บทที่ 4

การแปลงแบบฟูเรียร์

การแปลงแบบฟูเรียร์นับเป็นวิธีการที่สำคัญที่มีการใช้งานอย่างมากมายในหลายๆ สาขาวิชาทางวิทยาศาสตร์ และถึงแม้ว่าโดยรากฐานแล้วตัวมันเองจะเป็นวิชาคณิตศาสตร์ก็ตาม แต่ว่ามันก็สามารถให้ความหมายในทางกายภาพได้ เมื่อนำไปประยุกต์ใช้ เช่น กับสัญญาณไฟฟ้า เมื่อวัดด้วยอุปกรณ์อย่างหนึ่ง คือ ออสซิลโลสโคป (oscilloscope) ก็จะได้ผลเป็นรูปคลื่นแต่ถ้าวัดด้วยเครื่องวิเคราะห์สเปคตรัม (spectrum analyzer) ก็จะได้รูปของสเปคตรัมของสัญญาณไฟฟ้า หรือคลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นไปในอากาศแต่หูของมนุษย์จะได้ยินแยกตามความถี่ในสเปคตรัมของคลื่นเสียง และเราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่ารูปคลื่น (waveform) และสเปคตรัม (spetrum) เหล่านี้เป็นผลของการแปลงแบบฟูเรียร์ของกันและกัน [9]

นอกจากนี้การแปลงแบบฟูเรียร์ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องต่างๆได้อีกอย่างมากมาย เช่นในการสร้างภาพด้วยวิธีเอ็นเอ็มอาร์นี้ก็ได้นำการแปลงแบบฟูเรียร์มาประยุกต์ใช้อย่างได้ผล และในบทนี้ก็จะได้นำเรื่องเกี่ยวกับการแปลงแบบฟูเรียร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการสร้างภาพด้วยเอ็นเอ็มอาร์มาบรรยายไว้เพื่อเสริมความเข้าใจให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

การแปลงแบบฟูเรียร์

การแปลงแบบฟูเรียร์ของฟังชั่น f(t) ใด ๆ จะเขียนได้เป็น

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\cdot 2\cdot \pi\cdot \nu\cdot t}\, dt \qquad (4.1)$$

และสามารถเขียนการแปลงผกผันแบบฟูเรียร์ได้เป็น

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t} \cdot d\nu \tag{4.2}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงให้เห็นได้อย่างง่ายๆว่า (4.1) และ (4.2) ต่างเป็นการแปลงที่ผกผันกันและกันโดยการแทนค่า (4.1) ลงใน (4.2) จะได้

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t}\, dt \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t'}\, d\nu \tag{4.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot (t-t')} . d\nu . dt \tag{4.4}$$

แต่ $$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot (t-t')}\, d\nu \tag{4.5}$$

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t') \cdot dt \tag{4.6}$$

$$f(t') = f(t') \tag{4.7}$$

และนอกจากรูปแบบของ (4.1) และ (4.2) แล้ว ยังสามารถเขียนการแปลงแบบฟูเรียร์และการแปลงผกผันของมันในรูปแบบอื่นๆ ได้อีกด้วย เช่น

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i \cdot \omega \cdot t}\, dt \\ f(t) &= 1/(2 \cdot \pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i \cdot \omega \cdot t}\, dw \end{aligned} \tag{4.8}$$

หรือ

$$\begin{aligned} F(s) &= (2 \cdot \pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i \cdot x \cdot s}\, dx \\ f(x) &= (2 \cdot \pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot e^{-i \cdot x \cdot s}\, ds \end{aligned} \tag{4.9}$$

ซึ่งในแต่ละรูปแบบอาจจะให้ผลการแปลงที่ต่างกันออกไป แต่ว่าความแตกต่างนี้จะเป็นเฉพาะในด้านขนาดของฟังชั่นเท่านั้น, ส่วนรูปร่างของฟังชั่นจะอยู่ในรูปแบบเดิมทุกประการ [9]

การแปลงแบบฟูเรียร์สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$f(x) = \mathcal{F}[\,F(s)\,]$$

หรือ (4.10)

$$f(x) = \mathcal{F}[\,F(s)\ ;\ s \rightarrow x\,]$$

และเขียนการแปลงผกผันแบบฟูเรียร์ได้เป็น

$$F(s) = \mathcal{F}^{-1}[\,f(x)\,]$$

หรือ (4.11)

$$F(s) = \mathcal{F}^{-1}[\,f(x)\ ;\ x \rightarrow s\,]$$

การแปลงแบบฟูเรียร์นี้ มีคุณสมบัติที่น่าสนใจคือ

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นผลการแปลงแบบฟูเรียร์ของ $F(s)$ และ $G(s)$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $f(x) = \mathcal{F}[F(s)]$ และ $g(x) = \mathcal{F}[G(s)]$

แล้ว $f(x)$ และ $F(s)$ จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [9],[12]

- คุณสมบัติความคล้ายคลึง (similarity)

$$f(a \cdot x) = \mathcal{F}[\,F(s/a)/|a|\,] \quad (4.12)$$

- ความเป็นเชิงเส้น (linearlity)

$$f(x) + g(x) = \mathcal{F}[\ F(s) + G(s)\ ] \qquad (4.13)$$

- คุณสมบัติการเลื่อน

$$f(x-a) = \mathcal{F}[\ e^{-i\cdot 2\cdot \pi\cdot a\cdot s}\ F(s)\ ] \qquad (4.14)$$

- อนุพันธ์

$$d(f(x))/dx = \mathcal{F}[\ i\cdot 2\cdot \pi\cdot s\cdot F(s)\ ] \qquad (4.15)$$

- คุณสมบัติจากทฤษฎีของเรย์เลย์ (Rayleigh)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ f(x)\ |^2\cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\ F(s)\ |^2\cdot ds \qquad (4.16)$$

<u>คอนโวลูชั่น</u>

คอนโวลูชั่น (Convolution) เป็นวิธีการในทางคณิตศาสตร์ที่มีการนำมาประยุกต์ใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพได้ในหลายเรื่อง เช่น เรื่องการเลี้ยวเบน (diffraction) ของแสงผ่านเกรตติง (grating) หรือ ผลของระบบต่อฟังชั่นการดล (impluse function) ที่ส่งเข้ามา แต่เรื่องที่น่าจะเรียกได้ว่าสำคัญที่สุดในการประยุกต์ใช้ได้แก่ กระบวนการกรอง (filtering process) สัญญาณรบกวนออกจากสัญญาณที่ต้องการแท้จริง [6],[9]

คอนโวลูชั่นของฟังชั่นสองฟังชั่น f(t) และ h(t) จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\text{คอนโวลูชั่นฟังชั่น} \quad g(t) = f(t) \otimes h(t) \qquad (4.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad (4.18)$$

ความหมายในทางกายภาพของการทำคอนโวลูชั่น พอจะอธิบายได้ว่าเป็นการแสดงถึงการกระจายซึ่งกันและกันของทั้งสองฟังชั่น หรืออาจมีอีกรูปแบบหนึ่งคือฟังชั่น $g(t)$ ที่ t ใดๆก็คือ ค่าเฉลี่ยของฟังชั่น $f(t)$ ไปรอบๆจุด t นั้นๆ โดยมีการถ่วงน้ำหนักด้วยฟังชั่น $h(t)$ [6],[9]

คุณสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับคอนโวลูชั่น ได้แก่ คุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการแปลงแบบฟูเรียร์ ซึ่งแสดงได้ดังนี้ คือ

ถ้าให้ $F(\nu)$ เป็นผลของการแปลงแบบฟูเรียร์ของ $f(t)$

และ $H(\nu)$ เป็นผลของการแปลงแบบฟูเรียร์ของ $h(t)$

จะได้ว่า

ผลการแปลงแบบฟูเรียร์ของ $f(t)\cdot h(t)$ จะเป็น $F(\nu) \otimes H(\nu)$

และผลการแปลงแบบฟูเรียร์ของ $f(t) \otimes h(t)$ จะเป็น $F(\nu)\cdot H(\nu)$

หรือเขียนได้ว่า

$$\mathcal{F}[\, f(t)\cdot h(t) \,] = F(\nu) \otimes H(\nu)$$

$$(4.19)$$

$$\mathcal{F}[\, f(t) \otimes h(t) \,] = F(\nu)\, H(\nu)$$

คุณสมบัตินี้โดยปกติแล้วจะมีประโยชน์มากในการทำคอนโวลูชั่น เนื่องจากว่าตามปกติการการทำการแปลงแบบฟูเรียร์จะทำได้ง่ายกว่าการทำคอนโวลูชั่นโดยตรง

นอกจากนี้คอนโวลูชั่นยังมีคุณสมบัติอื่น ๆ อีก ได้แก่

- คุณสมบัติการสลับที่

$$f(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes f(t) \qquad (4.20)$$

- คุณสมบัติการจัดหมู่

$$f(t) \otimes (g(t) \otimes h(t)) = (f(t) \otimes g(t)) \otimes h(t) \qquad (4.21)$$

- คุณสมบัติการกระจาย

$$f(t) \otimes (g(t) + h(t)) = f(t) \otimes g(t) + f(t) \otimes h(t) \qquad (4.22)$$

<u>การแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่อง</u>

ในการทดลองเรื่องเอ็นเอ็มอาร์นี้ข้อมูลที่ได้ จะไม่ได้อยู่ในรูปของฟังชั่น แต่จะอยู่ในรูปของลำดับของข้อมูล ดังนั้น การแปลงแบบฟูเรียร์ซึ่งตามธรรมดาแล้วใช้แปลงฟังชั่นจากฟังชั่นหนึ่งไปอีกฟังชั่นหนึ่ง ก็จะไม่สามารถนำมาใช้ได้ จึงต้องมีการปรับปรุงวิธีการที่จะวิเคราะห์ ข้อมูลให้สามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่เป็นลำดับของตัวเลขได้ ซึ่งวิธีการดังกล่าวก็คือวิธีการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่อง หรือ ดีเอฟที (Discrete Fourier Transform - DFT) [9],[10]

ในการคำนวณดีเอฟทีนี้จะต้องมีข้อมูลซึ่งเป็นลำดับของตัวเลข ซึ่งอาจจะได้มาจากการทดลองหรือจากฟังชั่น f(t) ใดๆ โดย

$$g_k = f(t_0 + T\,k) \qquad (4.23)$$

เมื่อ T และ t_0 เป็นค่าคงที่

และ $k = 0,1,....N-1$

จะได้ลำดับ $\{ G_j \}$ ซึ่งเป็นผลการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องโดย

$$G_j = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cdot \exp(2 \cdot \pi \cdot i \cdot j \cdot k / N) \qquad (4.24)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cdot w^{jk} \qquad (4.25)$$

เมื่อ

$$j = 0,1....,N-1$$

และ

$$w = \exp(2 \cdot \pi \cdot i / N)$$

ซึ่งจะพิจารณาได้ว่า (4.24) นี้อุปมาน (analogous) ได้กับสมการ (4.1) ในเรื่องการแปลงแบบฟูเรียร์ของฟังชั่น [9],[10]

และในทำนองเดียวกันกับการแปลงแบบฟูเรียร์ของฟังชั่นซึ่งมีการแปลงผกผัน เราจะได้ว่าการแปลงผกผันแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องสามารถเขียนได้เป็น

$$g_k = (1/N) \sum_{j=1}^{N-1} G_j \cdot w^{-jk} \qquad (4.26)$$

นอกจากนี้การแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องก็ยังมีสมบัติอื่นๆที่คล้ายคลึงกับการแปลงแบบฟูเรียร์ของฟังชั่นด้วยเช่น

-คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น

-คุณสมบัติการเลื่อน

แต่อย่างไรก็ตามในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะในเรื่องของการคำนวณค่าของผลการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องเท่านั้น

การแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็ว

การแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transformation) หรือ เอฟเอฟที (FFT) [10] นี้เป็นเทคนิควิธีการอันหนึ่งซึ่งใช้ในการคำนวณการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องของข้อมูลที่เป็นลำดับของตัวเลขเชิงซ้อน ซึ่งเทคนิคนี้จะทำให้การคำนวณเร็วขึ้นอย่างมากทีเดียว ดังจะได้แสดงให้เห็นต่อไป

โดยพิจารณาจากสมการ (4.24) และ (4.25) จะเห็นได้ว่าการจะคำนวณค่าของผลการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่อง จากลำดับของตัวเลขเชิงซ้อน { g_k } ไปเป็นลำดับของตัวเลขเชิงซ้อน { G_j } นั้นจะต้องมีการคำนวณค่าของ w^{jk} รวม N ครั้ง คำนวณผลคูณของ ($g_k \cdot w^{jk}$) N^2 ครั้ง และคำนวณผลบวกอีก $N^2 - N$ ครั้ง ซึ่งจากการพิจารณาง่ายๆดังนี้ จะเห็นได้ว่าถ้าหากมีจำนวนข้อมูล N มากขึ้นเท่าใด จำนวนครั้งและเวลาที่จะต้องใช้ในการคำนวณจะมากขึ้นอย่างปฏิภาคกำลังสองกับจำนวนข้อมูล ซึ่งถ้าหากว่ามีข้อมูลจำนวนมากๆ ก็จะทำให้เสียเวลาในการคำนวณเป็นอย่างยิ่ง ความล่าช้านี้แม้จะใช้คอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูงมากในการคำนวณแล้วก็ตาม ถ้าหากมีข้อมูลเป็นจำนวนมาก ก็จะยังคงเสียเวลาในการคำนวณมากเกินไปอยู่นั่นเอง

ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นที่จะต้องใช้เทคนิควิธีการอื่นเข้ามาช่วยเพื่อเพิ่มให้อัตราเร็วในการคำนวณให้มากขึ้นซึ่งก็ได้แก่วิธีการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็วนี้เอง

เทคนิควิธีนี้จะไม่คำนวณผลของการแปลงจากโดยตรงจากสมการ (4.24) หรือ (4.25) โดยตรงแต่จะใช้วิธีหลีกเลี่ยงการทำงานหลายๆอย่างที่ต้องทำซ้ำๆกัน เช่น การคำนวณค่า w^{jk} ซึ่งลำดับขั้นตอนการทำการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็วจากลำดับ { g_k } ไปยังลำดับ { G_j } สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้ [10]

- จำนวนของข้อมูลจะต้องมีเป็นทวีคูณของ 2 นั่นคือ

$$N = 2^t \quad \text{เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \qquad (4.27)$$

จะได้ $k = 0,1,2,.....,N-1$

$j = 0,1,2,.....,N-1$

ทำการคำนวณค่า w^n ไว้ล่วงหน้า โดย $n = 0,1,2 \ldots, N-1$

- จัดลำดับของข้อมูลใหม่โดยให้

$$f_0(k') = g_k \qquad (4.28)$$

$$\text{เมื่อ} \quad k = \sum_{l=0}^{t-1} 2^l \cdot k_l \qquad (4.29)$$

$$k_0, k_1, \ldots, k_{t-1} = 0,1$$

$$\text{และ} \quad k' = \sum_{l=0}^{t-1} 2^{t-l-1} k_l \qquad (4.30)$$

- ให้ $l = 1,2,....,t$

- ทำซ้ำ

$$f_l(p) = f_{l-1}(p) + f_{l-1}(q)\, w^{J_l \cdot 2^{t-l}} \qquad (4.31)$$

$$f_l(q) = f_{l-1}(p) - f_{l-1}(q)\, w^{J_l \, 2^{t-l}} \qquad (4.31)$$

$$\text{เมื่อ} \quad p = J_l + 2^l K_l \quad \text{และ} \quad q = p + 2^{l-1} \qquad (4.33)$$

ส่วน J_l และ K_l จะแปรค่าไปเรื่อย ดังนี้

$$J_l = 0,1,\ldots 2^{l-1}-1 \quad \text{และ} \quad K_l = 0,1,\ldots 2^{t-1}-1 \qquad (4.34)$$

- เมื่อแปรค่า J_l และ K_l จนครบทุกค่าแล้ว จึงแปรค่า l และทำซ้ำไปเรื่อยๆจนกว่า l จะเท่ากับ t

- จะได้ผลการแปลง { G_j } เป็น

$$G_j = f_t(J_{t+1}) = f_t(j) \qquad (4.35)$$

เป็นอันสิ้นสุดการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็ว

ในกรณีที่ต้องการคำนวณหาผลการแปลงผกผันนั้นก็สามารถทำได้ด้วยใช้วิธีการเดียวกันนี้โดยเพียงแต่เปลี่ยนค่า w ไปเป็น w^* (คู่สังยุคของ w) และหารผลการแปลงทั้งหมดด้วย N เท่านั้น

ในการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างเร็วนี้ถ้านับจำนวนครั้งของการคำนวณแล้วจะพบว่ามีการคำนวณค่า w^n อยู่ N ครั้ง จำนวนครั้งของการคูณ $2\cdot N\cdot \log_2 N$ ครั้ง จำนวนครั้งการคำนวณค่า 2^N อยู่ $N\cdot\log_2 N$ ครั้ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าจำนวนครั้งในการคำนวณจะแปรผันกับค่า N $\log_2 N$ ซึ่งถ้าเปรียบเทียบกับวิธีดีเอฟที (DFT) ธรรมดาแล้วจะแตกต่างกันอย่างมาก โดยเฉพาะเมื่อ N มีค่ามากๆ และนี่เองคือเหตุผลในการนำเอาเอฟเอฟทีมาใช้

<u>การแปลงในสองมิติ</u>

ในการสร้างภาพด้วยวิธีเอ็นเอ็มอาร์นี้มีความจำเป็นต้องใช้เทคนิคด้านการแปลงแบบฟูเรียร์เข้าช่วยเป็นอย่างมาก และโดยมากจะต้องใช้ในระดับที่มากกว่าหนึ่งมิติขึ้นไป ซึ่งการแปลงแบบฟูเรียร์ในสองมิตินี้ได้มีการนิยามไว้ดังนี้

ถ้าให้ $f(x,y)$ จะเขียนผลของการแปลงแบบฟูเรียร์ $F(u,v)$ ได้เป็น

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot x\cdot u}dx\ e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot y\cdot v}dy \qquad (4.36)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(x\cdot u\ +\ y\cdot v)}dx\cdot dy \qquad (4.37)$$

และในทำนองเดียวกันสำหรับการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องในสองมิติสำหรับข้อมูลจะเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ (matrix) g_{jk} ขนาด M x N ซึ่งสามารถแปลงไปเป็นเมทริกซ์ G_{pq} ขนาด M x N ได้โดยสมการ

$$G_{pq} = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} g_{jk}e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot(j\cdot p/M\ +\ k\cdot q/N)} \qquad (4.38)$$

$$G_{pq} = \sum_{j=0}^{M-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} g_{jk}e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot kq/N}\right]\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot jp/M} \qquad (4.39)$$

ซึ่งจากสมการ (4.39) นี้แสดงให้เราเห็นได้ว่าการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องในสองมิติสามารถทำได้อย่างง่ายๆ โดยทำการแปลงแบบฟูเรียร์อย่างไม่ต่อเนื่องในหนึ่งมิติไปตามแถวของเมทริกซ์ก่อนแล้วจึงทำการแปลงอีกครั้งตามแนวตั้งของเมทริกซ์ก็จะได้ผลการแปลงในสองมิติของเมทริกซ์นั้น