บทที่ 2
สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการศึกษาเกี่ยวกับระยะเวลาที่คงอยู่ (Life time) ถ้าในการศึกษานั้นมีข้อมูลที่มีช่วงของการศึกษาสั้น หรือในอีกนัยหนึ่งเราสามารถติดตามผลของการสังเกตได้จนสิ้นสุดช่วงของการสังเกต ตัวอย่างเช่นในด้านของการประกันภัยที่มีการทำประกันในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ เช่นการประกันอุบัติเหตุในการเดินทาง หรือการทำประกันเครื่องจักรหรือชิ้นส่วนของเครื่องจักร ซึ่งข้อมูลเหล่านี้เราสามารถติดตามดูผลจนสิ้นสุดช่วงของการสังเกตได้ ดังนั้นถ้าสามารถประมาณค่าฟังก์ชันอัตราภาวะภัย ณ จุดเวลานั้น ๆ ได้ เราจะสามารถประมาณความเสี่ยงในการทำประกันหรือประมาณฟังก์ชันการอยู่รอดได้ ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณค่าของเงินสำรองหรือค่าอื่น ๆ ในบริษัทประกันภัย

สำหรับในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษากรณีข้อมูลมีค่าสังเกตแบบสมบูรณ์ โดยศึกษาภายใต้การแจกแจงแบบไวบูลล์ การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล และการแจกแจงแบบเรย์ลี โดยนำข้อมูลมาวิเคราะห์ทางสถิติ เพื่อประมาณค่าฟังก์ชันอัตราภาวะภัยตามวิธีต่าง ๆ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับการแจกแจงระยะเวลาของการอยู่รอด และฟังก์ชันต่าง ๆ รวมทั้งวิธีการประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยโดยวิธีการประมาณโดยไม่ใช้พารามิเตอร์ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

การแจกแจงของระยะเวลาของการอยู่รอด

ให้ T เป็นตัวแปรสุ่มของเวลาที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจศึกษา

$f(t)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น (Density Function) ของ T

$F(t)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจง (Distribution Function) ของ T โดยที่ $F(t) = \Pr(T \leq t)$

$S(t)$ เป็นฟังก์ชันการอยู่รอด (Survival Function) ของ T โดยที่

$$S(t) = \Pr(T > t)$$
$$= 1 - F(t)$$

และ $S(t)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $S(t)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing function)
2. $S(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของเวลา t
3. $S(t) = 1$ เมื่อ $t = 0$
4. $S(t) = 0$ เมื่อ $t = \infty$

$\lambda(t)$ ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย (hazard rate function) หรือพลังมรณะ (force of mortality) เป็นลิมิตของความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตจะสูญเสียในช่วงเวลาสั้น ๆ จาก t ถึง $t + \Delta t$ ต่อหน่วยเวลา Δt เมื่อค่าสังเกตมีการอยู่รอดถึงเวลา t นั่นคือ

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < T \le t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{f(t)}{S(t)}$$
$$= -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

และ $\lambda(t)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $\lambda(t) \ge 0 \quad ; \quad t > 0$
2. $\lim_{t \to \infty} \int_0^t \lambda(t)\, dt = \infty$

$E(t)$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม t

$V(t)$ เป็นค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม t

สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันอัตราภาวะภัย ฟังก์ชันอัตราภาวะภัยสะสม ฟังก์ชันความหนาแน่น ฟังก์ชันการแจกแจง และฟังก์ชันการอยู่รอด ได้ดังนี้

1. $f(t) = F'(t) = -S'(t)$
2. $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{S(t)} = -\dfrac{S'(t)}{S(t)}$
3. $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du = -\ln S(t)$

หรือ $S(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(u)du) = \exp(-\Lambda(t))$

สำหรับในงานวิจัยนี้จะพิจารณารูปแบบของระยะเวลาของการอยู่รอด 3 รูปแบบคือ

1. การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

ถ้าตัวแปรสุ่ม T มีการแจกแจงแบบไวบูลล์ สามารถเขียนฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$f(t) = (\frac{\beta}{\alpha^{\beta}})t^{\beta-1} \exp\left[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}\right] \quad , t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}\right] \quad , t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$S(t) = \exp\left[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}\right] \quad , t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\lambda(t) = (\frac{\beta}{\alpha})\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad , t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

และสำหรับค่าเฉลี่ย $E(t)$ และความแปรปรวน $V(t)$ ของการแจกแจงแบบไวบูลล์ ซึ่งมีพารามิเตอร์เป็น α และ β คือ

$$E(t) = \alpha\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \quad , \qquad V(t) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$$

$$\text{ความเบ้} = \frac{\alpha^3\Gamma(1+\frac{3}{\beta}) - 3\alpha^3\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+2\alpha^3\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^3}{\sigma^3}$$

สำหรับฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu) &= \int_0^{\infty} y^{\nu-1}e^{-y}dy \\ &= (\nu-1)\Gamma(\nu-1) \qquad \text{เมื่อ } \nu \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \\ &= (\nu-1)!\end{aligned}$$

และ $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

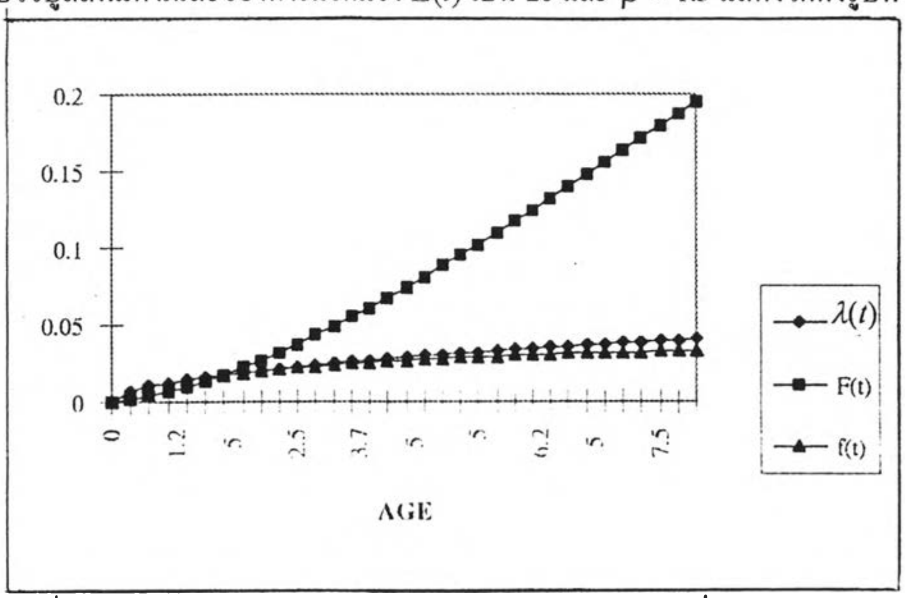
โดยที่ เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ α คงที่แล้ว ลักษณะของรูปแบบของฟังก์ชันอัตราภาวะภัยจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ β ดังนี้

ถ้า $\beta < 1.0$ ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $\lambda(t)$ จะลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น

$\beta = 1.0$ ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $\lambda(t)$ จะคงที่เมื่อ t เพิ่มขึ้น

$\beta > 1.0$ ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $\lambda(t)$ จะเพิ่มขึ้น เมื่อ t เพิ่มขึ้น

สำหรับรูปแบบของฟังก์ชัน $f(t)$, $F(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงการอยู่รอดของค่าสังเกตเป็นแบบไวบูลล์ที่มีค่าเฉลี่ยของการแจกแจง $E(t)$ เป็น 20 และ $\beta = 1.5$ แสดงได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงรูปแบบของฟังก์ชัน $F(t)$, $f(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงของระยะเวลาในการอยู่รอดเป็นแบบไวบูลล์

2. การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล (Exponential Distribution)

ถ้าตัวแปรสุ่ม T มีการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล สามารถเขียนฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$f(t) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-(\frac{t}{\theta})\right] \quad ; \quad \theta > 0, \ t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-(\frac{t}{\theta})\right] \quad ; \quad \theta > 0, \ t \geq 0$$

$$S(t) = \exp\left[-(\frac{t}{\theta})\right] \quad ; \quad \theta > 0, \ t \geq 0$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\theta} \quad ; \quad \theta > 0, \ t \geq 0$$

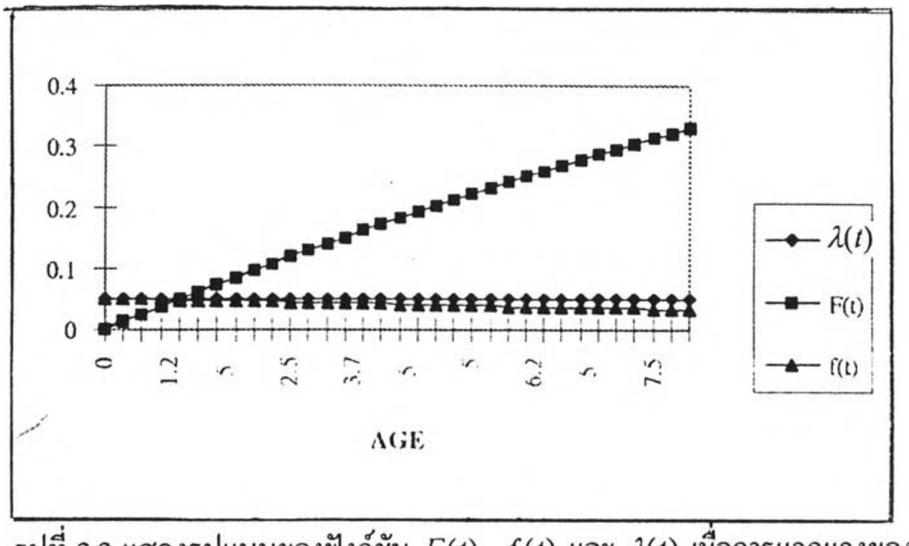
สำหรับค่าเฉลี่ย $E(t)$ และความแปรปรวน $V(t)$ ของการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ คือ

$$E(t) = \frac{1}{\theta} \ , \qquad V(t) = \frac{1}{\theta^2}$$

ความเบ้ = 2 , ความโด่ง = 9

จะพบว่าลักษณะของรูปแบบของฟังก์ชันอัตราภาวะภัยที่มีการแจกแจงของระยะเวลาของการอยู่รอดเป็นแบบเอกซโพเนนเชียลจะไม่ขึ้นอยู่กับระยะเวลา t นั่นคือเมื่อเวลาผ่านไปฟังก์ชันอัตราภาวะภัยจะคงที่ และจะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\theta}$ ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยนั่นเอง

สำหรับรูปแบบของฟังก์ชัน $f(t)$, $F(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงการอยู่รอดของค่าสังเกตเป็นแบบเอกซโพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ยของการแจกแจง $E(t)$ หรือ $\frac{1}{\theta}$ เป็น 20 แสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงรูปแบบของฟังก์ชัน $F(t)$, $f(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงของระยะเวลาในการอยู่รอดเป็นแบบเอกซโพเนนเชียล

3. การแจกแจงแบบเรย์ลี (Rayleigh Distribution)

เมื่อตัวแปรสุ่ม T มีการแจกแจงแบบเรย์ลี สามารถเขียนฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2}\exp\left[-(\frac{t^2}{2\sigma^2})\right] \quad ; \quad 0 \le t < \infty, \quad \sigma > 0$$

$$F(t) = 1-\exp\left[-(\frac{t^2}{2\sigma^2})\right] \quad ; \quad 0 \le t < \infty, \quad \sigma > 0$$

$$S(t) = \exp\left[-(\frac{t^2}{2\sigma^2})\right] \quad ; \quad 0 \le t < \infty, \quad \sigma > 0$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2} \quad ; \quad 0 \le t < \infty, \quad \sigma > 0$$

สำหรับค่าเฉลี่ย $E(t)$ และความแปรปรวน $V(t)$ ของการแจกแจงแบบเรย์ลีโดยมีพารามิเตอร์เป็น σ คือ

$$E(t) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \qquad V(t) = \frac{\sigma^2(4-\pi)}{2}$$

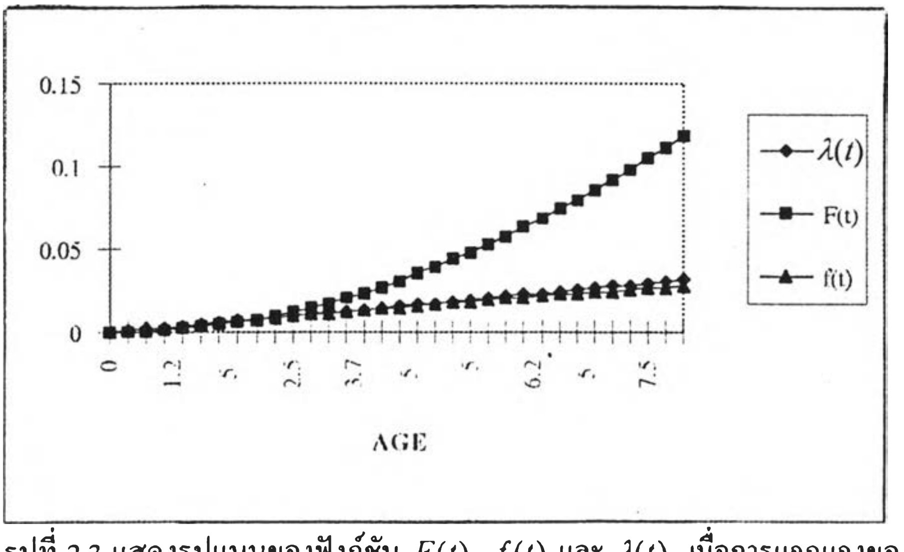
ความเบ้ $= \dfrac{2(\pi-3)\sqrt{\pi}}{(4-\pi)^{\frac{3}{2}}} \cong 0.63111$ ความโด่ง $= \dfrac{(32-3\pi)^2}{(4-\pi)^2} \cong 3.24509$

จะพบว่าลักษณะของรูปแบบของฟังก์ชันอัตราภาวะภัยที่มีการแจกแจงของระยะเวลาของการอยู่รอดเป็นแบบเรย์ลีนั้นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ σ^2 ดังนี้

ถ้า $\sigma^2 = t$ แล้ว ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $\lambda(t)$ จะมีค่าคงที่ เมื่อระยะเวลาเพิ่มขึ้น

$\sigma^2 \neq t$ แล้ว ฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $\lambda(t)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อระยะเวลาเพิ่มขึ้น

สำหรับรูปแบบของฟังก์ชัน $f(t)$, $F(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงการอยู่รอดของค่าสังเกตเป็นแบบการแจกแจงเรย์ลี โดยมีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงระยะเวลาในการอยู่รอด $E(t)$ เป็น 20 และ $\sigma = 15.95769$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงรูปแบบของฟังก์ชัน $F(t)$, $f(t)$ และ $\lambda(t)$ เมื่อการแจกแจงของระยะเวลาในการอยู่รอดเป็นแบบเรย์ลี

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

1. วิธีคณิตศาสตร์ประกันภัย (The Actuarial Method)

วิธีคณิตศาสตร์ประกันภัยเป็นวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันอัตราภาวะภัย $(\lambda(t))$ อย่างง่ายที่สุด โดยสมมุติว่า $\lambda(t)$ ที่ประมาณได้เป็นค่าคงที่และเป็นค่าสังเกตได้จากช่วง $[t_i, t_{i+1})$ โดยมีความกว้างของช่วงคือ h_i และการหาค่าฟังก์ชันอัตราภาวะภัยที่ได้จากช่วงนี้จะเป็นการหาค่าฟังก์ชันที่จุดกึ่งกลางช่วงนั้นคือกำหนดให้เป็น t_i^* ซึ่งมีค่าดังนี้ $t_i^* = t_i + \frac{1}{2}h_i$ และในการหาตัวประมาณฟังก์ชันโดยวิธีนี้จะสามารถทำได้ดังนี้คือ

โดยกำหนดให้ $t_i^* = t_i + \frac{1}{2}h_i$ แทนจุดกึ่งกลางของช่วงเวลาที่ต้องการศึกษา

N_i เป็นจำนวนตัวอย่างที่อยู่รอดที่เวลาเริ่มต้นของช่วง h_i

d_i เป็นจำนวนตัวอย่างที่สูญเสียในช่วง h_i

ดังนั้นจากนิยามของฟังก์ชันอัตราภาวะภัยจะได้ว่า

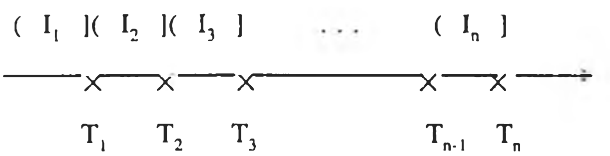
$\hat{\lambda}(t_i^*)$ คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนค่าสังเกตที่สูญเสียต่อหนึ่งหน่วยเวลาในช่วงของการสังเกตกับค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตที่อยู่รอดในช่วงเวลานั้น

$$\hat{\lambda}(t_i^*) = \frac{\frac{d_i}{h_i}}{\frac{1}{2}\left[N_i + N_{i+1}\right]} \qquad (2.1)$$

2. วิธีของแคพแลนและไมเออร์ (Kaplan-Meier's Method)

วิธีของแคพแลนและไมเออร์ เป็นวิธีที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชันต่าง ๆ โดยไม่ใช้พารามิเตอร์อีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งพัฒนาโดยแคพแลนและไมเออร์ (Kaplan and Meier, 1958) เรียกอีกชื่อหนึ่งว่าวิธีตัวประมาณพีแอล (Product- Limit (PL) Estimator) ซึ่งสามารถนำมาใช้ประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยได้ดังนี้

สมมติว่า ค่าสังเกตของเวลาที่อยู่รอด (Survival Time) จำนวน n มีค่าสังเกตเป็น $X_1, X_2, \ldots, X_n$, นำค่าสังเกตมาเรียงลำดับค่าจากน้อยไปมากและกำหนดสัญลักษณ์เป็น T_i จะได้ $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$



กำหนดให้ d_i เป็นจำนวนค่าสังเกตที่สูญเสียในระหว่างช่วงเวลา I_i

n_i เป็นจำนวนค่าสังเกตที่อยู่รอด ณ จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา I_i

$\hat{p}_i$ เป็นค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอดถึงช่วงเวลา I_i โดยที่อยู่รอดมาแล้ว ณ จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา I_i

$\hat{q}_i$ เป็นค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะเกิดการสูญเสียเมื่อสิ้นสุดช่วงที่ I_i และ $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$

โดยที่ $\hat{q}_i = \dfrac{d_i}{n_i}$

$\hat{S}(t_m)$ เป็นค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอด t_m ปี นั่นคือ

$$\begin{aligned}\hat{S}(t_m) &= \Pr(T > t_m)\\ &= \Pr(T > t_1) \times P(T > t_2 \mid T > t_1) \times \ \dots\ \times P(T > t_m \mid T > t_{m-1})\\ &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_m\end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับกรณีทั่วไป

$$\begin{aligned}\hat{S}(t_m) &= \prod_{i=1}^{m} \hat{p}_i\\ &= \prod_{i=1}^{m} (1 - \hat{q}_i)\\ &= \prod_{i=1}^{m} (1 - \frac{d_i}{n_i})\\ &= \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{(n_i - d_i)}{n_i} \right)\\ &= \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right)\end{aligned}$$

และการประมาณฟังก์ชัน $\hat{S}(t)$ ก็เช่นเดียวกับการประมาณฟังก์ชัน $\hat{S}(t_m)$

ดังนั้น $\hat{S}(t) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right)$

เนื่องจากเป็นค่าสังเกตที่ได้จากข้อมูลแบบสมบูรณ์ ดังนั้นจำนวนคนที่เหลืออยู่เมื่อสิ้นสุดช่วงที่ i+1 จะมีค่าเท่ากับคนที่เหลืออยู่เมื่อสิ้นสุดช่วงที่ i จะพบว่า

$$\hat{S}(t) = \frac{n_{m+1}}{n_1}$$

ให้ $\hat{\Lambda}(t)$ เป็นค่าประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยสะสม (Cumulative Hazard Function) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(t) &= -\ln \hat{S}(t)\\ &= -\ln \frac{n_{m+1}}{n_1}\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันอัตราภาวะภัยที่ประมาณได้คือ

$$\hat{\lambda}(t) \;=\; \hat{\Lambda}(t) - \hat{\Lambda}(t-1) \qquad (2.2)$$

3. **วิธีของเนลสัน-แอเลน (Nelson-Aalen's Method)**

วิธีของเนลสัน-แอเลน เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีตัวประมาณพีแอล (Product-Limit Estimator) โดยแคพแลนและไมเออร์ (Kaplan and Meier 1958) ซึ่งประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันการอยู่รอดและฟังก์ชันอัตราภาวะภัยดังนี้ จากการประมาณ $\hat{\Lambda}(t)$ ด้วยวิธีของแคพแลนและไมเออร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(t) &= -\ln\hat{S}(t_m) \\ &= -\ln\left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i-d_i}{n_i}\right)\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right)\end{aligned}$$

ซึ่ง

$$-\ln\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right) = \frac{d_i}{n_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{d_i}{n_i}\right)^2 + \ldots .$$

เราสามารถตัดเทอมที่มีกำลังสูง ๆ ทิ้งได้ ฉะนั้นประมาณได้ว่า

$$-\ln\left(1-\frac{d_i}{n_i}\right) \approx \frac{d_i}{n_i}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{i=1}^{m}\frac{d_i}{n_i}$$

และจะได้ว่าฟังก์ชันอัตราภาวะภัย ณ จุดเวลา t คือ

$$\hat{\lambda}(t) \;=\; \hat{\Lambda}(t) - \hat{\Lambda}(t-1) \qquad (2.3)$$

4. **วิธีของเซเชอร์ (Sacher's Method)**

วิธีของเซเชอร์ เป็นวิธีการประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยที่คิดค้นโดย G. A. Sacher ซึ่งเสนอไว้ในปี ค.ศ. 1956 ในวารสาร Radiology ซึ่งได้ มีขั้นตอนของการประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยดังนี้

กำหนดให้ y_i : จำนวนค่าสังเกตที่สูญเสียในช่วงที่ i (i = 1,2,...,k)

$T_i = t_{i+1} - t_i$: ความกว้างของช่วงของการสังเกต $[t_i, t_{i+1})$

N_i : จำนวนค่าสังเกตที่อยู่รอดที่เวลา t_i

N_i : จำนวนค่าสังเกตที่อยู่รอดที่เวลา t_i

$t_i^* = t_i + \frac{1}{2}T_i$: เวลาประมาณในการสูญเสียของค่าสังเกตในช่วงของการสังเกต $[t_i, t_{i+1})$

$M(t)$: ความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตแต่ละค่า ณ จุดเริ่มต้นที่เวลา t_0 จะเกิดการสูญเสีย ณ เวลา t หรือก่อนนั้น $(0<t<\infty)$

$\pi(t, t+s)$: ความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตแต่ละค่าที่อยู่รอด ณ เวลา t อยู่รอดต่อไปถึงเวลา $t+s$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1-M(t+s)}{1-M(t)}$

และจากนิยามของฟังก์ชันอัตราภาวะภัยจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{\frac{dM(t)}{dt}}{1-M(t)} \\
&= -\frac{d}{dt}\ln[1-M(t)] \cong -\frac{\Delta}{\Delta t}\ln[1-M(t)] \\
&= \frac{-\{\ln[1-M(t+\frac{1}{2}T)]-\ln[1-M(t-\frac{1}{2}T)]\}}{\Delta t} \\
&= \frac{-\{\ln[1-M(t+\frac{1}{2}T)]-\ln[1-M(t-\frac{1}{2}T)]\}}{T} \quad , \quad T=[t+\Delta t, t) \\
&= \frac{1}{T}\ln\frac{1-M(t-\frac{1}{2}T)}{1-M(t+\frac{1}{2}T)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\ln\frac{1}{\pi(t-\frac{1}{2}T, t+\frac{1}{2}T)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\ln\frac{1}{\frac{N(t+\frac{1}{2}T)}{N(t-\frac{1}{2}T)}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\ln\frac{N(t-\frac{1}{2}T)}{N(t+\frac{1}{2}T)}
\end{aligned}
$$

ซึ่งนำไปสู่ตัวประมาณฟังก์ชันอัตราภาวะภัยดังนี้

$$\lambda(t_i^*) = \frac{1}{T_i}ln(\frac{N_i}{N_{i+1}}) \qquad (2.4)$$