บทที่ 3

การแก้สมการด้วยวิธีการ
ไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

3.1 นิยาม

คำตอบเชิงตัวเลข (Numerical solution) คือ คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้ผลออกมาเป็นตัวเลขโดยวิธีการประมาณคำตอบ

วิธีการเชิงตัวเลข(Numerical method) คือวิธีการที่ใช้หาคำตอบเชิงตัวเลข

3.2 วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

วิธีการเชิงตัวเลขที่มีใช้กันมากวิธีหนึ่งคือวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์(Finite difference) ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

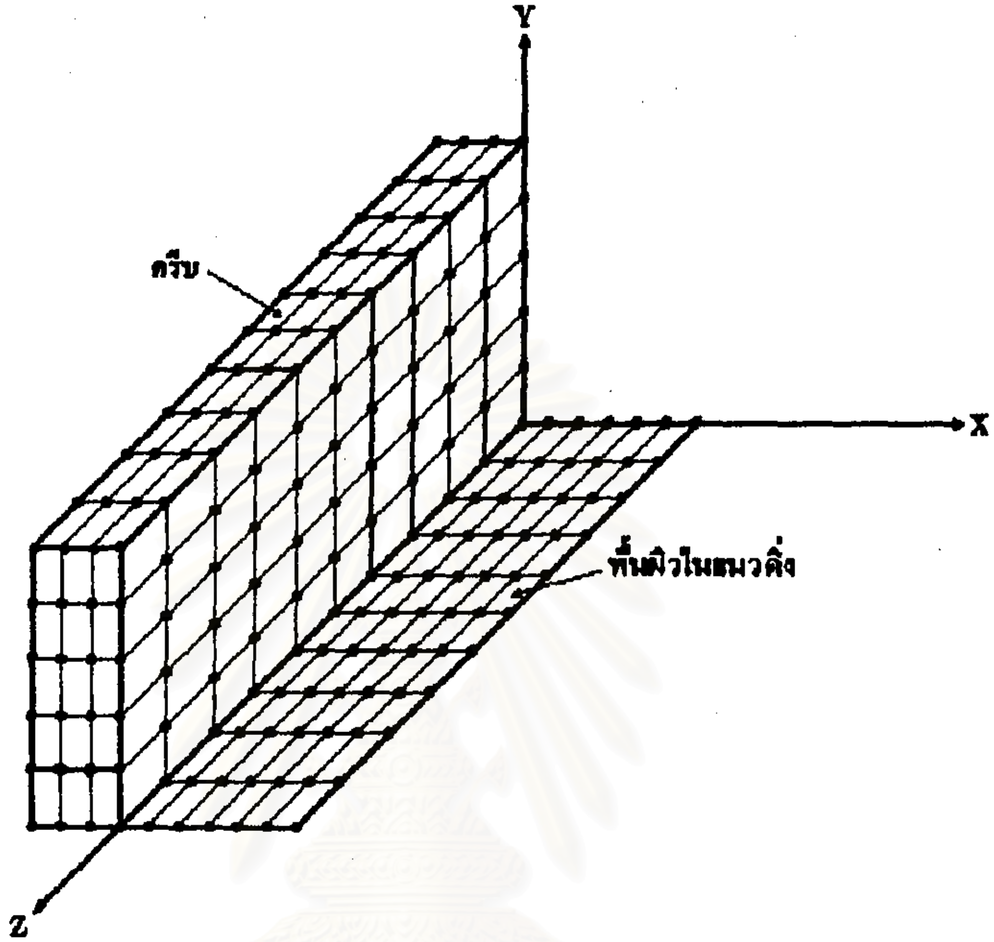
1. แบ่งขอบเขตที่ต้องการหาคำตอบเชิงตัวเลขเป็นเอลิเมนต์โดย 1 เอลิเมนต์จะมีจุดซึ่งเป็นตัวแทนของเอลิเมนต์อยู่ 1 จุด (Grid point)
2. ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ซึ่ง คือ กลุ่มสมการพีชคณิตที่แต่ละสมการจะแสดงความสัมพันธ์ของค่าคำตอบเชิงตัวเลขของ Grid point จุดใดจุดหนึ่งกับ Grid point ที่อยู่ข้างเคียง
3. แก้สมการพีชคณิตเพื่อหาคำตอบเชิงตัวเลขของ Grid point ทุกๆ จุดภายในขอบเขตที่ต้องการหาคำตอบเชิงตัวเลข

3.3 การแปลงสมการการนำความร้อนของชุดครีบให้อยู่ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

พิจารณาสมการการนำความร้อนของชุดครีบ ในรูปตัวแปรไร้หน่วย

$$4\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial Y^2} = 0 \qquad (2.15)$$

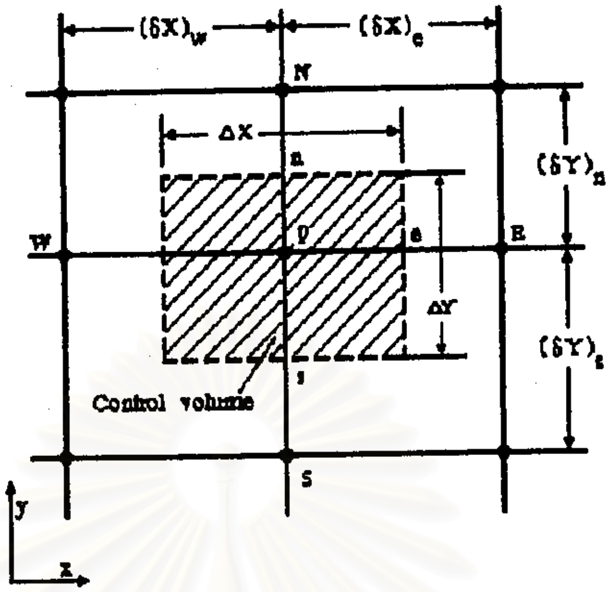
1. แบ่งขอบเขตที่ต้องการหาคำตอบเชิงตัวเลขเป็นเอลิเมนต์ย่อยซึ่งถูกแทนด้วยจุด Grid point ดังรูปที่ 3-1



รูปที่ 3-1 ครีบถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยแต่ละเอลิเมนต์แทนด้วย grid point

พิจารณา gid point หนึ่งๆ สมมุติว่าเป็น grid point P ซึ่งมี grid point E , W , N และ S อยู่รอบข้าง ในระนาบแกน X และ แกน Y ดังรูปที่ 3-2

(E ย่อมาจาก East , W ย่อมาจาก West , N ย่อมาจาก North , S ย่อมาจาก South)



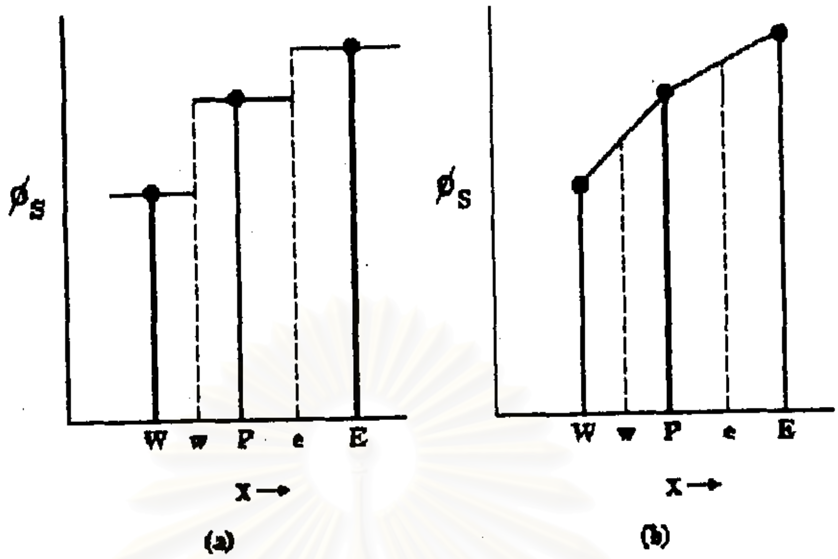
รูปที่ 3-2 grid point P ล้อมรอบด้วย grid point E , W , N , S

เส้นประแสดงผิวรอยต่อของเอลิเมนต์ ตัวอักษร e , w , n และ s แทนผิวรอยต่อทางด้านตะวันออก, ตะวันตก , เหนือ และ ใต้ ตามลำดับ เส้นแรเงาแสดงขอบเขตของเอลิเมนต์ในแนวแกน X และ แกน Y ซึ่งมีขนาด ΔX และ ΔY ตามลำดับ ในกรณีนี้ความหนาของเอลิเมนต์ P ในแนวแกน Z คือ ΔZ

2. ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปกลุ่มสมการพีชคณิต ขั้นตอนนี้มีวิธีทำได้หลายวิธี แต่ในที่นี้จะเลือกใช้วิธี Control - volume Formulation ซึ่งทำได้โดยการอินทิเกรตสมการ (2.16) ตลอด control - volume ที่พิจารณา ซึ่งในที่นี้คือเอลิเมนต์ที่ถูกแทนด้วยจุด P จากการอินทิเกรตได้

$$4\left(\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial X}\right)_e - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial X}\right)_w\right).\Delta Y.\Delta Z + \left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial Y}\right)_n - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial Y}\right)_s\right).\Delta X.\Delta Z = 0 \qquad (3.1)$$

ขั้นตอนต่อไปจะต้องสมมุติ ลักษณะการแจกแจงของอุณหภูมิไร้หน่วยซึ่งอาจจะเป็นการแจกแจงอย่างง่าย ๆ ดังรูปที่ 3-3



รูปที่ 3-3 สมมติการแจกแจงของอุณหภูมิไร้หน่วย

การแจกแจงที่ง่ายที่สุดคือแบบรูป (a) ซึ่งอุณหภูมิของเอลิเมนต์มีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิที่ grid point แต่ในกรณีนี้ค่า $\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial X}\right)$ ที่บริเวณผิวรอยต่อของเอลิเมนต์ (จุด w และ e) จะไม่สามารถหาค่าได้ สำหรับการแจกแจงแบบรูป (b) เป็นแบบเส้นตรงสามารถหาค่า $\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial X}\right)$ ที่บริเวณผิวรอยต่อของเอลิเมนต์ได้ ในที่นี้จะใช้การแจกแจงของอุณหภูมิเป็นแบบรูป (b) (การแจกแจงในแนวแกน Y ก็สมมติเป็นเส้นตรงเช่นเดียวกัน) ดังนั้นจะได้สมการ

$$4.\Delta Y.\Delta Z\left(\left(\frac{\phi_{sE}-\phi_{sP}}{\Delta X_e}\right)-\left(\frac{\phi_{sP}-\phi_{sW}}{\Delta X_w}\right)\right)+\left(\frac{s}{b}\right)^2.\Delta X.\Delta Z\left(\left(\frac{\phi_{sN}-\phi_{sP}}{\Delta X_n}\right)-\left(\frac{\phi_{sP}-\phi_{sS}}{\Delta X_s}\right)\right)=0 \tag{3.2}$$

เมื่อ ϕ_{sP} คือ อุณหภูมิไร้หน่วยของครีบที่ grid point P

ϕ_{sE} , ϕ_{sW} ϕ_{sN} , ϕ_{sS} คือ อุณหภูมิไร้หน่วยของครีบที่ grid point E , W , N , S ตามลำดับ

ΔX_e , ΔX_w , ΔX_n , ΔX_s คือ ระยะห่างระหว่าง grid point P และ grid point E , W , N , S ตามลำดับ

จากนั้นจัดสมการ (3.2) ให้อยู่ในรูป

$$a_P \cdot \phi_{sP} = a_E \cdot \phi_{sE} + a_W \cdot \phi_{sW} + a_N \cdot \phi_{sN} + a_S \cdot \phi_{sS} \tag{3.3}$$

เมื่อ $a_E = \dfrac{4.\Delta Y.\Delta Z}{\delta X_e}$, $a_W = \dfrac{4.\Delta Y.\Delta Z}{\delta X_w}$

$$a_N = \frac{\left(\frac{S}{b}\right)^2 .\Delta X.\Delta Z}{\delta X_n} \quad , \quad a_S = \frac{\left(\frac{S}{b}\right)^2 .\Delta X.\Delta Z}{\delta X_s}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

สมการ (3.3) คือ สมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของการนำความร้อนในชุดครีบ

<u>3.4 การแปลงสมการการพาความร้อนของของไหลให้อยู่ในรูปสมการไฟไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์</u>

ในการแปลงสมการการพาความร้อนของของไหลให้อยู่ในรูป จะอธิบายโดยใช้รูปสมการที่แบ่งเป็น Convection term และ Diffusion term ดังต่อไปนี้

<u>3.4.1 รูปแบบทั่วไปของสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์</u>

สำหรับสมการการพาความร้อนจะประกอบด้วย Continuity Equation ซึ่งในกรณี steady state คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{3.4}$$

รวมทั้ง Momentum Equations และ Energy Equation ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบทั่วไป คือ

$$\rho u\frac{\partial \psi}{\partial x} + \rho v\frac{\partial \psi}{\partial y} + \rho w\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S \tag{3.5}$$

พิจารณาสมการ (3.5) ด้านซ้ายของสมการเรียกว่า Convection Term เป็นเทอมซึ่งเกิดจากการไหลของของไหล ,ด้านขวาของสมการ (ไม่รวม S) เรียกว่า Diffusion Term เป็นเทอมซึ่งเกิดจากการแพร่ , ส่วน S เป็นเทอมอื่นๆนอกเหนือจาก 2 เทอมแรก (การจัดรูปสมการเช่นนี้เพื่อความสะดวกในการพิจารณาการแจกแจงของตัวแปร ψ) โดยตัวแปร ψ,Γ,S จะแตกต่างกันไปสำหรับ Momentum Equations และ Energy Equation เช่น

สำหรับ Momentum Equation ในแนวแกน x , $\psi = u$ และ $\Gamma = \mu$

สำหรับ Energy Equation , $\psi = T$ และ $\Gamma = \dfrac{k}{C_p}$

สำหรับสมการ (3.5) เมื่อสมมุติให้ S เป็นค่าคงที่ และ control volume ที่พิจารณามีขนาด Δx , Δy , Δz ในแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ (ลักษณะ control volume เมื่อแสดงเป็น 2 มิติในแนวแกน x และy เหมือนในรูปที่ 3-2) ได้ว่ารูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของสมการ (3.5) [Patankar (1980)] คือ

$$a_P \psi_P = a_E \psi_E + a_W \psi_W + a_N \psi_N + a_S \psi_S + a_T \psi_T + a_B \psi_B + B \qquad (3.9)$$

เมื่อ

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \| -F_e, 0 \|$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \| F_w, 0 \|$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \| -F_n, 0 \|$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \| F_s, 0 \|$$

$$a_T = D_t A(|P_t|) + \| -F_t, 0 \|$$

$$a_B = D_b A(|P_b|) + \| F_b, 0 \|$$

$$B = S.\Delta x.\Delta y.\Delta z$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B$$

เมื่อ P คือ Peclet Number , $P = \frac{F}{D}$ และ $A(|P|) = \| 0 , (1-0.1|P|)^5 \|$ โดยที่ เครื่องหมาย $\| x , y \|$ มีค่าเท่ากับ x เมื่อ x>y และมีค่าเท่ากับ y เมื่อ y>x

โดยที่ $P_e = \frac{F_e}{D_e}$, $P_w = \frac{F_w}{D_w}$, $P_n = \frac{F_n}{D_n}$, $P_s = \frac{F_s}{D_s}$

$$P_t = \frac{F_t}{D_t} \quad , \quad P_b = \frac{F_b}{D_b}$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \Delta z \quad , \quad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \Delta z \quad , \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta z \Delta x \quad , \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta z \Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta z \Delta x \quad , \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta z \Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$F_t = (\rho w)_t \Delta x \Delta y \quad , \quad D_t = \frac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}$$

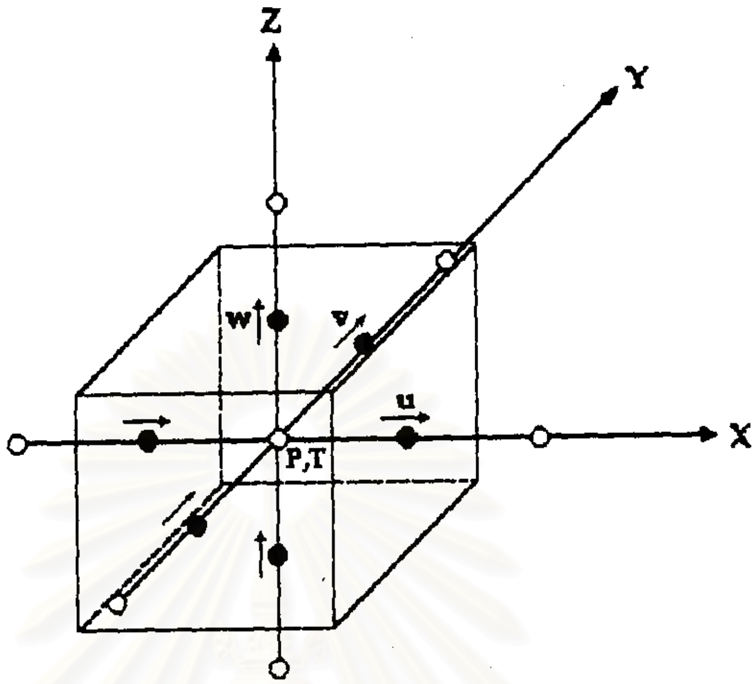
$$F_b = (\rho w)_b \Delta x \Delta y \quad , \quad D_b = \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$$

3.4.2 การกำหนด Grid Point

การกำหนด Grid Point สำหรับปัญหาการพาความร้อน จะแบ่ง Grid Point เป็น 2 ชุดคือ

1. Grid Point ของความเร็วของของไหล
2. Grid Point ของความดันและอุณหภูมิของของไหล

Grid Point 2 ชุดนี้ จะมีตำแหน่งของจุดเยื้องกันในทุกแนวแกนดังรูปที่ 3-4



○ Grid Point ของความดันและอุณหภูมิของของไหล

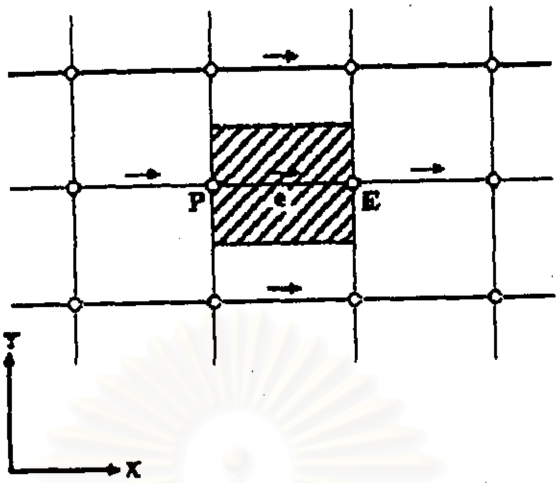
● Grid Point ของความเร็วของของไหล

รูปที่ 3-4 แสดง Grid Point 2 ชุดซึ่งมีตำแหน่งเยื้องกัน

สาเหตุที่ต้องกำหนด Grid Point เป็น 2 ชุด ซึ่งมีตำแหน่งเยื้องกันนี้ เพื่อป้องกันการเกิดชุดคำตอบของความเร็วและความดันที่ไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง [Patankar (1980)]

3.4.3 Momentum Equations ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

พิจารณา control volume ของความเร็วในแนวแกน x ดังรูปที่ 3-5 (รูปแสดงใน 2 มิติ คือ แนวแกน x และแกน y)



รูปที่ 3-5 แสดง control volume ของความเร็วในแนวแกน x

จากรูปที่ 3-5 จะเห็นได้ว่า control volume ของ u มีตำแหน่งเยื้องกับ control volume ของอุณหภูมิและความดัน (ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป) ไปในแนวแกน x โดยผิวของ control volume อยู่ในระนาบเดียวกับ grid point ของความดัน คือ จุด P และ E

พิจารณา Momentum Equation ในแนวแกน x ในรูป Nondimensional form คือ

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + W\frac{\partial U}{\partial Z} = -\left(\frac{L}{s/2}\right)^2 \cdot \frac{\partial P_d}{\partial X} + \frac{1}{Gr_s}\cdot\frac{L}{b}\left[4\,\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \left(\frac{s}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right] \tag{2.17}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (2.17) กับรูปสมการ (3.5) ในหัวข้อ 3.4.1 ได้ว่าสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของสมการ (2.17) จะมีรูปแบบคล้ายสมการ (3.9) คือ

$$a_e U_e = \Sigma a_{nb} U_{nb} + (P_{d,P} - P_{d,E})A_e \tag{3.10}$$

เมื่อ U_e คือ dimensionless velocity ในแนวแกน X ของ Grid Point e ที่กำลังพิจารณา

U_{nb} คือ dimensionless velocity ในแนวแกน X ของ Grid Point ที่อยู่รอบๆจุด e ในแนวแกน X,Y และ Z

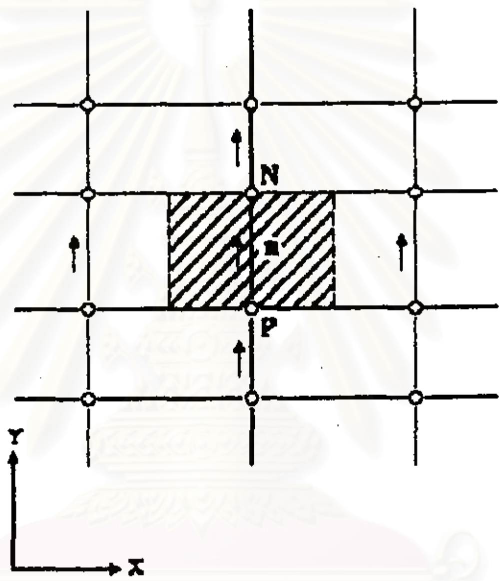
a_e , a_{nb} คือ สัมประสิทธิ์รวมที่เกิดจาก Convection และ Diffusion

P_d คือ dimensionless pressure

A_e คือ dimensionless area ในแนวตั้งฉากกับแนวแกน X ซึ่งผลต่างความดันกระทำอยู่

ค่าสัมประสิทธิ์ a_e , a_{nb} จะคำนวณในแบบเดียวกับค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (3.9) เพียงแต่เปลี่ยนค่า $\Gamma_e, \Gamma_w, \Gamma_n, \Gamma_s, \Gamma_t, \Gamma_b$ ไปตามรูปสมการ (2.17)

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณา control volume ของความเร็วในแนวแกน y ดังรูปที่ 3-6 (รูปแสดงใน 2 มิติ คือ แนวแกน x และแกน y)



รูปที่ 3-6 แสดง control volume ของความเร็วในแนวแกน y

จากรูปที่ 3-6 จะเห็นได้ว่า control volume ของ v มีตำแหน่งเยื้องกับ control volume ของอุณหภูมิและความดันไปในแนวแกน y โดยผิวของ control volume อยู่ในระนาบเดียวกับ grid point ของความดัน คือ จุด P และ N

พิจารณา Momentum Equation ในแนวแกน y ในรูป Nondimensional form คือ

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + W\frac{\partial V}{\partial Z} = -\left(\frac{L}{b}\right)^2 \cdot \frac{\partial P_d}{\partial Y} + \frac{1}{Gr_s}\cdot\frac{L}{b}\left[4\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \left(\frac{s}{L}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right] \tag{2.18}$$

ทำนองเดียวกับสมการ (2.17) ได้ว่าสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของสมการ (2.18) คือ

$$a_n V_n = \Sigma a_{nb} V_{nb} + (P_{d,p} - P_{d,N}) A_n \qquad (3.11)$$

เมื่อ V_n คือ dimensionless velocity ในแนวแกน Y ของ Grid Point n ที่กำลังพิจารณา

V_{nb} คือ dimensionless velocity ในแนวแกน Y ของ Grid Point ที่อยู่รอบๆจุด n ใน แนวแกน X,Y และ Z

a_n , a_{nb} คือ สัมประสิทธิ์รวมที่เกิดจาก Convection และ Diffusion

P_d คือ dimensionless pressure

A_n คือ dimensionless area ในแนวตั้งฉากกับแนวแกน Y ซึ่งผลต่างความดันกระทำอยู่

ในทำนองเดียวกัน Momentum Equation ในแนวแกน z ในรูป Nondimensional form คือ

$$U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + W\frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P_d}{\partial Z} + \frac{1}{Gr_s}\cdot\frac{L}{b}\left[4\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \left(\frac{s}{L}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + \left(\frac{s}{b}\right)\phi_f\right] \qquad (2.19)$$

และ Momentum Equation ในแนวแกน Z ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ คือ

$$a_t W_t = \Sigma a_{nb} W_{nb} + b_f + (P_{d,p} - P_{d,T}) A_t \qquad (3.12)$$

เมื่อ b_f คือ เทอมของแรงลอยตัวซึ่งขึ้นอยู่กับ dimensionless fluid temperature , $b_f = \frac{s}{b}\cdot\phi_f\cdot\Delta X.\Delta Y.\Delta Z$ และ subscript T ของความดัน P_d ย่อมาจาก TOP

3.4.4 Continuity Equation ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

พิจารณา Momentum Equations ซึ่งมีเทอมของความดัน , P_d อยู่ในทุกสมการ แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความดันและความเร็ว ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเร็วแสดงผ่านทาง Continuity Equation และ Momentum Equations โดยที่หากทราบการแจกแจงของความดันที่ถูกต้องแล้วแทนลงใน Momentum Equations ก็จะสามารถแก้สมการ Momentum Equations เพื่อหาค่าความเร็วที่เป็นคำตอบของสมการได้ และการแจกแจงของค่าความเร็วที่ได้ก็จะสอดคล้องกับ Continuity Equation ในทางกลับกันหากการแจกแจงของความดันที่แทนลงใน Momentum

Equations ไม่ถูกต้อง ค่าความเร็วที่ได้จากการแก้สมการ Momentum Equations ก็จะไม่สอดคล้องกับ Continuity Equation หลักการดังกล่าวได้ถูกนำไปใช้เป็นวิธีการแก้ชุดสมการการไหล เพื่อหาค่าความเร็วและความดันซึ่งเป็นคำตอบของชุดสมการการไหล วิธีการนี้มีชื่อเรียกว่า "SIMPLE ALGORITHM" [Patankar (1980)] SIMPLE ย่อมาจาก Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations วิธีการ Simple Algorithm จะมีการแปลงรูปของ Continuity Equation เป็น Pressure-Correction Equation โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

พิจารณา Momentum Equations , สมการ (3.10) , (3.11) , (3.22) ทำการสมมุติค่า dimensionless pressure (ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย P_d^*)ขึ้น แล้วทำการคำนวณความเร็ว โดยแทนความเร็วที่ได้จากการคำนวณด้วยสัญลักษณ์ U^*, V^* และ W^* ได้ว่า

$$a_e U_e^* = \Sigma a_{nb} U_{nb}^* + (P_{d,p}^* - P_{d,E}^*) A_e \tag{3.13}$$

$$a_n V_n^* = \Sigma a_{nb} V_{nb}^* + (P_{d,p}^* - P_{d,N}^*) A_n \tag{3.14}$$

$$a_t W_t^* = \Sigma a_{nb} W_{nb}^* + b_f + (P_{d,p}^* - P_{d,T}^*) A_t \tag{3.15}$$

dimensionless velocity ที่คำนวณได้จากสมการ (3.13) , (3.14) และ (3.15) นี้จะไม่สอดคล้องกับ Continuity Equation เนื่องจากค่าความดันที่แทนลงในสมการเป็นเพียงค่าที่สมมุติขึ้น วิธี Simple Algorithm เสนอวิธีการปรับค่าความดันให้เข้าสู่ค่าความดันที่ถูกต้องโดยกำหนดให้ค่าความดันที่ถูกปรับค่า , P คือ

$$P = P_d^* + P' \tag{3.16}$$

เมื่อ P' คือ ค่าความดันปรับแก้ (Pressure Correction)
ในทำนองเดียวกัน dimensionless velocity ที่เปลี่ยนไปเนื่องจากค่าความดันปรับแก้ คือ

$$U = U^* + U' \quad , \quad V = V^* + V' \quad , \quad W = W^* + W' \tag{3.17}$$

ถ้านำสมการ (3.13) ไปลบสมการ (3.10) จะได้

$$a_e U'_e = \Sigma a_{nb} U'_{nb} + (P'_P - P'_E) A_e \tag{3.18}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะตัดเทอม $\Sigma a_{nb} U'_{nb}$ ทิ้ง ได้ว่า

$$U'_e = \left(P'_P - P'_E\right) d_e \tag{3.19}$$

เมื่อ $d_e = \dfrac{A_e}{a_e}$

สมการ (3.19) เรียกว่า สูตรปรับแก้ความเร็ว (Velocity-Correction Formula) ซึ่งเขียนได้อีกแบบ คือ

$$U_e = U^*_e + d_e\left(P'_P - P'_E\right) \tag{3.20}$$

สูตรปรับแก้ความเร็วในแนวแกนY และ Z ก็มีรูปแบบในทำนองเดียวกัน คือ

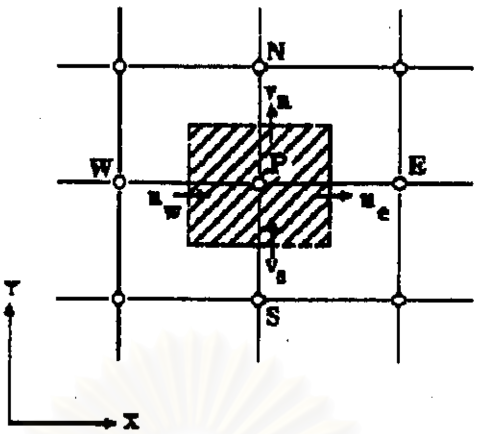
$$V_n = V^*_n + d_n(P'_P - P'_N) \tag{3.21}$$

$$W_t = W^*_t + d_t(P'_P - P'_T) \tag{3.22}$$

ขั้นตอนต่อไป คือ การแปลงสมการ Continuity Equation เป็น Pressure-Correction Equation พิจารณา Continuity Equation ในรูป Nondimensional Form

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \tag{2.16}$$

ทำการอินติเกรตสมการ (2.16) ตลอด Control Volume ในรูปที่ 3-7 (รูปแสดงเพียง 2 มิติ)



รูปที่ 3-7 แสดง control volume ของ Continuity Equation

ได้สมการ (2.16) ในรูป Integrated form คือ

$$\left[U_e - U_w\right] \Delta y\, \Delta z + \left[V_n - V_s\right] \Delta z\, \Delta x + \left[W_t - W_b\right] \Delta x\, \Delta y = 0 \qquad (3.23)$$

แทนเทอม dimensionless velocity ในสมการ (3.23) ด้วยสมการปรับแก้ความเร็ว (3.20) , (3.21) , (3.22) และจัดรูปสมการ ได้

$$a_p P'_P = a_E P'_E + a_w P'_w + a_N P'_N + a_S P'_S + a_T P'_T + a_B P'_B + b \qquad (3.24)$$

เมื่อ

$$a_E = d_e\, \Delta Y\, \Delta Z \quad , \quad a_w = d_w\, \Delta Y\, \Delta Z$$

$$a_N = d_n\, \Delta Z\, \Delta X \quad , \quad a_S = d_s\, \Delta Z\, \Delta X$$

$$a_T = d_t\, \Delta X\, \Delta Y \quad , \quad a_B = d_b\, \Delta X\, \Delta Y$$

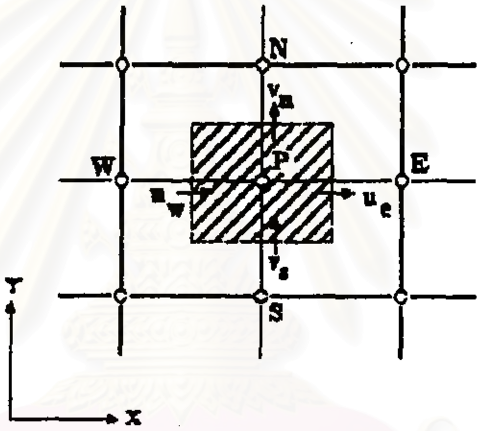
$$b = \left[U^*_w - U^*_e\right]\Delta Y\, \Delta Z + \left[V^*_s - V^*_n\right]\Delta Z\, \Delta X + \left[W^*_b - W^*_t\right]\Delta X\, \Delta Y$$

สมการ (3.24) คือ Pressure-Correction Equation ใช้ในการคำนวณหาค่าความดันปรับแก้ ซึ่งจะนำไปใช้ปรับค่าความดันและความเร็วให้มีค่าเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องของสมการการไหล โดยเทอม b ในสมการ (3.24) คือ เทอมที่ตรงกับ Integrated Form ของ Continuity Equation ดังนั้น เมื่อ

ค่าความเร็วและความดันที่คำนวณได้เป็นค่าที่ถูกต้อง จะทำให้เทอม b มีค่าเป็น 0 นั่นคือ เมื่อเทอม b มีค่าเป็น 0 จะได้ว่าค่าความดัน , ความเร็วและอุณหภูมิที่คำนวณได้ คือ คำตอบที่ถูกต้องของ ชุดสมการ Governing Equation

3.4.5 Energy Equation ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

พิจารณา control volume ของ dimensionless fluid temperature , ϕ_f ที่ grid point p ดังรูปที่3-8 (รูปแสดงเพียง 2 มิติ)



รูปที่ 3-8 แสดง control volume ของ dimensionless fluid temperature

จาก Energy Equation สมการ (2.20)

$$U\frac{\partial \phi_f}{\partial X} + V\frac{\partial \phi_f}{\partial Y} + W\frac{\partial \phi_f}{\partial Z} = \frac{L}{b}\cdot\frac{1}{Gr_s.Pr}\left[4\frac{\partial^2 \phi_f}{\partial X^2} + \left(\frac{s}{b}\right)^2\frac{\partial^2 \phi_f}{\partial Y^2} + \left(\frac{s}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \phi_f}{\partial Z^2}\right] \quad (2.20)$$

อินทิเกรตสมการ (2.20) ตลอด control volume ได้ Energy Equation ในรูปสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ คือ

$$a_p\phi_{f,P} = a_E\phi_{f,E} + a_w\phi_{f,W} + a_N\phi_{f,N} + a_S\phi_{f,S} + a_T\phi_{f,T} + a_B\phi_{f,B} \quad (3.25)$$

เมื่อ $\phi_{f,P}$ คือ dimensionless fluid temperature ของ Grid Point p ที่กำลังพิจารณา

$\phi_{f,E}, \phi_{f,W}, \phi_{f,N}, \phi_{f,S}, \phi_{f,T}, \phi_{f,B}$ คือ dimensionless fluid temperature ของ Grid Point ที่อยู่รอบจุด P ในแนวแกน X,Y และ Z

โดยค่าสัมประสิทธิ์ที่ปรากฏในสมการ คือ

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e,0\| \quad , \quad a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w,0\|$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n,0\| \quad , \quad a_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s,0\|$$

$$a_T = D_t A(|P_t|) + \|-F_t,0\| \quad , \quad a_B = D_b A(|P_b|) + \|F_b,0\|$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B$$

เมื่อ $F_e = U_e \Delta Y \Delta Z \quad , \quad D_e = \dfrac{4L\Delta Y \Delta Z}{b.Gr_s.Pr.(\delta X)_e} \quad , \quad P_e = \dfrac{F_e}{D_e}$

$$F_w = U_w \Delta Y \Delta Z \quad , \quad D_w = \frac{4L\Delta Y \Delta Z}{b.Gr_s.Pr.(\delta X)_w} \quad , \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$F_n = V_n \Delta Z \Delta X \quad , \quad D_n = \frac{LS^2 \Delta Z \Delta X}{b^3.Gr_s.Pr.(\delta Y)_n} \quad , \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$F_s = V_s \Delta Z \Delta X \quad , \quad D_s = \frac{LS^2 \Delta Z \Delta X}{b^3.Gr_s.Pr.(\delta Y)_s} \quad , \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

$$F_t = W_t \Delta X \Delta Y \quad , \quad D_t = \frac{S^2 \Delta X \Delta Y}{b.L.Gr_s.Pr.(\delta Z)_t} \quad , \quad P_t = \frac{F_t}{D_t}$$

$$F_b = W_b \Delta X \Delta Y \quad , \quad D_b = \frac{S^2 \Delta X \Delta Y}{b.L.Gr_s.Pr.(\delta Z)_b} \quad , \quad P_b = \frac{F_b}{D_b}$$

$$A(|P|) = \|0,(1-0.1|P|)^5\|$$

3.4.6 หลักการของ Simple Algorithm

ในการแก้ชุดสมการ Governing Equation จะเริ่มจากการสมมุติการแจกแจงของ dimensionless pressure และ dimensionless temperature ภายในบริเวณที่พิจารณา (Solution Domain) จากนั้นทำการแก้สมการ Momentum Equations เพื่อหา dimensionless velocity คือ U^*, V^* และ W^* ซึ่งการกระจายของ U^*, V^* และ W^* ที่คำนวณได้นี้ จะไม่สอดคล้องกับสมการ Continuity Equation ทั้งนี้ เนื่องจากการแจกแจงของ U^*, V^* และ W^* ได้มาจากการสมมุติการแจกแจงของ dimensionless pressure และ dimensionless temperature ซึ่งยังไม่ใช่ค่าที่ถูกต้อง ดังนั้นจึงต้องมีการปรับค่า dimensionless pressure ให้เข้าใกล้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นโดยแก้สมการ Pressure-Correction Equation ซึ่งถูกดัดแปลงมาจาก Continuity Equation ก็จะได้ค่าความดันปรับแก้ซึ่งจะนำไปใช้ปรับค่า dimensionless pressure และ dimensionless velocity จากนั้นนำค่าdimensionless velocity ที่ได้ไปใช้แก้ Energy Equation และ Heat Conduction Equationเพื่อหาค่า dimensionless fluid temperature และ dimensionless fin temperature ตามลำดับ กระบวนการทั้งหมดนี้คือการ Iteration ครั้งที่ 1 ขั้นตอนต่อไป คือ การ Iteration ครั้งที่ 2 ก็จะทำเหมือนกับการ Iteration ครั้งที่ 1 โดยใช้ค่า dimensionless pressure ที่ปรับค่าแล้วเป็นค่าความดันเริ่มต้น ในการ Iteration ครั้งที่ 2 และทำการ Iteration ไปจนกว่าค่าของตัวแปรต่างๆจะ Converge

3.4.7 ขั้นตอนการแก้สมการ โดยวิธี Simple Algorithm

1. สมมุติค่าความดันเริ่มต้น , P_d^* และอุณหภูมิไร้หน่วยของของไหล
2. แก้สมการ Momentum Equations , สมการ (3.13) , (3.14) , (3.15) ได้ U^*, V^* และ W^*
3. แก้สมการ Pressure-Correction Equation , สมการ (3.24) ได้ P'
4. คำนวณค่าความดันที่ถูกปรับค่า , P โดยใช้สมการ (3.16)
5. คำนวณ dimensionless velocity U, V และ W จาก สูตรปรับแก้ความเร็ว (สมการ (3.20) , (3.21) , (3.22))
6. แก้สมการ Energy Equation , สมการ (3.25) ได้ dimensionless fluid temperature , ϕ_f
7. แก้สมการ Heat Conduction Equation , สมการ (3.3) ได้ dimensionless fin temperature , ϕ_s
8. ใช้ค่าความดันที่ถูกปรับค่า , P เป็นค่าความดันเริ่มต้น , P_d^* ค่าใหม่แล้วทำตามขั้นตอนที่ 2 ลงมา ทำซ้ำไปจนกว่าค่า dimensionless pressure , dimensionless velocity และ dimensionless temperature ลู่เข้าสู่ค่าคงที่