บทที่ 2

วรรณคดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง **"การศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กรุงเทพมหานคร"** ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณคดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามลำดับดังนี้

1. การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน
2. ลักษณะของปัญหาที่ใช้ในการศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน
3. องค์ประกอบที่ส่งผลต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน
4. กลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน
5. การนำความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนไปแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

1. ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

นักการศึกษาได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนไว้ดังนี้

ลินน์ และ พูลอส (Linn and Pulos 1983 : 31) ได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนว่า หมายถึง การใช้เหตุผลในเรื่องที่เกี่ยวกับนามธรรมรูปแบบหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หรือความสามารถทั่วไป

เชียร์ (Shire 1986 : 3347 - A) ได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนว่า หมายถึง ความสามารถในการเข้าใจเรื่องสัดส่วน และการนำความรู้เรื่องสัดส่วนไปใช้ได้ถูกต้อง

แครเมอร์ และคณะ (Cramer et al. 1989 : 445) ได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนว่า หมายถึง การใช้เหตุผลรูปแบบหนึ่งในทางคณิตศาสตร์

ซึ่งเกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแปรร่วม การเปรียบเทียบพหุคูณ และความสามารถในการจำกระบวนการจัดกระทำข้อมูล การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนยังเกี่ยวข้องกับการอ้างอิง การทำนาย และเกี่ยวข้องกับวิธีคิดเชิงคุณภาพ และวิธีคิดเชิงปริมาณ

วรรณทิพา รอดแรงค้า (2530 : 18) ได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนว่า หมายถึง ความสามารถในการใช้เหตุผลที่แสดงถึงความเท่ากันของอัตราส่วนสองอัตราส่วน เช่น $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

จากความหมายของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่นักการศึกษาได้ให้ไว้ดังที่กล่าวมาแล้วนั้น สามารถสรุปได้ดังนี้ การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน หมายถึง การใช้เหตุผลในเรื่องที่เกี่ยวกับนามธรรมรูปแบบหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการนำความรู้เรื่องสัดส่วนไปใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน

2. ความเข้าใจเกี่ยวกับการศึกษาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นความรู้พื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษา ซึ่งนักเรียนจะได้เรียนรู้มโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องอัตราส่วน สัดส่วน และการแก้ปัญหาสัดส่วนในวิชาคณิตศาสตร์ และนอกจากนี้นักเรียนยังได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาสัดส่วนในวิชาวิทยาศาสตร์อีกด้วย ซึ่งนักเรียนต้องอาศัยความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนทั้งสิ้น

ในการศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน อินเฮลเดอร์ และเพียเจท์ (Inhelder and Piaget 1959 : 164) ได้กล่าวถึงความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน ซึ่งความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะไม่ปรากฏจนกระทั่งเข้าสู่พัฒนาการทางสติปัญญาขั้นคิดปฏิบัติการนามธรรมตอนต้น ซึ่งต่างจากความสามารถในการเข้าใจเรื่องอัตราเร็วและความน่าจะเป็นที่อาจจะพบได้ก่อนถึงวัยนี้ แสดงให้เห็นว่า นักเรียนจะสามารถใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนได้ ต้องมีความเข้าใจเรื่องอัตราส่วนก่อน เพราะลักษณะของความเร็วคืออัตราส่วนของระยะทางต่อเวลา และความน่าจะเป็น คือ อัตราของตัวเลขที่บ่งบอกว่าเหตุการณ์อย่างหนึ่งจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงไรต่อจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

(วรรณทิพา รอดแรงค้า 2530 : 5) ซึ่งทั้งอัตราเร็วและความน่าจะเป็นก็คือ การแสดงถึงลักษณะความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วนนั่นเอง ดังนั้น ความเข้าใจในเรื่องอัตราส่วนและความสามารถที่กล่าวถึงความเท่ากันของอัตราส่วนสองอัตราส่วน จึงนำไปสู่การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

จากงานพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจท์ สามารถวัดความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน โดยใช้เครื่องมือประกอบด้วยคาน ซึ่งมีการปรับสมดุลด้วยวิธีการแขวนน้ำหนักในจุดต่าง ๆ กัน ทั้งทางซ้ายและทางขวาของคาน เช่น ถ้ามีน้ำหนัก 400 กรัม แขวนห่างจากจุดศูนย์กลางของคานข้างหนึ่ง 4 เซนติเมตร จะต้องแขวนน้ำหนัก 200 กรัม ให้ห่างจากจุดศูนย์กลางของคานอีกข้างหนึ่งที่ตำแหน่งใด คานจึงจะอยู่ในสภาพสมดุล (วรรณทิพา รอดแรงค้า 2530 : 18) เด็กที่มีความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะต้องเข้าใจกฎของสัดส่วนดังนี้

ถ้าให้ W และ W′ แทน น้ำหนักที่แขวนอยู่ทางซ้ายมือและขวามือของคาน ตามลำดับ

L และ L′ แทน ระยะของน้ำหนัก W และ W′ แขวนห่างจากจุดหมุน ตามลำดับ

H และ H′ แทน ความสูงที่ทำให้น้ำหนัก W และ W′ อยู่ห่างจากพื้น ตามลำดับ

เด็กที่มีความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะเข้าใจกฎของ $\frac{W}{W'} = \frac{L'}{L} = \frac{H'}{H}$ โดยความเข้าใจในขั้นแรกคือ $\frac{W}{W'} = \frac{L'}{L}$ และจะนำไปสู่ความเข้าใจ $\frac{W}{W'} = \frac{H'}{H}$ ซึ่งเป็นสัดส่วนผกผันทวีคูณ (Double Inverse Proportion) อันจะทำให้คานสมดุลได้ (Inhelder and Piaget 1959 : 164 - 165)

นอกจากนี้การวัดความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน โดยใช้สถานการณ์ต่าง ๆ เช่น งานวิจัยของ ลอว์สัน (Lawson 1987 : 91) ใช้สถานการณ์ปัญหาซึ่งประกอบด้วยกระบอกตวงปากกว้างและกระบอกตวงปากแคบ แล้วถามว่า ถ้าเทน้ำลงในกระบอกตวงปากกว้างจนน้ำมีปริมาตรถึงขีดที่ 4 และนำน้ำจากกระบอกตวงปากกว้างเทลงในกระบอกตวงปากแคบจนหมด จะได้ปริมาตรน้ำในกระบอกตวงปากแคบอ่านได้ตรงกับขีดที่ 6 ถ้ากระบอกตวงปากแคบมีน้ำอยู่ถึงขีดที่ 11 จะอ่านปริมาตรน้ำในกระบอกตวงปากกว้างได้จากขีดที่เท่าไร

คาร์พลัส คาร์พลัส และวูลแมน (Karplus, Karplus and Wollman 1974 : 476 - 477) ใช้สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการคำนวณความสูงของ **"นายเตี้ยและนายสูง"** โดยมีคำถามว่า นายเตี้ยมีความสูงเท่ากับกระดุม 4 เม็ด นายสูงมีความสูงเท่ากับกระดุม 6 เม็ด ถ้าใช้ลวดเสียบกระดาษวัดความสูงของนายเตี้ยได้เท่ากับลวด 6 ตัว นายสูงจะสูงเท่าไร ถ้าวัดด้วยลวดเสียบกระดาษขนาดเท่ากัน ให้แสดงวิธีการคิดหาคำตอบพร้อมทั้งอธิบายเหตุผลประกอบคำตอบ ซึ่งสามารถจำแนกแบบการใช้เหตุผลออกเป็น 8 แบบ ดังนี้คือ

1. **ไม่มีคำอธิบาย** (No Explanation) เป็นการใช้เหตุผลแบบที่ไม่สามารถให้รายละเอียดได้ เช่น ตอบว่า ไม่รู้ อธิบายไม่ได้

2. **คิดขึ้นเองในใจ** (Intuition) เป็นการใช้เหตุผลด้วยการกะประมาณ ใช้การเดา หรือนำสิ่งที่อยู่เฉพาะหน้าขึ้นมาใช้ โดยขาดการอ้างอิงข้อมูลที่มีอยู่ เช่น ตอบว่า ฉันคิดว่า เขาไม่สูงมาก

3. **คำนวณที่ใช้หลักคิดขึ้นเองในใจ** (Intuition Computation) เป็นการใช้เหตุผลโดยการใช้ข้อมูลที่มีอยู่อย่างขาดเหตุผลที่เหมาะสม เช่น ตอบว่า กระดุม 1 เม็ดมีความสูงเป็นครึ่งหนึ่งของลวดเสียบกระดาษ จึงนำ $2\frac{1}{2}$ บวกกับ 6

4. **การเปลี่ยนสเกล** (Scaling) เป็นการใช้เหตุผลที่มีการเปลี่ยนสเกล แต่ยังไม่เกี่ยวข้องกับข้อมูล เช่น ตอบว่า นายเตี้ยสูงเท่ากับ 6 ดังนั้น นายสูง สูงเป็น 2 เท่า

5. **ใช้หลักการบวก** (Addition) เป็นการใช้เหตุผลที่เน้นความแตกต่างเพียงด้านเดียว และแก้ปัญหาโดยใช้การบวก เช่น ตอบว่า นายสูง สูงกว่านายเตี้ยเท่ากับกระดุม 2 เม็ด ดังนั้น เขาจะสูงกว่านายเตี้ยเท่ากับลวดเสียบกระดาษ 2 ตัวด้วย

6. **ใช้หลักการบวกและการเปลี่ยนสเกล** (Addition & Scaling) เป็นการใช้เหตุผลที่ไม่สามารถบอกอัตราส่วนที่แท้จริงระหว่างการวัดด้วยเม็ดกระดุม และลวดเสียบกระดาษ จึงใช้วิธีคำนวณคำตอบด้วยการบวก เช่น ตอบว่า กระดุม 1 เม็ด มีความสูงเท่ากับลวดเสียบกระดาษ 2 ตัว ความสูงของนายสูงและนายเตี้ยต่างกันเท่ากับกระดุม 2 เม็ด ในการหาคำตอบ จึงบวกด้วย 4

7. **ใช้สัดส่วนไม่สมบูรณ์** (Incomplete Proportion) เป็นการใช้เหตุผลที่มีการใช้อัตราส่วน แต่ไม่สามารถดัดแปลงอัตราส่วนได้ถูกต้อง เช่น ตอบว่า ความสูงที่วัดด้วยกระดุม 4 เม็ด เท่ากับ วัดด้วยลวดเสียบกระดาษ 6 ตัว ดังนั้น ความสูง

ของกระดุมจะเป็น $1 \frac{1}{2}$ เท่าของลวดเสียบกระดาษ คำตอบที่ได้คือ 6 บวกด้วย $1 \frac{1}{2}$ เท่ากับ $7 \frac{1}{2}$

8. **ใช้สัดส่วน** (Proportion) เป็นการใช้เหตุผลแบบใช้สัดส่วนและมีการโยงความสัมพันธ์กับสเกลของการวัด เช่น ตอบว่า สัดส่วนของความสูงระหว่างความสูงของนายเตี้ยและนายสูง เมื่อวัดด้วยกระดุมเป็น 4 ต่อ 6 ถ้าใช้ลวดเสียบกระดาษวัด จะให้ผลทำนองเดียวกันคือ 6 ต่อ 9

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้สนใจแนวคิดของ เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1989 : 205) จึงได้เสนอรูปแบบของปัญหาที่ใช้ศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน เนื่องจากว่าการศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่กล่าวมาแล้วนั้น จะสนใจแต่ความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนด้านการแก้ปัญหาสัดส่วน จากการศึกษาของเฮลเลอร์ และคณะ ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่า นอกจากจะศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนด้านการแก้ปัญหาสัดส่วนแล้ว ยังสนใจศึกษาองค์ประกอบที่มีผลต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนด้วย นั่นคือ การศึกษาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทาง

ลักษณะของปัญหาที่ใช้ในการศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

ลักษณะของปัญหาที่ใช้ในการศึกษาความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนนั้น เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1989 : 209 - 211) ได้เสนอปัญหาไว้ 2 ลักษณะ คือปัญหาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทาง (Qualitative Directional Reasoning Problems) และปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนเชิงตัวเลข (Numerical Proportional Reasoning Problems) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. **ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทาง (Qualitative Directional Reasoning Problems)** เป็นลักษณะของคำถามเชิงคุณภาพแบบใหม่ ซึ่งอาจจะมีความสำคัญในการทำความเข้าใจพัฒนาการของทักษะการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียน ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบนี้ เรียกว่า คำถามเชิงทิศทาง (Directional Questions) คำถามจะถามนักเรียนเกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนว่ามีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร อาจจะเพิ่มขึ้น

ลดลง หรือเท่าเดิม เมื่อกำหนดให้เศษและส่วนของอัตราส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น ลดลง หรือเท่าเดิม แม้ว่าคำถามประเภทนี้เป็นคำถามชนิดใหม่ จะไม่ปรากฏในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์เลย แต่การใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทางนี้มีความสำคัญ และเป็นทักษะที่นักเรียนจะต้องมีพื้นฐานมาก่อน เพื่อนักเรียนจะได้แก้ปัญหาสัดส่วนได้ดียิ่งขึ้น

ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทาง แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

1.1 **ปัญหาการบอกทิศทางของอัตราส่วน** (Qualitative Ratio Change Problems) เป็นปัญหาที่ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราส่วน เมื่อกำหนดให้ค่าของเศษและส่วนของอัตราส่วนเปลี่ยนแปลงไป ส่วนใหญ่แล้วปัญหาในลักษณะนี้เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ในชีวิตประจำวัน เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาที่ต่างกัน เช่น วันนี้จักรีว่ายน้ำได้ระยะทางน้อยกว่าเดิม แต่ใช้เวลามากกว่าวันก่อน อยากทราบว่าความสามารถในการว่ายน้ำของจักรีเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เมื่อเปรียบเทียบกับวันก่อน

นักเรียนอาจจะหาคำตอบของปัญหานี้ได้โดยใช้วิธีการต่อไปนี้คือ

สมมติให้ วันนี้จักรีว่ายน้ำได้ 20 เมตร ในเวลา 3 นาที

เมื่อวานจักรีว่ายน้ำได้ 30 เมตร ในเวลา 2 นาที

นำอัตราส่วนของระยะทางต่อเวลาในการว่ายน้ำของจักรีเมื่อวานและวันนี้มาเปรียบเทียบกัน โดยการคูณไขว้

	อัตราการว่ายน้ำวันนี้		อัตราการว่ายน้ำเมื่อวาน
	$\frac{20}{3}$		$\frac{30}{2}$
	20×2		30×3
	40	$<$	90
ดังนั้น	$\frac{20}{3}$	$<$	$\frac{30}{2}$

นั่นคือ วันนี้ความสามารถในการว่ายน้ำของจักรีลดลงเมื่อเทียบกับเมื่อวาน

1.2 **ปัญหาการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพ** (Qualitative - Comparison Problems) เป็นปัญหาที่ศึกษาดูการเปลี่ยนแปลงค่าของอัตราส่วน ซึ่งปัญหาในลักษณะนี้จะเกี่ยวข้องกับวัตถุ หรือบุคคลที่แตกต่างกัน เช่น สุพัฒน์วิ่งได้จำนวนรอบเท่ากับสุธรรม แต่สุพัฒน์ใช้เวลาในการวิ่งมากกว่าสุธรรม อยากทราบว่าใครวิ่งเร็วกว่ากัน

นักเรียนอาจจะหาคำตอบของปัญหานี้ได้โดยใช้วิธีการต่อไปนี้คือ

สมมติให้ สุพัฒน์วิ่งได้ จำนวน 5 รอบ ใช้เวลา 10 นาที

สุธรรมวิ่งได้ จำนวน 5 รอบ ใช้เวลา 8 นาที

จากอัตราการวิ่งทำให้เราทราบว่าในจำนวนรอบที่เท่ากัน คนที่ใช้เวลาน้อยกว่าจะวิ่งได้เร็วกว่า นั่นคือ สุธรรมวิ่งได้เร็วกว่าสุพัฒน์

2. **ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนเชิงตัวเลข** (**Numerical Proportional Reasoning Problems**) ซึ่งปัญหาลักษณะนี้แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

2.1 **ปัญหาการหาค่าตัวแปร** (**Missing Value Problems**) เป็นลักษณะของปัญหาที่กำหนดจำนวนในสัดส่วนมาให้ 3 จำนวน แล้วให้นักเรียนหาจำนวนที่ 4 เช่น ดำและแดงวิ่งรอบสนามด้วยความเร็วเท่ากัน ถ้าดำวิ่งได้ 4 รอบ ใช้เวลา 20 นาที อยากทราบว่าถ้าแดงวิ่งได้ระยะทาง 12 รอบ จะใช้เวลากี่นาที

การแก้ปัญหาในลักษณะนี้ นักเรียนสามารถทำได้โดยเขียนในรูปสัดส่วนได้ดังนี้

สมมติให้ แดงวิ่งใช้เวลา X นาที

จะได้สัดส่วน $\frac{4}{20} = \frac{12}{X}$

$$X = \frac{12 \times 20}{4}$$

$$X = 60$$

ดังนั้น แดงใช้เวลาในการวิ่ง 60 นาที

2.2 **ปัญหาการเปรียบเทียบเชิงตัวเลข** (**Numerical - Comparison Problems**) เป็นลักษณะของปัญหาที่กำหนดอัตราส่วนมาให้สองอัตราส่วน แล้วให้นักเรียนเปรียบเทียบว่า อัตราส่วนใดมีค่ามากกว่า เช่น สมพรและสุเทพวิ่งรอบสนามทุกเย็น ถ้าสมพรวิ่งได้ 8 รอบ ใช้เวลา 32 นาที และสุเทพวิ่งได้ 2 รอบ ใช้เวลา 10 นาที อยากทราบว่าใครวิ่งเร็วกว่ากัน

การแก้ปัญหาในลักษณะนี้ นักเรียนสามารถทำได้โดยเขียนอัตราส่วน 2 อัตราส่วน แล้วใช้การคูณไขว้ ดังนี้

อัตราส่วนของระยะทางต่อเวลาของสมพร		อัตราส่วนของระยะทางต่อเวลาของสุเทพ
$\frac{8}{32}$		$\frac{2}{10}$
8 x 10		2 x 32
80	>	64

นั่นคือ $\frac{8}{32} > \frac{2}{10}$

ดังนั้น สมพรวิ่งได้เร็วกว่าสุเทพ

องค์ประกอบที่ส่งผลต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน

เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1989 : 205 - 220) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่ส่งผลกระทบต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน ซึ่งจำแนกได้ 2 ประเภท คือ การใช้เหตุผลเชิงคุณภาพ (Qualitative Reasoning) และการใช้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. การใช้เหตุผลเชิงคุณภาพ (Qualitative Reasoning)

การใช้เหตุผลเชิงคุณภาพนั้นเป็นการตัดสินว่า ค่าของอัตราส่วนจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ซึ่งอาจจะเพิ่มขึ้น ลดลง หรือเท่าเดิม เมื่อเศษและส่วนของอัตราส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น ลดลง หรือเท่าเดิม

เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1990 : 390) ได้แบ่งลักษณะค่าของอัตราส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปได้ทั้งหมด 9 ลักษณะ ดังนี้คือ

1. เศษเพิ่มขึ้นและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของอัตราส่วนไม่สามารถบอกการเปลี่ยนแปลงได้
2. เศษเพิ่มขึ้นและส่วนเท่าเดิม ค่าของอัตราส่วนเพิ่มขึ้น
3. เศษเพิ่มขึ้นและส่วนลดลง ค่าของอัตราส่วนเพิ่มขึ้น

4. เศษเท่าเดิมและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของอัตราส่วนลดลง
5. เศษเท่าเดิมและส่วนเท่าเดิม ค่าของอัตราส่วนเท่าเดิม
6. เศษเท่าเดิมและส่วนลดลง ค่าของอัตราส่วนเพิ่มขึ้น
7. เศษลดลงและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของอัตราส่วนลดลง
8. เศษลดลงและส่วนเท่าเดิม ค่าของอัตราส่วนลดลง
9. เศษลดลงและส่วนลดลง ค่าของอัตราส่วนไม่สามารถบอกการเปลี่ยนแปลงได้

ซึ่งพอจะสรุปได้เป็นแผนภูมิได้ดังนี้

เศษ / ส่วน	เพิ่มขึ้น	เท่าเดิม	ลดลง
เพิ่มขึ้น	บอกไม่ได้	ลดลง	ลดลง
เท่าเดิม	เพิ่มขึ้น	เท่าเดิม	ลดลง
ลดลง	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	บอกไม่ได้

แผนภูมิ ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าของอัตราส่วน เมื่อเศษและส่วนเปลี่ยนแปลงไป

การศึกษาการใช้เหตุผลเชิงคุณภาพ นอกจากจะศึกษาในลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราส่วนแล้ว ยังศึกษาการเปรียบเทียบอัตราส่วนสองอัตราส่วน ซึ่งการศึกษาทั้งสองลักษณะนี้ จะมีความสำคัญต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน และยังเป็นทักษะพื้นฐานสำคัญในการทำโจทย์เกี่ยวกับสัดส่วนที่เป็นตัวเลข

โนเอลติง (Noelting 1981 : 332 - 341) ได้ทำการวิจัยเรื่อง **"พัฒนาการของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนและมโนทัศน์เกี่ยวกับอัตราส่วน"** เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบ จำนวน 23 ข้อ ซึ่งเกี่ยวกับการผสมน้ำส้ม นำแบบสอบดังกล่าวไปทดสอบกับตัวอย่างประชากรซึ่งมีอายุระหว่าง 2-16 ปี โดยให้ตัวอย่างประชากรดังกล่าวตอบคำถามว่า

น้ำส้มชุด A กับ น้ำส้มชุด B น้ำส้มชุดใดมีความเข้มข้นมากกว่ากัน หรือ เข้มข้นเท่ากัน พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลในการเลือกคำตอบนั้นด้วย สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบสอบ กำหนดให้ คู่อันดับ (a,b) แทนการผสมน้ำส้มชุด A ซึ่งเกิดจากการผสมหัวน้ำส้ม จำนวน a แก้ว กับ น้ำ จำนวน b แก้ว จะได้น้ำส้มผสมชุด A จำนวน a + b = g แก้ว และคู่อันดับ (c,d) แทน การผสมน้ำส้มชุด B ซึ่งเกิดจากการผสมหัวน้ำส้ม จำนวน c แก้ว กับน้ำ จำนวน d แก้ว จะได้น้ำส้มผสมชุด B จำนวน c + d = h แก้ว ผลจากการวิจัยพบว่า กลวิธีที่เด็กใช้ในการแก้ปัญหาจะมีการพัฒนาไปตามขั้นพัฒนาการทางความคิด ซึ่งมี 4 ขั้นดังนี้

ขั้น 1 ความคิดแบบสัญลักษณ์ (Symbolic Thought) สามารถแยกส่วนประกอบได้ว่า ส่วนไหนเป็นหัวน้ำส้ม ส่วนไหนเป็นน้ำ หรือไม่สามารถแยกส่วนประกอบได้

เมื่อให้ตัวอย่างประชากรทำข้อสอบ ปรากฏว่า ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูก ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,0) กับ น้ำส้มชุด B (0,1) โดยในแต่ละคู่อันดับจะมีเพียงหัวน้ำส้ม หรือน้ำเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างประชากรสามารถเห็นความแตกต่างระหว่างหัวน้ำส้มกับน้ำ

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

มีเรียม อายุ 3 ปี 5 เดือน ทำข้อสอบข้อ D4 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,0) กับ น้ำส้มชุด B (0,1) ชุดใดเข้มข้นกว่ากัน

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,0)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีรสน้ำส้ม แต่ชุด B เป็นน้ำ

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำไม่ถูก เป็นข้อสอบที่กำหนดให้คู่อันดับมีทั้งหัวน้ำส้ม และน้ำมาให้ ซึ่งตัวอย่างประชากรไม่สามารถแยกได้ว่าอันไหนเป็นหัวน้ำส้ม อันไหนเป็นน้ำ

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

นิโคลัส อายุ 2 ปี 9 เดือน ทำข้อสอบข้อ D7 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,1) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : ชุดนี้ (แล้วชี้ไปที่จำนวนหัวน้ำส้มในชุด A และชุด B) และนี่เป็น จำนวนน้ำในชุด A และนี่เป็น จำนวนน้ำในชุด B

ขั้น 2 คิดขึ้นเองในใจ (Intuitive) **ซึ่งแบ่งเป็น 3 ขั้นย่อยดังนี้**

ขั้น 2.1 คิดขึ้นเองในใจขั้นต่ำ (Lower Intuitive) จะพิจารณาพจน์แรกของคู่อันดับ หรือพิจารณาเฉพาะหัวน้ำส้มอย่างเดียว

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูกต้อง ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,4) กับ น้ำส้มชุด B (4,1) และ น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,1) ในการตอบ ตัวอย่างประชากรจะเปรียบเทียบปริมาณหัวน้ำส้มทั้ง 2 ชุด

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

กิลส์ อายุ 4 ปี ทำข้อสอบข้อ B4 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,1) ชุดใดเข้มข้นกว่ากัน

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (2,1)

เหตุผล : น้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้มมาก และน้ำส้มชุด A มีน้ำมาก

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

1. **มองภาพรวม**

   พรองซ์ อายุ 5 ปี ทำข้อสอบข้อ B6 ดังนี้

   คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,0) กับ น้ำส้มชุด B (1,1) ชุดใดเข้มข้นกว่า

   คำตอบ : น้ำส้มชุด B (1,1)

   เหตุผล : เพราะน้ำส้มชุด B มีน้ำส้มผสมมากกว่า

2. **มองเฉพาะพจน์แรกของคู่อันดับ**

   หลุยส์ อายุ 4 ปี 7 เดือน ทำข้อสอบข้อ D6 ดังนี้

   คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (1,0) ชุดใดเข้มข้นกว่า

   คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,1) เข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B (1,0)

   เหตุผล : น้ำส้มทั้งสองชุดมีรสเดียวกัน เพราะมีหัวน้ำส้ม อย่างละ 1 แก้ว

ขั้น 2.2 คิดขึ้นเองในใจขั้นกลาง (Middle Intuitive)
จำนวนหัวน้ำส้มในน้ำส้มชุด A และ น้ำส้มชุด B เท่ากัน แต่จำนวนน้ำไม่เท่ากัน

ข้อสอบตัวอย่างประชากรทำได้ถูก ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,0) กับ น้ำส้มชุด B (1,1) และน้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (1,5)

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

มารี-โจเซ อายุ 5 ปี ทำข้อสอบข้อ B7 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (1,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,2)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีน้ำน้อยกว่า จึงมีรสน้ำส้มมากกว่าน้ำส้มชุด B

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

นาธาลี อายุ 6 ปี ทำข้อสอบข้อ B9 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,1) กับ น้ำส้มชุด B (3,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (3,4)

เหตุผล : น้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 3 แก้ว ซึ่งมากกว่าหัวน้ำส้มในชุด A

ขั้น 2.3 คิดขึ้นเองในใจขั้นสูง (Higher Intuitive)
การเปรียบเทียบระหว่างพจน์ทุกพจน์ในแต่ละคู่อันดับ แล้วเปรียบเทียบกับคำตอบ

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูกต้อง ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (2,3) และน้ำส้มชุด A (3,4) กับ น้ำส้มชุด B (2,1)

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

พรองชัว อายุ 6 ปี ทำข้อสอบข้อ B8 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (2,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,1)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 1 แก้ว และน้ำ 1 แก้ว และน้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 2 แก้ว และน้ำ 3 แก้ว ดังนั้น น้ำส้มชุด B จึงมีรสจืดกว่า

กีย์ อายุ 7 ปี ทำข้อสอบข้อ B9 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,1) กับ น้ำส้มชุด B (3,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (2,1)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 2 แก้ว จะมีน้ำ 1 แก้ว ขณะที่น้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 3 แก้ว และมีน้ำ 4 แก้ว

การนำกลวิธีในขั้นนี้ไปประยุกต์ใช้

ข้อสอบข้อ B8 : น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (2,3) :

$a = b$, $c < d$ ดังนั้น $(a,b) > (c,d)$

แม้ว่า $a < c$

ข้อสอบข้อ B9 : น้ำส้มชุด A (2,1) กับ น้ำส้มชุด B (3,4) :

$a > b$, $c < d$ ดังนั้น $(a,b) > (c,d)$

แม้ว่า $a < c$

ตัวอย่างประชากรทำไม่ได้สำหรับข้อสอบที่มีจำนวนหัวน้ำส้มและจำนวนน้ำเท่ากัน เพราะตัวอย่างประชากรสนใจแต่เพียงพจน์แรกหรือพจน์ที่สองของคู่อันดับเท่านั้น

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

อิริค อายุ 6 ปี ทำข้อสอบข้อ B12 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,2) กับ น้ำส้มชุด B (3,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (3,3)

เหตุผล : น้ำส้มชุด B (3,3) มีหัวน้ำส้มมากกว่า

ขั้น 3 การคิดปฏิบัติการรูปธรรม ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ขั้นย่อย ดังนี้คือ

ขั้น 3.1 การคิดปฏิบัติการรูปธรรมขั้นต่ำ (Lower Concrete Operation) อัตราส่วนที่เทียบเท่ากับอัตราส่วน (1,1)

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูกต้อง ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (2,2) และน้ำส้มชุด A (2,2) กับ น้ำส้มชุด B (3,3)

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

1. **ใช้กลวิธีภายในกลุ่ม และระหว่างกลุ่มร่วมกัน** (การหารและการแปรร่วมคละกัน)

ไจฮันน์ อายุ 11 ปี ทำข้อสอบข้อ A7 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,1) กับ น้ำส้มชุด B (2,2) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A เข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 1 แก้ว ทำให้เจือจางด้วยน้ำ 1 แก้ว ส่วนน้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 2 แก้ว ทำให้เจือจางด้วยน้ำ 2 แก้ว ดังนั้น น้ำส้มทั้ง 2 ชุด เข้มข้นเท่ากัน เพียงแต่น้ำส้มชุด B มีจำนวนน้ำส้มผสมมากกว่า

2. ใช้กลวิธีภายในกลุ่ม (การหาร)

มาร์แตง อายุ 8 ปี ทำข้อสอบข้อ B12 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,2) กับ น้ำส้มชุด B (3,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A เข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B

เหตุผล : 2 ต่อ 2 ในน้ำส้มชุด A และ 3 ต่อ 3 ในน้ำส้มชุด B

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

1. **สนใจสิ่งที่เหลือจากการพิจารณาอัตราส่วน (1,1)** ตามหลักในขั้น 3.1 ไปแล้ว

หลุยส์ อายุ 11 ปี ทำข้อสอบข้อ A12 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,2)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A (1,2) มีน้ำมากกว่าหัวน้ำส้ม 1 แก้ว น้ำส้มชุด B (2,4) มีน้ำมากกว่า หัวน้ำส้ม 2 แก้ว

2. **สนใจเฉพาะหัวน้ำส้ม หรือน้ำเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง** (กลับไปใช้กลวิธีขั้นก่อน)

ไดแอน อายุ 8 ปี ทำข้อสอบข้อ A12 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (1,2)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีน้ำน้อยกว่าน้ำส้มชุด B

ขั้น 3.2 การคิดปฏิบัติการรูปธรรมขั้นสูง (Higher Concrete Operation) อัตราส่วนที่เทียบเท่ากับอัตราส่วน (a,b)

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูกต้อง ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,4) และน้ำส้มชุด A (4,2) กับ น้ำส้มชุด B (6,3)

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

1. **ใช้กลวิธีระหว่างกลุ่ม (การแปรร่วม)**

   อองเดร์ อายุ 11 ปี ทำข้อสอบข้อ A12 ดังนี้

   คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,2) กับ น้ำส้มชุด B (2,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

   คำตอบ : น้ำส้มชุด A เข้มข้นเท่ากับน้ำชุด B

   เหตุผล : น้ำส้มทั้ง 2 ชุด มีน้ำเป็น 2 เท่าของหัวน้ำส้ม

2. **ใช้กลวิธีภายในกลุ่ม (การหาร)**

   อองเดร์ อายุ 8 ปี ทำข้อสอบข้อ B14 ดังนี้

   คำถาม : น้ำส้มชุด A (4,2) กับ น้ำส้มชุด B (6,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

   คำตอบ : น้ำส้มชุด A เข้มข้นเท่ากับน้ำชุด B

   เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 4 แก้ว และมีน้ำ 2 แก้ว จะเข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 6 แก้ว และมีน้ำ 3 แก้ว

ทั้ง 2 กลวิธีสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

1. กลวิธีภายในกลุ่ม : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
2. กลวิธีระหว่างกลุ่ม : $m(a,b) = (ma, mb)$ หรือ

   $(ma, mb) = m(a,b)$

   ดังนั้น $(a,b) \simeq (ma,mb)$

เมื่อกำหนดให้ m คือ สัญลักษณ์ที่นำมาเป็นตัวคูณซึ่งมีค่าไม่เท่ากับ 0 และ 1

ตัวอย่างประชากรจะทำไม่ได้สำหรับกรณีอัตราส่วนทั้งสองนั้นไม่เทียบเท่ากัน

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบผิด

หลุยส์ อายุ 9 ปี ทำข้อสอบข้อ A18 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,1) กับ น้ำส้มชุด B (3,2) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A เข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B

เหตุผล : ถ้าเติมน้ำและหัวน้ำส้มอย่างละ 1 แก้ว ในน้ำส้มชุด A ผลจะได้ว่าน้ำส้มชุด A มีความเข้มข้นเท่ากับน้ำส้มชุด B

ขั้น 4 การคิดปฏิบัติการนามธรรม (Formal Operation) ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ขั้นย่อย ดังนี้คือ

ขั้น 4.1 การคิดปฏิบัติการนามธรรมขั้นต่ำ (Lower Formal Operation)

ข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำได้ถูกต้อง ได้แก่ น้ำส้มชุด A (1,3) กับ น้ำส้มชุด B (2,5) และน้ำส้มชุด A (2,3) กับ น้ำส้มชุด B (1,2)

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรตอบถูก

1. **ใช้กลวิธีระหว่างกลุ่ม (การแปรร่วม แล้วเปรียบเทียบ)**

แดนิเอล อายุ 16 ปี ทำข้อสอบข้อ A17 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,3) กับ น้ำส้มชุด B (2,5) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (2,5)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 1 แก้ว ผสมกับน้ำ 3 แก้ว ถ้าหัวน้ำส้ม 2 แก้ว ต้องผสมกับน้ำ 6 แก้ว แต่น้ำส้มชุด B มีน้ำเพียง 5 แก้ว ดังนั้น น้ำส้มชุด B เข้มข้นกว่าน้ำส้มชุด A

2. ใช้กลวิธีภายในกลุ่ม (การหารแล้วเปรียบเทียบ)

นิโคล อายุ 14 ปี ทำข้อสอบข้อ A17 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (1,3) กับ น้ำส้มชุด B (2,5) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (2,5)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้ม 1 แก้ว ต่อน้ำ 3 แก้ว แต่น้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้ม 1 แก้ว ต่อน้ำ $2\frac{1}{2}$ แก้ว

ดังนั้น น้ำส้มชุด B เข้มข้นกว่า

การนำกลวิธีในขั้นตอนนี้ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

1. กลวิธีระหว่างกลุ่ม : $ma = c$

$m(a,b) = (ma, mb)$

$ma = c, mb > d$

$(ma, mb) < (c,d)$

ดังนั้น $(a,b) < (c,d)$

2. กลวิธีภายในกลุ่ม : $\frac{b}{a} = 3$

$\frac{d}{c} = 2\frac{1}{2}$

$\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$

ดังนั้น $(a,b) < (c,d)$

ขั้น 4.2 การคิดปฏิบัติการนามธรรมขั้นสูง (Higher Formal Operation) การหา ค.ร.น. และการหาร้อยละ

ตัวอย่างข้อสอบที่ตัวอย่างประชากรทำถูก

1. ใช้กลวิธีระหว่างกลุ่ม (หา ค.ร.น.)

ซิลเวีย อายุ 14 ปี ทำข้อสอบข้อ A19 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (2,3) กับ น้ำส้มชุด B (3,4) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด B (3,4)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้มต่อน้ำส้มผสมเป็น $\frac{3}{7}$ น้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้มต่อน้ำส้มผสมเป็น $\frac{2}{5}$ หรือ น้ำส้มชุด A มีอัตราส่วนของหัวน้ำส้มต่อน้ำส้มผสมเป็น $\frac{15}{35}$ น้ำส้มชุด B มีอัตราส่วนของหัวน้ำส้มต่อน้ำส้มผสมเป็น $\frac{14}{35}$ ดังนั้น น้ำส้มชุด A เข้มข้นกว่าน้ำส้มชุด B

2. **ใช้กลวิธีภายในกลุ่ม (การหาร้อยละ)**

เรชอง อายุ 13 ปี ทำข้อสอบข้อ A23 ดังนี้

คำถาม : น้ำส้มชุด A (5,2) กับ น้ำส้มชุด B (7,3) ชุดใดเข้มข้นกว่า

คำตอบ : น้ำส้มชุด A (5,2)

เหตุผล : น้ำส้มชุด A มีหัวน้ำส้มคิดเป็นร้อยละ $71\frac{3}{7}$ เพราะว่า มีหัวน้ำส้มเป็น $\frac{5}{7}$ ของน้ำส้มผสม และน้ำส้มชุด B มีหัวน้ำส้มคิดเป็นร้อยละ 70 เพราะว่ามีหัวน้ำส้มเป็น $\frac{7}{10}$ ของน้ำส้มผสม ดังนั้น น้ำส้มชุด A จึงเข้มข้นกว่าน้ำส้มชุด B

การนำกลวิธีในขั้นนี้ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

1. กลวิธีระหว่างกลุ่ม: $a + b = g$

$$(a,b) \div g = (\frac{a}{g}, \frac{b}{g})$$

$$c + d = h$$

$$(c,d) \div h = (\frac{c}{h}, \frac{d}{h})$$

$$hg = gh$$

$$h(a,g) = (ha,\ hg)$$
$$g(c,h) = (gc,\ gh)$$
$$(gc,\ gh) > (ha,\ hg)$$
ดังนั้น $(c,d) > (a,b)$

2. กลวิธีภายในกลุ่ม $100a \div b = x\%$

$$100c \div d = y\%$$
$$x < y$$
ดังนั้น $(a,b) < (c,d)$

2. **การใช้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning)**

การใช้เหตุผลเชิงตัวเลข เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่ส่งผลต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนด้านการแก้ปัญหาสัดส่วน ซึ่งการใช้เหตุผลเชิงตัวเลขในที่นี้ คือ ความสามารถในการใช้ทักษะเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ เนื่องจากเศษส่วนเป็นจำนวนตรรกยะ และอัตราส่วนสามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ จึงนำเศษส่วนนั้นมาใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน เพราะการเท่ากันของเศษส่วน 2 จำนวนนั้น เหมือนกับโครงสร้างของโจทย์ปัญหาสัดส่วน เช่น เศษส่วน $A = \frac{8}{24}$ เท่ากับเศษส่วน $B = \frac{x}{6}$ แล้วให้ค่า x ซึ่งในการหาค่า x สามารถทำได้โดยให้ $\frac{8}{24} = \frac{x}{6}$ จะได้ $x = 2$ ซึ่งลักษณะของ $\frac{8}{24} = \frac{x}{6}$ เหมือนกับโครงสร้างของโจทย์ปัญหาสัดส่วนต่อไปนี้คือ มาลีซื้อดินสอ 8 แท่ง ราคา 24 บาท มาลีจะซื้อดินสอได้กี่แท่ง ถ้ามีเงิน 6 บาท ซึ่งการแก้ปัญหาสัดส่วนกับการหาค่า x ในการเท่ากันของเศษส่วน 2 จำนวนนั้น ใช้ทักษะเดียวกันคือ ทักษะเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ

กลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน

ในวิชาคณิตศาสตร์ปัญหาหนึ่ง ๆ อาจจะแก้ได้ด้วยกลวิธีหลาย ๆ กลวิธี ซึ่งนักเรียนอาจใช้กลวิธีที่ถูก แล้วได้คำตอบที่ถูก ใช้กลวิธีที่ถูก แต่ได้คำตอบที่ผิด ใช้กลวิธีที่ผิด หรือเดาคำตอบ นักเรียนจะเลือกใช้กลวิธีใดนั้น ขึ้นอยู่กับนักเรียนมีความเข้าใจในปัญหาและมีแนวคิดในการแก้ปัญหานั้นอย่างไร ในปัญหาเรื่องสัดส่วนก็เช่นกัน ได้มีผู้ทำการวิจัยศึกษากลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน ดังนี้

พิชเชอร์ (Fisher 1988 : 161) ได้ศึกษากลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วนของครูมัธยมศึกษา โดยจำแนกกลวิธีที่ครูใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วนไว้ 9 กลวิธีคือ

1. **ไม่ตอบคำถาม** (No Answer)

2. **การคิดขึ้นเองในใจ** (Intuitive) เป็นกลวิธีที่ครูใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งคำตอบอาจจะได้จากการเดา หรือการคำนวณเพื่อหาคำตอบ แต่คำนวณผิด เช่น ปัญหาสัดส่วนต่อไปนี้ คนงาน จำนวน 9 คน ตัดหญ้าในสนามเสร็จใช้เวลา 5 ชั่วโมง ถ้าใช้คนงานเพียง 6 คน ทำงานนี้ให้เสร็จ จะใช้เวลากี่ชั่วโมง ครูอาจจะตอบว่า งานนี้จะเสร็จภายใน 10 ชั่วโมง เพราะเวลาที่ใช้อาจจะเป็น 2 เท่าของเวลาเดิม

3. **ใช้หลักการบวก** (Additive) เป็นการใช้กลวิธีที่ผิด เพราะสนใจแต่ความแตกต่างระหว่างจำนวนที่โจทย์กำหนดมาให้ เช่น ครูจะใช้เหตุผลว่า จำนวนคนงานลดลง 3 คน เวลาที่ใช้ต้องนานกว่าเดิม 3 ชั่วโมง คำตอบจึงเป็น 5 + 3 = 8 ชั่วโมง

4. **พยายามใช้สัดส่วน** (Proportion Attempt) เป็นกลวิธีที่ผิดกลวิธีหนึ่ง ซึ่งครูทราบว่าปัญหานี้แก้โดยใช้สัดส่วน แต่เขียนความสัมพันธ์ในรูปสัดส่วนผิด อาจจะเป็นลักษณะดังต่อไปนี้

4.1 ข้อผิดพลาดที่เกิดจากใช้สัดส่วนตรง เช่น $\frac{5}{9} = \frac{x}{6}$ ซึ่ง $x = 3\frac{1}{3}$ ชั่วโมง

4.2 ข้อผิดลาดที่เกิดจากใช้สัดส่วนผกผัน เช่น $\frac{9}{5} = \frac{x}{6}$ ซึ่ง $x = 10\frac{4}{5}$ ชั่วโมง

4.3 ข้อผิดพลาดที่เกิดจากใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน เนื่องจากจำนวนคนงานลดลงไป $\frac{1}{3}$ ของคนงานเดิม ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการทำงานต้องเพิ่มขึ้นจากเวลาเดิมไป $\frac{1}{3}$ ของเวลาเดิม นั่นคือ $\frac{1}{3} \times 5 = 1\frac{2}{3}$ ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการทำงานเท่ากับ $5 + 1\frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$

5. **กลวิธีผิดอื่น ๆ** (Incorrect Other) เป็นกลวิธีที่ครูใช้ในการหาคำตอบ แต่ไม่สามารถจัดเข้ากับกลวิธีผิดที่ได้กล่าวมาแล้วได้

6. **ใช้สูตรสัดส่วน** (Proportion Formula) เป็นกลวิธีที่ถูกกลวิธีหนึ่งที่ครูใช้แก้ปัญหาสัดส่วน กรณีเป็นสัดส่วนตรง ครูจะเขียนในรูปการเท่ากันของสองอัตราส่วน แต่สำหรับสัดส่วนผกผัน ครูจะเขียนในรูปการเท่ากันของสองอัตราส่วน หรือเขียนในรูปการเท่ากันของสองผลคูณ

6.1 สัดส่วนตรง

งาน $\frac{2}{3}$ ของทั้งหมด สามารถทำเสร็จในเวลา 5 ชั่วโมง

งานทั้งหมด (1) สามารถทำเสร็จในเวลา X ชั่วโมง

นำมาเขียนในรูปการเท่ากันของสองอัตราส่วนได้ดังนี้

$$\frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{X}$$

$$X = 5 \times 1 \times \frac{3}{2}$$

$$X = 7\frac{1}{2}$$

6.2 สัดส่วนผกผัน

สามารถเขียนได้ใน 2 รูปคือ

$$\frac{9}{6} = \frac{X}{5} \quad \text{และ} \quad 9 \times 5 = 6 \times X$$

$$X = 7\frac{1}{2} \qquad X = 7\frac{1}{2}$$

7. **การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning)** การใช้กลวิธีนี้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน จะเป็นการเลือกใช้กลวิธีที่ถูกต้องกว่าการใช้สูตรสัดส่วน

7.1 ช่างทาสี 6 คน ทาสี $\frac{2}{3}$ ของงาน เสร็จใช้เวลา 5 ชั่วโมง

ช่างทาสี 6 คน ทาสี $\frac{1}{3}$ ของงาน เสร็จใช้เวลา $2\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

ดังนั้น ช่างทาสี 6 คน ทาสีเสร็จใช้เวลา $5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

7.2 ถ้าใช้คนงาน $\frac{2}{3}$ ของทั้งหมด ต้องใช้เวลานาน $\frac{3}{2}$ ของเวลาเดิม

ดังนั้น $\frac{3}{2} \times 5 = 7\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

8. **ใช้พีชคณิต** (Algebra) เป็นกลวิธีที่ถูกกลวิธีหนึ่ง ใช้สมการพีชคณิตแล้วหาคำตอบ กลวิธีนี้เป็นกลวิธีที่ถูกต้องกว่าการเลือกใช้กลวิธีใช้สูตรสัดส่วน

8.1 เนื่องจาก $\frac{2}{3}$ ของงานทั้งหมด ทำเสร็จในเวลา 5 ชั่วโมง

นั่นคือ $\frac{2X}{3} = 5$

$$X = 7\frac{1}{2}$$

ดังนั้น งานทั้งหมดจะทำเสร็จในเวลา $7\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

8.2 สมการที่เขียนได้จะขึ้นอยู่กับการเท่ากันของจำนวนชั่วโมง ซึ่งจะไม่เกี่ยวกับสัดส่วนผกผัน

$$6 \times X = 9 \times 5$$

$$X = 7\frac{1}{2}$$

ดังนั้น งานทั้งหมดจะทำเสร็จในเวลา $7\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

9. **กลวิธีที่ถูกอื่น ๆ** (Correct Other) เป็นกลวิธีที่ครูใช้ และให้คำตอบที่ถูก แต่ไม่สามารถจัดเข้าไว้ในกลวิธีที่ถูกอื่น ๆ ได้

ธอร์นตัน และ ฟูลเลอร์ (Thornton and Fuller 1981 : 336) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาสัดส่วนของนักศึกษาระดับวิทยาลัย โดยจำแนกคำตอบของนักศึกษาตามกลวิธีการใช้เหตุผลในการแก้ปัญหาไว้ 5 กลวิธีคือ

1. **การคิดขึ้นเองในใจ** (Intuitive) คำตอบของนักศึกษาที่ได้จากกลวิธีนี้ ได้แก่ การไม่ตอบ หรือ การเดาคำตอบ ซึ่งอาจจะมีหลักฐานการใช้เหตุผลบ้างเล็กน้อย เช่น ผมไม่เก่งคณิตศาสตร์

2. **ใช้หลักการบวก** (Additive) คำตอบที่ได้จากการใช้กลวิธีนี้จะได้จากการบวกหรือการลบ เช่น ปัญหาภาพฉายเงา (Projection of Shadows) ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต มีเงา 8 ฟุต ถ้าต้นไม้มีเงา 18 ฟุต อยากทราบว่า ต้นไม้สูงกี่ฟุต นักศึกษาคิดว่า 6 กับ 8 ต่างกันอยู่ 2 ดังนั้น ต้นไม้สูง 16 ฟุต

3. **พยายามใช้อัตราส่วน** (Ratio Attempt) คำตอบของนักเรียนได้จากการพยายามใช้อัตราส่วน แต่คำตอบที่ได้นั้นไม่ถูก เพราะเนื่องจากการเข้าอัตราส่วนผิด หรือ ไม่สามารถหาค่าตัวแปรได้

4. **ใช้สูตรอัตราส่วน** (Ratio Formula) คำตอบนี้นักศึกษาจะใช้การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนในการสร้างสมการ แล้วหาค่าของตัวแปร เช่น ในปัญหาภาพฉายเงา

$$\frac{6}{8} = \frac{X}{18}$$

ดังนั้น $X = \frac{6 \times 18}{8}$

$$X = 13\frac{1}{2}$$

ต้นไม้สูง $13\frac{1}{2}$ ฟุต

5. **การแปลงหน่วย** (Conversion) คำตอบที่นักศึกษาตอบมานั้นเกิดจากการแปลงหน่วยของตัวเลขในปัญหาจากหน่วยหนึ่งมาเป็นอีกหน่วยหนึ่ง

จากกลวิธีที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดเป็นกลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วน ซึ่งนักเรียนสามารถนำกลวิธีที่ถูกไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งอาศัยความรู้เรื่องสัดส่วนได้

การนำความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์

สตริคแลนด์ และ เดนนิตโต (Strickland and Denitto 1989 : 11 - 13)ได้เสนอแนวคิดว่า ครูส่วนใหญ่จะสอนมโนทัศน์และทักษะทางคณิตศาสตร์ในเรื่องหนึ่ง ๆ ในเนื้อหาที่แคบ ผลจากสาเหตุดังกล่าว ทำให้นักเรียนจำนวนมากไม่เข้าใจ และไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ นักเรียนอาจไม่ทราบถึงประโยชน์ของสิ่งที่ได้เรียนมา เมื่อครูกำหนดโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้อหนึ่งให้นักเรียนทำ ปรากฏว่า นักเรียนมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างปัญหากับหลักคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนมา ซึ่งหลักคณิตศาสตร์นั้นสามารถที่จะนำมาแก้ปัญหานี้ได้ นักเรียนอาจจะมองว่า คณิตศาสตร์แต่ละเรื่องจะแยกหลัก และกฎเกณฑ์ของแต่ละเรื่องออกจากกันโดยเด็ดขาด และไม่อาจจะนำมาใช้ในเรื่องอื่นได้

ครูอาจจะแสดงการแก้ปัญหาให้นักเรียนเห็น โดยใช้แนวคิดคณิตศาสตร์นี้ในเนื้อหาหลาย ๆ เรื่องให้ได้ ปัญหาหลาย ๆ แบบ ที่สามารถใช้แนวคิดคณิตศาสตร์เกี่ยวกับสัดส่วนมาช่วยแก้ปัญหา จะเห็นได้ว่า ปัญหาเหล่านี้สามารถแก้ได้โดยใช้สัดส่วน ซึ่งจะกล่าวถึงตัวอย่างของปัญหาที่สามารถใช้สัดส่วนมาแก้ปัญหา ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ในฤดูแข่งขันเบสบอล โดยเฉลี่ยแล้ว ดำได้คะแนน 2 คะแนน เมื่อแดงได้ 3 คะแนน ถ้าดำได้คะแนน 20 คะแนน แดงจะได้กี่คะแนน

การหาคำตอบ จากความสัมพันธ์ของคะแนนของดำต่อแดง นำมาเขียนในรูปอัตราส่วนได้ $\frac{2}{3}$ (อัตราส่วนแรก) ถ้ากำหนดให้ r แทนจำนวนคะแนนของแดง และคะแนนของดำเท่ากับ 20 สามารถนำจำนวนคะแนนทั้งสองมาเขียนในรูปอัตราส่วนที่สองได้ในรูป $\frac{r}{20}$ หรือ $\frac{20}{r}$ ในขั้นนี้ ครูจะต้องช่วยย้ำกับนักเรียน เนื่องจากอัตราส่วนแรกแสดงความสัมพันธ์ของคะแนนของดำต่อแดง ดังนั้น อัตราส่วนที่สองต้องเป็นความสัมพันธ์ของคะแนนของดำต่อแดงเช่นกัน

เพราะฉะนั้น อัตราส่วนที่สอง คือ $\frac{20}{r}$ นั่นคือ จะได้สัดส่วน $\frac{2}{3} = \frac{20}{r}$ แก้สมการจะได้ $r = 30$ ซึ่งหมายความว่า แดงได้คะแนน 30 คะแนน

สำหรับนักเรียนที่ยังไม่เคยเรียนพีชคณิตมาก่อน อาจจะไม่มีทักษะในการแก้สมการ ปัญหานี้ ก็สามารถหาคำตอบได้ โดยหาส่วนของอัตราส่วนที่สองว่ามีค่าเท่าใด นักเรียนต้องพิจารณาว่า เลข 2 (เศษของอัตราส่วนแรก) คูณด้วยจำนวนใด จึงได้ผลลัพธ์เป็น 20 แล้วนำจำนวนนั้นมาคูณ เลข 3 (ส่วนของอัตราส่วนแรก) ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นส่วนของอัตราส่วนที่สอง นั่นคือ คำตอบของปัญหานั่นเอง และปัญหาหนึ่งที่สามารถนำเรื่องสัดส่วนไปใช้ คือ ปัญหาเกี่ยวกับร้อยละ ซึ่งนิยามของร้อยละ เป็น อัตราส่วนระหว่างจำนวนที่กำหนดให้กับ 100

ตัวอย่างที่ 2 วิชัยมีม้วนเทปเพลงทั้งหมด 20 ม้วน เป็นม้วนเทปเพลงสากล จำนวน 7 ม้วน อยากทราบว่า วิชัยมีม้วนเทปเพลงสากล คิดเป็นร้อยละเท่าใด

การหาคำตอบ ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนม้วนเทปเพลงสากล กับ จำนวนม้วนเทปทั้งหมด สามารถเขียนในรูปอัตราส่วนได้ $\frac{7}{20}$ (อัตราส่วนแรก) และอัตราส่วนที่สองเป็น $\frac{p}{100}$ จะได้สัดส่วน $\frac{7}{20} = \frac{p}{100}$ ซึ่งค่า $p = 35$

ดังนั้น วิชัยมีม้วนเทปเพลงสากล คิดเป็นร้อยละ 35

นอกจากนี้มีตัวอย่างหนึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับร้อยละ นักเรียนสามารถนำสัดส่วนมาใช้หาคำตอบ เมื่อโจทย์กำหนดร้อยละมาให้

ตัวอย่างที่ 3 ในตู้โชว์มีเสื้อยืดสีแดงอยู่จำนวน 30 ตัว คิดเป็นร้อยละ 20 ของเสื้อทั้งหมด อยากทราบว่าในร้านมีเสื้อยืดทั้งหมดกี่ตัว

การหาคำตอบ ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเสื้อยืดสีแดง กับ เสื้อยืดทั้งหมดแทนด้วยร้อยละที่กำหนดให้ สามารถเขียนในรูปอัตราส่วนเป็น $\frac{20}{100}$ (อัตราส่วนแรก) ถ้ากำหนดให้ t แทน จำนวนเสื้อทั้งหมดในร้าน

ดังนั้น อัตราส่วนที่สองเป็น $\frac{30}{t}$ สามารถเขียนในรูปสัดส่วนได้ดังนี้

$\frac{20}{100} = \frac{30}{t}$ จะได้ $t = 150$

ดังนั้น ในร้านมีเสื้อทั้งหมด 150 ตัว

สำหรับการวัดความยาว ระยะทาง สามารถนำสัดส่วนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ใช้มาตราส่วน หรือปัญหาที่มีการแปลงหน่วยของการวัดจากระบบหนึ่งไปสู่อีกระบบหนึ่งได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 4 สมศักดิ์สร้างแบบจำลองเครื่องจักร โดยใช้มาตราส่วน 1 : 48 ถ้าความยาวของเครื่องจักรเป็น 12 เมตร อยากทราบว่าเครื่องจักรจำลองยาวกี่เซนติเมตร

การหาคำตอบ ความสัมพันธ์ของความยาวเครื่องจักรจำลอง กับ เครื่องจักรจริงเป็น 1 : 48 เขียนในรูปอัตราส่วนแรกเป็น $\frac{1}{48}$ กำหนดให้ i แทน ความยาวของเครื่องจักรจำลอง (เซนติเมตร)

ดังนั้น ความยาวเครื่องจักรจริง เป็น 1200 เซนติเมตร สามารถเขียนในรูปสัดส่วนเป็น

$$\frac{1}{48} = \frac{i}{1200}$$

จะได้ $i = 25$ เซนติเมตร

ดังนั้น เครื่องจักรจำลองยาว 25 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 คำแนะนำในใบขับขี่ กำหนดว่า ขณะขับรถด้วยความเร็ว 30 ไมล์ต่อชั่วโมง ระยะหยุดรถเป็น 189 ฟุต จงหาระยะหยุดรถในหน่วยเป็นหลา

การหาคำตอบ เราทราบว่า 3 ฟุต เป็น 1 หลา สามารถเขียนในรูปอัตราส่วนเป็น $\frac{3}{1}$ (อัตราส่วนแรก) ถ้ากำหนดให้ d แทน ระยะหยุดรถในหน่วย หลา

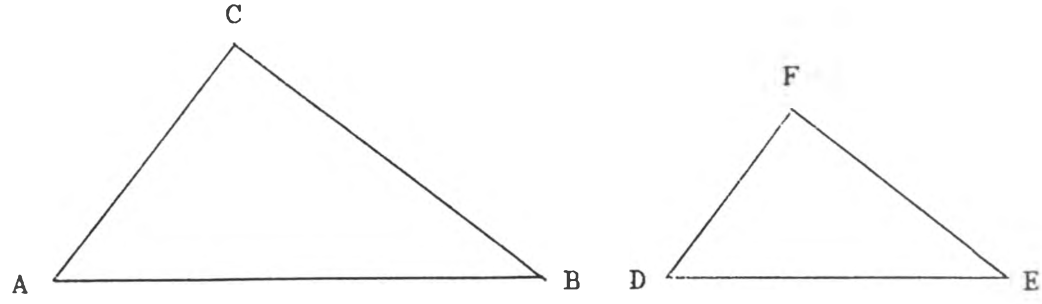
ดังนั้น อัตราส่วนที่สองเป็น $\frac{189}{d}$ สามารถเขียนในรูปสัดส่วนเป็น $\frac{3}{1} = \frac{189}{d}$

จะได้ $d = 63$

ดังนั้น ระยะหยุดรถเท่ากับ 63 หลา

การนำสัดส่วนไปใช้ในเรขาคณิตในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย ทำให้ทราบว่า ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปที่สมนัยกันจะเป็นสัดส่วนกัน

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยม 2 รูปที่คล้ายกัน



อัตราส่วนของความยาวด้านใน △ ABC ต่อความยาวด้านใน △ DEF ที่สมนัยกันเป็น $\frac{4}{3}$ ถ้าด้าน AB ยาว 8 เซนติเมตร อยากทราบว่า ความยาวของด้าน DE เป็นกี่เซนติเมตร

การหาคำตอบ อัตราส่วน $\frac{4}{3}$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านใน △ ABC ต่อความยาวด้านใน △ DEF ที่สมนัยกัน กำหนดให้ d แทน ความยาวของด้าน DE เขียนในรูปอัตราส่วน ได้ $\frac{8}{d}$ สามารถเขียนในรูปของสัดส่วนได้ $\frac{4}{3} = \frac{8}{d}$ จะได้ $d = 6$

ดังนั้น ความยาวของด้าน DE เท่ากับ 6 เซนติเมตร

ในการเขียนกราฟเส้นตรง สามารถนำเรื่องสัดส่วนมาใช้แก้ปัญหาได้ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 7 จุด (3,8) เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากผ่านจุดกำเนิด (0,0) ถ้าจุด (12,y) เป็นจุดอีกจุดหนึ่งที่อยู่บนเส้นตรงนี้ จงหาค่า y

การหาคำตอบ จากจุดที่กำหนดให้ นำมาเขียนเป็นอัตราส่วนแรกเป็น $\frac{3}{8}$ สำหรับจุดทุกจุดบนเส้นตรงนี้ อัตราส่วนของ x ต่อ y เป็น $\frac{3}{8}$ จุด (12,y) นำมาเขียนในรูปอัตราส่วนได้ $\frac{12}{y}$ สามารถเขียนในรูปของสัดส่วนได้ดังนี้

$\frac{3}{8} = \frac{12}{y}$ จะได้ $y = 32$

ดังนั้น ค่า y เท่ากับ 32

ปัญหาสุดท้ายคือ สามารถนำสัดส่วนมาใช้ในปัญหาประเภทการบริโภค

ตัวอย่างที่ 8 การจัดเก็บภาษีโรงเรือนมูลค่า 40,000 บาท ต้องจ่ายภาษี 800 บาท ในอัตราการเก็บภาษีเดียวกันนี้ ถ้าโรงเรือนมูลค่า 25,000 บาท จะเสียภาษีเท่าใด

การหาคำตอบ นำมูลค่าโรงเรือนและภาษีที่ต้องจ่าย มาเขียนในรูปอัตราส่วนแรก จะได้ $\frac{4000}{800}$ กำหนดให้ t แทน จำนวนภาษีที่ต้องเสีย นำมาเขียนในรูปอัตราส่วนที่สอง จะได้ $\frac{25000}{t}$ สามารถนำมาเขียนในรูปสัดส่วน $\frac{4000}{800} = \frac{25000}{t}$ จะได้ $t = 5000$

ดังนั้น ต้องเสียภาษี 5,000 บาท

จากตัวอย่างที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ทำให้เห็นถึงประโยชน์ของเรื่องสัดส่วน สามารถนำไปใช้ในเนื้อหาหลาย ๆ เรื่อง แต่ละปัญหาสามารถแก้ได้ด้วยสัดส่วน ดังนั้น ในการสอนเรื่องสัดส่วน ครูควรจะยกตัวอย่างปัญหาหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อเป็นแนวให้นักเรียนได้นำความรู้เรื่องสัดส่วนไปใช้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

คาร์พลัส และคณะ (Karplus et al. 1977 : 411 - 417) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสำรวจการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนและการควบคุมตัวแปรใน 7 ประเทศ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนอายุระหว่าง 13-15 ปี จำนวน 3,456 คน เป็นนักเรียนหญิงจำนวน 1,800 คน และนักเรียนชายจำนวน 1,656 คน ประกอบด้วยนักเรียนจากประเทศต่าง ๆ ดังนี้

1.	เดนมาร์ค	(เขตโคเปนเฮเกน)	จำนวน	399	คน
2.	สวีเดน	(เขตโกเธนเบอร์ก)	จำนวน	280	คน
3.	อิตาลี	(เขตโรม)	จำนวน	467	คน
4.	สหรัฐอเมริกา	(เขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ และภาคเหนือ)	จำนวน	1,020	คน
5.	ออสเตรีย	(เขตเวียนนา)	จำนวน	595	คน
6.	เยอรมัน	(เขตเกอตทินเจน)	จำนวน	319	คน
7.	อังกฤษ	(เขตลอนดอน)	จำนวน	376	คน

กลุ่มโรงเรียนในเดนมาร์ค สวีเดน อิตาลี และสหรัฐอเมริกา เป็นโรงเรียนทั่วไปในเกรด 7 และเกรด 8 ตัวอย่างประชากรจำแนกประเภทตามระดับฐานะทางเศรษฐกิจ คือประเภทรายได้ค่อนข้างสูง ปานกลาง และต่ำ กลุ่มโรงเรียนในออสเตรีย เยอรมัน และอังกฤษ ซึ่งได้รับการคัดเลือกโดยแบ่งตามความแตกต่างของการสอบคัดเลือก หลักสูตร และอายุของผู้ที่จบจากโรงเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นงานการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน ซึ่งคล้ายกับงานที่ใช้ลวดเสียบกระดาษ จำนวน 2 ข้อ และงานที่เกี่ยวกับการควบคุมตัวแปร ที่ดัดแปลงมาจากงานของวูลแมน (Wollman) จำนวน 3 ข้อ ประกอบด้วยพื้นเอียง และทรงกลม 2 ก้อน ที่มีน้ำหนักต่างกัน งานทั้งสองมีข้อคำถามและให้นักเรียนสามารถเลือกเติมคำตอบได้จาก 5 ภาษา ซึ่งทั้ง 5 ภาษานี้ ได้รับความช่วยเหลือจากกลุ่มการวิจัยทางการศึกษาวิทยาศาสตร์ในแต่ละประเทศ รวมทั้งการสอบปากเปล่า และการสาธิต สำหรับคะแนนพิจารณาดังนี้

1. **งานการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน** ได้จัดเป็นประเภทดังนี้

ประเภท I (Intuitive) ได้แก่ การตอบด้วยการเดา ปราศจากเหตุผลหรืออธิบายได้ไม่สมบูรณ์

ประเภท A (Additive) ได้แก่ การบอกความแตกต่างได้อย่างเดียว

ประเภท Tr (Transitional) ได้แก่ การเข้าใจเรื่องสัดส่วนอย่างไม่สมบูรณ์ หรือเข้าใจได้เป็นบางส่วน

ประเภท R (Ratio) ได้แก่ การเข้าใจเรื่องสัดส่วนได้อย่างสมบูรณ์และถูกต้อง

2. **งานควบคุมตัวแปร** ให้คะแนนเป็นตัวเลข ช่วงคะแนนจาก 0 ถึงสูงสุด 5 คะแนน คือสามารถแยกตัวแปรได้ในแต่ละข้อได้ 3 คะแนน และอีก 2 คะแนน ได้จากการหาตัวแปรควบคุมในแต่ละข้อนั้น

ผลการวิจัยพบว่า งานการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน จำนวนหนึ่งในสี่ของตัวอย่างประชากรจัดอยู่ในประเภท R ประมาณหนึ่งในหกของตัวอย่างประชากรอยู่ในประเภท A และที่เหลืออยู่ในประเภท I และ Tr ส่วนงานเกี่ยวกับการควบคุมตัวแปร มีจำนวน 640 คน ที่ได้ คะแนนในช่วง 3 - 5 คะแนน จำนวน 1,273 คน ได้คะแนน 2 คะแนน จำนวน 1,265 คน ได้คะแนน 1 คะแนน และจำนวน 278 คน ได้คะแนน 0 คะแนน

นิวตัน คาพี และ โทบิน (Newton, Capie and Tobin 1981 : 1 - 7) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้เหตุผลในงานปฏิบัติการทางความคิดด้านสัดส่วน ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 6 - 13 จำนวน 2,222 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยชื่อ TOLT (The Test of Logical Thinking) ของ โทบินและคาพี (1980) ผลการวิจัยพบว่า การใช้เหตุผลซึ่งเป็นคำตอบผิดที่นักเรียนใช้มากที่สุดคือ การใช้หลักการบวก (Addition) ซึ่งจะสนใจความแตกต่างเพียงด้านเดียวและการใช้เหตุผลที่ถูกแต่คำนวณผิด พบมากในปัญหาที่เป็นการคำนวณตัวเลขที่เป็นเศษส่วน และยังพบว่าการใช้สถานการณ์ปัญหาที่ต่างกัน ซึ่งวัดความสามารถด้านสัดส่วนเหมือนกัน การประสบความสำเร็จที่แตกต่างกัน อาจขึ้นอยู่กับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ เช่น การคำนวณตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็ม การคำนวณตัวเลขที่เป็นเศษส่วน ผลการวิจัยยังพบอีกว่า ความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนขึ้นอยู่กับความคุ้นเคยในลักษณะคำถาม และเนื้อหาวิชาที่ได้รับประสบการณ์จากโรงเรียน ระดับชั้นของนักเรียน ความยากง่ายของแบบทดสอบด้านสัดส่วน เช่น สถานการณ์ปัญหาด้านสัดส่วน ที่ต้องอาศัยการคำนวณตัวเลขที่เป็นเศษส่วน หรือทศนิยม นักเรียนจะประสบความสำเร็จน้อยกว่าการคำนวณที่ใช้การคำนวณตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็ม

แจคสัน และฟิลลิปส์ (Jackson and Phillips 1983 : 337 - 344) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสอนคำศัพท์ในเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วนของนักเรียนเกรด 7 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในเรื่อง อัตราส่วนและสัดส่วนของนักเรียนเกรด 7 ด้วยวิธีสอนคำศัพท์ ตัวอย่างประชากรประกอบด้วยนักเรียน จำนวน 213 คน โดยเป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 111 คน ในการเรียนการสอน จะได้ทำกิจกรรมเกี่ยวกับคำศัพท์ในเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วนทุกวัน เป็นเวลา 4 สัปดาห์ และกลุ่มควบคุมมีนักเรียน จำนวน 102 คน ได้เรียนแบบเดียวกัน แต่ไม่ได้ทำกิจกรรมเกี่ยวกับคำศัพท์ ผลการวิจัยพบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติโดยเฉพาะโจทย์ปัญหาที่ต้องคิดคำนวณและกิจกรรมเกี่ยวกับคำศัพท์ จะทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ดีขึ้น และยังได้พัฒนาความเข้าใจของนักเรียน

ฟิชเชอร์ (Fisher 1989 : 1715 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง กลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาสัดส่วนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา วัตถุประสงค์เพื่อศึกษากลวิธีที่ใช้แก้ปัญหาและใช้สอนปัญหาสัดส่วนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ตัวอย่างประชากรเป็นครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา จำนวน 20 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบ แบบสัมภาษณ์ ในการเก็บข้อมูล ให้ครูอธิบายวิธีคิดแก้ปัญหาโจทย์ จำนวน 4 ข้อ (ปัญหาสัดส่วนตรง 2 ข้อ และปัญหาสัดส่วนผกผัน 2 ข้อ) จากนั้นให้ครูอธิบายวิธีสอนปัญหาสัดส่วน จำนวน 2 ข้อ และให้ครูแก้ปัญหาสัดส่วนจำนวน 4 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า วิธีคิดหาคำตอบของครูแบ่งออกเป็น 8 กลวิธีคือ ใช้สูตรสัดส่วน กลวิธีเกี่ยวกับสัดส่วน การพยายามใช้สัดส่วน การไม่ตอบ การคิดขึ้นเองในใจ การใช้หลักการบวก การใช้พีชคณิต และกลวิธีอื่น ๆ โดยเครื่องมือชุดแรก ครูตอบถูกคิดเป็นร้อยละ 74 ส่วนใหญ่จะทำปัญหาสัดส่วนตรงเกือบถูกหมด สำหรับปัญหาสัดส่วนผกผัน ครึ่งหนึ่งของคำตอบเป็นคำตอบถูก ครูส่วนใหญ่มีความเห็นว่า ปัญหาสัดส่วนผกผันเป็นเรื่องยาก กลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาพบว่า ครูใช้หลายกลวิธี แต่มีแนวโน้มว่า หนึ่งในสี่ของคำตอบใช้กลวิธีพีชคณิต และหนึ่งในสองของคำตอบใช้กลวิธีเกี่ยวกับสัดส่วน แต่กลวิธีการใช้สูตรสัดส่วนจะใช้มากกว่ากลวิธีอื่น ๆ กลวิธีใช้หลักการบวกไม่มีใครใช้ ส่วนใหญ่ครูจะใช้กลวิธีเดียวกันทั้งในการแก้ปัญหาและการสอนปัญหาสัดส่วน

เฮล (Hale 1983 : 77 - 85) ได้ศึกษาการวิเคราะห์การแก้ปัญหาการศึกษาของเพียเจท์ ตัวอย่างประชากรเป็นนักศึกษาเภสัชศาสตร์ ปีที่ 2 จำนวน 59 คน จากทั้งหมด 65 คน ที่ศึกษาอยู่ในมหาวิทยาลัยเซาท์ดาโกตา เป็นนักศึกษาชาย จำนวน 49 คน และนักศึกษาหญิง จำนวน 10 คน มีอายุระหว่าง 20-35 ปี (เฉลี่ย 23 ปี) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เป็นงานในการใช้ปฏิบัติการทางสมองขั้นคิดปฏิบัติการนามธรรม ตามทฤษฎีของเพียเจท์ จำนวน 12 งาน ประกอบด้วย 4 ประเภทคือ

1. การแยกและควบคุมตัวแปร จำนวน 3 งาน คือ งานที่ 1-3
2. การคิดเกี่ยวกับการจัดหมู่ จำนวน 2 งาน คือ งานที่ 4-5
3. การใช้เหตุผลเกี่ยวกับความน่าจะเป็น จำนวน 3 งาน คือ งานที่ 6-8
4. การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน จำนวน 4 งาน คือ งานที่ 9-12

การปฏิบัติงานเหล่านี้ งานที่ 1 - 7 นำเสนอโดยการใช้วิดีทัศน์ งานที่ 8 - 12 นำเสนอโดยการจดบันทึก ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษาเภสัชศาสตร์ชั้นปีที่ 2 จำนวน 2 คน มีความคิดขั้นนามธรรมอย่างสมบูรณ์ จากปฏิบัติการทั้ง 12 งาน ได้คะแนนรวม 36 คะแนน และมีจำนวน 57 คน ที่มีความคิดอยู่ในขั้นต่อเนื่อง คือ ได้คะแนน 19 - 35 คะแนน ในจำนวนนี้มี 53 คน ได้คะแนนอยู่ในช่วง 31 - 35 คะแนน และมี 4 คน ได้คะแนน 19 คะแนน จากการทดสอบนี้มีโอกาสเป็นไปได้ที่นักศึกษาบางส่วนในขั้นต่อเนื่องอาจอยู่ในขั้นนามธรรมได้ทั้งนี้เนื่องจากความผิดพลาดในการวัด ซึ่งมีการสูญเสียคะแนน 2 - 3 คะแนน

โคช (Koch 1987 : 71 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการเรียนการสอนในเรื่องมโนทัศน์เกี่ยวกับโครงสร้างการคูณในเรื่อง ความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักศึกษาวิทยาลัย ซึ่งเรียนวิชาคณิตศาสตร์แบบพัฒนาการ วัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อศึกษาผลกระทบของการเรียนการสอนมโนทัศน์เกี่ยวกับโครงสร้างการคูณในเรื่อง ความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักศึกษาวิทยาลัย ซึ่งเรียนวิชาคณิตศาสตร์แบบพัฒนาการ ผู้วิจัยได้พัฒนาหน่วยการเรียนการสอนสองหน่วย หน่วยแรกใช้วิธีสอนโครงสร้างการคูณตามแบบของเวิร์กนอยด์ (Vergnaud, 1983 : 56 - 63) ประกอบด้วยหัวข้อการคูณ การหาร เศษส่วน จำนวนตรรกยะ และฟังก์ชั่น ได้รับการสอนแบบหน่วยบูรณาการ หน่วยที่สองใช้หัวข้อเดียวกัน

วิธีแรก แต่จัดเรียงไปตามลำดับ ตัวอย่างประชากรประกอบด้วยนักเรียน จำนวน 53 คน ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานในมหาวิทยาลัยมินเนโซตา วิธีการศึกษาใช้การวิเคราะห์แบบแฟกตอเรียล ตัวแปรสองตัว ได้แก่ ความสามารถ (คะแนนจำนวนตรรกยะก่อนการทดลอง - สองระดับ) และการปฏิบัติ (โครงสร้างการคูณและการจัดลำดับ - สองระดับ) ตัวแปรตาม ได้แก่ คะแนนที่ได้รับจากแบบทดสอบการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนสองชุด ซึ่งใช้การแจกแจงความถี่ เพื่อจะศึกษาหาความแตกต่างในกลวิธีของนักเรียนในแบบทดสอบทั้งสองชุดดังกล่าว ผลการวิจัยไม่พบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติของคะแนนที่ได้รับจากแบบทดสอบการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน แต่พบความแตกต่างระหว่างกลุ่มปฏิบัติทั้งสองกลุ่มในความสัมพันธ์ของเพียร์สัน ระหว่างความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนและทักษะจำนวนตรรกยะ นักเรียนในกลุ่มปฏิบัติแสดงความเข้าใจดีขึ้นในเรื่องจำนวนตรรกยะและคณิตศาสตร์ จากประจักษ์พยาน ที่นักเรียนใช้กลวิธีหลายกลวิธีเพื่อแก้ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน และสามารถบอกได้ว่า ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะแก้ได้แตกต่างจากปัญหาที่เกี่ยวกับการบวกและการลบ

เชียร์ (Shier 1987 : 3347 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ความสัมพันธ์ของการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนในวัยรุ่นของฟิลิบปินส์ วัตถุประสงค์ของการวิจัย เพื่อศึกษาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในประเทศฟิลิบปินส์ โดยศึกษาองค์ประกอบที่มีผลกระทบต่อการปฏิบัติในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนและเพื่อศึกษากลวิธีประเภทต่าง ๆ ที่ใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ตัวอย่างประชากรประกอบด้วยนักเรียน จำนวน 369 คน เรียนในเกรด 7 8 9 และ 10 ตามลำดับ ในโรงเรียนมัธยมศึกษา จำนวน 3 โรงเรียน แบบทดสอบประกอบด้วย แบบทดสอบสัดส่วนตรง คือ นายเตี้ยและนายสูง และ TORT (Test of Response Types) ส่วนแบบทดสอบสัดส่วนผกผัน คือ แบบทดสอบความสมดุล ตัวแปรที่ศึกษาได้แก่ ระดับชั้นที่เรียน ระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เพศ ความเป็นอิสระและความพึ่งพา ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ และ ระดับคะแนนที่ได้ในวิชาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ผลกระทบของระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีต่อการปฏิบัติในแบบทดสอบเรื่อง สัดส่วนมีนัยสำคัญทางสถิติในระดับสูง โดยทั่วไปการปฏิบัติจะพัฒนาขึ้นตามระดับชั้นเรียน และเพศชาย จะทำได้ดีกว่าเพศหญิง ความสามารถในเรื่องมิติสัมพันธ์ ความเป็นอิสระ และความพึ่งพา ระดับคะแนนในวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติกับคะแนนการทดสอบความสมดุล แต่ไม่มีความสัมพันธ์กับ

คะแนน TORT นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ใช้หลักการบวก ส่วนนักเรียนที่มีสติปัญญาเลิศ ใช้กลวิธีการใช้เหตุผลอย่างถูกต้องในทุกระดับชั้น

บาร์ (Bar 1987 : 599 - 613) ได้ศึกษาแบบการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจากสถานการณ์ปัญหา 2 เรื่อง คือ เรื่องวงจรไฟฟ้า และสารละลายน้ำตาล ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 3 4 และ 5 จากโรงเรียนในกรุงเยรูซาเล็ม จำนวน 264 คน นักเรียนมีอายุเฉลี่ย 9.7 ปี เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบที่กำหนดสถานการณ์มาให้และมีภาพประกอบแล้วให้นักเรียนตอบพร้อมกับแสดงวิธีคิดในแต่ละภาพหรือแต่ละสถานการณ์ เช่น งานที่ 1 เรื่องวงจรไฟฟ้า มีภาพที่ 1 เป็นภาพวงจรไฟฟ้าที่กำหนดให้ คือ วงจร A ประกอบด้วยหลอดไฟฟ้า 1 หลอด พร้อมกับ แบตเตอรี่ 1 ตัว ต่อเป็นวงจรเข้าด้วยกัน ส่วนภาพที่ 2 และภาพอื่น ๆ ก็จะเป็นภาพวงจรไฟฟ้า ที่ประกอบด้วยหลอดไฟฟ้าและแบตเตอรี่ที่มีขนาดเท่ากับภาพที่ 1 แต่จำนวนแบตเตอรี่ และหลอดไฟฟ้าแตกต่างกันในแต่ละภาพ แล้วถามนักเรียนว่า ความสว่างของหลอดไฟฟ้าแต่ละภาพหรือแต่ละวงจรเป็นอย่างไร เมื่อเปรียบเทียบกับวงจร A ดังภาพที่ 1 ที่กำหนดให้ และงานที่ 2 เรื่อง สารละลายน้ำตาล กำหนดภาพในแต่ละสถานการณ์มาให้ เช่น สถานการณ์ที่ 1 เป็นภาพถ้วย A และถ้วย B มีขนาดเท่ากัน ใส่น้ำจนเกือบเต็ม ปริมาตรน้ำแต่ละถ้วยเท่ากัน ถ้วย A ใส่น้ำตาล 1 ช้อน ถ้วย B ใส่น้ำตาล 2 ช้อน ถามนักเรียนว่า ถ้วยไหนจะหวานมากกว่าหรือหวานเท่ากัน จงอธิบายเหตุผล และนอกจากนี้ก็มีภาพในสถานการณ์อื่น ๆ ที่ให้ปริมาตรน้ำและจำนวนช้อนของน้ำตาลที่ใส่ในแต่ละถ้วยแตกต่างกัน และให้นักเรียนตอบคำถามแต่ละสถานการณ์ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล ผลการวิจัยพบว่า การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนเป็นแบบการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่ไม่สมบูรณ์ ส่วนใหญ่จะตอบในลักษณะของอัตราส่วนตรง หรืออัตราส่วนผกผัน แต่ไม่นำเอาอัตราส่วนแต่ละอัตราส่วนมาพิจารณาร่วมกัน ซึ่งเป็นการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่สมบูรณ์ได้ นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนที่อยู่ในระดับชั้นที่สูงกว่าจะมีการใช้เหตุผลดีกว่า

เบซุค (Bezuk 1987 : 2932 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่องตัวแปรที่มีผลกระทบต่อการปฏิบัติและกลวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนเกรด 7 วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลกระทบของตัวแปรงาน ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนในเรื่อง จำนวนตรรกยะที่มีต่อการปฏิบัติและกระบวนการแก้ปัญหาที่นักเรียนเกรด 7 ใช้ในการหาค่าของตัวแปรใน

ปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน ตัวแปรงานที่ศึกษา ได้แก่ ก. ลำดับการนำเสนอของข้อมูลในปัญหา และ ข. ประเภทของอัตราส่วนเชิงตัวเลขระหว่างจำนวนในปัญหา ประเภทของลำดับการนำเสนอของข้อมูล เรียกว่า อัตรา อัตราส่วน อัตราผกผัน และอัตราส่วนผกผัน ประเภทของอัตราส่วนเชิงตัวเลข ได้แก่ อัตราส่วนจำนวนเต็ม ทั้งระหว่างคู่อันดับและภายในคู่อันดับ อัตราส่วนจำนวนเต็มภายในคู่อัตรา อัตราส่วนจำนวนเต็มระหว่างคู่อัตรา และไม่มีอัตราส่วนจำนวนเต็ม เครื่องมือเป็นแบบสอบอัตนัยนำคำตอบมาวิเคราะห์ โดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน หลังจากนั้นสัมภาษณ์รายบุคคล ผลการวิจัยพบว่า ตัวแปรที่ศึกษามีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติต่อการปฏิบัติของนักเรียนเช่นเดียวกับผลสัมฤทธิ์เรื่อง จำนวนตรรกยะ การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยภายหลัง พบว่า มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติในระดับของผลสัมฤทธิ์ สามในสี่เป็นประเภทของอัตราส่วนเชิงตัวเลข และสามในสี่เป็นประเภทของการจัดอันดับของข้อมูล นักเรียนที่มีระดับผลสัมฤทธิ์เรื่องจำนวนตรรกยะสูงกว่าใช้กลวิธีเทียบต่อหนึ่งหน่วยมาก ในปัญหาที่มีหน่วยจำนวนเต็ม และใช้หลักการบวกและกลวิธีที่ไม่ถูกต้องใช้มากในปัญหาที่เทียบต่อหนึ่งหน่วยที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม นักเรียนหลายคนใช้กลวิธีมากกว่าหนึ่งกลวิธี นักเรียนไม่ค่อยเลือกกลวิธีต่าง ๆ โดยอาศัยลักษณะของตัวเลขเกี่ยวกับลักษณะลำดับของปัญหา

เรพเวน (Raven 1987 : 565 - 570) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาสัดส่วนของนักเรียน โดยไม่นำเอาเนื้อหาวิชาวิทยาศาสตร์ที่มีอยู่ในแบบเรียนมาเป็นคำถาม แต่นำเนื้อหาที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวันมาเป็นคำถาม เพื่อทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาสัดส่วนระหว่างนักเรียนเกรด 9 กับนักเรียนเกรด 11 ว่าแตกต่างกันหรือไม่ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 9 (อายุเฉลี่ย 14 ปี 9 เดือน) จำนวน 24 คน และนักเรียนเกรด 11 อายุเฉลี่ย 16 ปี 6 เดือน) จำนวน 24 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยสถานการณ์ปัญหา 3 สถานการณ์ ซึ่งต้องอาศัยความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนมาแก้ปัญหา เช่น สถานการณ์ปัญหาที่ 1 ให้นักเรียนตัดสินใจว่า ควรจะปลูกต้นไม้ชนิดใดต่อไปนี้ลงในพื้นที่ที่กำหนดให้ ถ้าบริเวณพื้นที่นั้นไม่มีโรคและแมลงรบกวน ปลูกต้นไพน์ให้ผลผลิต จำนวน 1,000 ต้น ต้นสปรู๊ค ให้ผลผลิต จำนวน 700 ต้น ต้นบีชให้ผลผลิต จำนวน 600 ต้น และต้นโอ๊คให้ผลผลิต จำนวน 500 ต้น แต่ถ้าบริเวณพื้นที่นั้น มีโรคระบาดต้นไพน์จะให้ผลผลิตลดลง จำนวน 400 ต้น ต้นสปรู๊ค จะให้ผลผลิตลดลง จำนวน 100 ต้น ต้นบีชให้ผลผลิต จำนวน 200 ต้น และต้นโอ๊คให้ผลผลิต จำนวน 400 ต้น นอกจากนี้ยังมีสถานการณ์ปัญหาในทำนองเดียวกันนี้อีก 2 ปัญหา ให้นักเรียน

ตอบพร้อมทั้งแสดงเหตุผล ผลการศึกษาคำตอบของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม พบว่า นักเรียนเกรด 9 ส่วนใหญ่จะแก้ปัญหาโดยใช้อัตราส่วนสูงสุดซึ่งพิจารณาจากผลผลิตที่ได้ โดยไม่พิจารณาผลผลิตที่ลดลง ส่วนนักเรียนเกรด 11 แก้ปัญหาโดยใช้อัตราส่วนสูงสุดและต่ำสุดมาพิจารณาร่วมกัน โดยการพิจารณาผลผลิตที่ได้ร่วมกับผลผลิตที่ลดลง ก่อนที่จะตัดสินใจปลูกต้นไม้ชนิดใด แสดงให้เห็นว่านักเรียนเกรด 11 มีความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนสูงกว่านักเรียนเกรด 9 จากการวิจัยนี้อาจกล่าวได้ว่า นักเรียนที่ศึกษาในระดับชั้นที่สูงนั้น อายุมากขึ้น มีประสบการณ์มากขึ้น จะแก้ปัญหาสัดส่วนได้ดีกว่านักเรียนที่ศึกษาในระดับชั้นที่ต่ำกว่า และมีอายุน้อยกว่า

ซอนเดอร์ส และ เจอซันนาธาดาส (Saunders and Jesunathadas 1988 : 55 – 67)ได้วิจัยเพื่อศึกษาเนื้อหาวิชาที่นักเรียนคุ้นเคยคือ เคยเรียนผ่านมาแล้ว และเนื้อหาวิชาที่ไม่คุ้นเคย หรือยังไม่เคยผ่านการเรียนเรื่องนั้นมาก่อน จะมีผลต่อความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนหรือไม่ โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 9 จำนวน 76 คน (ชาย 34 คน หญิง 43 คน) เครื่องมือที่ใช้ คือ แบบทดสอบวัดความสามารถด้านสัดส่วนที่มีคำหรือมโนทัศน์จากเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้ว และทดสอบวัดความสามารถด้านสัดส่วนที่มีคำหรือมโนทัศน์จากเนื้อหาที่นักเรียนยังไม่ได้เรียนรู้มาก่อน โดยนำเนื้อหามาจากหนังสือเรียนวิทยาศาสตร์ของนักเรียน เกรด 10 11 และ 12 ซึ่งนักเรียนเกรด 9 ยังไม่ได้เรียน และลักษณะของแบบทดสอบทั้ง 2 ฉบับ แบ่งระดับความยากง่ายออกเป็น 3 ระดับคือ

ระดับที่ 1 ปัญหาด้านสัดส่วนที่ใช้อัตราส่วนของจำนวนตัวเลขน้อย ๆ เช่น 2 : 3 หรือ 3 : 2 และ 4 : 5 หรือ 5 : 4

ระดับที่ 2 ปัญหาสัดส่วนที่มีความยากเพิ่มขึ้นกว่าระดับที่ 1 โดยใช้อัตราส่วนของตัวเลขที่มากขึ้น เช่น อัตราส่วน 4 : 15 หรือ 15 : 4 และ 18 : 5 หรือ 5 : 18

ระดับที่ 3 ปัญหาสัดส่วนที่มีความยากสูงสุด คือ ใช้อัตราส่วนของตัวเลขที่เป็นทศนิยม เช่น อัตราส่วนของ 4 : 8.9 หรือ 8.9 : 4 และ 5.4 : 8 หรือ 8 : 5.4

แบบทดสอบได้ผ่านการตรวจสอบและปรับปรุงเป็นขั้นตอนโดยมีค่าความเที่ยง .88 ตัวอย่างของแบบทดสอบที่เป็นแบบทดสอบที่คุ้นเคย

1. ร้านขายของชำแห่งหนึ่งติดราคานมข้น จำนวน 4 แกลลอน ราคา 5 ปอนด์ ถ้ามีเงิน 30 ปอนด์ จะซื้อนมข้นได้กี่แกลลอน (ความยากระดับที่ 1)

2. ถ้าสี 1.4 แกลลอน ใช้ทาผนังห้องได้ 5.5 ส่วน ถ้าขนาดของผนังห้องแต่ละส่วนเท่าเดิม จะทาสีผนังห้อง 12 ส่วน ต้องใช้กี่แกลลอน (ความยากง่ายระดับที่ 3)

ผลการวิจัยพบว่า คะแนนความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียนจากแบบทดสอบที่มีเนื้อหาคุ้นเคย สูงกว่าคะแนนความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนจากแบบทดสอบที่อาศัยเนื้อหาไม่คุ้นเคยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และมีความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหาที่คุ้นเคยกับระดับความยากง่ายด้วย

มัวร์ (Moore 1989 : 378 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบแนวคิดการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ในการสอนเรื่อง อัตราส่วนและสัดส่วนแก่นักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีปัญหาในการเรียน เป็นการเปรียบเทียบหลักสูตร 2 หลักสูตร ที่สร้างขึ้นเพื่อใช้สอนปัญหาเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วน หลักสูตรทดลองประกอบด้วย การเรียนการสอนซึ่งมีประสิทธิภาพในการสอนนักเรียน เช่น การสอนกลวิธีเฉพาะเป็นขั้น ๆ ไป หลักสูตรนี้จะนำเสนอในลักษณะของรายการวีดิทัศน์แบบมีปฏิสัมพันธ์ ส่วนหลักสูตรเปรียบเทียบเป็นหลักสูตรพื้นฐานคณิตศาสตร์ สอนโดยวิธีเชิงปฏิบัติการ ทั้งสองหลักสูตรมีเนื้อหาและความยาวใกล้เคียงกัน ตัวอย่างประชากรประกอบด้วย นักเรียนมัธยมศึกษา จำนวน 29 คน ซึ่งมีความต้องการเรียนเสริมในวิชาคณิตศาสตร์ แบ่งเป็นนักเรียนกลุ่มหลักสูตรพื้นฐาน จำนวน 16 คน และกลุ่มรายการวีดิทัศน์ จำนวน 13 คน หลังจากทดลองที่ใช้ระยะเวลามา 6 สัปดาห์แล้ว จึงมีการทดสอบภายหลัง มีการตอบแบบสอบถามแสดงการรับรู้ต่อหลักสูตรทั้งสอง จากนั้นมีการทดสอบภายหลังอีก 10 วัน หลังจากทดสอบแล้ว ผลการทดลองพบว่า กลุ่มรายการวีดิทัศน์มีคะแนนสูงกว่าในการทดสอบภายหลัง และสูงกว่าอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เมื่อเปรียบเทียบกับกลุ่มหลักสูตรพื้นฐาน ครูมีความรู้สึกว่ารายการวีดิทัศน์มีประโยชน์กว่า แต่ครูก็ขาดการมีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียน ซึ่งหลักสูตรพื้นฐานจะมีมากกว่า นักเรียนในกลุ่มวีดิทัศน์มีความรู้สึกว่า ตนสามารถทำข้อสอบเรื่องปัญหาสัดส่วนได้อย่างประสบผลสำเร็จ

เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1989 : 205) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนเกี่ยวกับผลของตัวแปรปริบทสองตัวแปรคือ ประเภทของอัตราส่วนและสถานการณ์ปัญหา วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของตัวแปรปริบทสองตัวแปรคือประเภทของอัตราส่วนและสถานการณ์ปัญหาที่มีต่อความสามารถของนักเรียนเกรด 7 จากการทดสอบการใช้

เหตุผลเชิงสัดส่วนแบบตัวเลข และแบบคุณภาพ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 254 คน ในเมืองมินเนโซตา เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนแบบตัวเลขและแบบคุณภาพ จำนวน 6 แบบ ซึ่งแต่ละแบบใช้สถานการณ์ปัญหาเดียวกัน ผลการวิจัยพบว่า ประเภทของอัตราส่วนที่แตกต่างกันมีผลกระทบอย่างเด่นชัดต่อความยากของปัญหาการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วน แบบตัวเลข และแบบคุณภาพมากกว่าความแตกต่างเพียงเล็กน้อยในสถานการณ์ปัญหา อย่างไรก็ดี ความคุ้นเคยที่มีต่อสถานการณ์ปัญหามีผลกระทบโดยตรงต่อการใช้เหตุผลเชิงสัดส่วนเมื่อความยากของประเภทของอัตราส่วนเพิ่มขึ้น

เฮลเลอร์ และคณะ (Heller et al. 1990 : 388) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การใช้เหตุผลเชิงคุณภาพ และเชิงตัวเลขเกี่ยวกับเศษส่วนและอัตราส่วนของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการใช้เหตุผลแบบบอกทิศทางเกี่ยวกับอัตราส่วนกับการใช้เหตุผลเชิงตัวเลขในปัญหาที่เกี่ยวกับสัดส่วนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นอกจากนี้ศึกษาความสามารถในการทำแบบฝึกหัดทำเศษส่วนล้วน ๆ ว่า มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ภาษาที่มีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์คล้ายคลึงกันหรือไม่ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 421 คน และนักเรียนเกรด 8 จำนวน 492 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เป็นแบบสอบโจทย์ภาษาและแบบสอบเศษส่วน ซึ่งมีลักษณะคู่ขนานกัน ผลการวิจัยพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างสเกลวัดทิศทางและตัวเลขมีค่า 0.38 สำหรับนักเรียนเกรด 7 และ 0.45 สำหรับนักเรียนเกรด 8 การวิเคราะห์สมการถดถอย พบว่า คะแนนทิศทางสูงมีความสัมพันธ์กับความสำเร็จในการแก้ปัญหาสัดส่วนเชิงตัวเลขสูงด้วย ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาที่เป็นทำนองเดียวกันเชิงคณิตศาสตร์ในแบบสอบเกี่ยวกับเศษส่วน คะแนนสอบที่เป็นโจทย์ภาษาชี้ให้เห็นว่า นักเรียนไม่ได้ใช้ความคล้ายกันในโครงสร้างของตัวเลขให้เป็นประโยชน์ แม้ว่าจำนวนในปัญหาทั้งสองแบบนั้นเป็นจำนวนเดียวกัน