1 \xi^2 \eta^2 + \lambda_2 \xi^3 \eta^2 + \lambda_3 \xi^2 \eta^3$$

$$\theta_x = (w_5 + \lambda_4) + w_6 \xi + w_7 \eta + w_8 \xi \eta - \lambda_4 \xi^2 - \lambda_4 \eta^2 - \lambda_5 \xi^3 - \lambda_6 \xi^2 \eta - \lambda_5 \xi \eta^2 - \lambda_6 \eta^3 + \lambda_4 \xi^2 \eta^2 + \lambda_5 \xi^3 \eta^2 + \lambda_6 \xi^2 \eta^3$$

$$\theta_y = (w_9 + \lambda_7) + w_{10} \xi + w_{11} \eta + w_{12} \xi \eta - \lambda_7 \xi^2 - \lambda_7 \eta^2 - \lambda_8 \xi^3 - \lambda_9 \xi^2 \eta - \lambda_8 \xi \eta^2 - \lambda_9 \eta^3 + \lambda_7 \xi^2 \eta^2 + \lambda_8 \xi^3 \eta^2 + \lambda_9 \xi^2 \eta^3 \quad (3.2.1.13)$$



รูปที่ 3.2.2 การเรียงลำดับพารามิเตอร์ของการกระจัดที่จุดต่อในชิ้นส่วน

โดยที่  $w_1$  ถึง  $w_{12}$  เป็นพารามิเตอร์ของการกระจัดในหนึ่งชั้นส่วน แทนค่าสมการที่ (3.2.1.13) ลงในสมการที่ (3.2.1.12) แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} & \delta\beta_{13} \left[ 4 \left( -w_5 + w_2 - \frac{4}{9} \lambda_4 \right) \right] + \delta\beta_{14} \left[ \frac{4}{3} \left( -w_6 - \frac{4}{3} \lambda_1 - \frac{4}{15} \lambda_5 \right) \right] \\ & + \delta\beta_{15} \left[ \frac{4}{3} \left( -w_7 + w_4 - \frac{4}{15} \lambda_6 \right) \right] + \delta\beta_{16} \left[ \frac{4}{3} \left( -w_8 - \frac{4}{5} \lambda_3 \right) \right] \\ & + \delta\beta_{17} \left[ 4 \left( -w_9 + w_3 - \frac{4}{9} \lambda_7 \right) \right] + \delta\beta_{19} \left[ \frac{4}{3} \left( -w_{11} - \frac{4}{3} \lambda_1 - \frac{4}{15} \lambda_9 \right) \right] \\ & + \delta\beta_{18} \left[ \frac{4}{3} \left( -w_{10} + w_4 - \frac{4}{5} \lambda_8 \right) \right] + \delta\beta_{20} \left[ \frac{4}{9} \left( -w_{12} - \frac{4}{5} \lambda_2 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.1.14)$$

ถ้าลองพิจารณาในกรณีที่ไมใช้ฟังก์ชันพองสบู่ ผลลัพธ์ที่ได้จากการอินทิเกรตในสมการที่ (3.2.1.14) ค่า  $w_6$   $w_8$   $w_{11}$  และ  $w_{12}$  จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่าของพารามิเตอร์ทั้งสี่ตัวคือมุมหมุนที่เกิดขึ้น ดังนั้นเมื่อมีค่าเท่ากับศูนย์จึงแสดงว่าเกิดการยึดขึ้นในชั้นส่วน แต่เมื่อมีการเพิ่มพารามิเตอร์จากฟังก์ชันพองสบู่เข้าไปจะทำให้มุมหมุนทั้งสี่ตัวข้างต้น ไม่เท่ากับศูนย์ จึงไม่มีการยึดเกิดขึ้น

### 3.2.2 แนวคิดในการปรับปรุงชั้นส่วนฟังก์ชันพองสบู่

พิจารณาฟังก์ชันพองสบู่ของชั้นส่วน 4 จุดต่อในสมการที่ 3.2.1.5 จะเห็นว่าฟังก์ชันที่ใช้มีกำลังสูงและมีจำนวนพจน์ 9 พจน์ ซึ่งผู้วิจัยคิดว่าน่าจะมีจำนวนพจน์ที่มากเกินไป ในกรณีที่ต้องการให้พหุนามของความเครียดที่คำนวณจากการกระจัดสอดคล้องกับพหุนามของสนามความเค้นที่สมมติขึ้น จำนวนพจน์ของพหุนามของการกระจัดจึงควรจะมีเฉพาะพจน์ที่ขาดไป เมื่อคำนวณความเครียดจากการกระจัดนั้นๆ จึงไม่จำเป็นต้องสมมติให้ครบถึงสามพจน์ในตัวแปรการกระจัดหนึ่งตัว เพราะฟังก์ชันพองสบู่เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นมาจากฟังก์ชันการกระจัด จึงควรจะมีแค่เพียงพจน์ที่หายไป เพราะเมื่อฟังก์ชันมีกำลังสูงและจำนวนพจน์มากจะทำให้การคำนวณใช้เวลามากขึ้น ดังนั้นจึงลองเปลี่ยนสมมติฟังก์ชันพองสบู่ใหม่เป็น

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & & & & \\ & & & \xi & \eta & & & & \\ & & & & & \xi & \eta & & \\ & & & & & & & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_7 \end{Bmatrix} \quad (3.2.2.1)$$

เมื่อพิจารณาค่า  $r_c$  จากสมการที่ (3.2.1.3) แทนค่า  $n\beta = 20$ ,  $n_q = 3$  และ  $n_\lambda = 7$  ดังนั้นจะได้ค่า  $r_c = 2$  ซึ่งตรงกับข้อแนะนำที่ต้องการ ชั้นส่วนที่ปรับปรุงขึ้นนี้จะนำไปทดสอบประสิทธิภาพในบทที่ 4 โดยใช้ชื่อว่า BUBBLE4m

### 3.3 ชิ้นส่วน HMPL5 <sup>(14)</sup>

ชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมใดๆ ความหนาเท่ากับ  $t$  ระบาย  $x$ - $y$  ตั้งอยู่บนผิวกึ่งกลางของแผ่นพื้น และแกน  $z$  อยู่ในทิศตั้งฉากกับผิวกึ่งกลาง ส่วนทิศทางการกระจัดและความเค้นต่างๆ ที่มีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงในรูปที่ 3.3.1 และ 3.3.2 แผ่นพื้นดังกล่าวพิจารณาโดยตั้งอยู่บนทฤษฎีของมินด์ลิน-ไรส์เนอร์ คุณสมบัติของแผ่นเหมือนกันในทุกทิศทาง และเป็นวัสดุที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น หลักการแปรผันที่ใช้ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสคือ

$$\Pi_R = \int_A \left[ -\frac{1}{2} M^T S_K M - \frac{1}{2} Q^T S_Y Q + M^T K + Q^T \gamma \right] dA - W \quad (3.3.1)$$

โดยที่  $M = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T$  เป็นเวกเตอร์ของโมเมนต์

$Q = \{Q_x \quad Q_y\}^T$  เป็นเวกเตอร์ของแรงเฉือน

$$K = [K_x \quad K_y \quad K_{xy}]^T = \left[ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right]^T$$

เป็นเวกเตอร์ของความเครียดเนื่องจากการคดหรือเวกเตอร์ความโค้ง

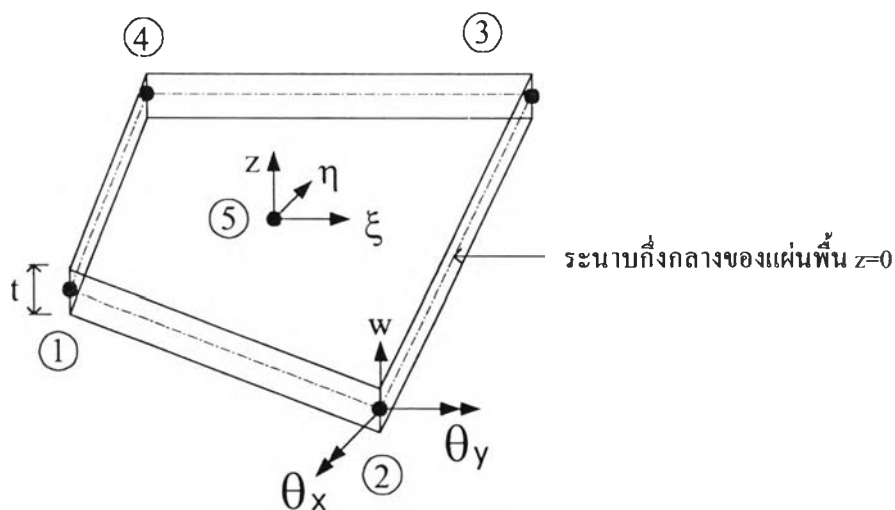
$$\gamma = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T = \left[ -\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \quad -\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right]^T \text{ เป็นเวกเตอร์ของความเครียดเฉือน}$$

$u = [w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T$  เป็นเวกเตอร์ของการกระจัด

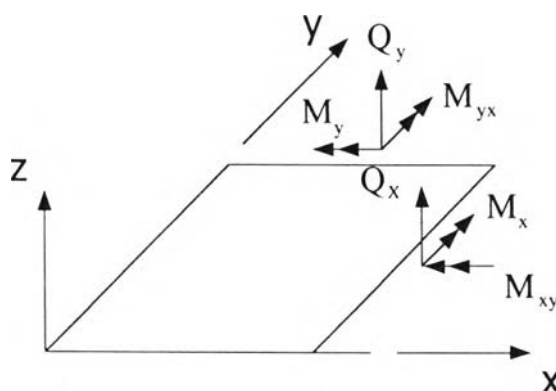
$$S_K = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมตริกซ์ปรุ้งแต่งในส่วนของการคด}$$

$$S_Y = \frac{1}{kGt} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมตริกซ์ปรุ้งแต่งในส่วนของการเฉือน}$$

$W =$  พจน์ของน้ำหนักบรรทุกบนพื้นที่  $A$



รูปที่ 3.3.1 ลักษณะของแผ่นพื้นและทิศทางที่เป็นบวกของการกระจัด<sup>(14)</sup>



รูปที่ 3.3.2 ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้นและแรงเฉือน<sup>(14)</sup>

จากสมการที่ (3.3.1) ในหลักการแปรผันใช้สนามของตัวแปรสองสนาม คือ สนามของการกระจัด ( $w$   $\beta_x$   $\beta_y$ ) และสนามของโมเมนต์ ( $M_x$   $M_y$   $M_{xy}$   $Q_x$   $Q_y$ ) โดยที่สนามของการกระจัดมีความต่อเนื่องแบบ  $C^0$  แต่สนามของความเค้นมีความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  (หมายถึง ไม่จำเป็นต้องมีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วน) จากนั้นกำจัดพารามิเตอร์ของความเค้นออกไปในระหว่างการคำนวณเมตริกซ์สติเฟนของชิ้นส่วน

### 3.3.1 การสร้างสมการโดยไฟไนต์เอลิเมนต์ผสม

ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วน HMPLS สนามการกระจัด  $u$  อยู่ในพจน์ของการกระจัดที่จุดต่อ ส่วนสนามของโมเมนต์  $M$  และแรงเฉือน  $Q$  จะอยู่ในพจน์ของพารามิเตอร์  $\beta$  และ  $\alpha$  ตามลำดับดังนี้

$$\left. \begin{aligned} u &= Nq \\ M &= P_\beta \beta \\ Q &= P_\alpha \alpha \end{aligned} \right\} (3.3.1.1)$$

โดยที่  $N$   $P_\beta$  และ  $P_\alpha$  เป็นเมตริกซ์ของฟังก์ชันฐานที่ใช้ประมาณการกระจัด โมเมนต์คัต และแรงเฉือน ตามลำดับ  $q$  คือเวกเตอร์ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดของชิ้นส่วน  $\beta$  คือพารามิเตอร์ของโมเมนต์คัต  $\alpha$  คือพารามิเตอร์ของแรงเฉือน โดยทั่วไปฟังก์ชันเหล่านี้จะอยู่ในพิกัดธรรมชาติ ส่วนการเลือกฟังก์ชันที่จะมาใช้ประมาณสนามความเค้นนั้น เดิมในวิธีความเค้นพันรู้ทาง (hybrid stress method) จะเลือกใช้ฟังก์ชันที่ทำให้ความเค้นได้สมดุล แต่ในวิธีนี้จะไม่กำหนดให้ฟังก์ชันของความเค้นต้องมีความสมดุล แต่จะใช้พารามิเตอร์ของการกระจัดภายในเป็นสมการบังคับแทน จากสมการที่ (3.3.1.1) แทนค่าต่างๆ ลงในสมการที่ (3.3.1) สามารถจัดพจน์ต่างๆ ของสมการให้เหมาะสมได้ดังสมการที่ (3.3.1.2)

$$\Pi_R = -\frac{1}{2} \beta^T H_\beta \beta + \beta^T G_\beta q - \frac{1}{2} \alpha^T H_\alpha \alpha + \alpha^T G_\alpha q - Q^T q \quad (3.3.1.2)$$

โดยที่

$$H_\beta = \int_A P_\beta^T S_K P_\beta dA$$

$$H_\alpha = \int_A P_\alpha^T S_\gamma P_\alpha dA$$

$$G_\beta = \int_A P_\beta^T B_K dA$$

$$G_\alpha = \int_A P_\alpha^T B_\gamma dA$$

$$\varepsilon = B_K q$$

$$\gamma = B_\gamma q$$

และ  $Q$  คือเวกเตอร์ของแรงเทียบเท่ากระทำที่จุดต่อ (equivalent nodal force) โดยที่  $W = Q^T q$

เมื่อแปรผันสมการที่ (3.3.1.2) เทียบกับพารามิเตอร์  $\beta$  และ  $\alpha$  จะได้

$$\beta = H_\beta^{-1} G_\beta q \quad \text{และ} \quad \alpha = H_\alpha^{-1} G_\alpha q \quad (3.3.1.3)$$

ดังนั้นสามารถกำจัดพารามิเตอร์  $\beta$  และ  $\alpha$  ออกไปซึ่งจะทำให้เหลือเพียงตัวเดียวคือ  $q$  โดยแทนสมการที่ (3.3.1.3) ลงในสมการที่ (3.3.1.2) และจัดรูปใหม่

$$\Pi_R = \frac{1}{2} q^T K q - Q^T q \quad (3.3.1.4)$$



โดยที่  $K$  เป็นเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนซึ่งได้มาจากผลรวมของเมทริกซ์สติฟเนสจากการตัดและเมทริกซ์สติฟเนสเฉือน ( $K = K_b + K_s$ )

$$K_b = G_\beta^T H_\beta^{-1} G_\beta \quad \text{และ} \quad K_s = G_\alpha^T H_\alpha^{-1} G_\alpha \quad (3.3.1.5)$$

### 3.3.2 การเลือกฟังก์ชันสำหรับสนามการกระจัดและความเค้น

ชิ้นส่วน HMPL5 เป็นชิ้นส่วนที่มี 5 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อมีระดับชั้นความเสรีเท่ากับสาม และจุดต่อที่ห้าอยู่ที่จุดศูนย์กลางของแผ่นพื้น ลักษณะของฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามของการกระจัดและสนามของความเค้นเป็นดังนี้

#### สนามการกระจัด (displacement field)

ฟังก์ชันพื้นฐานของสนามการกระจัดใช้ฟังก์ชันการประมาณพหุนามของลากรองจ์สำหรับชิ้นส่วนสองมิติ ดังนี้

$$w = \sum_{i=1}^5 N_i w_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^5 N_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^5 N_i \theta_{yi} \quad (3.3.2.1)$$

โดยที่ฟังก์ชันพื้นฐาน  $N_i$  คือ

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) - \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) - \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) - \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) - \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \\ N_5 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2.2)$$

#### สนามความเค้น (stress field)

สำหรับการเลือกฟังก์ชันเพื่อประมาณสนามของโมเมนต์ โดยแทนฟังก์ชันลงไปเมทริกซ์  $P_\beta$  และ  $P_\alpha$  เพื่อใช้ประมาณสนามของโมเมนต์ร่วมกับพารามิเตอร์  $\beta$  และ  $\alpha$  ตามสมการที่ (3.3.1.1) ซาลิบและซาง<sup>(14)</sup> (Saleeb and Chang) ได้เสนอหลักการเลือกฟังก์ชันดังนี้

- i. การเลือกฟังก์ชันสำหรับประมาณสนามความเค้นจะต้องไม่ก่อให้เกิดการเคลื่อนที่แบบไร้พลังงาน โดยเบื้องต้นแล้วจะกำหนดให้จำนวนพารามิเตอร์ของความเค้นเท่ากับ  $m$  จะต้องมีค่าไม่น้อยกว่าจำนวนระดับชั้นความเสรีทั้งหมดของชิ้นส่วน  $n$  หักออกจากรูปแบบการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง  $r$  (ดังนั้น  $m \geq n - r$ ) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าพารามิเตอร์ของความเค้นหนึ่งพจน์จะต้องสอดคล้องกับการเคลื่อนที่หนึ่งรูปแบบ จากสมการพลังงานความเครีียด

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V (P\beta)^T (\partial u) \, dV = \frac{1}{2} \int_V \beta^T P^T (\partial Nq) \, dV \quad (3.3.2.3)$$

โดยที่  $U$  คือพลังงานความเครีียด

$V$  คือปริมาตรของวัตถุ

$\sigma$  คือเมตริกซ์ของสนามความเค้น

$\epsilon$  คือเมตริกซ์ของสนามความเครีียด

$P$  คือฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามความเค้น

$\beta$  คือพารามิเตอร์ของความเค้น

$\partial$  คือเมตริกซ์ตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์

$u$  คือสนามของการกระจัด

$N$  คือฟังก์ชันสัมฐานของสนามการกระจัด

$q$  คือเวกเตอร์ของระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วน

จากสมการที่ (3.3.1.2)  $G = \int_V P^T \partial N \, dV$  แทนค่าลงในสมการที่ (3.3.2.3)

$$U = \frac{1}{2} \beta^T G q \quad (3.3.2.4)$$

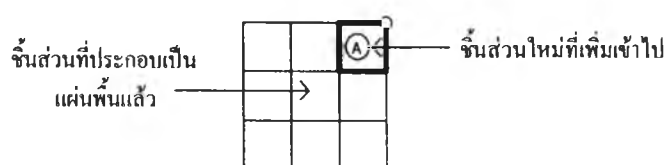
กำหนดให้  $q = \begin{Bmatrix} \alpha \\ R \end{Bmatrix}$  โดยที่  $\alpha$  เป็นรูปแบบของการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น และ  $R$  เป็นรูปแบบของการ

เคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง จากนั้นแทนค่า  $q$  ลงไปในสมการที่ (3.3.2.4) จะได้สมการพลังงานความเครีียดที่เกิดจากการเสีรูปจากพจน์  $\alpha$  ดังสมการที่ (3.3.2.5) สำหรับพจน์  $R$  จะไม่มีพลังงานเกิดขึ้น

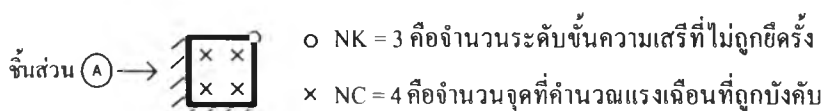
$$U = \frac{1}{2} \beta^T G \alpha \quad (3.3.2.5)$$

จากสมการข้างต้น ถ้าพารามิเตอร์  $\beta$  หนึ่งพจน์จะสอดคล้องกับการเคลื่อนที่  $\alpha$  หนึ่งรูปแบบ เมตริกซ์  $G$  จะต้องมีลักษณะเป็นเมตริกซ์ทแยงมุม และเพื่อป้องกันไม่ให้อุปสรรคของการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัดเกิดขึ้นเมื่อเมตริกซ์  $G$  มีสมาชิกอยู่นอกแนวทแยง แต่ละสครัมภ์ของ  $G$  จะต้องไม่ขึ้นแก่กันและกัน

- ฟังก์ชันที่ใช้สำหรับประมาณสนามของความเค้นไม่จำเป็นต้องเป็นไปตามสมการสมดุล เนื่องจากมีการควบคุมสมดุลอยู่ในสมการหลักของการแปรผันแล้ว
- การเลือกจำนวนของพารามิเตอร์  $\beta$  จะต้องตรวจสอบว่าจะไม่ก่อให้เกิดการยึด (locking) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อความหนาของแผ่นใกล้ที่จะเป็นแผ่นบาง วิธีเบื้องต้นที่ใช้ตรวจสอบคือพิจารณาจากดัชนีการบังคับ  $CI$  (constraint index) โดยคำนวณจากผลต่างระหว่างจำนวนของระดับชั้นความเสรีที่เป็นอิสระเมื่อเพิ่มขึ้นส่วนลงไปบนแผ่นพื้น  $NK$  กับจำนวนการเคลื่อนที่อิสระของชิ้นส่วนที่ถูกบังคับ  $NC$  ( $CI = NK - NC$ ) ค่า  $CI \geq 1$  แสดงว่าแผ่นพื้นจะไม่เกิดปัญหาการยึด ในขณะที่ค่า  $CI \leq 0$  อาจเกิดปัญหาการยึดได้



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.3.3 (ก) ชิ้นส่วน 4 จุดต่อที่เพิ่มเข้าไปในแผ่นพื้น โดยหนึ่งจุดต่อมี 3 ระดับชั้นความเสรี

(ข) การหาค่า  $NK$  และ  $NC$

- ฟังก์ชันที่เลือกจะต้องทำให้ชิ้นส่วนมีความยืดหยุ่น มีอยู่สองวิธีที่จะทำให้ชิ้นส่วนมีความยืดหยุ่นคือ หนึ่งถ้าใช้ฟังก์ชันของสนามความเค้นเป็นฟังก์ชันในพิกัดหลัก ฟังก์ชันนั้นจะต้องมีความบริบูรณ์ (completeness) ซึ่งวิธีนี้จะทำให้พารามิเตอร์ของความเค้นที่เลือกไม่เป็นอิสระ โดยจะต้องขึ้นอยู่กับสมการสมดุล หรืออีกวิธีหนึ่งคือใช้ฟังก์ชันที่อยู่ในพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates)

หลักการที่กล่าวมาข้างต้นนำมาใช้เป็นแนวทางในการเลือกฟังก์ชันเพื่อประมาณสนามของความเค้นได้ ดังนี้ โดยเบื้องต้นพิจารณาจาก  $m = n - r$  สำหรับชิ้นส่วน HMPL5 มีระดับชั้นความเสรีทั้งหมดของชิ้นส่วน  $n$  เท่ากับ  $5 \times 3 = 15$  และมีจำนวนของรูปแบบการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง  $r$  เท่ากับ 3 ดังนั้นจำนวนพารามิเตอร์ของความเค้นควรจะต้องเท่ากับ  $15 - 3 = 12$  จากนั้นพิจารณาจากค่าดัชนีการบังคับ  $CI = NK - NC$  เพื่อป้องกันปัญหาการยึดควรใช้ค่า  $CI \geq 1$  ดังนั้นใช้ค่า  $CI = 1$  และในชิ้นส่วนนี้มีค่า  $NK$  เท่ากับ  $2 \times 3 = 6$  ดังนั้น  $NC$  ควรจะมีค่าเท่ากับ  $6 - 1 = 5$

ดังนั้นจะแบ่งเป็นพารามิเตอร์สำหรับความเค้นคัตเท่ากับเจ็ดพจน์และสำหรับความเค้นเฉือนเท่ากับห้าพจน์ และฟังก์ชันที่ใช้จะอยู่ในพีชคณิตโดยแต่ละสมการไม่ขึ้นแก่กันและกัน มีลักษณะดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_{\xi\xi} \\ M_{\eta\eta} \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_7 \end{Bmatrix} \quad (3.3.2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{z\eta} \\ Q_{z\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & & \\ & & & \xi & 1 & \eta & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.3.2.7)$$

จากนั้นโดยลักษณะของฟังก์ชันข้างบนและการแปลงจากพิกัดหลักให้เป็นพีชคณิต สามารถสร้างเมตริกซ์  $P_\beta$  และ  $P_\alpha$  ได้ดังนี้

$$P_\beta = \begin{bmatrix} 1 & a_1^2\xi & a_1^2\eta & 0 & a_2^2\xi & a_2^2\eta & 0 \\ 0 & b_1^2\xi & b_1^2\eta & 1 & b_2^2\xi & b_2^2\eta & 0 \\ 0 & a_1b_1\xi & a_1b_1\eta & 0 & a_2b_2\xi & a_2b_2\eta & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.2.8)$$

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & b_2\xi & (b_1\xi + b_2\eta) & 0 & b_1\eta \\ 0 & a_2\xi & (a_1\xi + a_2\eta) & 1 & a_1\eta \end{bmatrix} \quad (3.3.2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ร่วมกับ } \beta^T &= [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_7] \\ \alpha^T &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } a_1 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) & ; & & b_1 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\ a_2 &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) & ; & & b_2 &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4) \\ a_3 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & ; & & b_3 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{aligned} \quad (3.3.2.10)$$

### 3.3.3 เมตริกซ์สติเฟนของชิ้นส่วน

หลังจากได้ฟังก์ชันของสนามการกระจัดและสนามของโมเมนต์แล้ว จากหัวข้อ 3.3.1 สามารถหาเมตริกซ์สติเฟนของชิ้นส่วนได้ โดยหาค่าของเมตริกซ์  $H$  และ  $G$  จากสมการที่ (3.3.1.2) ทั้งในรูปของแรงคัตและ

แรงเฉือน ในการที่จะหาค่าของเมตริกซ์ทั้งสอง จะต้องหาค่าเมตริกซ์  $B_K$  และ  $B_\gamma$  ซึ่งเป็นเมตริกซ์ความสัมพันธ์ของความเครียดและการกระจัดก่อน

$$\varepsilon = B_K q = \frac{1}{|J|} B_K q \quad (3.3.3.1)$$

$$\gamma = B_\gamma q = \frac{1}{|J|} B_\gamma q \quad (3.3.3.2)$$

โดยที่

$$B_K = \begin{bmatrix} B_{b1} & B_{b2} & \dots & B_{b5} \end{bmatrix}$$

$$B_\gamma = \begin{bmatrix} B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{s5} \end{bmatrix}$$

$$q = [w_i \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_5 \quad \theta_{x5} \quad \theta_{y5}]^T$$

$$B_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 5$$

$$B_{si} = \begin{bmatrix} -N_{i,x} & |J| N_i & 0 \\ -N_{i,y} & 0 & |J| N_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 5$$

$$N_{i,x} = (b_2 + b_3 \xi) N_{i,\xi} - (b_1 + b_3 \eta) N_{i,\eta}$$

$$N_{i,y} = (a_1 + a_3 \eta) N_{i,\eta} - (a_1 + a_3 \xi) N_{i,\xi}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$$

$$|J| = \det J = D_1 + D_2 \xi + D_3 \eta$$

$$D_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$D_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1$$

$$D_3 = a_3 b_2 - a_2 b_3$$

สำหรับตัวแปร  $a_i$  ถึง  $a_3$  และตัวแปร  $b_i$  ถึง  $b_3$  เป็นไปตามที่กำหนดไว้ในสมการที่ (3.3.2.10) ดังนั้นจากสมการที่กำหนดไว้ทั้งหมดข้างต้นสามารถนำมาหาเมตริกซ์  $G_\beta$  และ  $G_\alpha$  และ เมตริกซ์  $H_\beta$  และ  $H_\alpha$  ได้

$$G_\beta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_\beta^T B_\kappa d\xi d\eta \quad ; \quad H_\beta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_\beta^T D_\kappa P_\beta |J| d\xi d\eta \quad (3.3.3.3)$$

$$G_\alpha = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_\alpha^T B_\gamma d\xi d\eta \quad ; \quad H_\alpha = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_\alpha^T D_\gamma P_\alpha |J| d\xi d\eta \quad (3.3.3.4)$$

โดยที่  $P_\beta$  คือ ฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามของโมเมนต์  
 $P_\alpha$  คือ ฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามของแรงเฉือน  
 $B_\kappa$  คือเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งกับการกระจัด  
 $B_\gamma$  คือเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดเฉือนในแนวคิ่งกับการกระจัด  
 $D_\kappa$  คือเมตริกซ์เฟลกซ์บิลิตีของเคอร์ชอฟฟ์  
 $D_\gamma$  คือเมตริกซ์เฟลกซ์บิลิตีในส่วนความสัมพันธ์ของแรงเฉือนและความเครียดเฉือนในแนวคิ่ง  
 $|J|$  คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จาโคเบียน

จากนั้นนำค่าเมตริกซ์ทั้งสี่ตัวนี้ไปหาค่าเมตริกซ์สติเฟนสของชิ้นส่วนได้ โดยแทนค่าลงไปนสมการที่ (3.3.1.5)

### 3.3.4 การปรับปรุงชิ้นส่วน HMPL5

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันการประมาณสนามความเค้นในสมการที่ 3.3.2.6 พหุนามของฟังก์ชันมีเพียงสามพจน์คือ  $1 \quad \xi \quad \eta$  แต่สำหรับฟังก์ชันของสนามการกระจัดของชิ้นส่วนสี่จุดต่อที่บริบูรณ์มีพหุนามถึงสี่พจน์คือ  $1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta$  จึงเปลี่ยนเมตริกซ์ฟังก์ชันของสนามความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} M_{\xi\xi} \\ M_{\eta\eta} \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \\ & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \\ & & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3.4.1)$$

โดยจำนวนพจน์ของฟังก์ชันของโมเมนต์และแรงเฉือนที่ค่าเท่ากับ  $12+5=17$  ยังคงมีค่ามากกว่า  $n-r$  หรือ 12 ส่วนสนามของแรงเฉือนยังคงใช้ฟังก์ชันเดิมเพื่อรักษาค่าดัชนีการบังคับ  $CI = NK - NC$  โดยให้  $CI = 1$  เหมือนเดิม ชิ้นส่วนที่ปรับปรุงนี้ใช้ชื่อว่า HMPL5m ซึ่งจะนำไปทดสอบในบทที่ 4

### 3.4 ชั้นส่วน MiSP4 <sup>(22)</sup>

MiSP4 เป็นชั้นส่วนที่ใช้แบบจำลองพันธุ์ทาง/ผสม (hybrid/mixed model) โดยมีลักษณะที่ต่างจากแบบจำลองทั่วไปดังนี้

- 1) ฟังก์ชันที่สมมติขึ้นสำหรับตัวแปรการเคลื่อนที่ มีความต่อเนื่องแบบ  $C^0$
- 2) ฟังก์ชันที่สมมติขึ้นสำหรับตัวแปร โมเมนต์และแรงเฉือน ไม่จำเป็นต้องมีความต่อเนื่อง ( $C^{-1}$  - continuity)
- 3) ฟังก์ชันสำหรับความเครียดเฉือนแนวตั้ง ประมาณจากความเครียดที่ขอบ

#### 3.4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

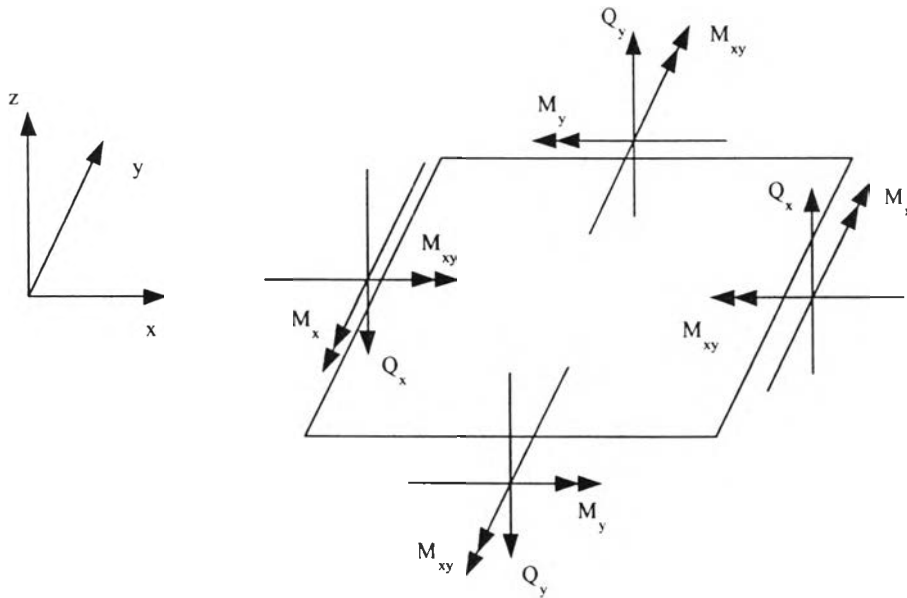
แผ่นที่วิเคราะห์ถูกแทนด้วย ระนาบ  $xy$  ณ กึ่งกลางความหนาของแผ่น แกน  $z$  อยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางตามความหนาของแผ่น โดย  $-t/2 \leq z \leq t/2$  และวิเคราะห์แผ่นโดยใช้สมมติฐานของมินคูลิน

สมการสมดุล

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - w &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.1.1)$$

โดยที่  $w$  คือน้ำหนักแผ่กระจายที่กระทำบนแผ่น  $M_x$ ,  $M_y$  และ  $M_{xy}$  คือโมเมนต์คด  $Q_x$  และ  $Q_y$  คือแรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยความยาว แรงต่างๆในสมการที่ (3.4.1.1) สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของความเค้นในทิศต่างๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xy} dz \\ Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} dz \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz \end{aligned} \quad (3.4.1.2)$$



รูปที่ 3.4.1 ทิศทางที่เป็นบวกของโมเมนต์ค้ำและแรงเฉือน<sup>(22)</sup>

#### สมการความสัมพันธ์ตามกฎของวัสดุ

โดยแผ่นพื้นที่พิจารณาจะต้องเป็นเนื้อเดียวกันตลอดแผ่นและมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง และเป็นวัสดุที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น

$$\{M\} = -[D_K] \{K\} \quad (3.4.1.3)$$

โดยที่  $\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T$

$$[D_K] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$\{K\} = \{K_x \quad K_y \quad K_{xy}\}^T$  คือเมตริกซ์ความเคี้ยวค้ำหรือความโค้ง (curvatures)

$$\{Q\} = [D_\gamma] \{\gamma\} \quad (3.4.1.4)$$



โดยที่  $\{Q\} = \{Q_x \quad Q_y\}^T$

$$[D_\gamma] = \frac{\beta_r Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \beta_r \text{ คือค่าปรับแก้การกระจายของความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากับ } 5/6$$

$\{\gamma\} = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T$  คือเมตริกซ์ความเครียดเฉือนแนวตั้ง

สมการเมตริกซ์ความโค้งและเมตริกซ์ความเครียดเฉือนแนวตั้ง

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.4.1.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.4.1.6)$$

หลักการแปรผันที่ใช้คือ

$$\Pi = U_b + U_s - W \quad (3.4.1.7)$$

$$U_b = \int_A [K] \{M\} dA - \int_A \{M\} \left( [H_b]^{-1} \{M\} - \{K\} \right) dA$$

$$U_s = \int_A [\gamma] \{Q\} dA - \int_A \{Q\} \left( [H_s]^{-1} \{Q\} - \{\gamma\} \right) dA$$

$W$  = งานเนื่องจากแรงภายนอก

ฟังก์ชันที่ใช้สำหรับตัวแปรแต่ละตัวในชิ้นส่วนนี้มีอยู่ทั้งหมด 10 ตัว โดยแต่ละตัวมีลักษณะดังนี้

- 1) ตัวแปรโมเมนต์คัตทั้งหมด 3 ตัว  $M_x$ ,  $M_y$  และ  $M_{xy}$  และแรงเฉือน 2 ตัว  $Q_x$  และ  $Q_y$  โดยไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วน
- 2) ตัวแปรความเครียดเฉือนแนวคิ่ง 2 ตัว  $\gamma_{xz}$  และ  $\gamma_{yz}$  ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วน
- 3) ตัวแปรการกระจัด 3 ตัว  $w$ ,  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  โดยแต่ละตัวแปรมีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วน

### 3.4.2 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element model)

ฟังก์ชันของตัวแปรสนามการกระจัด ทั้งสามตัวใช้ฟังก์ชันลากรองจกัคสมการที่ (3.4.2.1)

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i; \quad \beta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{xi}; \quad \beta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{yi} \quad (3.4.2.1)$$

โดยที่  $N_i$  คือฟังก์ชันสัจฐานของสนามการกระจัด

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} (3.4.2.2)$$

เมตริกซ์จาโคเบียนและเมตริกซ์จาโคเบียนผกผันคือ

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.3)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}; \quad |J| = \det J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (3.4.2.4)$$

ฟังก์ชันสำหรับประมาณสนามของโมเมนต์ดัด

$$\{M\} = [P_M] \{\alpha_M\} \quad ; \quad \{M\}^T = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\} \quad (3.4.2.5)$$

$$[P_M] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \\ & & & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \\ & & & & & & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (3.4.2.6)$$

ฟังก์ชันสำหรับประมาณแรงเฉือน เป็นฟังก์ชันที่คำนวณมาจากความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัดนี้

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.7)$$

จากนั้นแทนค่าจากสมการที่ (3.4.2.5) และ (3.4.2.6) ลงในสมการข้างบนจะได้ฟังก์ชันการประมาณของแรงเฉือน

$$\{Q\} = [P_Q] \{\alpha_M\} \quad ; \quad \{Q\}^T = \{Q_x \quad Q_y\}$$

$$[P_Q] = \begin{bmatrix} 0 & J_{22} & -J_{12} & (\eta J_{22} - \xi J_{12}) & 0 & -J_{21} & J_{11} & (\eta J_{21} - \xi J_{11}) \\ 0 & -J_{21} & J_{11} & (\eta J_{21} - \xi J_{11}) & 0 & J_{22} & -J_{12} & (\eta J_{22} - \xi J_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.4.2.8)$$

ฟังก์ชันสำหรับประมาณความเครียดเฉือนแนวตั้ง

การประมาณความเครียดเฉือนแนวตั้งในชิ้นส่วนนี้ ใช้วิธีที่เรียกว่าแบบจำลองถ่ายทอดแรงเฉือน (Mixed shear projected model) โดยเริ่มจากการหาความเครียดเฉือนสัมผัสที่ขอบ (edge tangential shear strain) ของชิ้นส่วนในพิกัดธรรมชาติ โดยหาค่ามาจากระดับชั้นความเสริที่จุดต่อ โดยมีสมการดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \left( \gamma_{\xi z} - \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta_{\xi} \right) d\xi &= 0 && \text{ที่ขอบ 1-2 และ 3-4} \\ \int_{-1}^{+1} \left( \gamma_{\eta z} - \frac{\partial w}{\partial \eta} - \beta_{\eta} \right) d\eta &= 0 && \text{ที่ขอบ 2-3 และ 1-4} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2.9)$$

จากสมการข้างต้นสามารถนำไปสร้างเป็นฟังก์ชันการประมาณของความเครียดเนื่องแนวตั้งได้

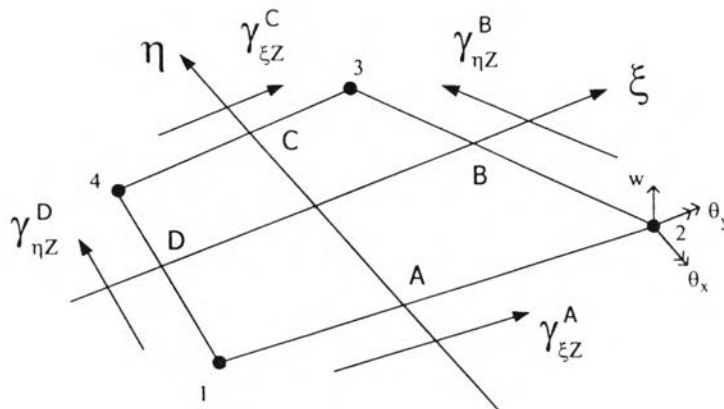
$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.10)$$

โดยที่ค่า  $\gamma_{\xi z}$  และ  $\gamma_{\eta z}$  คือความเครียดเนื่องแนวตั้งในพิกัดธรรมชาติ ซึ่งคำนวณจากการประมาณความเครียดเนื่องที่ขอบแต่ละด้าน ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi k} \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.11)$$

$$\text{โดยที่ } [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix}$$

$$\{\gamma_{\xi k}\}^T = \{\gamma_{\xi z}^A \quad \gamma_{\eta z}^B \quad \gamma_{\xi z}^C \quad \gamma_{\eta z}^D\}$$



รูปที่ 3.4.2 ความเครียดเนื่องที่ขอบของชิ้นส่วน MiSP4<sup>(22)</sup>

จากสมการที่ (3.4.2.9) ตำแหน่งของตัวแปรต่างแสดงดังรูปที่ 3.4.2 และตัวแปร  $\beta_{\xi}$  กับ  $\beta_{\eta}$  สามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$\begin{Bmatrix} \beta_{\xi} \\ \beta_{\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.12)$$

แทนค่าในสมการที่ (3.4.2.9) ได้ความเครียดเฉือนที่ขอบต่างๆ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\xi}^A &= \frac{1}{2} (w_2 - w_1 + \beta_{\xi_1} + \beta_{\xi_2}) \\ \gamma_{\xi}^C &= \frac{1}{2} (w_3 - w_4 + \beta_{\xi_3} + \beta_{\xi_4}) \\ \gamma_{\eta}^B &= \frac{1}{2} (w_3 - w_2 + \beta_{\eta_2} + \beta_{\eta_3}) \\ \gamma_{\eta}^D &= \frac{1}{2} (w_4 - w_1 + \beta_{\eta_1} + \beta_{\eta_4}) \end{aligned} \right\} (3.4.2.13)$$

จากสมการข้างต้นสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดเฉือนที่ขอบและการกระจัดได้ดังนี้

$$\{\gamma_{\xi_k}\} = [B_{ss}] \{u\} \quad (3.4.2.14)$$

$$\text{โดยที่ } \{\gamma_{\xi_k}\}^T = \{\gamma_{\xi_z}^A \quad \gamma_{\eta_z}^B \quad \gamma_{\xi_z}^C \quad \gamma_{\eta_z}^D\}$$

$$[B_{ss}] = \begin{bmatrix} -1 & J_{11} & J_{12} & 1 & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & J_{21} & J_{22} & 1 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & J_{11} & J_{12} & -1 & J_{11} & J_{12} \\ -1 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \{w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \beta_{x4} \quad \beta_{y4}\}^T$$

ดังนั้นเมื่อได้ความเครียดเฉือนที่ขอบในพจน์ของการกระจัดแล้ว จึงนำมาสร้างฟังก์ชันการประมาณของความเครียดเฉือนแนวตั้งของชิ้นส่วนในพจน์ของการกระจัดที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\{\gamma\} = [\bar{B}_s] \{u\} \quad (3.4.2.15)$$

$$\text{โดยที่ } [\bar{B}_s] = [J]^{-1} [A] [B_{ss}]$$

### 3.4.3 การสร้างเมตริกซ์สติเฟนสของชิ้นส่วน MiSP4

ในชิ้นส่วน MiSP4 เมตริกซ์สติเฟนสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นส่วนของโมเมนต์และแรงเฉือนซึ่งอยู่ในพจน์ของ  $\{\alpha_m\}$  และส่วนที่สองคือส่วนของความเครียดเฉือนแนวตั้งซึ่งอยู่ในพจน์ของการกระจัดของชิ้นส่วน จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & K_{UM} \\ K_{UM}^T & K_{MM} \end{bmatrix} \quad (3.4.3.1)$$

$$\text{โดยที่ } K_{UM} = \int_A \left( B_b^T P_M + \bar{B}_s^T P_Q \right) dA$$

$$K_{MM} = \int_A \left( P_M^T H_b^{-1} P_M + P_Q^T H_s^{-1} P_Q \right) dA$$

จากสมการ (3.4.3.1) สามารถกำจัดตัวแปร  $\{\alpha_M\}$  ออกไปได้ ดังนั้นสมการสามารถลดรูปได้เป็นสมการที่ (3.4.3.2) และเมทริกซ์สติเฟเนส  $[K]$  มีขนาดเท่ากับ  $12 \times 12$

$$[K] = K_{UM}^T \quad K_{MM}^{-1} \quad K_{UM} \quad (3.4.3.2)$$