บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อหาค่าการตอบสนองของโครงสร้างเมื่อรับแรงลมซึ่งประกอบไปด้วยทฤษฎีทางด้านอากาศพลศาสตร์ กฎลอการิธึม สมการเบอร์นูลี พลศาสตร์ของโครงสร้าง และ ทฤษฎีค่าปลายสุด ตามลำดับ

2.1 <u>อากาศพลศาสตร์</u>

อากาศพลศาสตร์ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับแรงที่เกิดจากการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างของไหล (Fluid) และ ตัวกลางที่ของไหลนั้นไหลผ่าน (Body) แรงอากาศพลศาสตร์จะกระทำต่อโครงสร้าง โดยการเลื่อนไหลของชั้นบรรยากาศ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะแปรเปลี่ยนตามเวลา การแปรเปลี่ยนนี้ก็เนื่องมาจากความไม่สม่ำเสมอ (Fluctuation) ของลมที่พัดมา และการเหนี่ยวนำของตัวโครงสร้างเองเมื่อถูกลม เนื่องจากแรงอากาศพลศาสตร์นี้แปรเปลี่ยนตามเวลา ดังนั้น วิธีการทางด้านพลศาสตร์ของโครงสร้างจึงถูกนำมาใช้เพื่อหาการตอบสนองของโครงสร้าง แรงอากาศพลศาสตร์ที่ไม่สม่ำเสมอนี้ ประกอบไปด้วยส่วนประกอบของแรงฮาร์มอนิกที่มีความถี่ต่างๆ รวมอยู่กันเป็นจำนวนมาก เมื่อใดที่แรงอากาศพลศาสตร์นี้มีขนาดของส่วนประกอบของแรงฮาร์มอนิกที่มีความถี่ที่ตรง หรือ ใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ก็จะทำให้การตอบสนองของโครงสร้างเพิ่มขึ้น จนกลายเป็นปรากฏการของการสั่นพ้อง (Resonance) ในกรณีที่โครงสร้างมีความแข็ง (Stiffness) มาก การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างลม และ ตัวโครงสร้าง ก็จะมีแต่เพียงการเคลื่อนที่ของลมนั้น แต่ถ้าโครงสร้างมีความอ่อนตัว (Flexiblity) การเคลื่อนที่สัมพัทธ์จะไม่มีแต่เพียงการเคลื่อนที่ของลมเท่านั้น แต่จะมีการเคลื่อนที่เนื่องจากการสั่นสะเทือนของโครงสร้างภายใต้แรงลมด้วย ในอดีตข้อมูลทางด้าน

อากาศพลศาสตร์ของโครงสร้างจะได้มาจากการทดสอบในอุโมงค์ลม และ จากการวัดค่าในตัวโครงสร้างจริงสำหรับค่าที่หาไม่ได้ หรือ ในกรณีที่ค่าที่ได้จากการทดสอบในอุโมงค์ลมไม่เป็นที่น่าเชื่อถือ

2.2 กฎลอการิทึม

ค่าความเร็วลมจะแปรเปลี่ยนตามความสูงตามสมการ

$$u(z) = 2.5\, u_* \ln(z/z_o) \qquad (2\text{-}1)$$

โดยที่ $u(z)$ = ความเร็วลมที่ความสูง z ใดๆ

u_* = ความเร็วของการเฉือน (Shear Velocity)

z_o = ระยะสิ่งกีดขวาง (Roughness Length) มีค่าตามตารางที่ (2-1)

ค่า u_* นี้ จะแปรเปลี่ยนตามสภาพภูมิประเทศ และ สภาพภูมิอากาศ ซึ่งหาได้จากข้อมูลความเร็วลมที่มีอยู่ เราอาจหาค่าความเร็วลมที่ความสูง และ สภาพภูมิประเทศใดๆ โดยสมมติให้ความเร็วลมที่ความสูงเกรเดียนต์ในแต่ละสภาพภูมิประเทศ มีค่าเท่ากัน และ ใช้สมการที่ (2-1) ได้ค่าความเร็วลมที่ความสูงใดๆ ดังนี้

$$u(z) = u_{ref}(z_{ref})\, p\, \frac{\ln(z/z_o)}{\ln(z_{ref}/z_{oref})} \qquad (2\text{-}2)$$

โดยที่ p มีค่าตามตารางที่ (2-1) และ สัญลักษณ์ ref หมายถึง ค่าอ้างอิงในสภาพภูมิประเทศในแบบที่ 2 ลักษณะของสภาพภูมิประเทศที่จำแนกไว้ใน [21] มีรายละเอียดตามตารางที่ (2-2)

2.3 สมการเบอร์นูลี (Bernoulli's Equation)

ในการไหลอย่างสม่ำเสมอ และ ไม่คิดผลของแรงเฉือนของของไหล ความดันที่จุดใดๆ มีค่าคงที่ ดังสมการต่อไปนี้

$$q + p = \text{ค่าคงที่} \quad (2\text{-}3)$$

โดยที่ q = ความดันพลวัต (Dynamic pressure)

$$= \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (2\text{-}4)$$

p = ความดันของไหล

ρ = มวลของของไหล

= 1.224 กก./ลบ.ม. สำหรับอากาศที่อุณหภูมิ 15 องศาเซลเซียส ความดัน 1 บรรยากาศ

u = ความเร็วของของไหล

2.4 พลศาสตร์ของโครงสร้าง (Structural Dynamics)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายของโครงสร้าง จะประกอบไปด้วยสปริง (Spring) มวล (Mass) และ ระบบการหน่วง (Dashpot System) ดังรูปที่ (2-1)

2.4.1 ระบบเชิงเส้นที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 1 (Single Degree of Freedom Linear System)

ระบบนี้จะสมมติให้มีมวลเป็นจุด มีสปริงที่ยืดหยุ่นเป็นเชิงเส้น และ มีตัวหน่วงที่แปรเป็นสัดส่วนกับความเร็วของมวล เราอาจเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$\ddot{y} + 2(2\pi f_o)\xi\dot{y} + \frac{K}{m}y = \frac{F(t)}{m} \quad (2\text{-}5)$$

โดยที่ $\ddot{y}\ \dot{y}\ y$ = ความเร่ง ความเร็ว และ การเคลื่อนที่ของมวลตามลำดับ

f_o = ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง

ξ = อัตราส่วนการหน่วง (Damping Ratio)

m = มวล

$$K = (2\pi f_o)^2 m \tag{2-6}$$

F(t) = แรงที่กระทำต่อระบบ

ถ้า F(t) เป็นแรงฮาร์มอนิก (Harmonic force) กระทำด้วยความถี่ f นั่นคือ

$$F(t) = F_o \cos(2\pi ft) \tag{2-7}$$

โดยที่ F_o = แอมพลิจูด (Amplitude) ของคลื่นฮาร์มอนิก

การเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างเมื่อรับแรง F(t) หาได้โดยการแก้สมการอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้ คือ

$$y(t) = F_o \frac{H(f)}{K} \cos(2\pi ft + \phi) \tag{2-8}$$

โดยที่ H(f) = ส่วนขยายทางกลศาสตร์ของระบบ

$$= \frac{1}{\left[\{ 1 - (f/f_o)^2 \}^2 + \{ 2\xi(f/f_o) \}^2 \right]^{1/2}} \tag{2-9}$$

ϕ = มุมวัฏภาค (Phase angle)

ในกรณีที่มีแรงกระทำเป็นแบบสุ่ม เช่น แรงลมซึ่งจะประกอบไปด้วยแรงฮาร์มอนิกที่ความถี่ต่างๆ รวมอยู่ด้วยกัน การเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างอาจหาได้จากการรวมผลของ

การเคลื่อนที่ตอบสนองของแรงฮาร์มอนิกในแต่ละความถี่เข้าด้วยกัน นั่นคือ

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos(2\pi f_i t) \qquad (2\text{-}10)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{K} H(f_i) \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \qquad (2\text{-}11)$$

ถ้าให้ $S_F(f)$ เป็นสเปกตรัมความหนาแน่น (Spectral Density) ของแรง ซึ่งสัมพันธ์กับลักษณะการกระจายของขนาดของแรงฮาร์มอนิกในแต่ละความถี่ และ นิยามเป็นการแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transform) ของฟังก์ชันออโตคอรีเลชัน (Autocorrelation Function) เมื่อแทนค่าการตอบสนองของแรงดลหนึ่งหน่วย (Unit Impulse Response) ในสมการที่เกี่ยวข้อง จะได้สเปกตรัมความหนาแน่นของการเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้าง $S_y(f)$ เมื่อรับแรงกระทำแบบสุ่มดังนี้

$$S_y(f) = \frac{H^2(f)\, S_F(f)}{K^2} \qquad (2\text{-}12)$$

2.4.2 <u>ระบบเชิงเส้นที่มีระดับขั้นความเสรีแบบพหุ</u>

(Multi-Degree of Freedom Linear System)

สมการการเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีแบบพหุเขียนได้เป็น

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{J} \mu_i(z)\, y_i(t) \qquad (2\text{-}13)$$

โดยที่ $y(z,t)$ = การเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างที่จุด z เมื่อเวลา t

$\mu_i(z)$ = รูปร่างการเคลื่อนที่ (Mode Shape) ของโครงสร้างในโหมดที่ i

$y_i(t)$ = ระยะการเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างที่ระดับอ้างอิงของโหมดที่ i ที่เวลา t

รูปร่างการเคลื่อนที่นี้ จะขึ้นอยู่กับมวล และ สติฟเนสของโครงสร้าง และ จะไม่ขึ้นอยู่กับชนิด และ ขนาดของแรง

ค่า $y_i(t)$ แต่ละโหมดจะแสดงให้เห็นถึงระยะการเคลื่อนที่ตอบสนองของโครงสร้างที่มีระดับชั้นความเสรีเป็น 1 ที่มีความถี่เป็น f_i อัตราส่วนการหน่วง ξ_i และ มวล M_i โดยมีแรงกระทำเป็น $Q_i(t)$ ค่า M_i และ $Q_i(t)$ เป็นค่ามวลวางนัยทั่วไป (Generalized Mass) และ แรงกระทำวางนัยทั่วไป (Generalized Force) ตามลำดับ ที่กระทำในโหมดที่ i ซึ่งหาได้จากการพิจารณาพลังงานในระบบจริงกับระบบวางนัยทั่วไป (Generalized System) ผลที่ได้คือ

$$M_i = \int_0^H \mu_i^2(z)\ m(z)\ dz \tag{2-14}$$

$$Q_i = \int_0^H \mu_i(z)\ p(z,t)\ dz \tag{2-15}$$

โดยที่ H = ความสูงของโครงสร้าง

$m(z)$ = มวลของโครงสร้างต่อหน่วยความสูง

$p(z,t)$ = แรงกระทำต่อโครงสร้างต่อหน่วยความสูง

สำหรับแรงกระทำเป็นแบบสุ่ม เราสามารถหาสเปกตรัมความหนาแน่นของการตอบสนองของโครงสร้างที่มีระดับชั้นความเสรีแบบพหุโดยประมาณได้ โดยการรวมผลของการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันครอสคอรีเลชัน (Cross-correlation) ระหว่างจุด z ใดๆ กับจุดต่างๆ ที่รับแรงกระทำบนพื้นที่ A_1 และ A_2 ได้เป็น [21]

$$S_y(z,t) \simeq \sum_{i=1}^{J} \frac{H_i^2(f)}{K_i^2} \mu_i^2(z) \int_{A2}\int_{A1} \mu_i(z_1)\, \mu_i(z_2)\, S_{P1}{}^{C}{}_{P2}(f)\, dA_1 dA_2 \qquad (2\text{-}16)$$

โดยที่ $S_{P1}{}^{C}{}_{P2}(f)$ = ค่าจำนวนจริงของสเปกตรัมของความดันของไหลที่ไม่สม่ำเสมอระหว่างจุด P_1 และ P_2

K_i = สติฟเนสวางนัยทั่วไป (Generalized Stiffness) ในโหมดที่ i

และ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานกำลังสองของค่าการเคลื่อนที่ตอบสนองที่ไม่สม่ำเสมอหาได้จาก

$$\sigma_y^2(z) = \int_0^{\infty} S_y(z,f)\, df \qquad (2\text{-}17)$$

2.5 <u>ทฤษฎีค่าปลายสุด</u>

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันการกระจายเริ่มต้นเป็น $F_X(x)$ เมื่อเราเลือกตัวอย่างขนาด n จากประชากรของ X แต่ละตัวอย่างจะเป็นตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เรียกว่า ตัวแปรสุ่มของตัวอย่าง ในทางทฤษฎีค่าปลายสุด เราสามารถหาค่าตัวแปรสุ่มที่มีค่ามากที่สุด Y_n และ ค่าน้อยที่สุด Y_1 จากตัวแปรสุ่มของตัวอย่างเหล่านี้ได้โดย

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (2\text{-}18)$$

$$Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (2\text{-}19)$$

เนื่องจาก Y_n และ Y_1 หาได้จากตัวอย่างของประชากรของ X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้น Y_n และ Y_1 ก็จะเป็นตัวแปรสุ่มด้วย ซึ่งฟังก์ชันการกระจายของ Y_n และ Y_1 ก็สามารถหาได้จากฟังก์ชันการกระจายของตัวแปรสุ่ม X

ถ้า Y_n ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุดของตัวแปรสุ่มของตัวอย่างนี้ มีค่าน้อยกว่า y แล้ว ค่าตัวแปรสุ่มของตัวอย่างก็ต้องน้อยกว่าค่า y และ ถ้าสมมติให้ค่าตัวแปรสุ่มของตัวอย่างนี้เป็นอิสระ และ มีการกระจายที่เหมือนกัน นั่นคือ

$$F_{x1}(x) = F_{x2}(x) = \ldots = F_{xn}(x) = F_x(x) \tag{2-20}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการกระจายของ Y_n หาได้โดย

$$F_{yn}(y) = P\left[Y_n \leq y\right] \tag{2-21}$$

$$= P\left[X_1 \leq y,\ X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y\right]$$

$$= \left[F_x(y)\right]^n \tag{2-22}$$

และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n หาได้โดย

$$f_{yn}(y) = \frac{\partial F_{yn}(y)}{\partial y} \tag{2-23}$$

$$= n\left[F_x(y)\right]^{n-1} f_x(y) \tag{2-24}$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n นี้ จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการกระจายของประชากร $F_x(x)$ และ ขนาดของ n ถ้าฟังก์ชันการกระจายของประชากรเป็นแบบปกติ คือ

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-0.5\ x^2] \tag{2-25}$$

ดังนั้น $F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp[-0.5\, z^2]\, dz = \Phi(x)$ (2-26)

เราสามารถหาฟังก์ชันการกระจายของ Y_n ได้เป็น

$$F_{Yn}(y) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp[0.5\, z^2]\, dz \right]^n = \left[\Phi(y) \right]^n \qquad (2\text{-}27)$$

และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n หาได้โดย

$$f_{Yn}(y) = \frac{\partial\, F_{Yn}(y)}{\partial\, y} \qquad (2\text{-}28)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left[\Phi(y) \right]^{n-1} \exp[-0.5\, y^2] \qquad (2\text{-}29)$$

2.6 <u>วิธีของเครเมอร์</u>

ใช้สำหรับหาฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของค่าปลายสุดเมื่อ n มีค่าอนันต์ โดยสมมติให้

$$L_n = n\left[1 - F_x(Y_n)\right] \qquad (2\text{-}30)$$

เราจะได้

$$F_{Ln}(l) = P(\, L_n \leq l\,)$$

$$= P\left[n[1 - F_x(Y_n)] \leq l\right]$$

$$= P\left[F_x(Y_n) \geq 1 - 1/n\right]$$

$$= P\left[Y_n \geq F_x^{-1}(1 - 1/n)\right]$$

$$= 1 - F_{Yn}\left[F_x^{-1}(1 - 1/n)\right]$$

$$= 1 - \left[F_x\left[F_x^{-1}(1 - 1/n)\right]\right]^n$$

$$= 1 - [1 - 1/n]^n \tag{2-31}$$

ถ้า n มีค่าเข้าใกล้อนันต์

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1 - 1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 - 1/n)}{1/n} = -1 \tag{2-32}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = \exp[-1] \tag{2-33}$$

$$F_{Ln}(l) = 1 - \exp[-l] \tag{2-34}$$

$$f_{Ln}(l) = \exp[-l] \tag{2-35}$$

จะเห็นได้ว่า สมการที่ (2-30) เมื่อค่า L_n ลดลง ค่า Y_n จะมีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น

$$P(Y_n \leq y) = P\left[L_n > g(y)\right] \tag{2-36}$$

โดยที่ g(y) เป็นด้านขวามือของสมการที่ (2-30)

เราสามารถหาฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n ได้จาก

$$F_{Y_n}(y) = 1 - F_{L_n}[g(y)]$$

$$= \exp[-g(y)] \quad (2\text{-}37)$$

$$f_{Y_n}(y) = -\exp[-g(y)] \frac{dg(y)}{dy} \quad (2\text{-}38)$$

ถ้าฟังก์ชันการกระจายของประชากรของตัวอย่างเป็นแบบปกติ เราสามารถหาฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n [25] โดยวิธีของเครเมอร์ได้เป็น

$$F_{Y_n}(y) = \exp\left[-\exp[-\alpha_n(y - u_n)]\right] \quad (2\text{-}39)$$

$$f_{Y_n}(y) = \alpha_n \exp[-\alpha_n(y - u_n)] \exp\left[-\exp[-\alpha_n(y - u_n)]\right] \quad (2\text{-}40)$$

โดยที่ $\alpha_n = \sqrt{2 \ln n}$ (2-41)

$$u_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2 \ln n}} \quad (2\text{-}42)$$

เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y_n จะมีค่าเข้าใกล้ฟังก์ชันการกระจาย และ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Fisher และ Tippett ชนิดที่ 1 (Gumbel)

โดยที่ $1/\alpha_n$ = การกระจายของตัวแปรสุ่ม Y_n

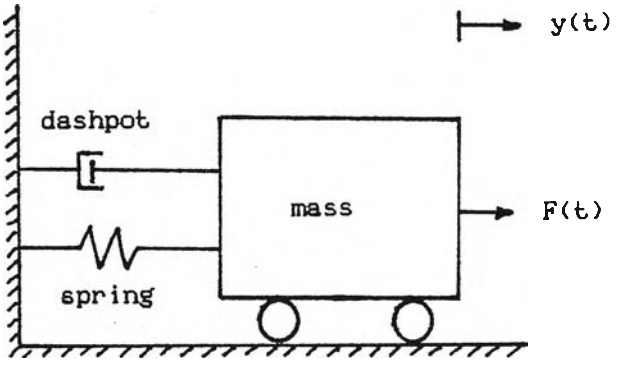
u_n = ฐานนิยม (Mode) ของตัวแปรสุ่ม Y_n

ตารางที่ (2-1) ค่า z_o p และ ค่า β [21]

สภาพภูมิประเทศ	1	2	3	4	5
z_o (ม.)	0.005	0.070	0.300	1.000	2.500
p	0.83	1.00	1.15	1.33	1.46
β	6.00	6.00	5.25	4.85	4.00

ตารางที่ (2-2) ลักษณะของสภาพภูมิประเทศแบบต่างๆ [21]

แบบที่	ลักษณะของสภาพภูมิประเทศ
1	ภูมิประเทศเปิดโล่งเหนือพื้นน้ำ
2	ภูมิประเทศเปิดโล่งเหนือพื้นดิน
3	ภูมิประเทศที่มีบ้านเรือนขนาดเล็ก หรือ ต้นไม้อยู่ห่างเป็นระยะในบริเวณรอบนอกเมือง
4	เมืองขนาดเล็ก หรือ บริเวณรอบนอกเมืองที่มีสิ่งปลูกสร้างหนาแน่นปานกลาง
5	บริเวณใจกลางเมืองขนาดใหญ่ มีสิ่งปลูกสร้างหนาแน่นมาก



<u>รูปที่ (2-1)</u> แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายในการวิเคราะห์โครงสร้างทางพลศาสตร์