การสร้างเศษส่วนต่อเนื่องบางแบบในฟิลด์ค่าวิยุต

นางสาวจิตตินาถ รัตนมุง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2556
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5 3 7 3 8 7 8 4 2 3

CONSTRUCTION OF SOME CONTINUED FRACTIONS IN DISCRETE VALUED FIELDS

Miss Jittinart Rattanamoong

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2013

Copyright of Chulalongkorn University

Thesis Title	CONSTRUCTION OF SOME CONTINUED FRACTIONS IN DISCRETE VALUED FIELDS
By	Miss Jittinart Rattanamoong
Field of Study	Mathematics
Thesis Advisor	Assistant Professor Tuangrat Chaichana, Ph.D.
Thesis Co-advisor	Professor Vichian Laohakosol, Ph.D.

Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Doctoral Degree

S. Hannongbua ..... Dean of the Faculty of Science

(Professor Supot Hannongbua, Dr.rer.nat.)

THESIS COMMITTEE

Ajchara Harnchoowong ..... Chairman

(Associate Professor Ajchara Harnchoowong, Ph.D.)

T. Chaichana ..... Thesis Advisor

(Assistant Professor Tuangrat Chaichana, Ph.D.)

Vichian Laohakosol ..... Thesis Co-advisor

(Professor Vichian Laohakosol, Ph.D.)

Yotsanan Meemark ..... Examiner

(Associate Professor Yotsanan Meemark, Ph.D.)

..... Examiner

(Ouamporn Phuksuwan, Ph.D.)

Narakorn Kanasri ..... External Examiner

(Assistant Professor Narakorn Kanasri, Ph.D.)

จิตตินาถ รัตนมุง : การสร้างเศษส่วนต่อเนื่องบางแบบในฟิลด์ค่าวิยุต. (CONSTRUCTION OF SOME CONTINUED FRACTIONS IN DISCRETE VALUED FIELDS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.ตวงรัตน์ ไชยชนะ, อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม : ศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล, 106 หน้า.

ขั้นตอนวิธีการสำหรับการเขียนแทนสมาชิกในฟิลด์ค่าวิยุตด้วยการกระจายเศษส่วนต่อเนื่องได้ถูกสร้างขึ้น มีตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า ขั้นตอนวิธีการของเรามีการกระจายเศษส่วนต่อเนื่องที่เป็นที่รู้จักกันดีเกือบทั้งหมดเป็นกรณีพิเศษ

เราให้เกณฑ์ในการตรวจสอบความเป็นอิสระต่อกันเชิงพีชคณิต และความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น สำหรับสมาชิกในฟิลด์บริบูรณ์เทียบกับแวลูเอชันไพร์มแอดิก และเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการตรวจสอบความเป็นอิสระต่อกันเชิงพีชคณิต และความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นของคลาสที่เจาะจงของการกระจายเศษส่วนต่อเนื่อง

ในส่วนสุดท้าย เราให้สูตรชัดแจ้งของการกระจายเศษส่วนต่อเนื่องสำหรับสมาชิกที่เกี่ยวข้องกับสมาชิกเลขชี้กำลังในฟิลด์บริบูรณ์เทียบกับแวลูเอชันดีกรี เครื่องมือสำคัญที่เรียกว่า บทตั้งการพับ ที่ใช้ในการหาสูตรชัดแจ้งนี้มีความน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง ในที่นี้เราขยายบทตั้งและได้ผลจากการประยุกต์ใช้บทตั้งเหล่านี้

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต จิตตินาถ รัตนมุง

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ตวงรัตน์ ไชยชนะ

ปีการศึกษา 2556 ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

##5373878423 : MAJOR MATHEMATICS
KEYWORDS : DISCRETE-VALUED NON-ARCHIMEDEAN FIELDS / CONTINUED FRACTIONS / ALGEBRAIC AND LINEAR INDEPENDENCE / EXPONENTIAL ELEMENT

JITTINART RATTANAMOONG : CONSTRUCTION OF SOME CONTINUED FRACTIONS IN DISCRETE VALUED FIELDS.
ADVISOR : ASST. PROF. TUANGRAT CHAICHANA, Ph.D.,
CO-ADVISOR : PROF. VICHIAN LAOHAKOSOL, Ph.D., 106 pp.

An algorithm for constructing continued fraction expansions of elements in a discrete valued field is established. Several examples are given to show that our algorithm yields almost all known continued fraction expansions as special cases.

We derive criteria for algebraic and linear independence of elements in the function field with respect to a prime-adic valuation and sufficient conditions for algebraic and linear independence of certain classes of continued fraction expansions.

In the last part, we give explicit formulae for continued fraction expansions of some elements related to the exponential element in the function field with respect to the degree valuation. The main tool called the Folding Lemma, used in the construction of such explicit formulae is of major interest. Here we generalize this lemma and derive several applications.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature : J. Rattanamoong
Field of Study : Mathematics Advisor's Signature : T. Chaichana
Academic Year : 2013 Co-advisor's Signature : V. Laohakosol

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to express my sincere gratitude to Assistant Professor Dr. Tuangrat Chaichana, my thesis advisor, and Professor Dr. Vichian Laohakosol, my thesis co-advisor, for their invaluable comments, suggestions and consistent encouragement throughout the preparing and writing this thesis. Without their constructive suggestions and knowledgeable guidance in this study, this research would never have successfully been completed. Sincere thanks and deep appreciation are also extended to Associate Professor Dr. Ajchara Harnchoowong, the chairman, Associate Professor Dr. Yotsanan Meemark, Dr. Ouamporn Phuksuwan and Assistant Professor Dr. Narakorn Kanasri, the commitee members, for their comments and suggestions. Also, I thank all teachers who have taught me all along.

I am also grateful to the Development and Promotion of Science and Technology Talents Project (DPST) for providing me support throughout my graduate study.

Finally, I would like to express my greatly gratitude to my family for their love and encouragement during my study.

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH v

ACKNOWLEDGEMENTS vi

CONTENTS vii

NOTATION ix

CHAPTER

I INTRODUCTION AND PRELIMINARIES 1

1.1 Introduction 1

1.2 Preliminaries 2

1.2.1 Valuation 2

1.2.2 Continued fraction expansions 7

II GENERALIZED CONTINUED FRACTION EXPANSIONS 9

2.1 Algorithm 9

2.2 Examples 17

III INDEPENDENCE 24

3.1 Criteria 24

3.2 Applications 32

3.2.1 The π-adic Ruban continued fraction expansion 37

3.2.2 The π-adic Schneider continued fraction expansion 42

IV EXPLICIT CONTINUED FRACTION EXPANSIONS 49

4.1 Notation and preliminaries 49

4.2 Main results 52

page

4.2.1 Partition 1 60

4.2.2 Partition 2 63

4.2.3 Partition 3 66

V FOLDED CONTINUED FRACTION EXPANSIONS 76

5.1 A generalized Folding Lemma 76

5.2 A generalized 3-tier Folding Lemma 79

5.3 Applications 91

5.3.1 Two-fold continued fraction expansion of type 1 91

5.3.2 Two-fold continued fraction expansion of type 3 91

5.3.3 Two-fold continued fraction expansion of type 4 98

5.3.4 Three-fold continued fraction expansion of type 13 98

REFERENCES 103

VITA 106

NOTATION

$\mathbb{N}$	the set of natural numbers
$\mathbb{Z}$	the set of integers
$\mathbb{Q}$	the set of rational numbers
$\mathbb{R}$	the set of real numbers
$\mathbb{N}_{\geq 2}$	the set of natural numbers greater than or equal to two
$\mathbb{R}_{\geq 1}$	the set of real numbers greater than or equal to one
K	a complete field
$\lvert \cdot \rvert$	a valuation
S	the set of all head parts
$\mathcal{O}$	a ring of integers
$\mathcal{P}$	the unique maximal ideal of $\mathcal{O}$
$\mathcal{O}/\mathcal{P}$	a residue class field
$\mathcal{A}$	a set of representatives of $\mathcal{O}/\mathcal{P}$
p	a rational prime
$\mathbb{Q}_p$	the field of p-adic numbers
$\lvert \cdot \rvert_p$	the p-adic valuation
$\mathbb{Z}_p$	the ring of p-adic integers
F	a field
$F[x]$	the ring of polynomials over F
$F(x)$	the field of rational functions over F
$\lvert \cdot \rvert_\infty$	the degree valuation
$F((x^{-1}))$	the completion of $F(x)$ with respect to $\lvert \cdot \rvert_\infty$
$\pi(x)$	a monic irreducible polynomial of $F[x]$
$\lvert \cdot \rvert_\pi$	the π-adic valuation
$F((\pi(x)))$	the field of all formal Laurent series in $\pi(x)$
$F[[\pi(x)]]$	the ring of π-adic integers

$a_0 + \dfrac{b_1}{a_1+}\ \dfrac{b_2}{a_2+}\ \dfrac{b_3}{a_3+}\cdots$	a non-regular continued fraction expansion
$[a_0; b_1, a_1; b_2, a_2; b_3, a_3; \ldots]$	a non-regular continued fraction expansion
$\dfrac{C_n}{D_n} = a_0 + \dfrac{b_1}{a_1+}\ \dfrac{b_2}{a_2+}\cdots\dfrac{b_n}{a_n}$	the n^{th} convergent
$\dfrac{C_n}{D_n} = [a_0; b_1, a_1; b_2, a_2; \ldots; b_n, a_n]$	the n^{th} convergent
$\overrightarrow{X}_n$	the word $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$-\overrightarrow{X}_n$	the word $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$
$\overleftarrow{X}_n$	the word $a_n, \ldots, a_2, a_1$
$[a_0; \overrightarrow{X}_n]$	the continued fraction expansion $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ having word $\overrightarrow{X}_n$ as its digits