สำนักงานวิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

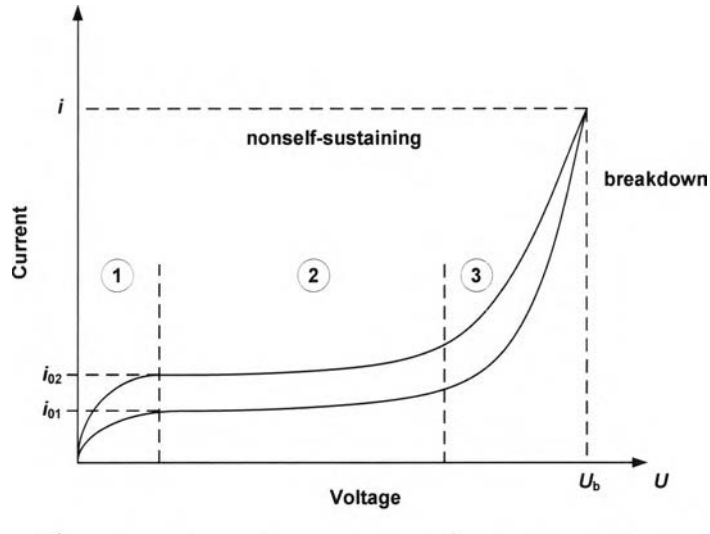
บทที่ 2

ทฤษฎีและระบบสมการที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงกลไกและทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายการเกิดเบรกดาวน์ในแก๊ส ซึ่งในงานวิจัยนี้ คือ อากาศที่เป็นแก๊สไฟฟ้าลบ โดยลักษณะที่สำคัญของแก๊สไฟฟ้าลบ ซึ่งสามารถจับอิเล็กตรอนอิสระที่เกิดจากไอออไนเซชัน เป็นผลให้อะวาลานซ์ของอิเล็กตรอนเกิดได้ยากขึ้น นอกจากนี้เนื้อหาในส่วนที่สองของบทนี้จะเป็นรายละเอียดของระบบสมการที่นำมาใช้ในแบบจำลองเชิงตัวเลข

2.1 กลไกการเบรกดาวน์

การเกิดเบรกดาวน์ในแก๊สเป็นการเปลี่ยนสภาพการฉนวนไปสู่สภาพนำไฟฟ้า เป็นสภาวะระหว่างสถานภาพที่กระแสไหลประทังตัวเองไม่ได้ (nonself-sustained) ไปสู่สถานภาพที่กระแสไหลประทังตัวเองได้ (self-sustained) ช่วงดังกล่าวจะเกิดขึ้นเมื่อแกปมีจำนวนอิเล็กตรอนหรือไอออนในอะวาลานซ์มากพอจนทำให้แกปมีสภาพนำไฟฟ้าสูงและโดยทฤษฎีแล้วกระแสจะมีค่าเป็นอนันต์ คือ กระแสจะถูกจำกัดด้วยค่าอิมพีแด็นซ์ (impedance) ของวงจรภายนอกเท่านั้น และกระแสที่ไหลในแกปจะไหลต่อไปได้ถึงแม้ว่าจะตัดต้นกำเนิดอิเล็กตรอนจากภายนอกออก กล่าวคือแรงดันที่ทำให้เกิดเบรกดาวน์จะคงเดิมไม่ว่าจำนวนอิเล็กตรอนเริ่มต้น (n_0) หรือขนาดกระแสอิ่มตัว (i_0) จะมีค่าต่างกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างกระแส (i) – แรงดันไฟฟ้า (U)

จากรูปที่ 2.1 ที่ค่าแรงดันต่ำ ความเครียดสนามไฟฟ้า (electric field stress) มีค่าต่ำ การเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีประจุจะเป็นไปตามกฎของโอห์ม (Ohm's law) คือกระแสเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงดันไฟฟ้าที่อยู่ในย่านที่ 1

ในย่านที่ 2 อนุภาคประจุอิสระที่มีอยู่ในแกปจะเคลื่อนที่เข้าหาอิเล็กโตรดทั้งหมด แม้จะมีการเพิ่มแรงดันให้สูงขึ้น แต่กระแสจะไม่เพิ่มขึ้น เนื่องจากอิเล็กตรอนที่เกิดขึ้นมีพลังงานไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดการไอออไนเซชัน

ที่ความดันบรรยากาศ จะพบว่าความหนาแน่นของกระแสเริ่มคงตัวที่ความเครียดสนามไฟฟ้าประมาณ 10 kV/cm และมีค่าประมาณ 10^{-9} A/cm^2 กระแสที่ไหลในแกปจะไม่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งแรงดันที่เพิ่มขึ้นทำให้ความเครียดสนามไฟฟ้ามีค่าประมาณ 20 kV/cm กระแสจะมีปริมาณเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เพราะมีอิเล็กตรอนเพิ่มขึ้นจากการเกิดไอออไนเซชัน นั่นคือ อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ชนอะตอมหรือโมเลกุลที่เป็นกลางทำให้เกิดอิเล็กตรอนอิสระและไอออนบวกเพิ่มขึ้นมากมาย เป็นสภาพที่อิเล็กตรอนเพิ่มขึ้นได้เองเกิดเป็นอะวาลานช์ในย่านที่ 3

กระแสที่เพิ่มขึ้น หมายถึง การที่อิเล็กตรอนและไอออนมีจำนวนมากขึ้นจนถึงค่าวิกฤตที่ทำให้เกิดเบรกดาวน์ ซึ่งทฤษฎีที่ใช้อธิบายกระบวนการเพิ่มจำนวนของอนุภาคที่มีประจุจนถึงค่าวิกฤตหรือกลไกการเกิดเบรกดาวน์มีอยู่ด้วยกันสองทฤษฎี คือ ทฤษฎีการเกิดเบรกดาวน์ของทาวน์เซนด์และทฤษฎีการเกิดเบรกดาวน์แบบสตรีมเมอร์

2.1.1 ทฤษฎีการเกิดเบรกดาวน์ของทาวน์เซนด์

ทฤษฎีนี้อธิบายการเกิดเบรกดาวน์ว่าเกิดจากการเพิ่มทวีคูณของอิเล็กตรอนจากการไอออไนเซชัน ซึ่งประกอบด้วยกระบวนการขั้นต้น (primary หรือ α process) หมายถึง การเพิ่มทวีคูณของอิเล็กตรอนที่เกิดจากอิเล็กตรอนที่หลุดออกจากแคโทด เคลื่อนที่ไปในสนามไฟฟ้าและได้รับพลังงานจากสนามไฟฟ้าในขณะที่เคลื่อนที่เข้าหาแอโนด พลังงานที่อิเล็กตรอนได้รับจะเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ ถ้าพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าพลังงานไอออไนเซชันของอะตอมหรือโมเลกุลของแก๊สในขณะที่เกิดการชน ก็จะเกิดการไอออไนเซชัน ส่วนกระบวนการขั้นที่สองชนิด γ (γ process) เป็นกระบวนการที่เกิดอิเล็กตรอนอิสระเพิ่มขึ้นโดยการชนของไอออนบวกที่เกิดจากกระบวนการขั้นต้น มีทิศทางการเคลื่อนที่เข้าหาแคโทด เมื่อไอออนบวกเคลื่อนที่ชนแคโทดจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากแคโทด ทำให้มีอิเล็กตรอนอิสระในแกปเพิ่มทวีคูณขึ้น เมื่ออิเล็กตรอนอิสระที่เกิดจากกระบวนการขั้นที่สองทำให้เกิดกระบวนการขั้นต้นต่อไปอีก ส่วนกระบวนการขั้นที่สองอีกกระบวนการหนึ่งคือ กระบวนการที่ไอออนบวกที่เกิดขึ้นจาก

กระบวนการขั้นต้นเคลื่อนที่ชนอะตอมหรือโมเลกุลของแก๊ส ถ้าไอออนบวกนี้มีพลังงานสูงพอก็จะทำให้เกิดไอออไนเซชันในแก๊ส เรียกว่า กระบวนการ β (β process) อย่างไรก็ตามกระบวนการ β นี้ไม่สามารถนำมาใช้อธิบายการเกิดเบรกดาวน์ในแก๊สได้ เนื่องมาจาก

- ไอออนบวกไม่อาจทำให้เกิดไอออไนเซชันในแก๊สได้อย่างมีประสิทธิผลที่ความเครียดไฟฟ้าเบรกดาวน์ เพราะโดยทฤษฎีแล้ว กระบวนการดังกล่าวจะเกิดได้เมื่อไอออนมีพลังงานเท่ากับสองเท่าของพลังงานไอออไนเซชัน แต่โอกาสเช่นนี้มีน้อยมาก
- ถ้ากระบวนการ β เป็นส่วนที่ทำให้เกิดเบรกดาวน์ ชนิดโลหะที่ใช้ทำแคโทดจะไม่มีผลต่อค่าแรงดันเริ่มเกิดเบรกดาวน์ แต่จากผลการทดลองพบว่าฟังก์ชันงาน (work function) ของโลหะมีผลอย่างมากต่อค่าแรงดันเบรกดาวน์
- กลไกการเกิดเบรกดาวน์ตามกระบวนการ β ต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่ของไอออนข้ามแกปมากกว่าเวลาการเกิดเบรกดาวน์ที่วัดได้

กระบวนการขั้นที่สองที่เป็นกระบวนการที่ทำให้เกิดเบรกดาวน์จึงเป็นแบบที่ไอออนบวกเคลื่อนที่ชนแคโทด หรือกระบวนการ γ

จากการเพิ่มทวีคูณของจำนวนอิเล็กตรอนโดยอาศัยกระบวนการขั้นต้นและกระบวนการขั้นที่สอง สามารถเขียนสมการของกระแสที่ไหลในสนามไฟฟ้าแบบสม่ำเสมอระหว่างแผ่นอิเล็กโตรดสองอันได้ดังนี้

$$i = i_0 \frac{\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\left[e^{\bar{\alpha}d} - \frac{\eta}{\bar{\alpha}}\right]}{1 - \gamma\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(e^{\bar{\alpha}d} - 1)}$$

โดยที่ i_0 คือกระแสเริ่มต้นจากแคโทด

เมื่อเกิดการเบรกดาวน์ กระแสจะมีขนาดเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังนั้นเงื่อนไขในการเกิดเบรกดาวน์ของทาวน์เซนด์คือ

$$\gamma\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\left(e^{\bar{\alpha}d} - 1\right) = 1 \quad \text{และ} \quad \bar{\alpha} \geq 0 \tag{2.1}$$

2.1.2 ทฤษฎีการเกิดเบรกดาวน์แบบสตรีมเมอร์

เนื่องจากกลไกการเกิดเบรกดาวน์ของทาวน์เซนด์ไม่สามารถอธิบายการเกิดเบรกดาวน์ได้ทุกกรณี เช่น การเกิดเบรกดาวน์ในช่องแกปกว้าง ๆ ในบรรยากาศของแรงดันอิมพัลส์รูปคลื่นฟ้าผ่าที่เกิดในช่วงหน้าคลื่น มีเวลาคลื่นตัด (chopped time, T_c) น้อยกว่า 0.1 ไมโครวินาที ซึ่งเป็นเวลาที่น้อยเกินไปที่ไอออนบวกจะสามารถเคลื่อนที่ไปถึงแคโทดเพื่อสร้างอิเล็กตรอนอิสระได้ เมื่อคำนวณเวลาตามกระบวนการของทาวน์เซนด์ที่ใช้ในการสร้างอิเล็กตรอนโดยการชนจนเกิดการแตกตัวแล้วปล่อยอิเล็กตรอนออกจากแคโทดจะพบว่าใช้เวลามากกว่าเวลาคลื่นตัดที่วัดได้จากการทดลอง หรือแม้แต่คิดเวลาที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่โดยตรงจากแคโทดไปยังแอโนดโดยไม่เกิดการชน ก็ใช้เวลานานกว่าเวลาคลื่นตัดที่ทดลองได้ อีกประการหนึ่งทฤษฎีของทาวน์เซนด์ไม่ได้อธิบายถึงผลของประจุค้าง (space charge) ที่อยู่เบื้องหลังของอะวาลานช์ก่อน ๆ กลุ่มไอออนเหล่านี้ทำให้สนามไฟฟ้าเดิมบิดเบือนไปในทางที่มีความเครียดไฟฟ้าสูงขึ้น และอาจทำให้อิเล็กตรอนมีพลังงานมากพอที่จะทำให้เกิดการไอออไนเซชันได้

Meek และ Loeb ได้เสนอทฤษฎีสตรีมเมอร์บวกในปี 1940 และในเวลาเดียวกัน Rather ก็เสนอทฤษฎีสตรีมเมอร์ลบ เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ซึ่งทฤษฎีของทาวน์เซนด์ไม่สามารถอธิบายได้ หลักการของการเกิดเบรกดาวน์ตามทฤษฎีสตรีมเมอร์เป็นผลสืบเนื่องจากกระบวนการขั้นต้นของทาวน์เซนด์ กล่าวคือจะมีการไอออไนเซชันเป็นจำนวนมากจากพลังงานโฟตอนหรือการเกิดโฟโตไอออไนเซชันที่ส่วนหน้าของสตรีมเมอร์ กลุ่มประจุค้างของไอออนซึ่งเคลื่อนที่ช้าเกือบจะอยู่กับที่เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ข้ามแกปไปยังแอโนดที่บริเวณส่วนหัวของสตรีมเมอร์จะทำให้สนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นเป็นผลให้เกิดไอออไนเซชันเพิ่มขึ้นอย่างมาก และทำให้โฟโตไอออไนเซชันมีการขยายตัวเพิ่มขึ้น เกิดอะวาลานช์ใหม่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ประจุค้างเพิ่มขึ้น ทำให้ความนำไฟฟ้าสูงขึ้นเป็นแนวมีลักษณะเป็นสตรีมเมอร์ระหว่างแอโนดกับแคโทดและเกิดเบรกดาวน์ตามแนวดังกล่าว

เงื่อนไขการเกิดสตรีมเมอร์เบรกดาวน์กำหนดด้วยสภาวะช่วงต่อของการเปลี่ยนสถานภาพจากอิเล็กตรอนอะวาลานช์ไปสู่สตรีมเมอร์ ซึ่งแบ่งอธิบายออกเป็นสองทางตามทฤษฎีที่เสนอ คือ

- Meek และ Loeb ได้เสนอเงื่อนไขการเปลี่ยนจากอิเล็กตรอนอะวาลานซ์ไปสู่สตรีมเมอร์จะเกิดขึ้นเมื่อสนามไฟฟ้าเนื่องจากไอออนบวกที่ส่วนหัวของอะวาลานซ์มีค่าประมาณเท่า ๆ กับความเครียดสนามไฟฟ้าที่ป้อนจากภายนอก
- Rather ได้เสนอเงื่อนไขสตรีมเมอร์เบรกดาวน์กำหนดด้วยสนามไฟฟ้าจากประจุค้างเช่นเดียวกับ Meek และ Loeb และกำหนดเพิ่มอีกว่าสตรีมเมอร์จะเกิดขึ้นเมื่ออะวาลานซ์มีจำนวนอิเล็กตรอนหรือไอออนบวกตามกระบวนการไอออไนเซชันโดยการชน $e^{\bar{\alpha}x}$ ประมาณ 10^8 โดยไม่ขึ้นกับชนิดของแก๊ส หรือความดันแก๊ส หรือระดับความสม่ำเสมอของสนามไฟฟ้า

จากทฤษฎีการเกิดเบรกดาวน์แบบสตรีมเมอร์ทั้งสองทฤษฎีที่ได้กล่าวถึงในข้างต้น อาจกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนสภาวะจากอะวาลานซ์ไปยังสตรีมเมอร์จะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\bar{\alpha}d = K = 18 - 20 \tag{2.2}$$

เมื่อ K คือค่าคงตัวสตรีมเมอร์

โดยรายละเอียดของการเกิดอิเล็กตรอน ไอออนบวก และไอออนลบ ตามกระบวนการขั้นต้นและกระบวนการขั้นที่สองสามารถอ่านได้จากเอกสารอ้างอิง [23, 24]

2.2 ระบบสมการที่เกี่ยวข้อง

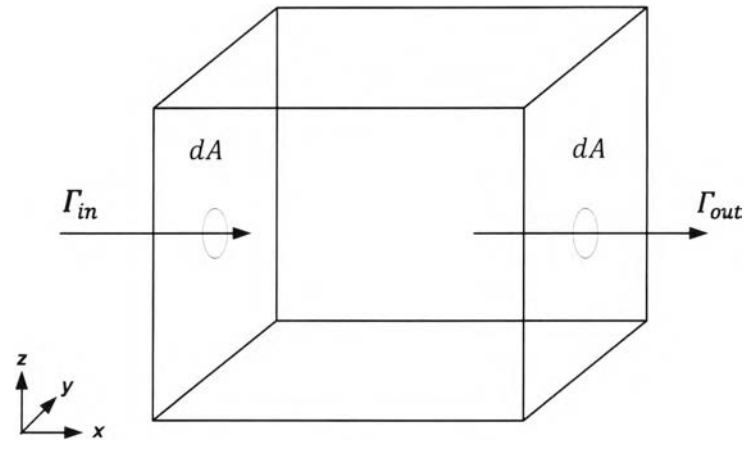
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการที่ใช้ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ของอนุภาค เช่น อิเล็กตรอน ไอออนบวก และไอออนลบ ในขณะเกิดอิเล็กตรอนอะวาลานซ์หรือเกิดการดีสชาร์จในอากาศที่ความดันบรรยากาศ โดยกำหนดให้การกระจายตัวของอนุภาคแต่ละชนิดมีการกระจายอย่างต่อเนื่องตลอดทั่วทั้งบริเวณที่ทำการคำนวณ ทำให้สามารถใช้สมการของไหลในการอธิบายลักษณะการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ของอนุภาคต่าง ๆ ได้ และยังช่วยลดความซับซ้อนของขั้นตอนที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเมื่อเทียบกับการใช้ทฤษฎีจลน์ (kinetic theory) ที่ต้องทำการคำนวณความเร็วของอนุภาคแต่ละตัวด้วยฟังก์ชันการกระจายพลังงาน (energy distribution function) ที่ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของ Boltzmann หรือการใช้เทคนิคการคำนวณแบบ Monte Carlo

สมการของไหลที่นำมาใช้ในการอธิบายการกระจายตัวและการเคลื่อนที่ของอนุภาคในงานวิจัยนี้ คือ สมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุ (charge continuity equation) ซึ่งสามารถแสดงที่มาของสมการได้ดังนี้

(ต่อไปนี้กำหนดให้ปริมาณที่เป็นเวคเตอร์จะเขียนแทนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษที่เป็นตัวเอียงหนา เช่น $\boldsymbol{\Gamma}$ คือเวกเตอร์ฟลักซ์ของอนุภาค $(m^{-2}s^{-1})$ เป็นต้น)

พิจารณาปริมาตรทรงลูกบาศก์ตามรูปที่ 2.2 เมื่อ $\boldsymbol{\Gamma_{in}}$ และ $\boldsymbol{\Gamma_{out}}$ แทนฟลักซ์ของอนุภาคที่เคลื่อนที่เข้าและออกปริมาตรตามแนวแกน x และ dA แทนพื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของฟลักซ์ ทำให้จำนวนอนุภาคต่อปริมาตร $N(x,t)$ ที่ไหลเข้าและออกปริมาตรมีค่าเท่ากับ $\boldsymbol{\Gamma_{in}}dA \cdot \boldsymbol{e_n}$ และ $\boldsymbol{\Gamma_{out}}dA \cdot \boldsymbol{e_n}$ เมื่อ $\boldsymbol{e_n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผนังที่อนุภาคไหลผ่าน ดังนั้นสามารถคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาคในปริมาตรทรงลูกบาศก์ได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาค = จำนวนอนุภาคที่ไหลเข้าปริมาตร – จำนวนอนุภาคที่ไหลออกจากปริมาตร + แหล่งจ่ายอนุภาคภายในปริมาตร



รูปที่ 2.2 การเคลื่อนที่ของฟลักซ์ของอนุภาคในปริมาตรทรงลูกบาศก์

สมมติให้แหล่งจ่ายอนุภาคภายในปริมาตร (S_i) มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาคมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} dA\Delta x$$

จำนวนอนุภาคที่ไหลเข้าปริมาตรสามารถเขียนได้เป็น

$$\boldsymbol{\Gamma}(x,t)dA \cdot \boldsymbol{e_n}$$

โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Expansion) จำนวนอนุภาคที่ไหลออกจากปริมาตรสามารถเขียนได้เป็น

$$\boldsymbol{\Gamma}(x+\Delta x,t)dA \cdot \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{\Gamma}(x,t)dA \cdot \boldsymbol{e_n} + \frac{\partial}{\partial x}[\Gamma_x(x,t)dA]\Delta x$$

เมื่อ Γ_x คือขนาดฟลักซ์ของอนุภาคตามแนวแกน x

ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาคมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} dA\Delta x = \boldsymbol{\Gamma}(x,t)dA \cdot \boldsymbol{e_n} - \left(\boldsymbol{\Gamma}(x,t)dA \cdot \boldsymbol{e_n} + \frac{\partial}{\partial x}[\Gamma_x(x,t)dA]\Delta x\right)$$

ซึ่งก็คือสมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุ ในแบบ 1 มิติ

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Gamma_x(x,t)$$

พิจารณาสมการในแบบ 3 มิติโดยการเพิ่มอัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนอนุภาคตามแนวแกน y และแกน z ทำให้สามารถเขียนสมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุในแบบ 3 มิติได้ดังนี้

$$\frac{\partial N(x,y,z,t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}(x,y,z,t)$$

เมื่อ $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

กำหนดให้ $\boldsymbol{\Gamma}(x,y,z,t) = N(x,y,z,t)\boldsymbol{\nu}(x,y,z,t) - D(x,y,z,t)\nabla N(x,y,z,t)$ เป็นฟลักซ์ที่เกิดจากการพาและการแพร่กระจายของอนุภาค โดยที่ $\boldsymbol{\nu}$ คือความเร็วลอยเลื่อน (drift velocity) และ D คือสัมประสิทธิ์การแพร่ของอนุภาค(diffusion coefficient) เมื่อคิดรวมผลของแหล่งจ่ายอนุภาคภายในปริมาตร ทำให้สามารถเขียนสมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุได้ดังนี้

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\boldsymbol{\nu} - D\nabla N) = S_i \tag{2.3}$$

แหล่งจ่ายอนุภาคภายในปริมาตร (S_i) ในที่นี้ หมายถึง การเกิดไอออไนเซชันเนื่องมาจากการชนกันของอนุภาค (collision ionization, α) การเกิดไอออนลบ (electron attachment, η) หรือการเกิดโฟโตไอออไนเซชัน (photoionization, S_{ph}) เป็นต้น โดยตัวอย่างสมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุ สำหรับอิเล็กตรอนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e\boldsymbol{\nu_e} - D_e\nabla N_e) = \alpha N_e|\boldsymbol{\nu_e}| - \eta N_e|\boldsymbol{\nu_e}| + S_{ph}$$

เมื่อ N_e คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอน

$\boldsymbol{\nu_e}$ คือความเร็วลอยเลื่อนของอิเล็กตรอน

D_e คือสัมประสิทธิ์การแพร่ของอิเล็กตรอน

เนื่องจากอนุภาคต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในขณะเกิดอิเล็กตรอนอะวาลานช์หรือเกิดการดีสชาร์จเป็นอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้า จึงทำให้สนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากผลของประจุค้างที่ได้จากการคำนวณด้วยสมการความต่อเนื่องของอนุภาคที่มีประจุของอนุภาคแต่ละชนิด ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นสามารถทำการคำนวณได้จากสมการปัวร์ซอง (Poisson's equation) ดังนี้

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{e}{\varepsilon}\left[\sum N_i\right] \tag{2.4}$$

เมื่อ $\boldsymbol{E}$ คือสนามไฟฟ้า

e คือขนาดประจุของอิเล็กตรอน

ε คือสภาพยอมทางไฟฟ้าของอากาศ (permittivity of air)

N_i คือความหนาแน่นของอนุภาคที่มีประจุแต่ละชนิด

จากผลการคำนวณการกระจายตัวของสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นของอนุภาคที่มีประจุแต่ละชนิดทำให้สามารถหาค่ากระแสรวม (I_{total}) ที่ไหลในวงจรภายนอกได้โดยใช้สมการสมดุลพลังงาน (energy balance equation)

$$I_{total} = \frac{1}{V_{in}}\left[e\int_{Vol.} \boldsymbol{\Gamma_{total}} \cdot \boldsymbol{E}dV + \varepsilon\int_{Vol.} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{E}dV\right] \tag{2.5}$$

เมื่อ V_{in} คือแรงดันป้อนเข้า

$\boldsymbol{\Gamma_{total}}$ คือผลรวมฟลักซ์ของอนุภาคที่มีประจุ