การศึกษาเชิงเลขของผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด

นายนันทวัฒน์ ไพรัชเวทย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-3918-4

A NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER COEFFICIENT ON THE PRODUCTION RATE OF TUBULAR-ICE

Mr. Nuntawatt Piruchvet

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Acdemic Year 2005
ISBN 974-17-3918-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาเชิงเลขของผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด
โดย	นายนันทวัฒน์ ไพรัชเวทย์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.จิตติน แตงเที่ยง

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์ธร จรัญญากรณ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร.จิตติน แตงเที่ยง)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ มิ่งศักดิ์ ตั้งตระกูล)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

นันทวัฒน์ ไพรัชเวทย์ : การศึกษาเชิงเลขของผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด. (A NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER COEFFICIENT ON THE PRODUCTION RATE OF TUBULAR-ICE) อ. ที่ปรึกษา : ดร.จิตติน แตงเที่ยง , 82 หน้า. ISBN 974-17-3918-4.

งานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับการศึกษาเชิงเลขถึงผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด โดยประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งอาศัยวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยายเพื่อจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดแบบการแข็งตัวภายในท่อสเตนเลสชนิดผิวเรียบโดยมีแอมโมเนียทำหน้าที่เป็นสารทำความเย็นอยู่โดยรอบ

จากการศึกษาพบว่า ค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณ ณ จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิต เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จากโรงงานพบว่ามีค่าความผิดพลาดประมาณ 4% นอกจากนี้ยังพบว่าในช่วง 10 นาทีแรกของกระบวนการแข็งตัวค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนีย, อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด และ ภาระทางความเย็นของระบบจะลดลงอย่างรวดเร็ว หลังจากนั้นอัตราการลดลงของค่าดังกล่าวจะเริ่มมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ จนเกือบจะคงที่เป็นผลจากการที่น้ำแข็งมีค่าการนำความร้อนต่ำทำให้ประพฤติตัวเสมือนฉนวนทางความร้อน ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไปความหนาของน้ำแข็งเพิ่มขึ้นจึงส่งผลให้สภาพการนำความร้อนโดยรวมของระบบลดลง ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียส่งผลโดยตรงกับอัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด โดยที่อุณหภูมิของแอมโมเนียเป็นปัจจัยที่ส่งผลกระทบอย่างมาก กล่าวคือ เมื่อใช้อุณหภูมิที่ -7.5 ^{o}C เป็นค่าอ้างอิงพบว่า การลดอุณหภูมิของแอมโมเนีย 0.5 ^{o}C จะส่งผลให้อัตราการผลิตเพิ่มขึ้นประมาณ 8% ส่วนค่าปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลการผลิตในช่วงแรกจะมีค่าลดลงจนมีค่าต่ำสุดที่เวลา 4 นาทีจากนั้นจะค่อยๆเพิ่มขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิต เมื่อพิจารณาโดยรวมจะพบว่าค่าดังกล่าวมีค่าเกือบจะคงที่ตลอดกระบวนการผลิตซึ่งมีค่าเฉลี่ยโดยรวมประมาณ 0.36 MJ/kg โดยมีความแตกต่างกับค่าสูงสุด และต่ำสุดประมาณ +7.5% และ -4% ตามลำดับ จากผลการวิจัยแสดงให้เห็นข้อเปรียบเทียบในเชิงของการใช้พลังงานที่สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดให้มีประสิทธิภาพในการทำงานมากขึ้นเพื่อช่วยประหยัดพลังงานอันเป็นต้นทุนในการผลิตน้ำแข็งหลอดได้

ภาควิชา.........วิศวกรรมเครื่องกล..........ลายมือชื่อนิสิต.........นันทวัฒน์.........
สาขาวิชา........วิศวกรรมเครื่องกล..........ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.........จิตติน แตงเที่ยง.........
ปีการศึกษา.............2548....................

4570384021 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: HEAT TRANSFER / ICE / NUMERICAL / CONVECTION / PRODUCTION RATE

NUNTAWATT PIRUCHVET : A NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER COEFFICIENT ON THE PRODUCTION RATE OF TUBULAR-ICE. THESIS ADVISOR : CHITTIN TANGTHIENG, Ph.D. 82 pp. ISBN 974-17-3918-4.

This research concerns about a numerical study of the behaviors and effects of convective heat transfer coefficient on the production rate of tubular-ice making process. This research creates a computer program by using finite difference method with fully implicit scheme for simulating ice formation inside a smooth pipe made of stainless steel in the tubular-ice making machine, which uses ammonia as the refrigerant.

This study found that the agreement between the ice thickness, which is obtained from the numerical results at the end of process, and the data from a field measurement has an error of 4%. The convective heat transfer coefficient, the ice formation rate and the cooling load decreases significantly in the first 10 minute of process. Thereafter, the reduction rate starts to decrease until it approaches a constant because the ice has low conductivity and behaves as like an insulator. The ice thickness increases; therefore, the overall conductivity of system is decreased. The convective heat transfer coefficient, as a function of the saturated ammonia temperature, has a major effect on the production rate. This study shows that at the saturated ammonia temperature of -7.5 ^{o}C, decrease of 0.5 ^{o}C of the temperature results in an increase of production rate by 8%. The energy intensity decreases at the beginning of the process until it reaches the minimum value at 4 minutes. Afterward it rises up until getting the maximum value at the end of the process. In overall, the energy intensity is almost constant, whereas the mean value is 0.36 MJ/kg and the different of peak value is +7.5% and -4%. From these results, it indicates the efficient way to improve the energy consumption of the tubular-ice making process.

Department.......Mechanical Engineering....Student's signature.....ณัฐวรรธน์.....
Field of study....Mechanical Engineering....Advisor's signature.....
Academic year................2005.................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลือเป็นอย่างดียิ่งของบุคคลหลายท่านผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.จิตติน แตงเที่ยง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งให้ความช่วยเหลือ และ ชี้แนะให้ข้อคิดเห็นในแง่มุมต่าง ๆ อีกทั้งแนวทางในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นระหว่างการทำวิทยานิพนธ์ ตลอดจนคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน คือ รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์ธร จรัญญากรณ์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์มิ่งศักดิ์ ตั้งตระกูล กรรมการ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ร่วมให้คำปรึกษา และ แนวความคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อวิทยานิพนธ์

ผู้วิจัยขอขอบคุณ คุณภูวนาถ กาบคำ ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ข้อมูลที่ใช้อ้างอิงในการทำวิจัยเพื่อให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ พี่ ๆ น้อง ๆ ทุกท่านที่คอยให้กำลังใจ และ แบ่งปันความสนุกสนานให้กันตลอดระยะเวลาการศึกษา ตลอดจนที่ได้ร่วมให้คำปรึกษา และ แนวความคิดที่เอื้อประโยชน์ให้การวิจัยผ่านไปด้วยดี

ท้ายที่สุดผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และน้องสาว อันเป็นที่รักยิ่งของผู้วิจัย ที่มอบทุกสิ่งทุกอย่าง และ เป็นกำลังใจในทุกก้าวย่างของชีวิตผู้วิจัย ประโยชน์อันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยขออุทิศแด่ท่านผู้ให้กำเนิด ครูอาจารย์ ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ และ ผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

รายการสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	คำอธิบาย
Bi	ไบออทนัมเบอร์
C_{pS}	ค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำแข็ง
C_{pW}	ค่าความจุความร้อนจำเพาะของผนังท่อ
D	ความหนาของผนังท่อ
h_0	ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนของแอมโมเนีย
i	ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา
k_s	ค่าการนำความร้อนของน้ำแข็ง
k_w	ค่าการนำความร้อนของผนังท่อ
n	เวลาครั้งที่พิจารณา
R_1	อัตราส่วนค่าการนำความร้อนของผนังท่อกับน้ำแข็ง
R_2	อัตราส่วนค่าความจุความร้อนของผนังท่อกับน้ำแข็ง
$\hat{r}_s$	เทอมไร้มิติของระยะในแนวแกน r ของบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง
$\hat{r}_w$	เทอมไร้มิติของระยะในแนวแกน r ของบริเวณที่เป็นผนังท่อ
s_1	รัศมีภายในของท่อ
s_2	รัศมีภายนอกของท่อ
Ste	สเตฟานนัมเบอร์
t	เวลา
$\hat{t}$	เทอมไร้มิติของเวลา
T_f	อุณหภูมิเยือกแข็งของน้ำ
T_s	อุณหภูมิของน้ำแข็ง
T_w	อุณหภูมิของผนังท่อ
T_0	อุณหภูมิของแอมโมเนีย
x	ระยะในแนวแกน x
$\hat{x}_s$	เทอมไร้มิติของระยะในแนวแกน x ของบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง
$\hat{x}_w$	เทอมไร้มิติของระยะในแนวแกน x ของบริเวณที่เป็นผนังท่อ
Δh	ค่าความร้อนแฝงจำเพาะของการแข็งตัวของน้ำ
α_s	Thermal diffusivity ของน้ำแข็ง
α_w	Thermal diffusivity ของผนังท่อ

β	รัศมีภายในของน้ำแข็งหลอด
δ	ความหนาของน้ำแข็ง
η	ตัวแปรในเทอมไร้มิติ
φ	เทอมไร้มิติของค่าความหนาของน้ำแข็ง
θ_s	เทอมไร้มิติของอุณหภูมิน้ำแข็ง
θ_w	เทอมไร้มิติของอุณหภูมิผนังท่อ
ρ_s	ความหนาแน่นของน้ำแข็ง
ρ_w	ความหนาแน่นของผนังท่อ
σ	ค่าคงที่ของการแปรผันระหว่าง δ กับ $\sqrt{\alpha_s t}$
ξ	ค่าใด ๆของตัวแปรซิมิลาร์ริตี
ψ	อัตราส่วนรัศมีภายในของท่อกับความหนาของท่อ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในประเทศไทยมีโรงงานผลิตน้ำแข็งในเชิงพาณิชย์เป็นจำนวนมากกระจายอยู่ทั่วทุกภูมิภาคของประเทศ ซึ่งในแต่ละวันปริมาณการผลิตน้ำแข็งหลอดมีมาก แต่เนื่องจากในการผลิตน้ำแข็งหลอดนั้นจำเป็นต้องผลิตให้ได้ขนาดตามต้องการ ดังนั้นในรอบการผลิตหนึ่ง ๆหากว่าน้ำแข็งหลอดที่ผลิตได้นั้นไม่ได้ขนาดตามที่ต้องการอาจต้องทิ้งผลผลิตในรอบการทำงานนั้นทั้งหมด ซึ่งนับว่าเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานและสูญเสียเวลาไปโดยเปล่าประโยชน์ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นที่มาของการจัดทำวิทยานิพนธ์นี้ขึ้น โดยจะทำการศึกษาถึงผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดเพื่อที่จะเป็นแนวทางการประหยัดพลังงานในการผลิตน้ำแข็งหลอด

ปัจจุบันการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ได้มีการนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) มาผสมผสานเข้ากับความสามารถในการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อมาใช้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาได้อย่างรวดเร็ว ด้วยเหตุนี้จึงส่งผลให้การจำลองแบบเชิงตัวเลขได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก และเนื่องจากการจำลองดังกล่าวสามารถทำนายผลเฉลยของปัญหาได้อย่างแม่นยำเพียงพอต่อการนำไปใช้งานจริงรวมถึงสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายกว่าการทำการทดลอง ดังนั้นการวิจัยนี้จึงอาศัยความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อทำการศึกษาถึงผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่มีต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายอัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดภายใต้สภาวะแวดล้อมที่กำหนด

2. ศึกษาผลกระทบเชิงเลขของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้จะทำการศึกษาสภาพปัญหาและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์ถึงผลกระทบของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดแบบเกิดการแข็งตัวของน้ำแข็งภายในท่อสเตนเลสชนิดผิวเรียบโดยมีแอมโมเนียทำหน้าที่เป็นสารทำความเย็นอยู่โดยรอบท่อ ในการวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะกระบวนการแข็งตัว (solidification) ของน้ำเท่านั้นโดยอาศัยวิธีความซิมิลาร์ริตีและวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยายในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีเงื่อนไขในการพิจารณาเบื้องต้นดังนี้

1. การพิจารณาปัญหาเป็นการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา
2. การพิจารณาปัญหาลักษณะการแข็งตัวเป็นแบบแยกสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว (sharp interface) และ อุณหภูมิ ณ รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง
3. การพิจารณาปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (heat conduction) ในบริเวณของผนังท่อและน้ำแข็ง โดยที่การพาความร้อนจะเกิดขึ้นบนผิวท่อที่สัมผัสกับสารทำความเย็นซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ -7.5 $^{\circ}$C
4. การพิจารณาปัญหากำหนดให้ความร้อนที่เกิดขึ้นมีเฉพาะค่าความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะและความร้อนสัมผัสจากการเปลี่ยนอุณหภูมิของน้ำแข็งเท่านั้น

1.4 ประโยชน์ที่จะได้รับจากการวิจัย

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถทำนายผลกระทบเชิงเลขของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด ซึ่งเป็นพื้นฐานในการพัฒนาหาแนวทางการประหยัดพลังงาน และเพิ่มประสิทธิภาพในการผลิตต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. จัดทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดโดยแก้ปัญหาด้วยวิธีความซิมิลาร์ริตี (similarity method)
2. จัดทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาทั่วไปโดยแก้ปัญหาด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยาย (fully implicit method) ในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว

3. ศึกษาผลกระทบเชิงเลขของสัมประสิทธิ์การพาความร้อนต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

4. วิเคราะห์ผลการคำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และ นำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จากโรงงาน

5. สรุปผลและจัดทำรายงานวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

สาระสำคัญจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

F.B. Cheung และ S.W. Cha (1987) ได้ทำการวิเคราะห์การเพิ่มขึ้นและการลดลงของขนาดวัสดุโพลีเมอร์ที่แข็งตัวห่อหุ้มบนวัตถุทรงกระบอกซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่แบบต่อเนื่องโดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์ โดยอุณหภูมิของแท่งโลหะมีค่าต่ำกว่าจุดแข็งตัวของวัสดุโพลีเมอร์ ซึ่งจะทำให้เกิดการแข็งตัวของวัสดุโพลีเมอร์บนผิวโดยรอบของแท่งโลหะที่เคลื่อนตัวผ่าน การศึกษาได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยกำหนดให้อุณหภูมิมีค่าคงที่และสม่ำเสมอตลอดกระบวนการ และพิจารณาวัสดุโพลีเมอร์หลอมเหลวเป็นของเหลวอิ่มตัวที่อุณหภูมิแข็งตัว จากนั้นจึงประดิษฐ์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ในการจัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์หาความหนาของโพลีเมอร์ที่แข็งตัวบนแท่งโลหะที่เวลาต่างๆซึ่งพบว่า ค่าที่ได้จากการทดลองจริงเมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากโปรแกรมมีความแตกต่างกันมากขึ้นเมื่อความหนาของโพลีเมอร์มีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากการสมมุติปัญหาให้อยู่ในสภาวะที่สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่ายเมื่อความหนาของโพลีเมอร์มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับรัศมีของแท่งโลหะทรงกระบอกจะพบว่าค่าที่ได้จากการทดลองมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาแบบวิธีซิมิลาร์ริตี

Piia Lamberg et al. (2004) ได้ทำการวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทำการทดลองในกระบวนการหลอมตัวและการแข็งตัวของการกักเก็บความร้อนในรูปของการเปลี่ยนสถานะของสาร โดยในการทดลองจะใช้พาราฟินเป็นสารที่พิจารณากระบวนการแข็งตัวและหลอมตัว ในการทดลองจะมี 2 ขั้นตอนคือ มีการใช้และไม่ใช้อุปกรณ์เพิ่มประสิทธิภาพการนำความร้อนภายในแหล่งกักเก็บความร้อน โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะใช้โปรแกรม FEMLAB ซึ่งใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการพิจารณาโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะใช้วิธีเอนธาลปี และ effective heat capacity ซึ่งเมื่อนำผลที่ได้จากการทดลองมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการจำลองโดยอาศัยโปรแกรม FEMLAB พบว่าให้ผลที่มีค่าใกล้เคียงกันและสามารถยอมรับได้ในค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นทั้งกระบวนการแข็งตัวและหลอมละลายในการทดลองทั้งสองแบบ ซึ่งสำหรับวิธี Effective heat capacity จะให้ผลที่ใกล้เคียงมากหากว่าใช้ช่วงความแตกต่างของอุณหภูมิน้อยกว่า 2 ^{0}C

Chin-Hsiang Cheng และ Chiuan-Che Shiu (2002) ได้ทำการศึกษาข้อมูลของน้ำแข็งและการเกิดขึ้นของน้ำแข็งบนแผ่นโลหะที่มีอุณหภูมิต่ำในสภาวะที่มีลมพัดผ่าน ในการทดลองได้พิจารณาการเกิดของน้ำแข็งเป็นแบบ 2 มิติโดยได้แบ่งออกเป็นการพิจารณาความหนาของน้ำแข็งบริเวณขอบด้านหน้าและสังเกตการเกิดของคริสตัลน้ำแข็ง ผลการทดลองที่ได้พบว่าการเกิดน้ำแข็งบริเวณขอบด้านหน้าจะเป็นลักษณะเส้นโค้งตามกระแสอากาศที่พัดผ่านส่วนชั้นของ

น้ำแข็งที่เกิดขึ้นบริเวณนี้จะค่อนข้างเรียบ ในบริเวณอื่นๆจะเกิดน้ำแข็งขึ้นเป็นลักษณะฟังก์ชันของการแสอากาศที่ไหลผ่านอย่างไรก็ตามการเกิดน้ำแข็งในส่วนอื่นๆมีความหนาที่สม่ำเสมอกันในทุกๆส่วนรวมทั้งขอบด้านหลังด้วย ในกรณีที่ความเร็วลมต่ำความหนาของน้ำแข็งจะแปรผกผันกับอุณหภูมิของอากาศส่วนกรณีความเร็วลมสูงน้ำแข็งที่เกิดขึ้นบริเวณขอบด้านหน้าจะไม่เป็นลักษณะเส้นโค้งแต่จะเป็นเส้นตรงลาดขึ้นตามความยาวของแผ่นโลหะ และเมื่ออากาศอยู่นิ่งการเกิดของน้ำแข็งจะมีลักษณะของคริสตัลคล้ายกับการเกิดในธรรมชาติของน้ำค้างแข็งลักษณะของคริสตัลที่เกิดขึ้นรวมถึงความหนาจะไม่มีรูปแบบที่แน่นอนและอัตราการเกิดจะไม่คงที่ซึ่งไม่สามารถทำนายปรากฏการณ์ได้

Kwan-Soo Lee et al. (2003) ได้ประดิษฐ์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อทำนายพฤติกรรมการเกิดน้ำแข็งและชั้นของน้ำแข็งบนแผ่นโลหะที่มีอุณหภูมิต่ำ โดยได้ทำการเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยแบบจำลองอื่นๆ และการทดลองบางการทดลอง พบว่าแบบจำลองอื่นๆความผิดพลาดส่วนใหญ่จะขึ้นกับสภาวะการทดลองและค่าต่างๆที่ใช้ในการทำนายความหนาของน้ำแข็งที่เกิดขึ้น ซึ่งแบบจำลองสามารถประมาณค่าของความหนา ,ความหนาแน่น และอุณหภูมิที่ผิวของชั้นน้ำแข็ง ได้อย่างแม่นยำโดยมีความผิดพลาดประมาณ 10% ยกเว้นช่วงที่เริ่มการเกิดน้ำแข็งซึ่งน้ำแข็งมีความหนาน้อยมากไม่สามารถที่จะวัดค่าได้ จึงไม่สามารถนำผลมาเปรียบเทียบได้ในช่วงแรกของการแข็งตัว

Kamal A.R. Ismail และ Maria das Graças E. da Silva (2003) ได้ทำการศึกษาการเปลี่ยนสถานะของสารบริเวณรอบท่อทรงกระบอกกลมภายใต้สภาวะที่มีการนำความร้อนที่บริเวณผนังท่อด้านนอก และผนังด้านในมีการถ่ายเทความร้อนแบบการพาความร้อนโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเป็นลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลาใน 2 มิติ โดยใช้ตัวแปร และ เทคนิคการเปลี่ยนรูปที่ใช้ทั่วไปในการพิจารณาปัญหาแบบหน้าสัมผัสการเปลี่ยนสถานะอยู่กับที่ การจำลองจะใช้วิธีไฟไนต์วอลุมในการวิเคราะห์ระบบของสมการตั้งต้น ,เงื่อนไขขอบเขต และ เงื่อนไขเวลาเพื่อให้ได้สมการเชิงเส้นตรง ในการจำลองใช้ระเบียบวิธีแบบปริยายใช้สำหรับสมการโมเมนตัม และ สมการพลังงาน และ ระเบียบวิธีแบบชัดแจ้งใช้ในการพิจารณาสมดุลพลังงานบริเวณหน้าสัมผัส ซึ่งผลที่ได้สามารถยอมรับได้เมื่อเทียบกับผลจากการจำลองที่ใช้อ้างอิง

Frank G.F. Qin et al. (2003) ได้ทำการจำลองและทดลองเพื่อศึกษาถึงการถ่ายเทความร้อนแบบไม่คงตัวในช่วงเวลาเริ่มต้นของการแข็งตัวของน้ำแข็งจากสารละลายเย็นเยือกในสถานะของเหลว ในช่วงที่พิจารณาความร้อนแฝงของการแข็งตัวจะเพิ่มขึ้นโดยที่อุณหภูมิมีค่าคงที่ตลอดกระบวนการจนกระทั่งระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลในระหว่างนั้นความร้อนสามารถถ่ายเทจากสารละลายไปยังสิ่งแวดล้อมหรืออาจเป็นไปในทิศทางตรงข้ามก็ได้ การวิเคราะห์ของกระบวนการถ่ายเทความร้อนแบบไม่คงตัวนำไปสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากสมการดิฟเฟอเรนเชียล 2 สมการโดยอาศัยวิธีการเปลี่ยนรูปและการเปลี่ยนรูปย้อนกลับแบบลา

ปลาซ ซึ่งได้หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากแบบจำลองนี้จากนั้นนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลองที่พิจารณาการเกิดของน้ำแข็งบนแผ่นทำความเย็นซึ่งจุดเด่นอยู่ที่การถ่ายเทความร้อนในช่วงที่น้ำแข็งเริ่มก่อตัวซึ่งมีการแปรผันของความต้านทานการถ่ายเทความร้อนแบบไม่คงตัว

บทที่ 3

การศึกษาเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดและกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด

3.1 ส่วนประกอบหลักของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอด

ส่วนประกอบหลักของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดนั้นโดยทั่วไปจะมีส่วนประกอบหลักที่เหมือนกันแม้จะต่างชนิด ต่างบริษัทที่สร้าง โดยจะประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. ชุดคอมเพรสเซอร์ และมอเตอร์ขับ

ในชุดระบบทำความเย็นพื้นฐานนั้นจะประกอบด้วยอุปกรณ์หลักคือ คอมเพรสเซอร์, โดยอาศัยมอเตอร์เป็นอุปกรณ์ต้นกำลัง เพื่อขับเคลื่อนให้คอมเพรสเซอร์ดูดไอแอมโมเนียจากชุดทำน้ำแข็งหลอด และส่งต่อยังคอนเดนเซอร์ต่อไป คอมเพรสเซอร์อาจมีขนาดของระยะชัก และขนาดกระบอกสูบรวมถึงจำนวนลูกสูบแตกต่างกันไปตามปริมาณแอมโมเนียที่ต้องการในวัฏจักรการทำความเย็น

2. ชุดผลิตน้ำแข็งหลอด

ภายในชุดผลิตน้ำแข็งหลอดจะบรรจุแอมโมเนียซึ่งจะเปลี่ยนสถานะจากของเหลวกลายเป็นไอเพื่อทำความเย็นทำให้น้ำกลายเป็นน้ำแข็งหลอดต่อไป โดยที่ขนาดของชุดผลิตน้ำแข็งหลอดนี้จะแตกต่างกันไปตามปริมาณแอมโมเนียที่ต้องการในแต่ละรอบการผลิต ซึ่งตัวถังของชุดผลิตน้ำแข็งหลอดจะสร้างจากสเตนเลส โดยทั่วไปส่วนประกอบที่อยู่ภายในชุดผลิตน้ำแข็งหลอดมักประกอบด้วย

2.1 ชุดปรับอัตราการไหลของน้ำ ทำหน้าที่ปรับอัตราการไหลของน้ำที่บริเวณส่วนบนของชุดตัวถังผลิตน้ำแข็งหลอดให้มีปริมาณที่เหมาะสม

2.2 ชุดท่อผลิตน้ำแข็งหลอด ส่วนนี้จะติดตั้งอยู่ภายในตรงกลางตัวถังซึ่งจะมีจำนวนมาก หรือน้อยนั้นขึ้นกับปริมาณการผลิตที่ต้องการโดยจะยาวลงมาจากส่วนบนของชุดตัวถังผลิตน้ำแข็งหลอดจนถึงส่วนที่เป็นมีดตัดน้ำแข็ง ท่อส่วนนี้จะเป็นท่อสเตนเลส

2.3 ชุดมีดตัดน้ำแข็ง และ เกลียวลำเลียง มีดตัดน้ำแข็งจะตัดน้ำแข็งที่มีลักษณะเป็นแท่งทรงกระบอกกลมยาวให้เป็นท่อนสั้นๆ เพื่อให้มีขนาดที่เหมาะสมต่อการจำหน่าย โดยอาศัยกำลังขับจากมอเตอร์ ส่วนเกลียวลำเลียงจะทำหน้าที่ลำเลียงน้ำแข็งหลอดที่ผ่านการตัดแล้วส่งต่อไปบรรจุใส่ถุงเพื่อจำหน่ายต่อไป ซึ่งเกลียวลำเลียงจะอาศัยมอเตอร์เป็นต้นกำลังเช่นเดียวกับมีดตัดน้ำแข็ง

2.4 ถังเก็บสะสมไอ เป็นถังที่อยู่ตรงส่วนบนของชุดตัวถังผลิตน้ำแข็งหลอดทำหน้าที่ดักแอมโมเนียที่มีสถานะเป็นของเหลวเพื่อให้มีเฉพาะไอของแอมโมเนียไหลเข้าสู่คอมเพรสเซอร์เพื่อป้องกันความเสียหายให้กับคอมเพรสเซอร์

2.5 ปั๊มน้ำเย็น ทำหน้าที่สูบน้ำที่เหลือจากการแข็งตัวที่ไหลออกจากด้านล่างของท่อผลิตน้ำแข็งหลอดให้ไหลกลับขึ้นไปสู่ด้านบนโดยจะไหลผ่านชุดปรับปริมาณการไหลจากนั้นน้ำจะไหลผ่านลงสู่ด้านบนของท่อผลิตน้ำแข็งหลอดต่อไป

3. ชุดวาล์วต่าง ๆ

ในระบบต่าง ๆของเครื่องผลิตน้ำแข็งจะประกอบด้วยท่อจำนวนมากซึ่งจะมีวาล์วคอยควบคุมการในบริเวณต่าง ๆ ซึ่งวาล์วที่ใช้งานในระบบมีดังต่อไปนี้ gate valve, glove valve, float valve และ solenoid valve

4. ชุดระบายความร้อน

ในระบบระบายความร้อนจะประกอบด้วย คอนเดนเซอร์, หอคอยน้ำเย็น และ ถังเก็บซึ่งทำหน้าที่ระบายความร้อนให้กับไอของแอมโมเนียแล้วนำมาเก็บที่ถังเก็บนั่นเอง หลักการทำงานเหมือนกับระบบทำความเย็นทั่วไป

5. ชุดควบคุมเวลาในการทำงาน

ส่วนนี้จะเป็นอุปกรณ์ที่คอยควบคุมการทำงานของระบบต่าง ๆ ให้สมดุล และ สอดคล้องกัน โดยอาศัยการทำงานของ time delay ช่วยในการควบคุมการทำงานของส่วนต่าง ๆ โดยทั่วไปจะประกอบด้วยส่วนควบคุมระบบต่าง ๆ ดังนี้

5.1 ระบบควบคุมการละลายน้ำแข็ง จะเป็นส่วนควบคุมที่สั่งให้ไอของแอมโมเนียในสถานะที่เป็นก๊าซจากถังเก็บไอ และ คอมเพรสเซอร์ ไปละลายน้ำแข็งที่ท่อผลิตน้ำแข็งหลอด

5.2 ระบบควบคุมการตัดน้ำแข็ง จะควบคุมให้ใบมีดตัดน้ำแข็ง ตัดน้ำแข็งหลังจากที่เริ่มละลายน้ำแข็ง และ จะสั่งหยุดการทำงานหลังจากเสร็จสิ้นกระบวนการละลายน้ำแข็ง

5.3 ระบบหน่วงเวลา จะทำหน้าที่ควบคุมระยะเวลาให้สัมพันธ์กันระหว่างระบบละลายน้ำแข็ง และ ระบบตัดน้ำแข็งกล่าวคือ ควบคุมให้มีดตัดน้ำแข็งเริ่มตัดน้ำแข็งหลังเริ่มมีการละลายน้ำแข็งที่เวลาเท่าใด และ หน่วงเวลาเท่าใดเพื่อหยุดการทำงานหลังจากที่เสร็จสิ้นการละลายน้ำแข็งแล้ว

5.4 ระบบควบคุมพัดลมหอคอยน้ำเย็น ทำหน้าที่ควบคุมพัดลมดูดอากาศที่หอคอยน้ำเย็น เมื่อเริ่มมีการละลายน้ำแข็ง จะสั่งให้พัดลมตัวนี้หยุดทำงาน จากนั้นเมื่อระบบเริ่มสิ้นสุดกระบวนการละลายน้ำแข็งจะสั่งให้พัดลมดังกล่าวทำงานเพื่อระบายความร้อนของหอคอยน้ำเย็น

5.5 ระบบควบคุมการผลิตน้ำแข็ง ทำหน้าที่กำหนดระยะเวลาในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดให้ได้ความหนาที่เหมาะสม หากตั้งเวลานานเกินไปอาจส่งผลให้น้ำแข็งตัน ไม่มีทางไหลของน้ำ ทั้งยังสิ้นเปลืองทั้งพลังงาน และ เวลา แต่หากตั้งเวลาในส่วนนี้น้อยจนเกินไป ก็อาจทำให้น้ำแข็งบางเกินไป ทำให้ละลายได้ง่าย จึงต้องตั้งเวลาให้เหมาะสม

5.6 ระบบแจ้งเตือน จะควบคุมเสียงออดที่จะส่งเสียงเตือนเมื่อเริ่มมีน้ำแข็งไหลลงไปยังถังเก็บน้ำแข็งหลอด

รูปที่ 3.1 คอมเพรสเซอร์ของชุดระบบทำความเย็น

รูปที่ 3.2 คอนเดนเซอร์ของชุดระบบทำความเย็น

รูปที่ 3.3 ชุดถังเก็บแอมโมเนีย

รูปที่ 3.4 ชุดท่อผลิตน้ำแข็งหลอด

รูปที่ 3.5 ชุดมีดตัดน้ำแข็งและเกลียวลำเลียง

รูปที่ 3.6 ชุดผลิตน้ำแข็งหลอด

3.2 กระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด

ในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดแต่ละชนิด แต่ละบริษัทนั้นจะมีหลักกี่ผลิตที่เหมือนๆ กัน อาจจะแตกต่างกันบ้างในรายละเอียดปลีกย่อย และ ระยะเวลาในการผลิต ซึ่งสามารถอธิบายเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. ขั้นตอนการแข็งตัวของน้ำแข็ง

เริ่มต้นจากคอมเพรสเซอร์จะทำหน้าที่ดูดเอาไอของสารทำความเย็นซึ่งโดยทั่วไปจะใช้แอมโมเนีย จากชุดตัวถังผลิตน้ำแข็งหลอดแล้วอัดสารทำความเย็นที่อยู่ในสภาพไอที่มีอุณหภูมิ และ ความดันต่ำให้มีอุณหภูมิ และ ความดันที่สูงขึ้น ในช่วงที่มีการอัดไอของสารทำความเย็น คอมเพรสเซอร์แบบลูกสูบที่ใช้งานจะมีน้ำมันหล่อลื่นบางส่วนปะปนไปกับไอของสารทำความเย็น ดังนั้น ก่อนที่ไอของสารทำความเย็นจะเข้าสู่คอนเดนเซอร์จะต้องผ่านอุปกรณ์ที่เรียกว่า ตัวแยกน้ำมัน เพื่อป้องกันมิให้น้ำมันหล่อลื่นไปตกตะกอนในคอนเดนเซอร์ซึ่งจะส่งผลให้ประสิทธิภาพการทำงานลดลง และ ป้องกันคอมเพรสเซอร์เสียหายจากการที่สูญเสียน้ำมันหล่อลื่นไปกับไอของสารทำความเย็น

หลังจากนั้นไอของสารทำความเย็นจะถูกส่งไปยังคอนเดนเซอร์ เพื่อระบายความร้อน โดยที่ไอของสารทำความเย็นจะผ่านท่อน้ำเย็นที่อยู่ภายในคอนเดนเซอร์ แล้วไอของสารทำความเย็นจะเกิดการกลั่นตัวเป็นของเหลวแล้วจึงไปเก็บสะสมที่ถังเก็บต่อไป สำหรับน้ำที่ทำหน้าที่ระบายความร้อนให้กับไอของสารทำความเย็นนั้นจะถูกส่งไปยังหอคอยน้ำเย็นโดยปั๊มน้ำ ซึ่งน้ำจะถูกส่งผ่านแผ่นเพลทเพื่อเพิ่มพื้นที่ผิวให้มากขึ้นโดยจะมีพัดลมดูดอากาศจากด้านล่างสวนทิศทางกับการไหลของน้ำ เพื่อช่วยในการระบายความร้อนของน้ำ เมื่อน้ำมีอุณหภูมิลดลงพร้อมที่จะกลับไปประบายความร้อนให้กับไอของสารทำความเย็นก็จะถูกส่งกลับไปยังคอนเดนเซอร์เป็นวัฏจักรเช่นนี้

ขณะที่ไอของสารทำความเย็นถูกส่งไปยังถังเก็บในสภาพที่เป็นของเหลวนั้น จะมีบางส่วนแปรสภาพกลายเป็นไอระเหยขึ้นไปอยู่ด้านบนของถังเก็บ โดยที่ถังเก็บจะมีท่อปรับความดันต่อเชื่อมระหว่างคอนเดนเซอร์กับถังเก็บ เรียกว่า อีควอไลเซอร์ ซึ่งทำหน้าที่ป้องกันในกรณีที่ความดันของคอนเดนเซอร์ และ ถังเก็บไม่เท่ากันกันจะทำให้การไหลของสารทำความเย็นไม่สะดวก

เมื่อเริ่มกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด สารทำความเย็นในส่วนที่เป็นของเหลวจะถูกส่งจากถังเก็บโดนผ่านทางท่อไปยังวาล์วลดความดันซึ่งจะถูกควบคุมด้วยโซลีนอยด์วาล์ว โดยปริมาณของสารทำความเย็นจะถูกควบคุมด้วย float valve อีกที ที่วาล์วลดความดันนี้สารทำความเย็นที่เป็นของเหลวจะถูกลดความดันลงทำให้มีอุณหภูมิลดต่ำลงมากเพื่อสามารถนำไปใช้ในการทำความเย็นได้ โดยสถานะของสารทำความเย็นหลังจากผ่านวาล์วลดความดันแล้วจะมี

ทั้งสองสถานะคือ ของเหลว และ ก๊าซ ซึ่งสารทำความเย็นจะถูกไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดเพื่อใช้ผลิตน้ำแข็งหลอดต่อไป

ที่ชุดผลิตน้ำแข็งหลอดนี้จะมีน้ำซึ่งถูกส่งผ่านจากด่านล่างไปยังด้านบนด้วยปั๊มน้ำเย็น โดยน้ำจะถูกปรับอัตราการไหลโดยตัวปรับปริมาณการไหลของน้ำซึ่งจะมีลักษณะเป็นท่อนพลาสติกที่จะมีร่องให้น้ำไหลผ่านโดยรอบจะทำให้น้ำไหลผ่านได้ทีละน้อย อุปกรณ์ดังกล่าวจะถูกสวมอยู่บริเวณด้านบนของท่อผลิตน้ำแข็งแต่ละท่อ จากนั้นน้ำจะไหลผ่านลงไปตามผิวของท่อผลิตน้ำแข็งหลอด บางส่วนจะเริ่มจับตัวเป็นน้ำแข็งที่บริเวณผิวด้านในของท่อ ส่วนน้ำที่จะไม่เกิดการแข็งตัวก็จะไหลผ่านท่อกลับลงไปด้านล่างของชุดผลิตน้ำแข็งหลอด แล้วถูกส่งกลับขึ้นไปด้านบนอีกครั้งโดยปั๊มน้ำเย็นโดยจะวนการทำงานเช่นนี้จนกระทั่งน้ำแข็งหลอดมีขนาดตามที่ต้องการแล้ว

สำหรับสารทำความเย็นที่ถูกส่งเข้าไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดนั้น ส่วนที่เป็นของเหลวจะทำหน้าที่ถ่ายเทความร้อนจากน้ำเพื่อผลิตน้ำแข็งหลอดทำให้สารทำความเย็นเปลี่ยนสถานะเป็นไอลอยขึ้นไปอยู่ส่วนบนของตัวถังชุดผลิตน้ำแข็งหลอด ซึ่งภายในชุดผลิตน้ำแข็งหลอดจะมีวาล์วลูกลอยที่จะทำหน้าที่ส่งสัญญาณทางไฟฟ้าไปยังโซลินอยด์วาล์วเพื่อสั่งให้เปิด ปิดท่อสารทำความเย็นที่จะส่งมายังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดเพื่อควบคุมปริมาณสารทำความเย็นให้มีความเหมาะสม

หลังจากที่สารทำความเย็นที่มีสถานะเป็นของเหลวที่อยู่ภายในชุดผลิตน้ำแข็งหลอดได้รับความร้อนจากน้ำในกระบวนการแข็งตัวจะระเหยกลายเป็นไอขึ้นไปอยู่ส่วนบนของชุดผลิตน้ำแข็งจะถูกส่งไปยังถังเก็บสะสมไอ จากนั้นสารทำความเย็นจะถูกดูดไปตามท่อดูดของคอมเพรสเซอร์เพื่ออัดให้มีความดันสูงขึ้นเพื่อส่งต่อไปยังคอนเดนเซอร์ต่อไป วนรอบเป็นวัฏจักรของการผลิตน้ำแข็งหลอดเช่นนี้เรื่อยๆ

ในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดจะมีคาบการผลิตที่แตกต่างกันออกไป โดยกระบวนการผลิตแต่ละรอบการผลิตนั้นระยะเวลาจะไม่เท่ากันซึ่งจะถูกควบคุมโดยชุดควบคุมเวลาในการทำงาน โดยจะควบคุมเวลาในการผลิตน้ำแข็งหลอดในแต่ละรอบการผลิตให้เหมาะสม ทั้งนี้ระยะเวลาในการผลิตในแต่ละรอบนั้นขึ้นกับปัจจัยต่างๆ เช่น ขนาดของคอมเพรสเซอร์ ความยาวของท่อผลิตน้ำแข็งหลอด สภาพอากาศแวดล้อม เป็นต้น ทำให้ในแต่ละรอบการผลิตอาจใช้เวลาการผลิตที่แตกต่างกัน ในการตั้งค่าของชุดควบคุมระยะเวลาในการผลิตนั้นต้องอาศัยประสบการณ์ในการทำงานที่จะตั้งระยะเวลาในการผลิตเพื่อให้ได้น้ำแข็งหลอดตามขนาดที่ต้องการ มิฉะนั้นแล้วจะทำให้น้ำแข็งหลอดที่ผลิตได้บางจนเกินไปไม่สามารถนำออกจำหน่ายได้ หรืออาจทำให้น้ำแข็งหนาจนไม่มีรูตรงแกนกลางจนเกิดการอุดตันการไหลของน้ำได้ซึ่งทำให้สิ้นเปลืองทั้งพลังงาน และ เวลา

2. ขั้นตอนการละลายน้ำแข็ง

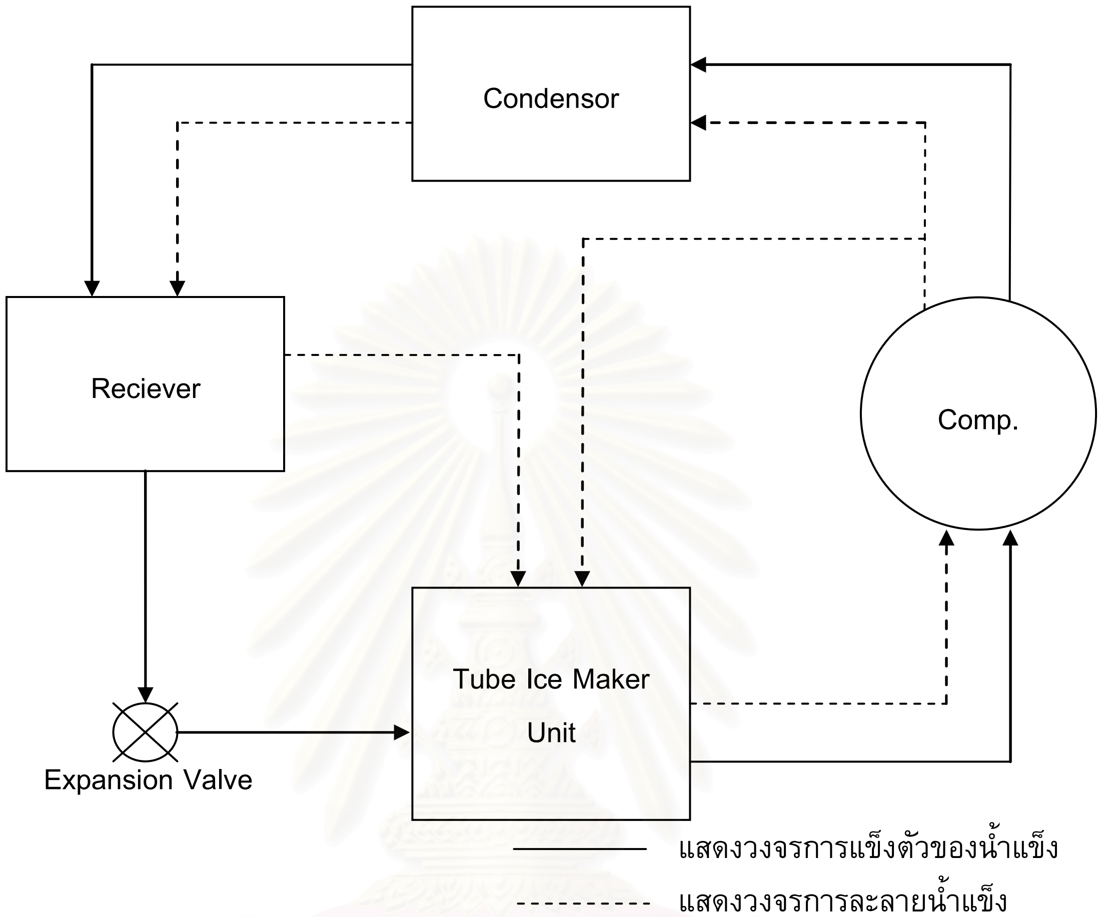
หลังจากที่น้ำได้เปลี่ยนสภาพเป็นน้ำแข็งบริเวณผิวด้านในของท่อผลิตน้ำแข็งหลอดจนกระทั่งมีความหนาตามที่ต้องการแล้ว จะหยุดกระบวนการผลิตน้ำแข็งเพื่อเริ่มเข้าสู่ขั้นตอนการละลายน้ำแข็งเพื่อจะนำเอาน้ำแข็งหลอดออกจากท่อผลิตน้ำแข็งหลอดแล้วจึงทำการตัดเป็นท่อนเล็กๆตามขนาดที่ต้องการ และ ทำการจัดจำหน่ายต่อไป

ในขั้นตอนการละลายน้ำแข็งนั้นเมื่อน้ำแข็งมีความหนาตามที่ต้องการแล้วชุดควบคุมเวลาในการทำงานจะสั่งให้หยุดการทำงานของพัดลมในส่วนของหอคอยน้ำเย็น และ ปิดโซลินอยด์วาล์วไม่ให้สารทำความเย็นไหลไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอด รวมถึงหยุดการทำงานของปั๊มน้ำเย็นด้วย จากนั้นสารทำความเย็นในสถานะไอจะถูกส่งจากถังเก็บที่ได้กล่าวถึงในช่วงต้นไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดซึ่งจะถูกควบคุมการปิด เปิด โดยโซลินอยด์วาล์วอีกตัวหนึ่ง ซึ่งไอของสารทำความเย็นบางส่วนที่ถูกอัดจากคอมเพรสเซอร์จะถูกส่งมายังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดด้วย

เมื่อไอของสารทำความเย็นไหลเข้าสู่ชุดทำน้ำแข็งหลอดซึ่งไอดังกล่าวจะมีอุณหภูมิสูงจะส่งผ่านความร้อนไปยังท่อผลิตน้ำแข็งทำให้น้ำแข็งบริเวณผิวท่อด้านในละลายจนแท่งน้ำแข็งหลอดไม่จับกับผิวท่อแล้วตกลงสู่ชุดใบมีดตัดน้ำแข็งด้านล่างของชุดผลิตน้ำแข็งหลอด จากนั้นแท่งน้ำแข็งจะถูกตัดให้มีขนาดตามที่ต้องการ แล้วจะถูกลำเลียงโดยเกลียวลำเลียงเพื่อจำหน่ายหรือเก็บรักษาในห้องเย็นต่อไป

ในการละลายน้ำแข็งไอของสารทำความเย็นที่มีอุณหภูมิสูงจะละลายน้ำแข็งไปเรื่อยๆ จนกระทั่งแท่งน้ำแข็งหลอดตกลงมายังชุดใบมีดตัดน้ำแข็งในปริมาณที่มากพอแล้ว ระบบควบคุมการทำงานจะสั่งปิดวาล์วโซลินอยด์เพื่อไม่ให้ไอของสารทำความเย็นไหลเข้าสู่ชุดผลิตน้ำแข็งหลอด จากนั้นระบบจะเริ่มกลับเข้าสู่ขั้นตอนการผลิตน้ำแข็งต่อไป ในช่วงนี้ปั๊มน้ำเย็นจะส่งน้ำให้ไหลลงมาตามท่อผลิตน้ำแข็งหลอดช่วยให้น้ำแข็งที่ติดค้างอยู่ตามท่อผลิตน้ำแข็งไหลลงมายังชุดใบมีดตัดน้ำแข็ง ซึ่งระบบควบคุมการทำงานจะหน่วงเวลาการทำงานของชุดใบมีดตัดน้ำแข็งให้ทำงานต่อหลังจากที่ไอของสารทำความเย็นหยุดไหลเข้ามาในชุดผลิตน้ำแข็งแล้วอีกระยะหนึ่ง

ในกระบวนการละลายน้ำแข็งนั้นไอของสารทำความเย็นจะถูกส่งผ่านมาทางด้านล่างของตัวถังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดแล้วออกไปทางด้านบนของชุดผลิตน้ำแข็งหลอด จากนั้นจะผ่านไปยังถังสะสมไอซึ่งไอของสารทำความเย็นที่กลั่นตัวกลายเป็นของเหลวจะถูกดักไว้ในส่วนนี้แล้วจะถูกส่งกลับไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดอีก ในส่วนของสารทำความเย็นที่เป็นไอจะถูกส่งต่อไปยังคอมเพรสเซอร์เพื่อที่จะทำให้มีความดัน และ อุณหภูมิสูงขึ้น จากนั้นจะถูกส่งกลับไปยังชุดผลิตน้ำแข็งหลอดอีกครั้งเพื่อที่จะไปละลายน้ำแข็ง จะวนรอบวัฏจักรการทำงานเช่นนี้จนกระทั่งครบตามเวลาที่ได้ตั้งไว้ในระบบควบคุมการทำงาน ระบบก็จะกลับเข้าสู่ขั้นตอนการผลิตน้ำแข็งต่อไป



รูปที่ 3.7 วัฏจักรของสารทำความเย็นในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด

บทที่ 4

การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีซิมิลาร์ริตี

ในกระบวนการแข็งตัวนั้นน้ำแข็งจะเริ่มก่อตัวจากขอบผนังด้านในของท่อจนกระทั่งมีขนาดที่เหมาะสม ในการพิจารณากระบวนการแข็งตัวที่เกิดขึ้นเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีสมมุติฐานพื้นฐานหลักๆดังต่อไปนี้คือ

1. การพิจารณาปัญหาเป็นการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา
2. การพิจารณาปัญหาลักษณะการแข็งตัวเป็นแบบแยกสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว (sharp interface) และ อุณหภูมิ ณ. รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง
3. การพิจารณาปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (heat conduction) ในบริเวณของผนังท่อและน้ำแข็ง โดยที่การพาความร้อนจะเกิดขึ้นบนผิวท่อที่สัมผัสกับสารทำความเย็นซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ -7.5 °C
4. การพิจารณาปัญหากำหนดให้ความร้อนที่เกิดขึ้นมีเฉพาะค่าความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะและความร้อนสัมผัสจากการเปลี่ยนอุณหภูมิของน้ำแข็งเท่านั้น

ในช่วงเริ่มต้นของกระบวนการแข็งตัวนั้นน้ำแข็งจะมีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนาของผิวท่อ ดังนั้นผนังท่อจึงสามารถสมมุติให้เป็นบริเวณกึ่งอนันต์ (semi-infinite domain) รวมถึงในระบบพิกัดเชิงขั้วจะพิจารณาว่าผนังมีลักษณะเป็นเสมือนแผ่นเรียบ จึงทำให้สามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยวิธีความซิมิลาร์ริตีในระบบพิกัดฉากได้ดังต่อไปนี้

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง (Ice Region)

สมการตั้งต้น (governing equation) เมื่อ $T_s = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

กำหนดให้

$$\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s C_{pS}} \tag{4.2}$$

เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

$$T_s(0,t) \quad ; \; k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \tag{4.3a}$$

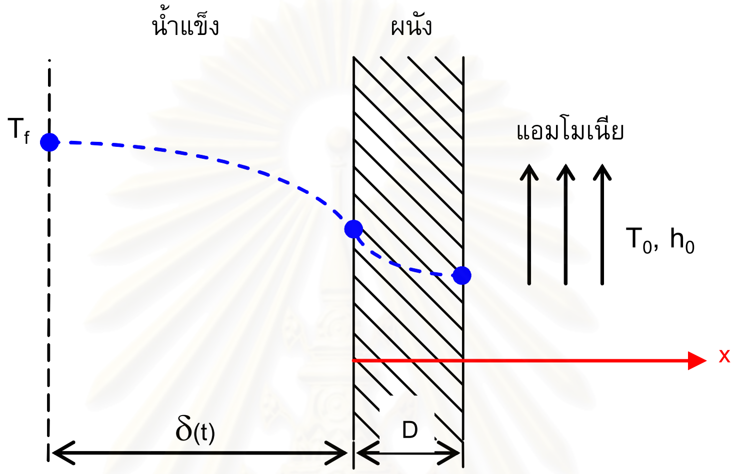
$$; \; T_s = T_w \tag{4.3b}$$

$$T_s(-\delta,t)\ ;\ -k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}=\rho_s \Delta h\frac{d\delta}{dt} \tag{4.4a}$$

$$;\ T_s = T_f \tag{4.4b}$$

เงื่อนไขเวลา (initial condition)

$$T_s(x,0)\quad ;\ \delta = 0 \tag{4.5}$$



รูปที่ 4.1 การพิจารณาปัญหาโดยวิธีความซิมิลาร์ริตี

บริเวณที่เป็นผนังท่อ (Wall Region)

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \tag{4.6}$$

กำหนดให้

$$\alpha_w = \frac{k_w}{\rho_w C_{pW}} \tag{4.7}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$T_w(0,t)\quad ;\ k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}=k_w\frac{\partial T_w}{\partial x} \tag{4.8a}$$

$$;\ T_s = T_w \tag{4.8b}$$

$$T_w(D,t)\quad ;\ T_w = T_0 \qquad ;\ D\to\infty \tag{4.9}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_w(x,0)\ ;\ T_w = T_0 \tag{4.10}$$

กำหนดให้

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \tag{4.11}$$

$$\theta_w = \frac{T_w - T_0}{T_f - T_0} \tag{4.12}$$

$$\eta = \frac{x}{\sigma(\alpha_s \cdot t)^{1/2}} = \frac{x}{\delta} \tag{4.13}$$

โดยที่ σ คือ ค่าคงที่ของการแปรผันระหว่าง δ กับ $\sqrt{\alpha_s t}$ จากตัวแปรต่างๆที่กำหนดขึ้นสามารถเปลี่ยนรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) ซึ่งจะได้ระบบสมการดังนี้ (ภาคผนวก ก)

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_s = f(\eta)$

$$\frac{d^2\theta_s}{d\eta^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{d\theta_s}{d\eta} = 0 \tag{4.14}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\eta = -1 \quad ; \quad \frac{d\theta_s}{d\eta} = -\frac{\sigma^2}{2} Ste \tag{4.15a}$$

$$; \quad \theta_S = 1 \tag{4.15b}$$

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{k_s}{k_w}\frac{d\theta_s}{d\eta} = \frac{d\theta_w}{d\eta} \tag{4.16a}$$

$$; \quad \theta_s(0) = \theta_w(0) \tag{4.16b}$$

กำหนดให้

$$\textit{Stefan number } (Ste) = \frac{\Delta h}{C_{pS}(T_f - T_0)} \tag{4.17}$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_w = f(\eta)$

$$\frac{d^2\theta_w}{d\eta^2} + \frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{d\theta_w}{d\eta} = 0 \tag{4.18}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{k_s}{k_w}\frac{d\theta_s}{d\eta} = \frac{d\theta_w}{d\eta} \tag{4.19a}$$

$$; \quad \theta_s(0) = \theta_w(0) \tag{4.19b}$$

$$\eta \to \infty \quad ; \quad \theta_w = 0 \tag{4.20}$$

จากระบบสมการข้างต้นสามารถใช้วิธีการอินทิเกรต (integration) ในการแก้ระบบสมการดังกล่าวซึ่งจะได้ระบบสมการดังต่อไปนี้ (ภาคผนวก ข)

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

$$\theta_s(\eta) = \theta_s(0) + [\theta_s(0) - 1]\frac{erf\left(\frac{\sigma}{2}\eta\right)}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \tag{4.21}$$

$$\frac{d\theta_s}{d\eta} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{[\theta_s(0) - 1]}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} erf\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \tag{4.22}$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

$$\theta_w(\eta) = (\theta_w(0))\left[1 - erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\frac{\sigma}{2}\eta\right)\right] \tag{4.23}$$

$$\frac{d\theta_w}{d\eta} = -(\theta_w(0))\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\right) erf\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \tag{4.24}$$

จากความสัมพันธ์ของสมการเงื่อนไขขอบเขต (4.19a) และ (4.19b) สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\theta_w(0) = \theta_s(0) = \frac{1}{1 + \sqrt{R_1 . R_2} . erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \tag{4.25}$$

กำหนดตัวแปรควบคุมดังนี้

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \tag{4.26}$$

$$R_2 = \frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \tag{4.27}$$

นำค่าความสัมพันธ์จากสมการ (4.22) และ (4.25) ไปแทนลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต (4.15a) จะได้สมการดังนี้

$$1 - \frac{2\left(\sqrt{R_1 . R_2}\right) erf\left(-\frac{\sigma^2}{4}\right)}{\sqrt{\pi} . \sigma . Ste . \left(1 + \sqrt{R_1 . R_2} . erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)} = 0 \tag{4.28}$$

ตารางที่ 4.1 แสดงคุณสมบัติของน้ำแข็ง

คุณสมบัติของน้ำแข็ง	ที่อุณหภูมิ -7.5 ^{0}C	ที่อุณหภูมิ 0 ^{0}C	ค่าเฉลี่ย
$\rho_s \quad \left(kg/m^3\right)$	920	920	920
$k_s \quad (W/m.K)$	1.935	1.880	1.908
$C_{pS} \quad (J/kg.K)$	2005	2040	2022.5
$\Delta h \quad (kJ/kg)$	333.7	333.7	333.7

ตารางที่ 4.2 แสดงคุณสมบัติของสเตนเลส

คุณสมบัติของสเตนเลส	ที่อุณหภูมิ -7.5 ^{0}C
$\rho_w \quad \left(kg/m^3\right)$	7900
$k_w \quad (W/m.K)$	13.913
$C_{pW} \quad (J/kg.K)$	439.09

นำค่าจากตารางที่ 4.1 และ 4.2 มาคำนวณหาค่าตัวแปรควบคุมต่าง ๆได้ดังต่อไปนี้

$$R_1 = 7.289 \tag{4.29}$$

$$R_2 = 1.865 \tag{4.30}$$

$$Ste = 22.008 \tag{4.31}$$

$$Bi = 0.075 \tag{4.32}$$

นำค่าตัวแปรข้างต้นไปแทนในสมการ (4.28) จากนั้นทำการคำนวณเพื่อหาค่าของ σ โดยอาศัยวิธีของนิวตัน–ราฟสัน (newton-raphson method) จะได้

$$\sigma = 0.1446 \tag{4.33}$$

จากนั้นนำค่า σ, R_1, R_2 และ Ste ไปแทนในสมการ (4.25) จะได้ค่าอุณหภูมิในเทอมไร้มิติที่ตำแหน่งรอยต่อระหว่างน้ำแข็งและผนังท่อดังนี้

$$\theta_w(0) = \theta_s(0) = 0.769 \tag{4.34}$$

เมื่อนำค่าจากสมการ (4.34) ไปแทนลงในสมการ (4.21) และ (4.23) แล้วทำการจัดรูปสมการจะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

$$\theta_s(\eta) = 0.769 - 2.836 erf(0.0723\eta) \qquad ; \ \eta = [-1, 0] \tag{4.35}$$

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

$$\theta_w(\eta) = 0.769 - 0.769 erf(0.0366\eta) \qquad ; \ \eta = [0, \infty) \tag{4.36}$$

บทที่ 5

การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยาย

ในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดจริง ๆนั้นเมื่อน้ำแข็งมีความหนาเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆจะไม่สามารถพิจารณาปัญหาโดยใช้วิธีซิมิลาร์ลิตีได้ เนื่องจากความหนาของน้ำแข็งจะมีค่ามากเมื่อเปรียบเทียบกับความหนาของผิวท่อจึงทำให้ไม่สามารถสมมุติผนังเป็นแบบผนังกึ่งอนันต์ได้ ดังนั้นการหาคำตอบของปัญหาจึงใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยายซึ่งจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ พิจารณาในระบบพิกัดฉาก และ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ในการพิจารณากระบวนการแข็งตัวที่เกิดขึ้นเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีสมมุติฐานพื้นฐานหลัก ๆดังต่อไปนี้คือ

1. การพิจารณาปัญหาเป็นการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา
2. การพิจารณาปัญหาลักษณะการแข็งตัวเป็นแบบแยกสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งกับของเหลว และ อุณหภูมิ ณ รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง
3. การพิจารณาปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความในบริเวณของผนังท่อและน้ำแข็ง โดยที่การพาความร้อนจะเกิดขึ้นบนผิวท่อที่สัมผัสกับสารทำความเย็นซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ -7.5 ^{o}C
4. การพิจารณาปัญหากำหนดให้ความร้อนที่เกิดขึ้นมีเฉพาะค่าความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะและความร้อนสัมผัสจากการเปลี่ยนอุณหภูมิของน้ำแข็งเท่านั้น
5. การพิจารณาปัญหาจะคำนวณท่อผลิตน้ำแข็งหลอดเพียง 1 ท่อ ซึ่งท่อดังกล่าวเป็นท่อสเตนเลสผิวเรียบที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 42.7 มม. ผนังท่อหนา 3.6 มม. และมีขนาดความยาว 3 ม.

5.1 การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดฉาก

ในการพิจารณาการแข็งตัวในระบบพิกัดฉากจะสามารถใช้ได้ก็ต่อเมื่อความหนาของน้ำแข็งมีค่าน้อย และ ความโค้งของผนังท่อมีค่ามากจนสามารถพิจารณาผนังท่อที่มีลักษณะโค้งเสมือนเป็นแผ่นเรียบได้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะใช้นำมาตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยจะเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีความซิมิลาร์ลิตีซึ่งจะต้องได้ค่าที่เท่ากันที่ช่วงเวลาแรกของการแข็งตัว ซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานของวิธีซิมิลาร์ลิตีที่ช่วงเวลาแรกความหนาของน้ำแข็งจะมีค่าน้อยมาก ๆเมื่อเทียบกับความหนาของผนังท่อจนสามารถสมมุติให้ผนังเป็นผนังแบบกึ่งอนันต์ได้ โดยจะสามารถหาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_s = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$T_s(0,t)$; $k_s \dfrac{\partial T_s}{\partial x} = k_w \dfrac{\partial T_w}{\partial x}$ (5.3a)

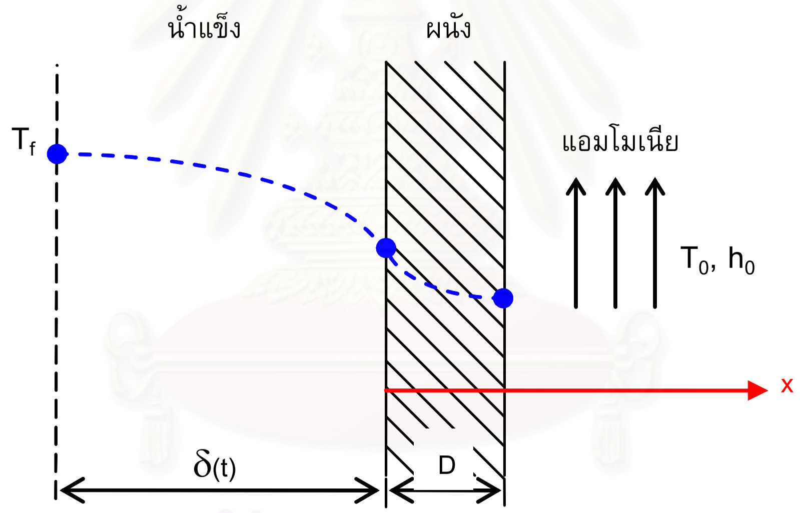
; $T_s = T_w$ (5.3b)

$T_s(-\delta,t)$; $-k_s \dfrac{\partial T_s}{\partial x} = \rho_s \Delta h \dfrac{d\delta}{dt}$ (5.4a)

; $T_s = T_f$ (5.4b)

เงื่อนไขเวลา

$T_s(x,0)$; $\delta = 0$ (5.5)



รูปที่ 5.1 การพิจารณาปัญหาโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดฉาก

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \tag{5.6}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$T_w(0,t)$; $k_s \dfrac{\partial T_s}{\partial x} = k_w \dfrac{\partial T_w}{\partial x}$ (5.7a)

; $T_s = T_w$ (5.7b)

$$T_w(D,t) \qquad ; \; -k_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = h_0 (T_w - T_0) \tag{5.8}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_w(x,0) \qquad ; \; T_w = T_0 \tag{5.9}$$

จะเห็นได้ว่าสมการเงื่อนไขขอบเขต (5.8) จะแตกต่างจากสมการเงื่อนไขขอบเขต (4.9) ของการพิจารณาโดยวิธีซิมิลาร์ลิตีตรงที่ความหนาของผนังท่อมีขนาดจำกัดโดยที่มีค่าเท่ากับ D จากนั้นทำการเปลี่ยนรูปสมการโดยกำหนดเทอมไร้มิติต่าง ๆดังต่อไปนี้

$$\hat{t} = \frac{t\alpha_s}{D^2} \tag{5.10}$$

$$\hat{x}_s = \frac{x}{\delta} \tag{5.11}$$

$$\hat{x}_w = \frac{x}{D} \tag{5.12}$$

$$\varphi = \frac{\delta}{D} \tag{5.13}$$

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \tag{5.14}$$

$$\theta_w = \frac{T_w - T_0}{T_f - T_0} \tag{5.15}$$

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \tag{5.16}$$

$$R_2 = \frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \tag{5.17}$$

$$\textit{Stefan number } (Ste) = \frac{\Delta h}{C_{p_s}(T_f - T_0)} \tag{5.18}$$

$$\text{Biot number } (Bi) = \frac{h_0 D}{k_w} \tag{5.19}$$

จากเทอมไร้มิติข้างต้นสามารถประยุกต์เข้ากับสมการอนุพันธ์ในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง และ ผนังท่อได้ดังนี้ (ภาคผนวก ค)

ระบบสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_s = f(\hat{x}_s, \hat{t})$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \hat{x}_s^{\,2}} + \left(\hat{x}_s \varphi \frac{d\varphi}{d\hat{t}} \right) \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - \varphi^2 \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{5.20}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\theta_s(0,\hat{t}) \quad ; \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - R_1.\varphi.\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} = 0 \tag{5.21a}$$

$$; \quad \theta_s = \theta_w \tag{5.21b}$$

$$\theta_s(-1,\hat{t}) \quad ; \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} + Ste.\varphi.\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = 0 \tag{5.22a}$$

$$; \quad \theta_s = 1 \tag{5.22b}$$

เงื่อนไขเวลา

$$\theta_s(\hat{x}_s,0) \quad ; \quad \varphi = 0 \tag{5.23}$$

ระบบสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_w = f(\hat{x}_w,\hat{t})$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \hat{x}_w{}^2} - \frac{R_2}{R_1}\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{5.24}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\theta_w(0,\hat{t}) \quad ; \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - R_1.\varphi.\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} = 0 \tag{5.25a}$$

$$; \quad \theta_s = \theta_w \tag{5.25b}$$

$$\theta_w(1,\hat{t}) \quad ; \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} - Bi.\theta_w = 0 \tag{5.26}$$

เงื่อนไขเวลา

$$\theta_w(\hat{x}_w,0) \quad ; \quad \theta_w = 0 \tag{5.27}$$

สมการกำกับข้างต้นสามารถแก้ไขได้โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเลข ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง และ เนื่องจากสมการตั้งต้นเป็นสมการแบบอิลิปติก (elliptic equation) ดังนั้นเพื่อให้เกิดเสถียรภาพในการทำงานของอัลกอริธึม จึงเลือกใช้การประมาณโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดยวิธีแบบปริยาย ดังนั้นตัวแปรที่ติดอยู่ในรูปอนุพันธ์ในสมการ จะสามารถแทนได้ด้วยการประมาณดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{(\Delta\hat{x})^2} \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\hat{x}} \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^{n}}{\Delta\hat{t}} \tag{5.30}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta\hat{t}} \tag{5.31}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n}{2} \tag{5.32}$$

เมื่อนำสมการผลต่างสืบเนื่องดังกล่าวไปแทนลงในระบบสมการทางคณิตศาสตร์ของทั้ง 2 บริเวณแล้วทำการแก้สมการพร้อมทั้งทำการจัดรูปสมการใหม่ (ภาคผนวก ง) จะได้สมการผลต่างสืบเนื่องโดยแบ่งตามตำแหน่งของจุดต่อที่ปรากฏอยู่บนโดเมนของการคำนวณดังต่อไปนี้

1. จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณน้ำแข็ง

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{4\Delta\hat{t} - \hat{x}_s\left(\varphi_i^{n+1^2} - \varphi_i^{n^2}\right)\Delta\hat{x}_s}{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2\left(\Delta\hat{x}_s\right)^2}\right)\theta_{s\,i-1}^{\;n+1} + \left(1 + \frac{8}{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2\left(\Delta\hat{x}_s\right)^2}\right)\theta_{s\,i}^{\;n+1} \\ &-\left(\frac{4\Delta\hat{t} + \hat{x}_s\left(\varphi_i^{n+1^2} - \varphi_i^{n^2}\right)\Delta\hat{x}_s}{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2\left(\Delta\hat{x}_s\right)^2}\right)\theta_{s\,i+1}^{\;n+1} = \theta_{s\,i}^{\;n} \end{aligned} \tag{5.33}$$

2. จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณผนัง

$$-\left(\frac{R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w^{\;2}}\right)\theta_{w\,i-1}^{\;n+1} + \left(1 + \frac{2R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w^{\;2}}\right)\theta_{w\,i}^{\;n+1} - \left(\frac{R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w^{\;2}}\right)\theta_{w\,i+1}^{\;n+1} = \theta_{w\,i}^{\;n} \tag{5.34}$$

3. จุดต่อที่อยู่บนขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนัง

$$\frac{-1}{(A+CD)}\theta_{s\,i-1}^{\;n+1} + \frac{\left[(1+A)+(B+C)D\right]}{(A+CD)}\theta_{s\,i}^{\;n+1} - \frac{(BD)}{(A+CD)}\theta_{s\,i+1}^{\;n+1} = \theta_{s\,i}^{\;n} \tag{5.35}$$

กำหนดให้

$$A = \frac{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2\Delta\hat{x}_s^{\;2}}{8\Delta\hat{t}} \tag{5.36}$$

$$B = \frac{R_1\Delta\hat{x}_s}{\Delta\hat{x}_w} \tag{5.37}$$

$$C = \frac{R_2\Delta\hat{x}_s\Delta\hat{x}_w}{2\Delta\hat{t}} \tag{5.38}$$

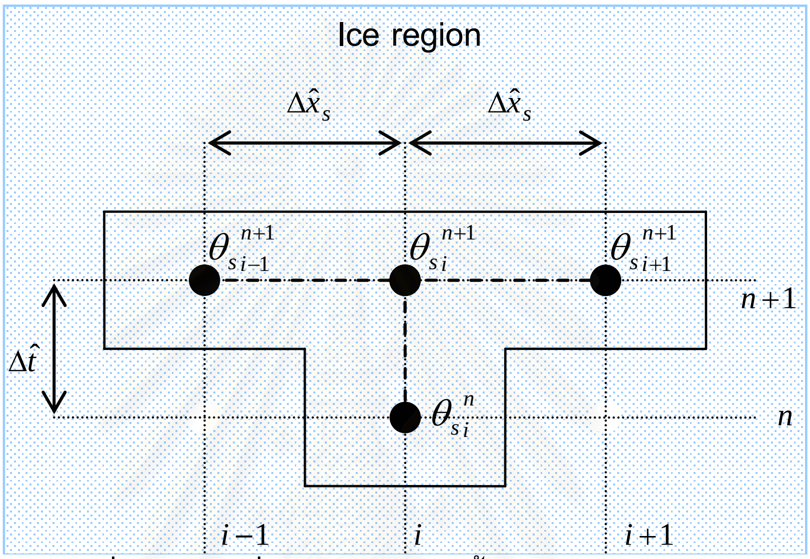
$$D = \frac{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)}{2} + \frac{\hat{x}_s\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2\left(\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n\right)\Delta\hat{x}_s}{8\Delta\hat{t}} \tag{5.39}$$

4. จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อน

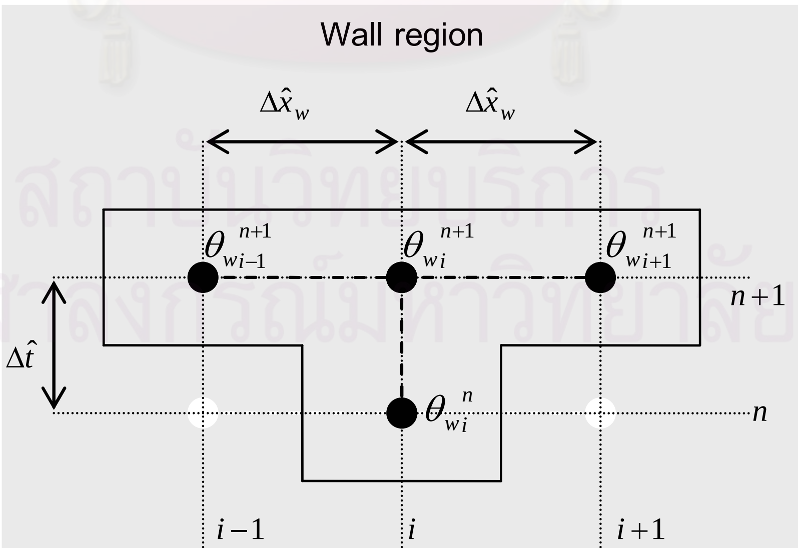
$$-\left(\frac{2R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w^{\;2}}\right)\theta_{w\,i-1}^{\;n+1} + \left(1 + \frac{2R_1R\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w^{\;2}} + \frac{2R_1Bi\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{x}_w}\right)\theta_{w\,i}^{\;n+1} = \theta_{w\,i}^{\;n} \tag{5.40}$$

5. จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัว

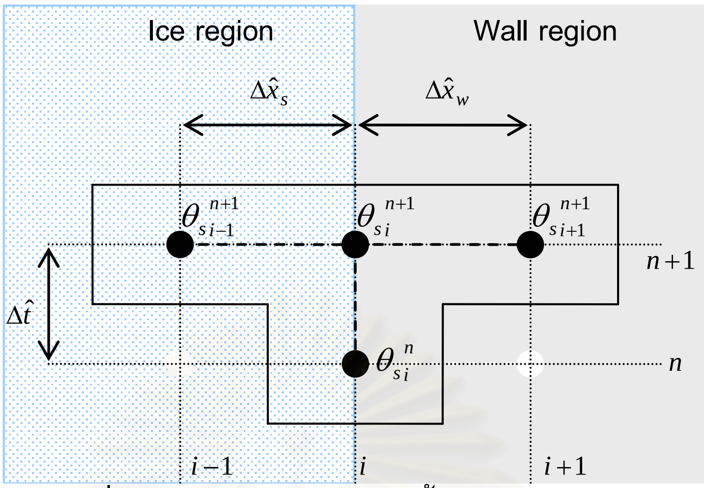
$$\varphi_i^{n+1} = \sqrt{\varphi_i^{n^2} + \left(\frac{\Delta\hat{t}}{Ste\Delta\hat{x}_s}\right)\left(\theta_{s\,i+2}^{\,n+1} - 4\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} + 3\right)} \qquad (5.41)$$



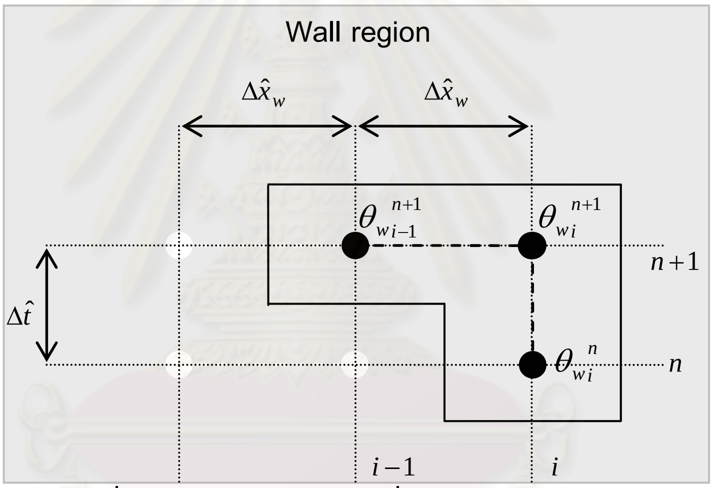
รูปที่ 5.2 จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณน้ำแข็งในระบบพิกัดฉาก



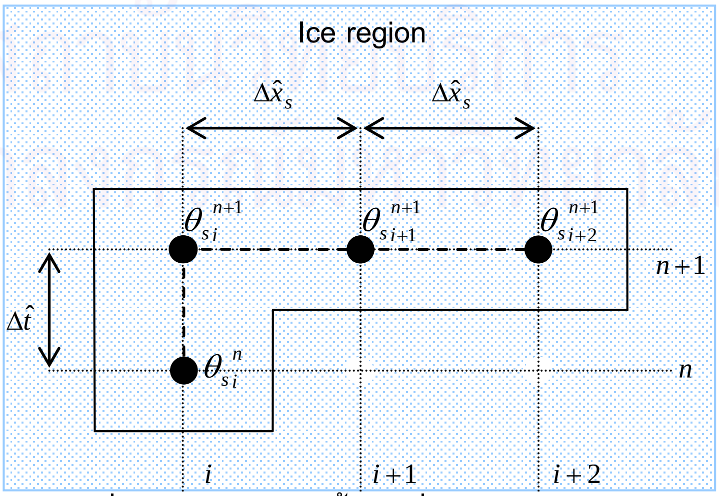
รูปที่ 5.3 จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณผนังในระบบพิกัดฉาก



รูปที่ 5.4 จุดต่อที่อยู่บนขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนังในระบบพิกัดฉาก



รูปที่ 5.5 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อนในระบบพิกัดฉาก



รูปที่ 5.6 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัวในระบบพิกัดฉาก

5.2 การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในกระบวนการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในสภาวะความเป็นจริงน้ำแข็งจะมีความหนาเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ และ ท่อที่ทำการพิจารณาเป็นลักษณะท่อกลม ซึ่งการวิเคราะห์ปัญหาโดยอาศัยระบบพิกัดเชิงขั้วจะสอดคล้องกับสภาวะของระบบในความเป็นจริงมากกว่าระบบพิกัดฉาก โดยจะสามารถหาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_s = f(r,t)$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} \tag{5.42}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$T_s = (s_1, t) \quad ; \; k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \tag{5.43a}$$

$$; \; T_s = T_w \tag{5.43b}$$

$$T_s = (\beta, t) \quad ; \; -k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = \rho_s \Delta h \frac{d\delta}{dt} \tag{5.44a}$$

$$; \; T_s = T_f \tag{5.44b}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_s = (r, 0) \quad ; \; \delta = 0 \tag{5.45}$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(r,t)$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_w}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial r} \tag{5.46}$$

เงื่อนไขขอบเขต

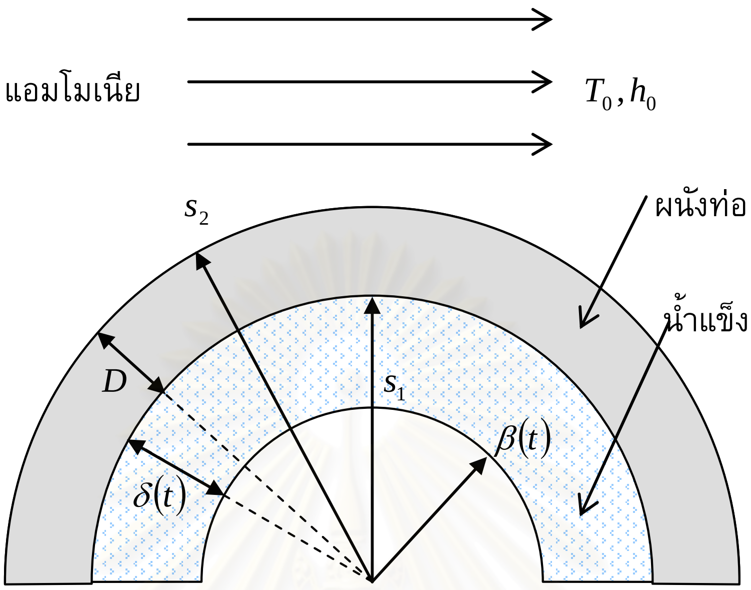
$$T_w = (s_1, t) \quad ; \; k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \tag{5.47a}$$

$$; \; T_s = T_w \tag{5.47b}$$

$$T_w = (s_2, t) \quad ; \; -k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = h_0 (T_w - T_0) \tag{5.48}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_w = (r, 0) \quad ; \; T_w = T_0 \tag{5.49}$$



รูปที่ 5.7 การพิจารณาปัญหาโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากนั้นทำการเปลี่ยนรูปสมการโดยกำหนดเทอมไร้มิติต่าง ๆดังต่อไปนี้

$$\hat{t} = \frac{\alpha_s t}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{\alpha_s t}{D^2} \tag{5.50}$$

$$\hat{r}_s = \frac{r - s_1}{s_1 - \beta} = \frac{r - s_1}{\delta} \tag{5.51}$$

$$\hat{r}_w = \frac{r - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{r - s_1}{D} \tag{5.52}$$

$$\varphi = \frac{s_1 - \beta}{s_2 - s_1} = \frac{\delta}{D} \tag{5.53}$$

$$\psi = \frac{s_1}{D} \tag{5.54}$$

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \tag{5.14}$$

$$\theta_w = \frac{T_w - T_0}{T_f - T_0} \tag{5.15}$$

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \tag{5.16}$$

$$R_2 = \frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \tag{5.17}$$

Stefan number $(Ste)=\dfrac{\Delta h}{C_{p_s}\left(T_f - T_0\right)}$ (5.18)

Biot number $(Bi)=\dfrac{h_0 D}{k_w}$ (5.19)

จากเทอมไร้มิติที่กำหนดขึ้นข้างต้นสามารถเปลี่ยนรูปสมการได้ดังนี้ (ภาคผนวก ค)

ระบบสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_s = f\left(\hat{r}_s, \hat{t}\right)$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \hat{r}_s^{\,2}} + \left(\frac{\varphi}{\psi + \varphi.\hat{r}_s} + \hat{r}_s \varphi \frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{r}_s} - \varphi^2 \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{t}} = 0 \qquad (5.55)$$

เงื่อนไขขอบเขต

$\theta_s\left(-1, \hat{t}\right)$; $\dfrac{\partial \theta_s}{\partial \hat{r}_s} + Ste\varphi \dfrac{d\varphi}{d\hat{t}} = 0$ (5.56a)

; $\theta_s = 1$ (5.56b)

$\theta_s\left(0, \hat{t}\right)$; $\dfrac{\partial \theta_s}{\partial \hat{r}_s} = R_1 \varphi \dfrac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w}$ (5.57a)

; $\theta_s = \theta_w$ (5.57b)

เงื่อนไขเวลา

$\theta_s\left(\hat{r}_s, 0\right)$; $\varphi = 0$ (5.58)

ระบบสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_w = f(\hat{r}_w, \hat{t})$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \hat{r}_w^{\,2}} + \left(\frac{1}{\psi + \hat{r}_w}\right)\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{t}} = 0 \qquad (5.59)$$

เงื่อนไขขอบเขต

$\theta_w = \left(0, \hat{t}\right)$; $\dfrac{\partial \theta_s}{\partial \hat{r}_s} - R_1 \varphi \dfrac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} = 0$ (5.60a)

; $\theta_s = \theta_w$ (5.60b)

$\theta_w = \left(1, \hat{t}\right)$; $\dfrac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} - Bi\theta_w = 0$ (5.61)

เงื่อนไขเวลา

$\theta_w = (\hat{r}_w, 0)$; $\theta_w = 0$ (5.62)

เมื่ออาศัยการประมาณโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดยวิธีแบบปริยายตัวแปรที่ติดอยู่ในรูปอนุพันธ์ในสมการ จะสามารถแทนได้ด้วยการประมาณดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\hat{r}^2} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta\hat{r}^2} \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\hat{r}} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\hat{r}} \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\hat{t}} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta\hat{t}} \tag{5.30}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta\hat{t}} \tag{5.31}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n}{2} \tag{5.32}$$

เมื่อนำสมการผลต่างสืบเนื่องดังกล่าวไปแทนลงในระบบสมการแล้วทำการจัดรูปสมการใหม่ (ภาคผนวก ง) จะได้สมการผลต่างสืบเนื่องโดยแบ่งตามตำแหน่งของจุดต่อที่ปรากฏอยู่บนโดเมนของการคำนวณดังต่อไปนี้

1. จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณน้ำแข็ง

$$-\left[A - B(C+D)\right]\theta_{s\,i-1}^{\,n+1} + \left[1+2A\right]\theta_{s\,i}^{\,n+1} - \left[A - B(C+D)\right]\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} = \theta_{s\,i}^{\,n} \tag{5.65}$$

กำหนดให้

$$A = \frac{4\Delta\hat{t}}{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)^2 \Delta\hat{r}_s^{\,2}} \tag{5.66}$$

$$B = \frac{2\Delta\hat{t}}{\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)\Delta\hat{r}_s} \tag{5.67}$$

$$C = \frac{D\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)}{2s_1 + D\left(\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n\right)\hat{r}_{s\,i}^{\,n}} \tag{5.68}$$

$$D = \hat{r}_{s\,i}^{\,n}\left(\frac{\varphi_i^{n+1\,2} - \varphi_i^{n\,2}}{2\Delta\hat{t}}\right) \tag{5.69}$$

2. จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณผนัง

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w^{\,2}} - \frac{R_1 D\Delta\hat{t}}{2R_2\Delta\hat{r}_w\left(s_1 + D\hat{r}_{w\,i}^{\,n}\right)}\right)\theta_{w\,i-1}^{\,n+1} + \left(1 + \frac{2R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w^{\,2}}\right)\theta_{w\,i}^{\,n+1} \\ &-\left(\frac{R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w^{\,2}} + \frac{R_1 D\Delta\hat{t}}{2R_2\Delta\hat{r}_w\left(s_1 + D\hat{r}_{w\,i}^{\,n}\right)}\right)\theta_{w\,i+1}^{\,n+1} = \theta_{w\,i}^{\,n} \end{aligned} \tag{5.70}$$

3. จุดต่อที่อยู่บนขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนัง

$$-\left(\frac{A}{AB+DE}\right)\theta_{s\,i-1}^{\;n+1}+\left(\frac{A+AB+CE+DE}{AB+DE}\right)\theta_{s\,i}^{\;n+1}-\left(\frac{CE}{AB+DE}\right)\theta_{s\,i+1}^{\;n+1}=\theta_{s\,i}^{\;n} \tag{5.71}$$

กำหนดให้

$$A=1-\frac{\Delta\hat{r}_w}{2\left(\psi+\hat{r}_{w\,i}^{\;n}\right)} \tag{5.72}$$

$$B=\frac{\varphi^2\Delta\hat{r}_s^{\;2}}{2\Delta\hat{t}} \tag{5.73}$$

$$C=\frac{R_1\Delta\hat{r}_s}{\Delta\hat{r}_w} \tag{5.74}$$

$$D=\frac{R_2\Delta\hat{r}_s\Delta\hat{r}_w}{2\Delta\hat{t}} \tag{5.75}$$

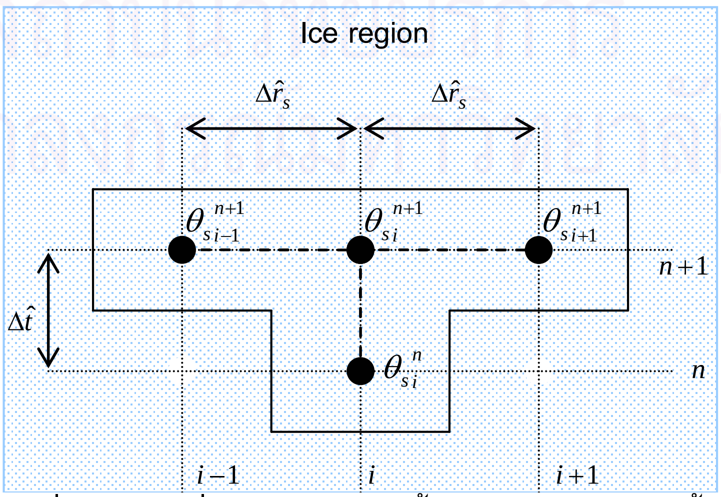
$$E=\varphi+\frac{\varphi^2\Delta\hat{r}_s}{2\left(\psi+\varphi.\hat{r}_{s\,i}^{\;n}\right)}+\frac{\Delta\hat{r}_s}{2}\hat{r}_{s\,i}^{\;n}\varphi^2\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{5.76}$$

4. จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อน

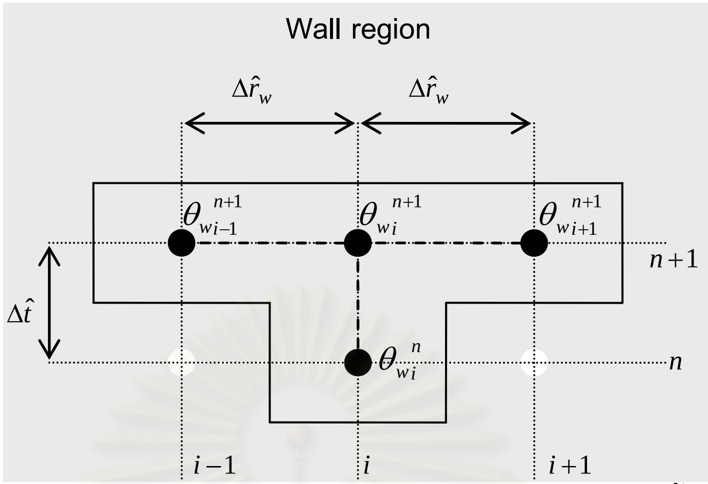
$$-\left(\frac{2R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w^{\;2}}\right)\theta_{w\,i-1}^{\;n+1}+\left(1+\frac{2R_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w^{\;2}}+\frac{2BiR_1\Delta\hat{t}}{R_2\Delta\hat{r}_w}+\frac{2BiR_1D\Delta\hat{t}}{2R_2\left(s_1+D\hat{r}_{w\,i}^{\;n}\right)}\right)\theta_{w\,i}^{\;n+1}=\theta_{w\,i}^{\;n} \tag{5.77}$$

5. จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัว

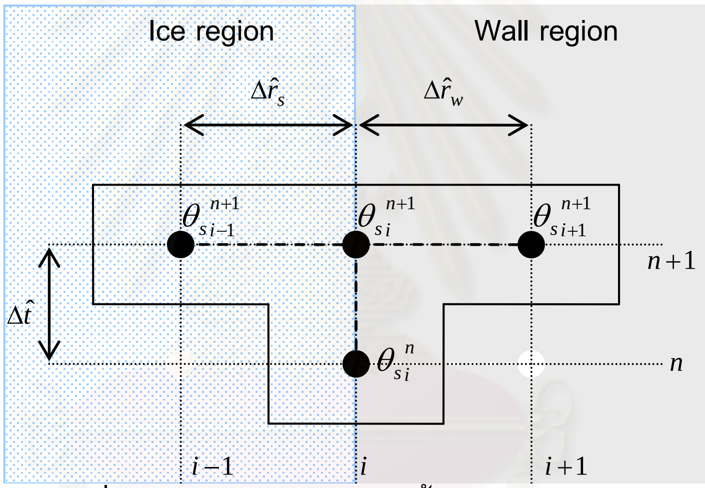
$$\varphi_i^{n+1}=\sqrt{\varphi_i^{n\,2}+\frac{\Delta\hat{t}}{Ste\Delta\hat{r}_s}\left(\varphi_{i+2}^{n+1}-4\varphi_{i+1}^{n+1}+3\right)} \tag{5.78}$$



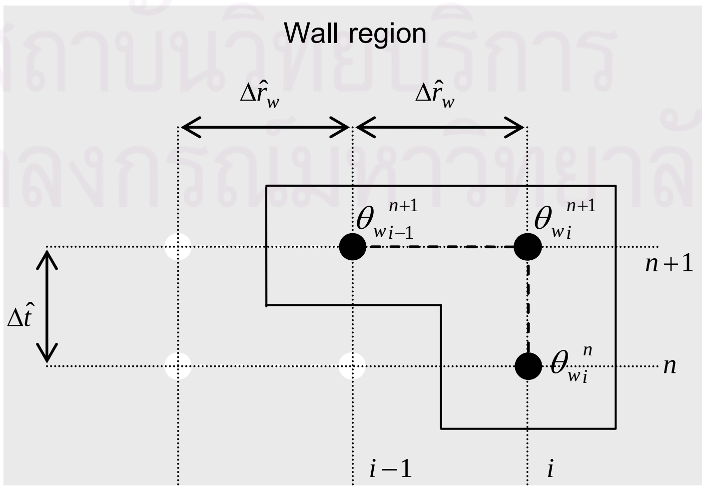
รูปที่ 5.8 จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณน้ำแข็งในระบบพิกัดเชิงขั้ว



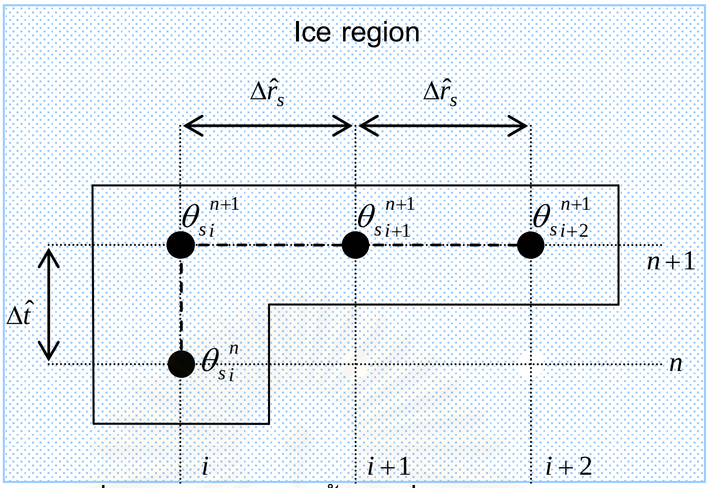
รูปที่ 5.9 จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณผนังในระบบพิกัดเชิงขั้ว



รูปที่ 5.10 จุดต่อที่อยู่บนขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนังในระบบพิกัดเชิงขั้ว



รูปที่ 5.11 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



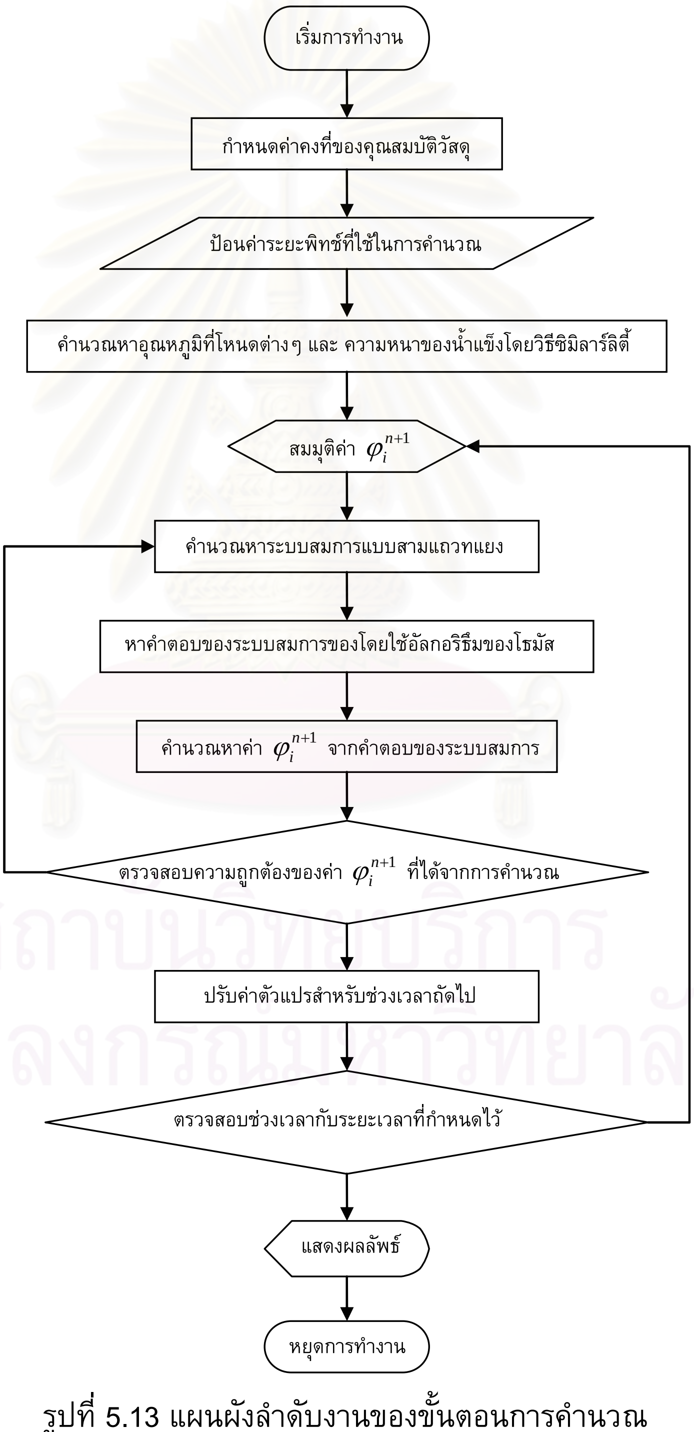
รูปที่ 5.12 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัวในระบบพิกัดเชิงขั้ว

สาเหตุที่ทำการเปลี่ยนรูปสมการดังข้างต้นโดยการกำหนดเทอมไร้มิติต่าง ๆนั้น เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ผล และจากการกำหนดขอบเขตของการพิจารณาให้รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะเป็นแบบไม่มีการเคลื่อนที่ (immobilize interface) ทำให้การแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์ไม่ต้องทำการปรับระยะกริด (grid) เมื่อระยะเวลาเปลี่ยนแปลงไป

จากระบบสมการดังกล่าวจะได้นำไปทำการแก้สมการโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไปเพื่อให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหา โดยในขั้นตอนการคำนวณจะทำการประยุกต์สมการข้างต้นเข้ากับจุดต่อในบริเวณที่เป็นน้ำแข็งและผนัง จะก่อให้เกิดระบบสมการเชิงเส้นแบบสามแถวทแยง (tridiagonal system) และสามารถหาคำตอบได้โดยใช้อัลกอริธึมของโทมัส (thomas algorithm) แต่การจะหาคำตอบได้นั้นจำเป็นต้องรู้ค่า φ_i^{n+1} เสียก่อนดังนั้นวิธีการที่ใช้คือ การสมมุติค่า φ_i^{n+1} ก่อนในเบื้องต้น จากนั้นทำการแก้ระบบสมการแล้วนำค่าอุณหภูมิที่ได้ไปแทนในเงื่อนไข (5.41) สำหรับระบบพิกัดฉาก และ (5.78) สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วเพื่อทำการตรวจสอบค่า φ_i^{n+1} ที่สมมุติขึ้นในขั้นตอนแรก ซึ่งวิธีดังกล่าวจะก่อให้เกิดการคำนวณซ้ำ (iteration) จนกว่าค่าที่ได้จะมีค่าความผิดพลาดน้อยกว่าค่าที่ได้กำหนดไว้ จึงจะทำการคำนวณที่ช่วงเวลาถัดไปจนกระทั่งสิ้นสุดระยะเวลาที่ได้ทำการพิจารณา ซึ่งในแต่ละช่วงเวลาที่คำนวณนั้นความหนาของน้ำแข็งจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆทำให้อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของท่อจะมีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งจะสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนในขณะเดือดของแอมโมเนียบนพื้นผิวท่อเรียบในแต่ละช่วงเวลา ได้โดยอาศัยสมการความสัมพันธ์ (ภูวนาถ กาบคำ, 2548) ดังนี้

$$h_0 = C_s\left(\frac{T_w - T_0}{T_0}\right)^{2.0303} \quad ; \; C_s = \text{ค่าคงที่ของแอมโมเนีย} \tag{5.79}$$

จากที่ได้กล่าวมาในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำจะมีการคำนวณเพื่อปรับเปลี่ยนค่า φ_i^{n+1} และ h_0 จนกว่าค่า φ_i^{n+1} ที่ได้จะมีค่าความผิดพลาดน้อยกว่าค่าที่ได้กำหนดไว้ ซึ่งช่วงเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณกระบวนการแข็งตัวมีค่าเท่ากับ 28 นาที เพื่อที่จะสามารถนำผลการคำนวณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จากโรงงาน สำหรับลำดับขั้นตอนการคำนวณทั้งหมดจะแสดงไว้ในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13 แผนผังลำดับงานของขั้นตอนการคำนวณ

บทที่ 6

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

6.1 การเปรียบเทียบผลจากการคำนวณโดยวิธีซิมิลาร์ริตีกับวิธีผลต่างสืบเนื่องทั้งในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 6.1 พบว่าคำตอบที่ได้จากวิธีซิมิลาร์ริตีมีค่าสอดคล้องกับคำตอบที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องทั้งในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้วในช่วงเวลาเริ่มต้นของการแข็งตัวเท่านั้นซึ่งมีค่าประมาณ $\hat{t} \leq$ 0.225 หรือเทียบได้เป็น 3 วินาทีแรกของการแข็งตัว ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าช่วงเวลาแรกๆ คำตอบที่ได้จากวิธีซิมิลาร์ริตีสามารถใช้เป็นคำตอบเริ่มต้นของการคำนวณโดยอาศัยวิธีผลต่างสืบเนื่อง และ โปรแกรมการคำนวณที่อาศัยวิธีผลต่างสืบเนื่องมีความถูกต้อง จากการที่คำตอบที่ได้สอดคล้องกับวิธีซิมิลาร์ริตีที่ช่วงเวลาแรกๆ จากการคำนวณยังพบว่าเมื่อเวลาผ่านไปผลที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องทั้งในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าผลที่ได้จากวิธีซิมิลาร์ริตี เนื่องจาก วิธีซิมิลาร์ริตีนั้นได้ตั้งสมมุติฐานไว้ว่า ผนังท่อเสมือนเป็นบริเวณกึ่งอนันต์เมื่อน้ำแข็งมีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนาของผนังท่อซึ่งสมมุติฐานดังกล่าวจะไม่เป็นจริง เพราะเมื่อเวลาผ่านไปน้ำแข็งจะมีความหนาเพิ่มมากขึ้น และ คลื่นความร้อนจะถูกส่งผ่านลึกลงไปในส่วนของผนังเรื่อยๆ เป็นเหตุให้การส่งผ่านความร้อนในบริเวณพื้นผิวของผนังมีค่าต่ำกว่าในกรณีผลต่างสืบเนื่อง ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นการถ่ายเทความร้อนในบริเวณผิวของผนังที่มีความหนาจำกัด ซึ่งพบว่าค่าความหนาน้ำแข็ง (φ) ที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะมีค่ามากกว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากวิธีซิมิลาร์ริตีประมาณ 2 เท่า

จากการคำนวณที่พบว่าค่าความหนาของน้ำแข็งจากวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดฉากมีค่าน้อยกว่าระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น ดังแสดงในรูปที่ 6.1 สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการเงื่อนไขขอบเขตในระบบพิกัดฉาก (5.4a) และ จากสมการเงื่อนไขขอบเขตในระบบพิกัดเชิงขั้ว (5.44a) โดยในระบบพิกัดฉากได้ทำการสมมุติให้ผนังท่อเป็นเสมือนแผ่นเรียบที่มีความกว้างไม่จำกัด ส่วนในระบบพิกัดเชิงชั้วเป็นท่อทรงกระบอกที่มีขนาดจำกัด เมื่อเวลาผ่านไปอัตราการถ่ายเทความร้อนต่อต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ (heat flux) ในระบบพิกัดฉาก $\left(-k_s \dfrac{\partial T_x}{\partial x}\right)$ จะมีค่าน้อยกว่าในระบบพิกัดเชิงขั้ว $\left(-k_s \dfrac{\partial T_r}{\partial r}\right)$ เนื่องจากความหนาของน้ำแข็งที่เพิ่มมากขึ้นส่งผลให้พื้นที่การถ่ายเทความร้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วจะมีค่าลดลงจากการที่เป็นกระบวนการแข็งตัว

ภายในท่อ ส่งผลให้อัตราการถ่ายเทความร้อนต่อต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งต่อหนึ่งหน่วยเวลา $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าในระบบพิกัดฉาก โดยที่จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตที่ 28 นาที พบว่าค่าความหนาของน้ำแข็งที่คำนวณได้จากระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าประมาณ 2.14 มม.

6.2 การศึกษาผลกระทบของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด

เมื่อทำการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนีย (h_0) เป็นค่าคงที่ เมื่อทำการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนในการคำนวณดังนี้ 0.25, 0.5, 1, 100 และ 1000 kW/m-K ตามลำดับ จะได้ผลดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งจะสังเกตได้ว่าเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้อัตราการการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย จนกระทั่งค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนมีค่ามากกว่า 100 kW/m-K จะไม่ส่งผลกระทบต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดกล่าวคือ ระบบเข้าสู่กระบวนการอุณหภูมิคงที่ (isothermal process) เป็นสภาวะการพาความร้อนในอุดมคติ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากสมการเงื่อนไขขอบเขต (5.48) จะพบว่า เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนมีค่ามากๆ สมการเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวจะเป็นจริงก็ต่อเมื่ออุณหภูมิของผนังท่อด้านนอก (T_w) มีค่าคงที่ กล่าวคือ อุณหภูมิของผนังท่อด้านนอกมีค่าเท่ากับอุณหภูมิของแอมโมเนีย (T_0) ซึ่งมีค่าเท่ากับ -7.5 $^{\circ}$C

6.3 การเปรียบเทียบค่าความหนาของน้ำแข็งจากการคำนวณกับค่าที่วัดได้จากโรงงาน

ค่าความหนาของน้ำแข็งที่วัดได้จากโรงงานผลิตน้ำแข็งหลอดเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยปรับเปลี่ยนค่า h_0 ทุกช่วงเวลาโดยอาศัยสมการ 5.79 จะได้ผลดังแสดงในรูปที่ 6.3 พบว่าที่เวลาสิ้นสุดกระบวนการผลิตค่าความหนาน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณมีเท่ากับ 11.54 มม. ส่วนค่าที่วัดได้จากโรงงานมีค่า 11.06 มม. (ภูวนาถ กาบคำ, 2548) ซึ่งค่าที่ได้จากการคำนวณมีความผิดพลาดไปจากค่าที่วัดได้จากโรงงานประมาณ 4% เทียบได้เท่ากับ 0.48 มม. และ เมื่อพิจารณารูปกราฟจะพบว่าลักษณะของกราฟทั้งสองมีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน จะแตกต่างกันที่เมื่อทดลองลากเส้นกราฟเชื่อมจุดต่างๆ ของค่าที่ได้จากการวัดได้จากโรงงานจะพบว่า เส้นกราฟตัดกับแนวแกน X ที่เวลาประมาณ 3 นาที เมื่อทำการพิจารณาวัฏจักรกระบวนการผลิตจะพบว่า ในขั้นตอนสุดท้ายของกระบวนการผลิตของแต่ละรอบนั้นในชุดตัวถังผลิตน้ำแข็งหลอดจะเปลี่ยนจากระบบทำ

ความเย็นเป็นระบบทำความร้อนโดยกลับทิศทางการไหลของแอมโมเนียในระบบ ส่งผลให้เกิดความร้อนเพื่อไปละลายน้ำแข็งให้หลุดจากผนังท่อด้านในเพื่อที่จะนำน้ำแข็งไปดำเนินการในขั้นตอนต่อไป ในขั้นตอนดังกล่าวทำให้เกิดพลังงานสะสมภายในระบบดังนั้นเมื่อเริ่มทำการผลิตน้ำแข็งในรอบต่อไป ในช่วงเวลาเริ่มต้นระบบทำความเย็นจะต้องรับภาระในการลดพลังงานสะสมภายในดังกล่าว เพื่อให้ระบบเข้าสู่สภาวะที่พร้อมจะเกิดการแข็งตัว ส่วนในการคำนวณได้กำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้นนั้นระบบอยู่ในสภาวะที่น้ำแข็งพร้อมจะก่อตัวทำให้ค่าที่ได้จากการคำนวณเกิดความผิดพลาดไปจากค่าที่วัดได้จากโรงงานในช่วงเวลาเริ่มต้น

6.4 การศึกษาผลกระทบของอุณหภูมิแอมโมเนียต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด

จากผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 6.4 ซึ่งเป็นการคำนวณโดยใช้อุณหภูมิของแอมโมเนียแตกต่างกัน 3 ค่าดังนี้คือ -7.0 $^{\circ}$C, -7.5 $^{\circ}$C และ -8.0 $^{\circ}$C พบว่าเวลาที่ใช้ในการผลิตน้ำแข็งที่ความหนา 11.54 มม. มีค่าประมาณ 30, 28 และ 26 นาทีตามลำดับ เมื่อทำการเปรียบเทียบโดยใช้อุณหภูมิแอมโมเนียเท่ากับ -7.5 $^{\circ}$C ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่ใช้งานจริงของเครื่องผลิตน้ำแข็งที่โรงงานผลิตน้ำแข็งหลอดเป็นค่าอ้างอิง พบว่าเมื่อเพิ่ม หรือลดอุณหภูมิของแอมโมเนีย 0.5 $^{\circ}$C จะส่งผลให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดเปลี่ยนแปลงไปประมาณ 8% ซึ่งจากสมการ 5.79 จะพบว่า ค่าอุณหภูมิของแอมโมเนียแปรผันกับค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียแบบเอกโพเนนเชียล ดังนั้นการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของอุณหภูมิแอมโมเนียจึงส่งผลกระทบอย่างมากต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอด

6.5 การศึกษาอัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดเทียบกับเวลา

จากผลการคำนวณอัตราการผลิตน้ำแข็งโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้วดังแสดงในรูปที่ 6.5 พบว่า ที่อุณหภูมิของแอมโมเนียมีค่าเท่ากับ -7.0 $^{\circ}$C, -7.5 $^{\circ}$C และ -8.0 $^{\circ}$C นั้น จะมีแนวโน้มของค่าอัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดที่คล้ายคลึงกันกล่าวคือ ในช่วงเวลาเริ่มต้นของการแข็งตัวอัตราการผลิตมีค่าสูง จากนั้นจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเวลาผ่านไปแล้วจึงมีอัตราการลดลงที่ต่ำลงในช่วงท้ายของกระบวนการผลิต ซึ่งหลังจากเวลาผ่านไปประมาณ 20 นาที อัตราการผลิตของอุณหภูมิแอมโมเนียทั้ง 3 ค่าจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยเมื่อทำการเปรียบเทียบอัตราการผลิตที่เวลา 10 นาทีแรกกับจุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตของอุณหภูมิแอมโมเนียทั้ง 3 ค่า จะพบว่าค่าอัตราการผลิตลดลงประมาณ 2 เท่า อันเป็นผลจากการที่น้ำแข็งมีค่าการนำความร้อนต่ำทำให้ประพฤติตัวเสมือนเป็นฉนวนทางความร้อน ดังนั้นเมื่อความหนาของน้ำแข็งเพิ่มมากขึ้นจึงส่งผลให้สภาพการนำความร้อนโดยรวมของระบบลดลงจึงทำให้อัตราการผลิตลดลงด้วย

6.6 การศึกษาภาระความเย็นของระบบเทียบกับเวลา

เมื่อทำการคำนวณหาค่าการถ่ายเทความร้อนบริเวณพื้นผิวของผนังด้านนอกที่สัมผัสกับแอมโมเนีย $(\hat{x}_w = 1)$ ซึ่งค่าดังกล่าวคือภาระความเย็นของระบบ (พิจารณาเป็นอัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) ดังแสดงในรูปที่ 6.6 จะพบว่าที่อุณหภูมิของแอมโมเนียมีค่าเท่ากับ -7.0 ^{o}C, -7.5 ^{o}C และ -8.0 ^{o}C นั้น มีลักษณะเส้นกราฟที่คล้ายคลึงกันกล่าวคือ ในช่วงแรกของกระบวนการผลิตจะมีค่าภาระความเย็นสูงเมื่อเวลาผ่านไปจะลดลงอย่างรวดเร็ว จนกระทั่งในช่วงท้ายของกระบวนการผลิตจะมีอัตราการลดลงของภาระทางความร้อนต่ำลง ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบค่าภาระทางความร้อนของอุณหภูมิแอมโมเนียทั้ง 3 ค่าที่เวลา 10 นาที กับจุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตจะพบว่ามีค่าลดลงประมาณ 2 เท่า สาเหตุที่ภาระทางความเย็นลดลงอย่างมากเกิดจากการที่น้ำแข็งมีการก่อตัวเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆเมื่อเวลาผ่านไปจากคุณสมบัติทางความร้อนของน้ำแข็งที่มีค่าการนำความร้อนที่น้อยส่งผลให้ภาระทางความเย็นมีค่าลดลงเมื่อน้ำแข็งมีความหนาเพิ่มมากขึ้น

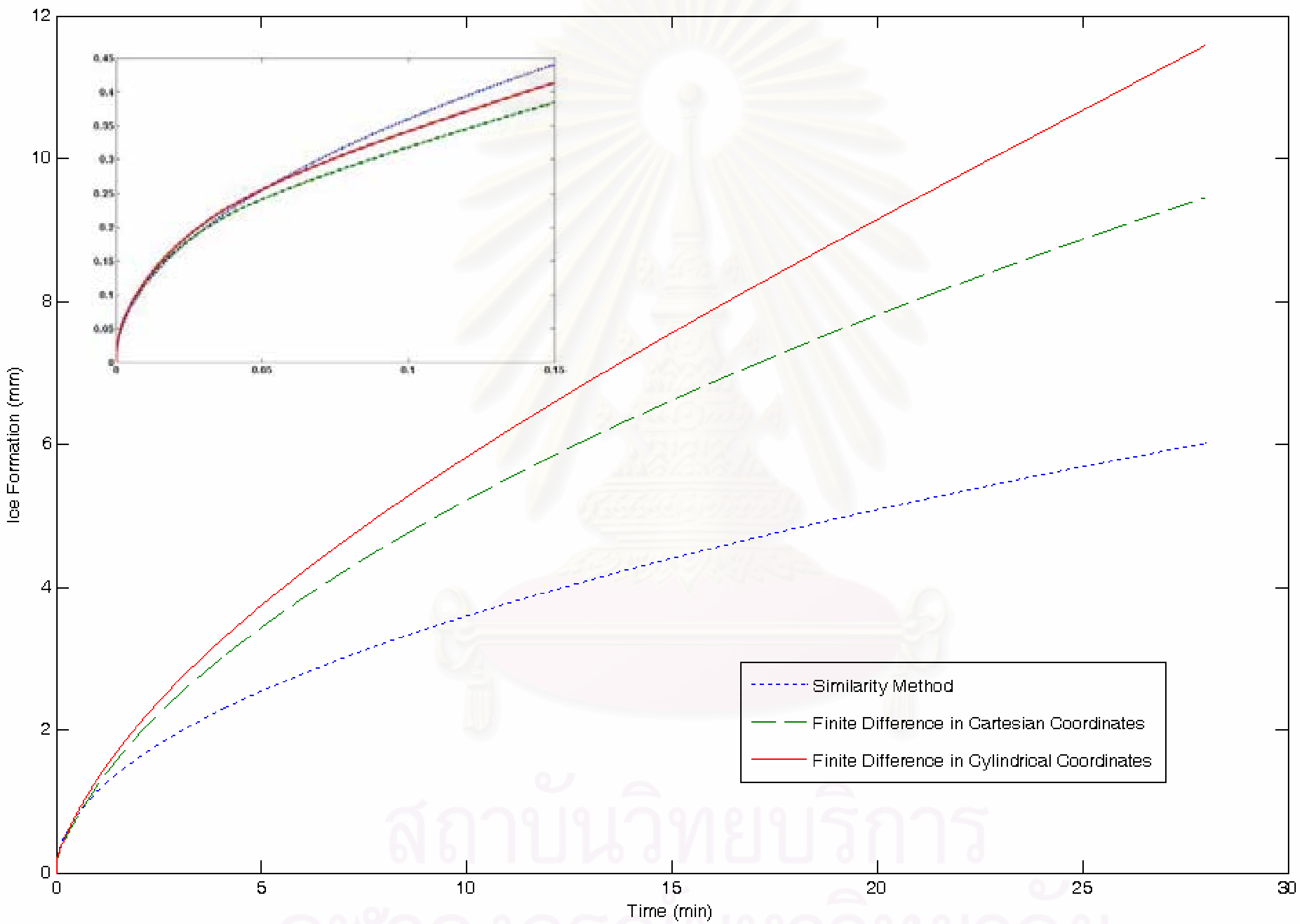
6.7 การศึกษาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียเทียบกับเวลา

จากรูปที่ 6.7 เมื่อพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียในกระบวนการแข็งตัวของอุณหภูมิแอมโมเนียที่ -7.0 ^{o}C, -7.5 ^{o}C และ -8.0 ^{o}C พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนจะมีค่าสูงในช่วงเวลาเริ่มต้น เมื่อเวลาผ่านไปจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว จากนั้นอัตราการลดลงของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนจะเริ่มน้อยลงเรื่อยๆ จนกระทั่งสิ้นสุดกระบวนการผลิต โดยที่อุณหภูมิของแอมโมเนียทั้ง 3 ค่าจะมีลักษณะการลดลงของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ใกล้เคียงกันโดยที่เวลา 10 นาทีแรกของกระบวนการผลิต เมื่อนำค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนไปเปรียบเทียบกับที่จุดสิ้นสุดการผลิตจะพบว่ามีค่าลดลงประมาณ 1.6 เท่า ซึ่งได้รับผลกระทบจากสาเหตุจากการที่ความหนาของน้ำแข็งมีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้สภาพการนำความร้อนโดยรวมของระบบลดลง

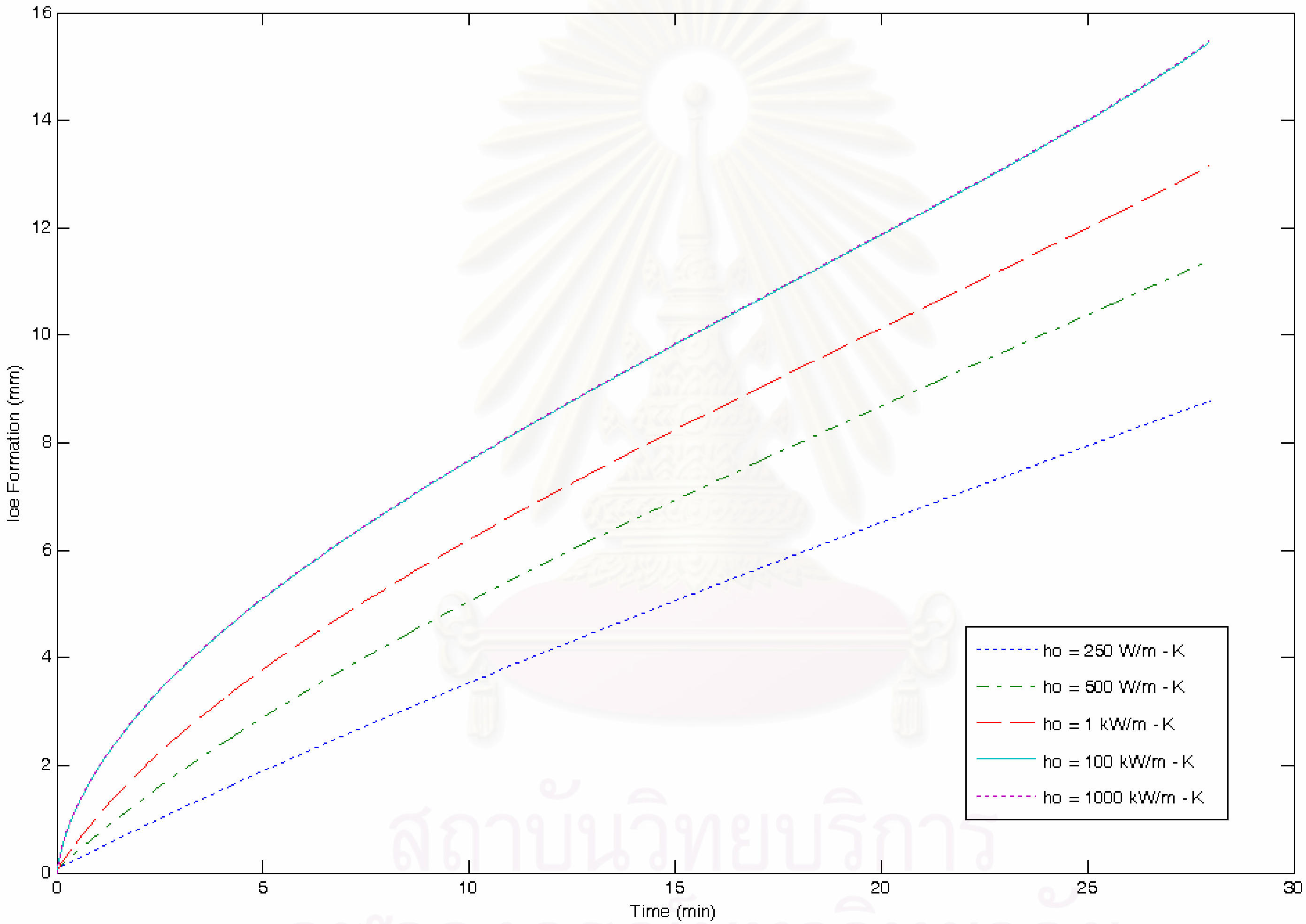
6.8 การศึกษาปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลการผลิตเทียบกับเวลา

เมื่อนำค่าภาระทำความเย็น และ ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนีย มาคำนวณหาปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลการผลิต (energy intensity) ดังแสดงในรูปที่ 6.8 เมื่อพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่าที่อุณหภูมิของแอมโมเนียมีค่าเท่ากับ -7.0 ^{o}C, -7.5 ^{o}C

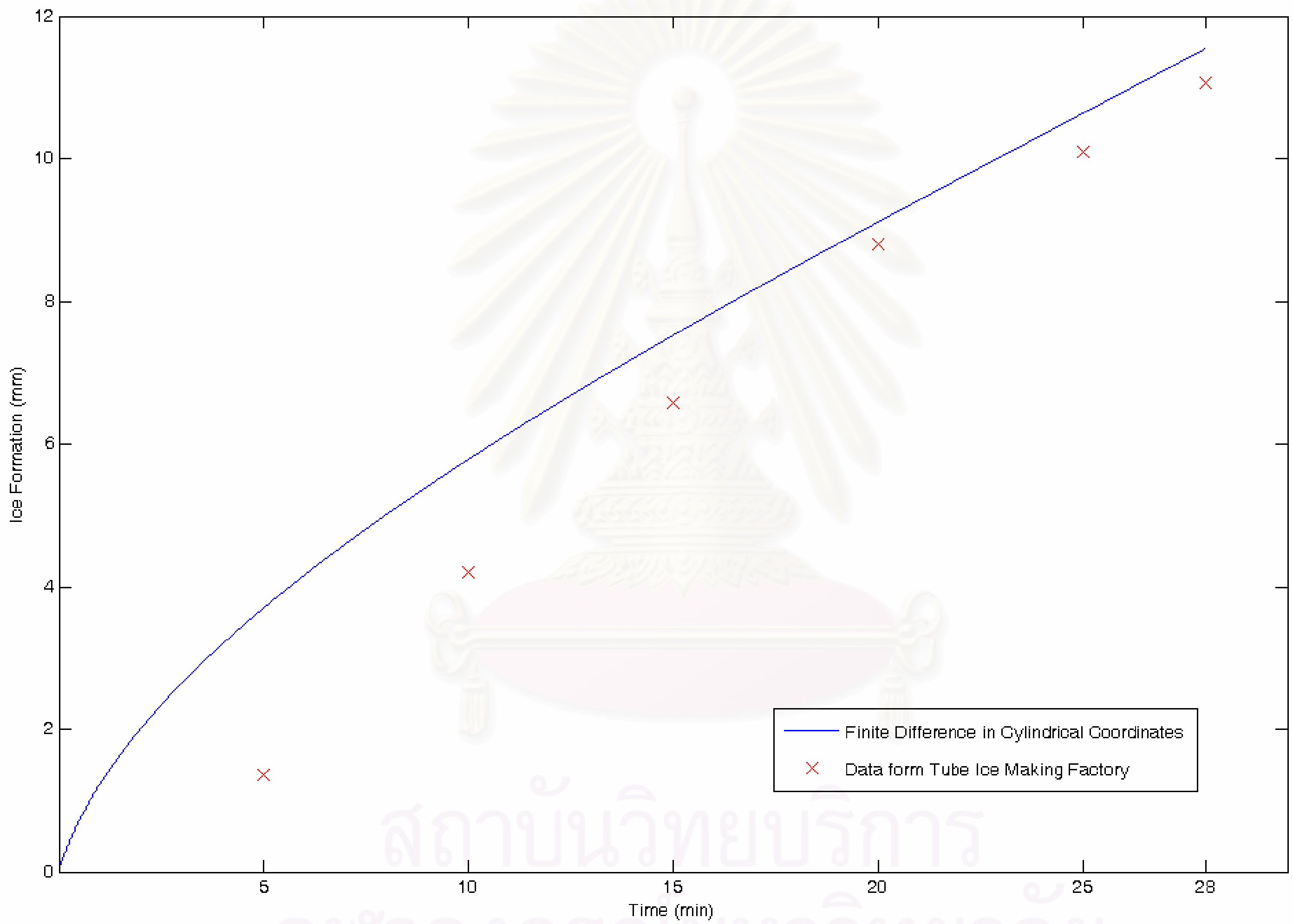
และ -8.0 ^{o}C นั้น ที่ช่วงเวลาแรกค่าดังกล่าวจะลดลงจนมีค่าต่ำสุดที่เวลาประมาณ 4 นาทีโดยมีค่าอัตราการใช้พลังงานที่ใกล้เคียงกันคือมีค่าประมาณ 0.35 MJ/kg ซึ่งเป็นจุดที่ประหยัดพลังงานในการผลิตมากที่สุด และ ปริมาณพลังงานที่ใช้ในการผลิตจะค่อยๆเพิ่มขึ้นเรื่อยๆจนมีค่ามากที่สุด ณ.จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตโดยที่อุณหภูมิแอมโมเนียทั้งสามจะมีค่าอัตราการใช้พลังงานที่ใกล้เคียงกันซึ่งมีค่าประมาณ 0.39 MJ/kg แสดงให้เห็นว่าในกระบวนการผลิตที่เวลามากกว่า 4 นาทีจะมีอัตราการใช้พลังงานที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อพิจารณาโดยรวมจะพบว่าค่าดังกล่าวมีค่าเกือบจะคงที่กล่าวคือ ที่อุณหภูมิแอมโมเนียมีค่าเท่ากับ -7.0 ^{o}C, -7.5 ^{o}C และ -8.0 ^{o}C จะมีค่าเฉลี่ยโดยรวมที่ใกล้เคียงกันโดยมีค่าประมาณ 0.36 MJ/kg จากค่าความหนาน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณซึ่งมีค่าเท่ากับ 11.54 มม. โดยใน 1 รอบการผลิตใช้เวลา 30, 28 และ 26 นาทีตามลำดับ และ เครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดขนาดการผลิต 30 ตันต่อวันมีจำนวนท่อผลิตน้ำแข็ง 334 ท่อ (ภูวนาถ กาบคำ, 2548) เมื่อนำข้อมูลข้างต้นมาคำนวณจะพบว่า ปริมาณพลังงานที่ใช้ทั้งหมดต่อ 1 รอบการผลิตมีค่าประมาณ 158, 172 และ 187 kW หรือเทียบได้เป็น 45, 49 และ 53 ตันความเย็นตามลำดับ



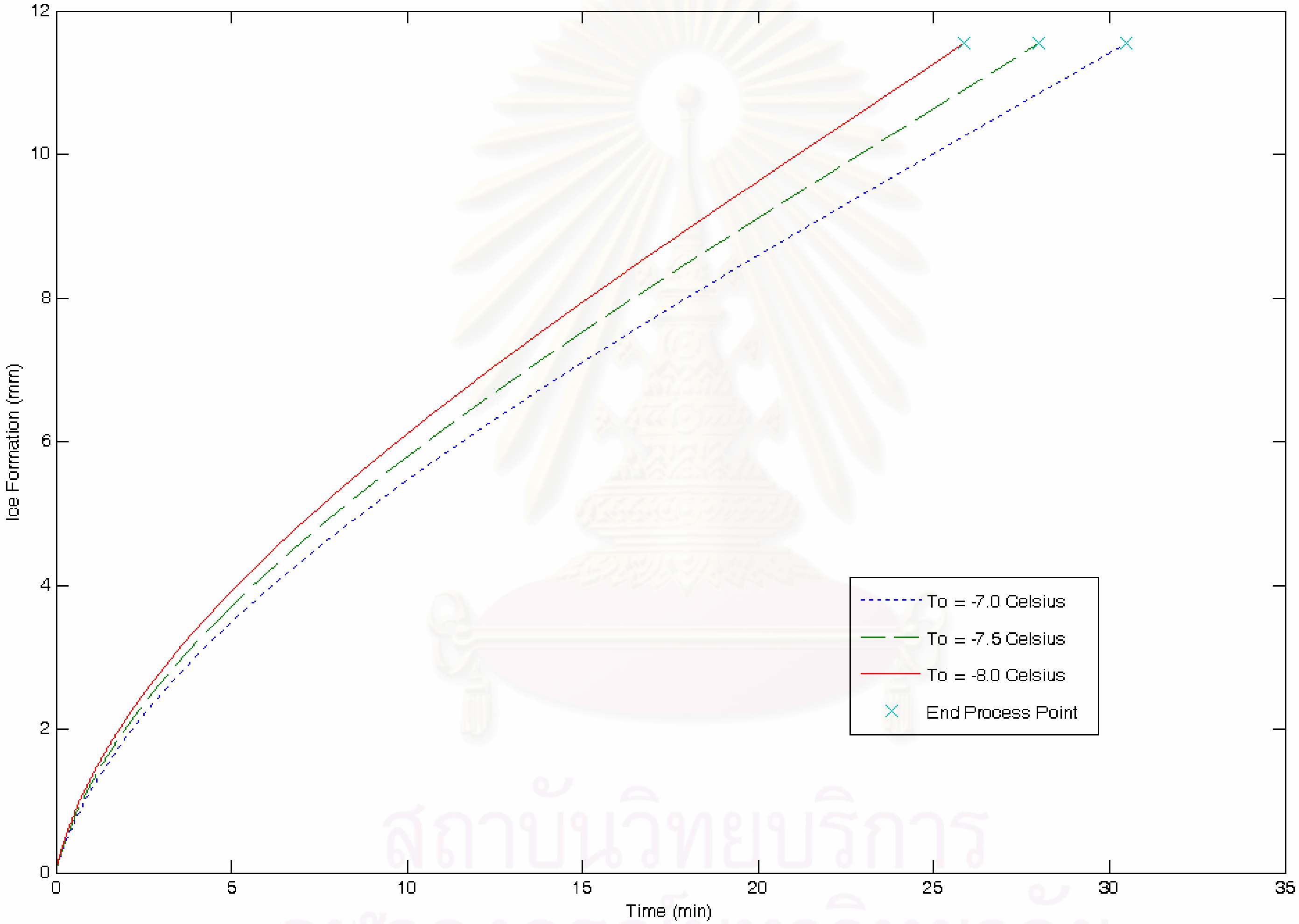
รูปที่ 6.1 การเปรียบเทียบผลจากการคำนวณโดยวิธีซิมิลาริตีกับวิธีผลต่างสืบเนื่องทั้งในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว



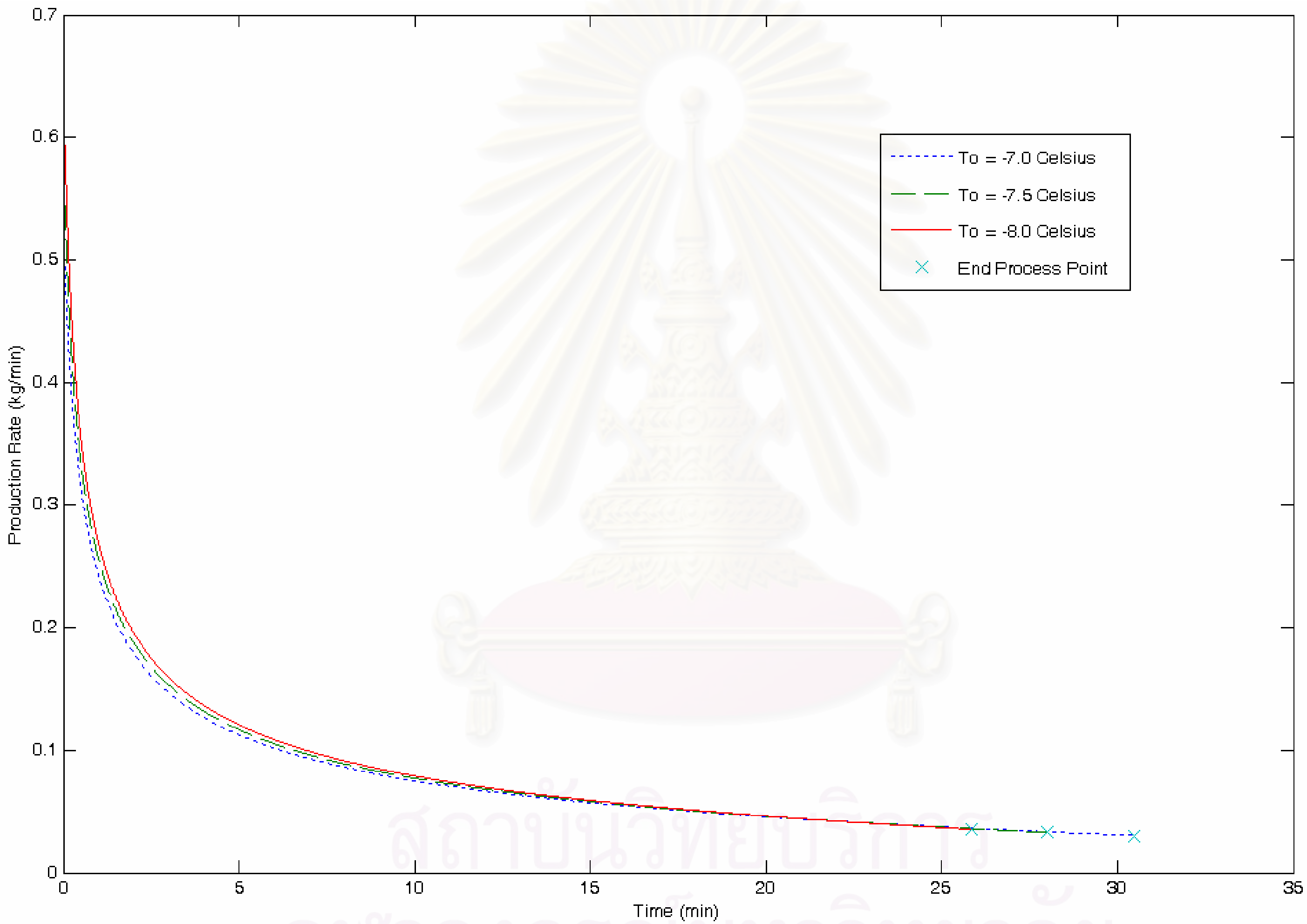
รูปที่ 6.2 ผลกระทบของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด



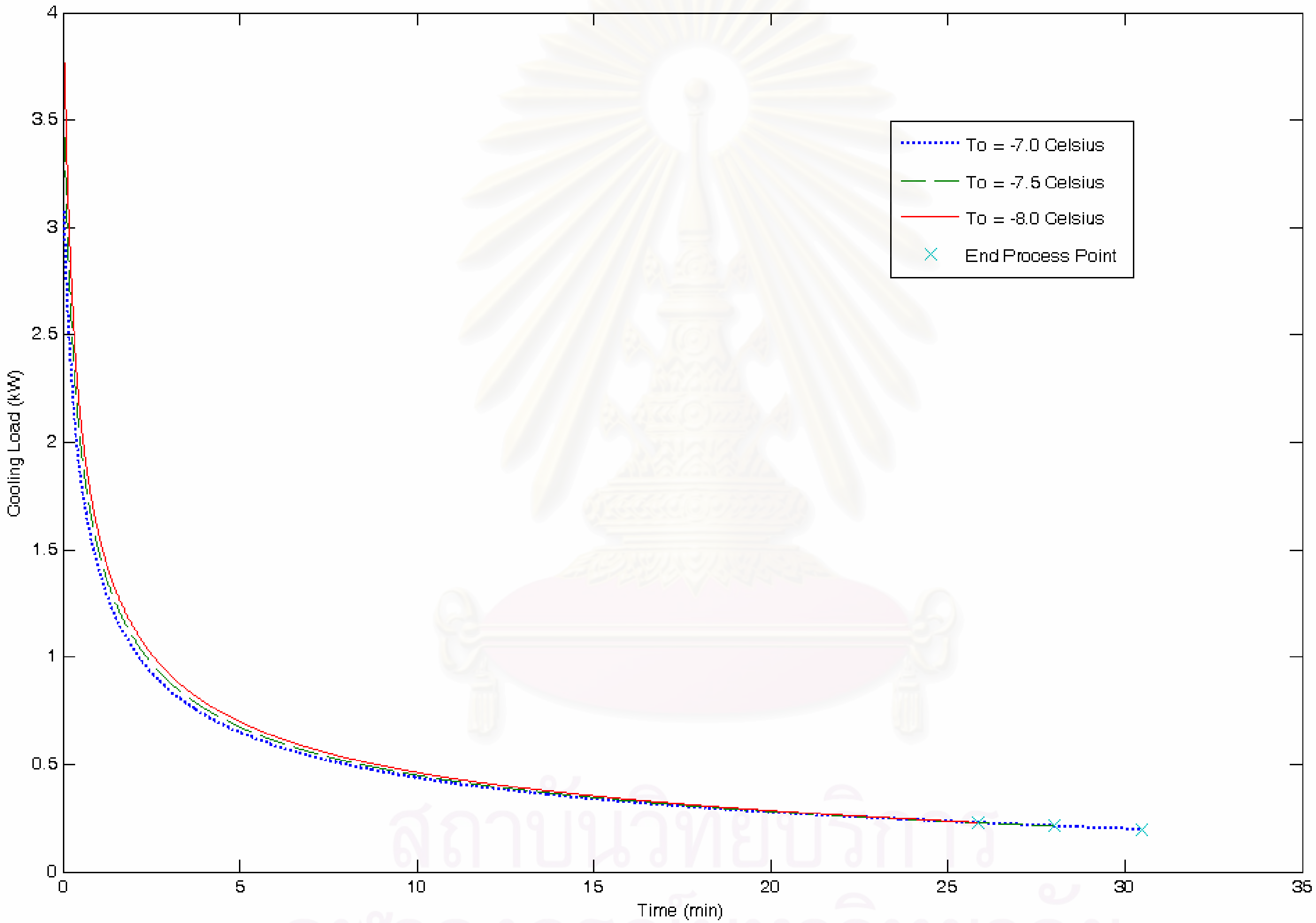
รูปที่ 6.3 การเปรียบเทียบค่าความหนาของน้ำแข็งจากการคำนวณกับค่าที่วัดได้จากโรงงาน



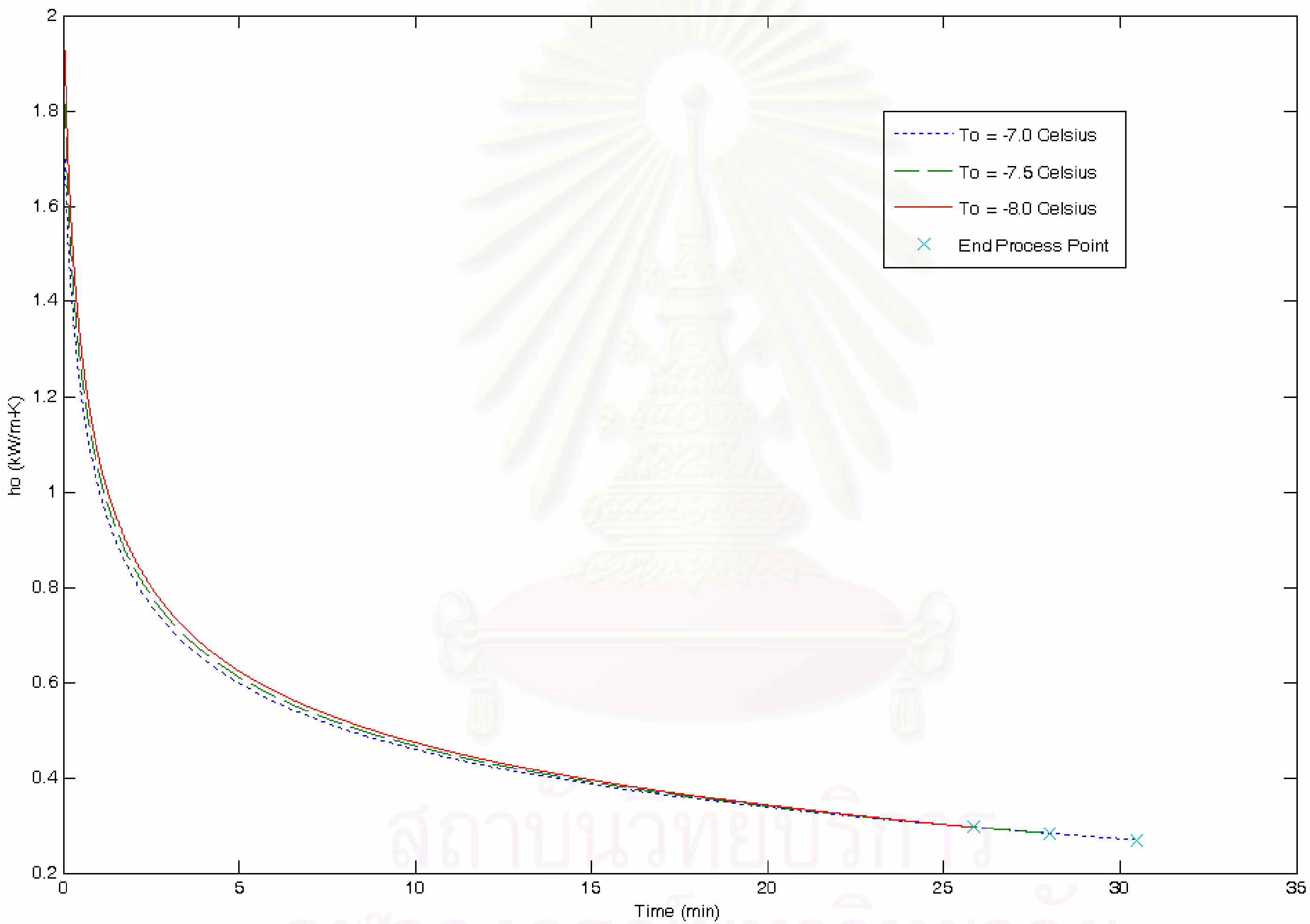
รูปที่ 6.4 ผลกระทบของอุณหภูมิของแอมโมเนียต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด



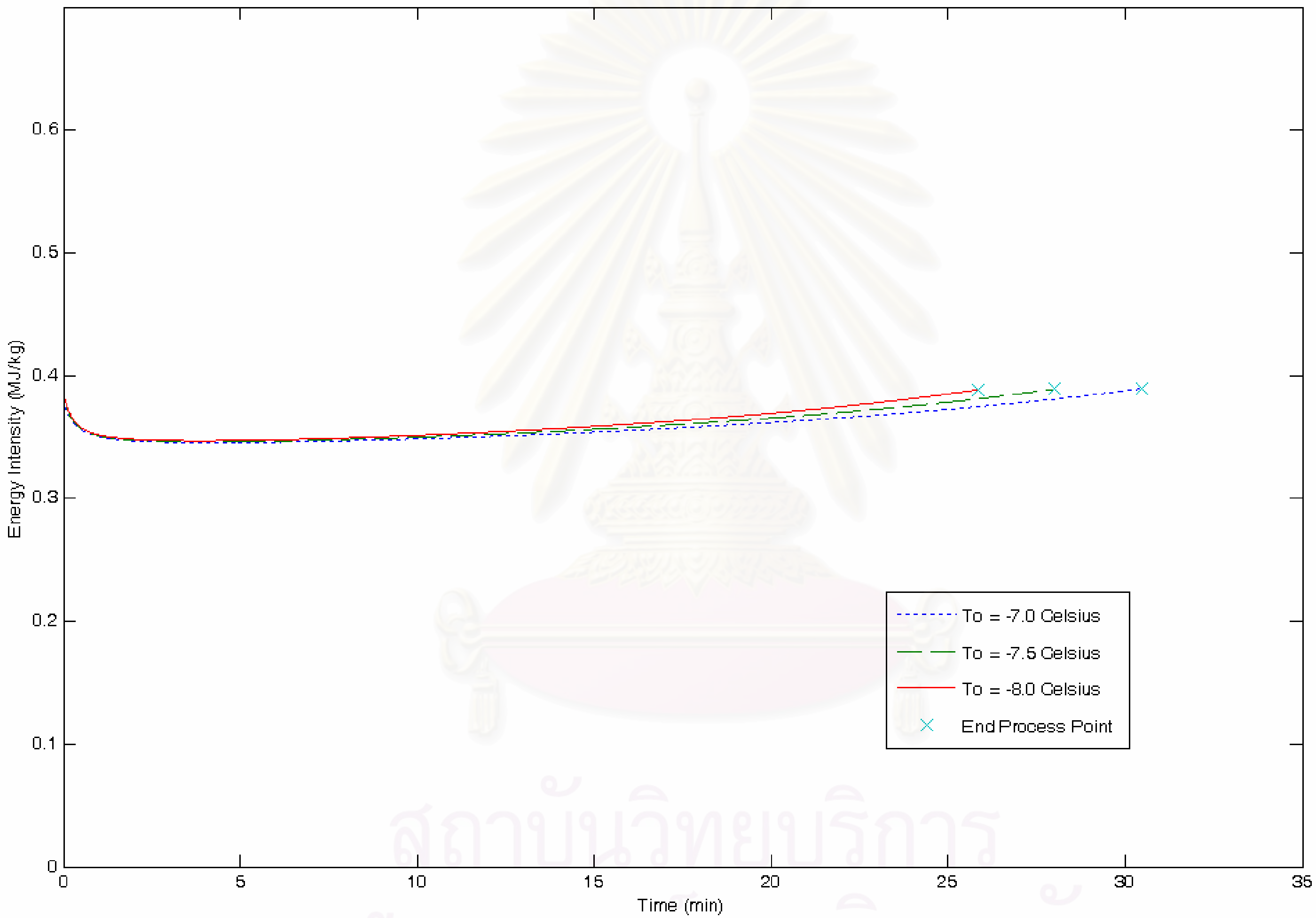
รูปที่ 6.5 อัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดเทียบกับเวลา



รูปที่ 6.6 ภาระความเย็นของระบบเทียบกับเวลา



รูปที่ 6.7 ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียเทียบกับเวลา



รูปที่ 6.8 ปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลการผลิตเทียบกับเวลา

บทที่ 7

สรุปผลการวิจัย

7.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาถึงกระบวนการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งภายในท่อ เพื่อศึกษาเชิงเลขถึงผลกระทบของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียที่มีต่ออัตราการผลิตน้ำแข็งหลอดโดยได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดเพื่อศึกษาพฤติกรรมการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด รวมถึงสภาพการถ่ายเทความร้อนโดยรวม และ ภาระทางความร้อนอันเป็นผลกระทบจากการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด อีกทั้งผลกระทบของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน และอุณหภูมิของแอมโมเนียที่มีต่ออัตราการแข็งตัวน้ำแข็งหลอด นอกจากนั้นยังได้ทำการเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับค่าที่วัดได้จากโรงงานผลิตน้ำแข็งหลอด ผลที่ได้จากการศึกษาวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ในการหาแนวทางในการเพิ่มประสิทธิภาพในกระบวนการผลิต เพื่อช่วยในการประหยัดพลังงานไฟฟ้าซึ่งเป็นต้นทุนในการผลิตน้ำแข็ง ซึ่งจากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียที่บริเวณผิวภายนอกท่อเมื่อมีค่าเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย เมื่อค่าเริ่มเข้าใกล้ 100 kW/m-K จะเริ่มส่งผลกระทบต่ออัตราการแข็งตัวน้อยลง และ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนมีค่ามากกว่าค่าดังกล่าวจะไม่ส่งผลกระทบต่ออัตราการแข็งตัว เนื่องจากที่ค่าดังกล่าวระบบจะเริ่มเข้าสู่กระบวนการอุณหภูมิคงที่

2. ค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จากโรงงานผลิตน้ำแข็ง พบว่ามีค่าทั้งสองความสอดคล้องกันในเชิงคุณภาพ โดยที่จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่ามากกว่าค่าที่วัดได้จากโรงงานประมาณ 0.5 มม. ซึ่งมีค่าความผิดพลาด 4%

3. ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียส่งผลกระทบโดยตรงต่ออัตราการผลิตของน้ำแข็งหลอด โดยมีอุณหภูมิของแอมโมเนียเป็นปัจจัยที่ส่งผลกระทบอย่างมาก กล่าวคือ เมื่อใช้อุณหภูมิแอมโมเนียเท่ากับ -7.5 $^{\circ}$C ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่ใช้งานจริงของเครื่องผลิต

น้ำแข็งที่โรงงานผลิตน้ำแข็งหลอดเป็นค่าอ้างอิง พบว่าหากมีการเพิ่ม หรือลดอุณหภูมิของแอมโมเนีย 0.5 $^{\circ}$C จะส่งผลให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดเปลี่ยนแปลงไปประมาณ 8%

4. ในช่วงเวลาแรกอัตราการผลิต และ ภาระทางความเย็นของระบบจะมีค่าสูงแล้วเมื่อเวลาผ่านไปจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว จากนั้นอัตราการลดลงจะเริ่มมีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งสิ้นสุดกระบวนการผลิต ซึ่งทั้งค่าอัตราการผลิต และ ค่าภาระทางความเย็น เมื่อทำการเปรียบเทียบที่เวลา 10 นาทีแรกกับจุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตจะพบว่าค่าทั้งสองจะมีค่าลดลงประมาณ 2 เท่า

5. เมื่อพิจารณาพฤติกรรมของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของแอมโมเนียพบว่ามีค่าสูงในช่วงเวลาเริ่มต้นจากนั้นจะมีค่าลดลงเรื่อย ๆเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องจากการที่น้ำแข็งมีค่าการนำความร้อนต่ำทำให้ประพฤติตัวเสมือนเป็นฉนวนทางความร้อน ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไปความหนาของน้ำแข็งมีค่าเพิ่มมากขึ้นจึงส่งผลให้สภาพการนำความร้อนโดยรวมของระบบลดลง

6. ในกระบวนการผลิตพบว่าค่าปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลการผลิตในช่วงแรกจะมีค่าลดลงเรื่อย ๆจนมีค่าต่ำสุดที่เวลา 4 นาทีโดยมีค่าประมาณ 0.35 MJ/kg จากนั้นจะค่อย ๆเพิ่มขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่จุดสิ้นสุดกระบวนการผลิตซึ่งมีค่าประมาณ 0.39 MJ/kg เมื่อพิจารณาโดยรวมจะพบว่าค่าดังกล่าวมีค่าเกือบจะคงที่ตลอดกระบวนการผลิตซึ่งมีค่าเฉลี่ยโดยรวมประมาณ 0.36 MJ/kg โดยที่ค่าสูงสุดและต่ำสุดมีความแตกต่างประมาณ 7.5% และ 4% ตามลำดับ

7.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยต่อไป

1. จากสมมุติฐานเบื้องต้นในการคำนวณไม่ได้พิจารณาความร้อนสัมผัสจากการเปลี่ยนอุณหภูมิของน้ำ แต่ในกระบวนการผลิตน้ำแข็งนั้นใช้การไหลของน้ำลงมาตามท่อในแนวดิ่งแล้วจึงเกิดการแข็งตัวขึ้นบริเวณผิวด้านในของท่อผลิตน้ำแข็งซึ่งเป็นกระบวนการพาความร้อนของน้ำ รวมถึงขั้นตอนการละลายน้ำแข็งที่เกิดการสะสมพลังงานภายในขึ้น ดังนั้นการนำประเด็นดังกล่าวมาร่วมพิจารณาจะช่วยให้การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดมีความแม่นยำมากขึ้น

2. ในระหว่างกระบวนการผลิตน้ำแข็งนั้นอุณหภูมิของแอมโมเนียไม่ได้มีค่าคงที่ดังที่ได้ตั้งสมมุติฐานเบื้องต้นในการคำนวณซึ่งจากผลการวิจัยพบว่าค่าดังกล่าวส่งผลกระทบอย่างมาก

ต่ออัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งซึ่งในจุดนี้อาจส่งให้ผลเกิดความผิดพลาดเมื่อนำค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จากโรงงานผลิตน้ำแข็งหลอด

3. ในการคำนวณค่าคุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุต่างๆ เป็นค่าโดยประมาณซึ่งในความเป็นจริงวัสดุอุปกรณ์ที่ใช้อาจมีคุณสมบัติไม่ตรงกับที่ได้ทำการสมมุติขึ้น จากข้อจำกัดทางด้านข้อมูลรายละเอียดเชิงลึกในส่วนประกอบต่างๆ ของเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดที่ทางบริษัทผู้ผลิตเครื่องผลิตน้ำแข็งหลอดไม่สามารถนำข้อมูลดังกล่าวมาเปิดเผยได้ ซึ่งจุดนี้ส่งผลให้เกิดความผิดพลาดในการคำนวณ

4. ในงานวิจัยนี้ทำการศึกษาเฉพาะท่อผลิตน้ำแข็งหลอดแบบผิวเรียบเท่านั้น ดังนั้นหากจะทำการศึกษาการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในกรณีที่ท่อผลิตน้ำแข็งมีผิวด้านนอกเป็นผิวขรุขระต้องเปลี่ยนไปใช้สมการความสัมพันธ์เพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนในขณะเดือดของแอมโมเนียบนพื้นผิวท่อแบบขรุขระ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ภูวนาถ กาบคำ. การศึกษาเพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพการผลิตน้ำแข็งหลอด. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2548.

ภาษาอังกฤษ

Bayazitoğlu, Yildiz and Özişik, M. Necati. Element of Heat Transfer. Singapore : McGraw-Hill Book, 1998.

Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P. Numerical Methods for Engineers with Software and Programming Applications. Fourth Edition. Singapore : McGraw-Hill Book, 2003.

Cheng, Chin-Hsiang and Shiu, Chiuan-Che. Frost formation and frost crystal growth on cold plate in atmospheric air flow. International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002): 4289-4303.

Cheung, F.B. and Cha, S.W. Finite-difference analysis of growth and decay of freeze coat on a continuous moving cylinder. Numerical Heat Transfer 12 (1987): 41-56.

Hildebrand, Francis B. Advanced Calculus for Applications. Second Edition. New Jersey : Prentice-Hall, 1976.

Incropera, Frank P. and Dewitt, David P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Fifth Edition. New York : John-Wiley & Sons, 2002.

Ismail, Kamal A.R. and da Silva, Maria das GraÇas, E. Numerical solution of the phase change problem around a horizontal cylinder in the presence of natural convection in the mely region. International Journal of Heat and Mass Transfer 46 (2003): 1791-1799.

Kreyszig, Erwin. Advanced Engineering Mathematics. 8th Edition. Singapore : John-Wiley & Sons, 1999.

Lamberg, Piia, Lehtiniemi, Reijo, Henell and Anna-Maria. Numerical and experimental investigation of melting and freezing process in phase change material storage. International Journal of Thermal Sciences 43 (2004): 277-287.

Lee, Kwan-Soo, Jhee, Sung, and Yang, Dong-Keun. Prediction of the frost formation on a cold flat surface. International Journal of Heat and Mass Transfer 46 (2003): 3789-3796.

Özişik, M. Necati. Heat Transfer A Basic Approach. Singapore : McGraw-Hill Book, 1985.

Poulikakos, D. Conduction heat transfer. New Jersey : Prentice-Hall, Inc, 1994.

Qin, Frank G.F., Zhao, Jian Chao, Russell, Andrew, B., Chen, Xiao Dong, Chen, John J., and Robertson, Lindsay. Simulation and experiment of the unsteady heat transport in the onset time of nucleation and crystallization of ice from the subcooled solution. International Journal of Heat and Mass Transfer 46 (2003): 3221-3231.

Thome, J.R. Enhanced boiling heat transfer. New York : Hermispere Publishing Corporation, 1990.

Wylen, Gordon, Van, Sonntag, Richard and Borgnakke, Claus. Fundamentals of Classical Thermadynamics. Fourth Edition. New York : John-Wiley & Sons, 1994.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การเปลี่ยนรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในการวิเคราะห์โดยวิธีซิมิลาร์ริตี

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_s = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial T_s}{\partial x} \qquad \text{(ก.1)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s C_{pS}} \qquad \text{(ก.2)}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$T_s(0,t) \qquad ;\ k_s\frac{\partial T_s}{\partial x} = k_w\frac{\partial T_w}{\partial x} \qquad \text{(ก.3a)}$$

$$;\ T_s = T_w \qquad \text{(ก.3b)}$$

$$T_s(-\delta,t) \qquad ;\ -k_s\frac{\partial T_s}{\partial x} = \rho_s \Delta h \frac{d\delta}{dt} \qquad \text{(ก.4a)}$$

$$;\ T_s = T_f \qquad \text{(ก.4b)}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_s(x,0) \qquad ;\ \delta = 0 \qquad \text{(ก.5)}$$

กำหนดให้

$$\Delta x = \delta(t) \qquad \text{(ก.6)}$$

$$\Delta T_s = T_f - T_s \qquad \text{(ก.7)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{\alpha_s}\frac{\Delta T_s}{t} \sim \frac{\Delta T_s}{(\delta(t))^2} \qquad \text{(ก.8)}$$

$$\delta(t) \sim (\alpha_s t)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(ก.9)}$$

$$\frac{x}{\delta(t)} = \frac{x}{(\alpha_s t)^{1/2}} \qquad \text{(ก.10)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\eta = \frac{x}{\sigma(\alpha_s \cdot t)^{1/2}} = \frac{x}{\delta} \qquad ;\ \sigma = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{(ก.11)}$$

จากสมการ (ก.11) จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ก.1) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{dT_s}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(-\frac{x}{2\sigma\alpha_s^{1/2}t^{3/2}}\right)\frac{dT_s}{d\eta} \tag{ก.12}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = \frac{dT_s}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{1}{\sigma(\alpha_s t)^{1/2}}\right)\frac{dT_s}{d\eta} \tag{ก.13}$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}\right)\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\sigma^2\alpha_s t}\frac{d^2T_s}{d\eta^2} \tag{ก.14}$$

เมื่อนำสมการ (ก.11) และ (ก.13) ไปแทนค่าในสมการ (ก.1) จะได้ว่า

$$\frac{d^2T_s}{d\eta^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{dT_s}{d\eta} = 0 \tag{ก.15}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \tag{ก.16}$$

จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ก.15) ได้เป็น

$$\frac{d^2\theta_s}{d\eta^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{d\theta_s}{d\eta} = 0 \tag{ก.17}$$

จากสมการ (ก.12) ,(ก.13) และ (ก.16) จะสามารถเปลี่ยนสมการ (ก.4a) และ (ก.4b) ได้เป็น

η = -1 ; $\frac{d\theta_s}{d\eta} = -\frac{\sigma^2}{2}Ste$ (ก.18a)

; θ_S = 1 (ก.18b)

เมื่อกำหนดให้ *Stefan number* $(Ste) = \frac{\Delta h}{C_{pS}(T_f - T_O)}$ (ก.19)

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \tag{ก.20}$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha_w = \frac{k_w}{\rho_w C_{pW}}$ (ก.21)

เงื่อนไขขอบเขต

$T_w(0,t)$; $k_s\frac{\partial T_s}{\partial x} = k_w\frac{\partial T_w}{\partial x}$ (ก.22a)

, $T_w = T_s$ (ก.22b)

$T_w(D,t)$; $T_w = T_0$; $D \to \infty$ (ก.23)

เงื่อนไขเวลา

$$T_w(x,0) \qquad ; \; T_w = T_0 \tag{ก.24}$$

จากสมการ (ก.11) จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ก.20)ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{dT_w}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(-\frac{x}{2\sigma \alpha_s^{1/2} t^{3/2}} \right) \frac{dT_w}{d\eta} \tag{ก.25}$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{dT_w}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{1}{\sigma (\alpha_s t)^{1/2}} \right) \frac{dT_w}{d\eta} \tag{ก.26}$$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T_w}{\partial x} \right) \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\sigma^2 \alpha_s t}\frac{d^2 T_w}{d\eta^2} \tag{ก.27}$$

เมื่อนำสมการ (ก.25) และ (ก.27) ไปแทนค่าในสมการ (ก.20) จะได้ว่า

$$\frac{d^2 T_w}{d\eta^2} + \frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta \right) \frac{dT_w}{d\eta} = 0 \tag{ก.28}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_w = \frac{T_w - T_O}{T_f - T_O} \tag{ก.29}$$

จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ก.28) ได้เป็น

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\eta^2} + \frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta \right) \frac{d\theta_w}{d\eta} = 0 \tag{ก.30}$$

จากสมการ (ก.13) ,(ก.25) และ (ก.29) จะจัดรูปสมการ (ก.22a) , (ก.22b) และ (ก.23) ได้เป็น

$$\eta = 0 \qquad ; \; \frac{k_s}{k_w}\frac{d\theta_s}{d\eta} = \frac{d\theta_w}{d\eta} \tag{ก.31a}$$

$$; \; \theta_s(0) = \theta_w(0) \tag{ก.31b}$$

$$\eta \to \infty \qquad ; \; \theta_w = 0 \tag{ก.32}$$

ภาคผนวก ข

การอินทิเกรตสมการในการวิเคราะห์โดยวิธีซิมิลาร์ริตี

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น

$$\frac{d^2\theta_s}{d\eta^2}+\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{d\theta_s}{d\eta}=0 \quad (ข.1)$$

เงื่อนไขขอบเขต

η = -1 ; $\frac{d\theta_s}{d\eta}=-\frac{\sigma^2}{2}Ste$ (ข.2a)

; θ_S = 1 (ข.2b)

$\eta=0$; $\frac{k_s}{k_w}\frac{d\theta_s}{d\eta}=\frac{d\theta_w}{d\eta}$ (ข.3a)

; $\theta_s(0)=\theta_w(0)$ (ข.3b)

โดยที่ *Stefan number* $(Ste)=\frac{\Delta h}{C_{pS}\left(T_f-T_O\right)}$ (ข.4)

เมื่อกำหนดให้

$$P=\frac{d\theta_s}{d\eta} \quad (ข.5)$$

เมื่อนำสมการ (ข.5) แทนลงในสมการ (ข.1) จะได้ว่า

$$\frac{dP}{d\eta}+\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)P \quad (ข.6)$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{dP}{P}=-\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)d\eta \quad (ข.7)$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (ข.7) จะได้

$\ln P=-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2+A$; A = ค่าคงที่ (ข.8)

$$P=\frac{d\theta_s}{d\eta}=A.\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \quad (ข.9)$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (ข.9) จาก $\eta=0$ ถึง $\eta=\xi$ (ค่าใดๆของ η)

$$\left[\theta_s\right]_{\eta=0}^{\eta=\xi} = A\int_{\eta=0}^{\eta=\xi} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta \qquad (ข.10)$$

แทนสมการ (ข.2b) และ (ข.3b) ลงในสมการ (ข.10) เพื่อหาค่าของ A จะได้

$$A = \frac{1-\theta_s(0)}{\int_0^{-1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta} \qquad (ข.11)$$

จากนั้นแทนค่า A จากสมการ (ข.11) ลงในสมการ (ข.10) จะได้ว่า

$$\left[\theta_s\right]_{\eta=0}^{\eta=\xi} = \left[1-\theta_s(0)\right]\frac{\int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta}{\int_0^{-1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta} \qquad (ข.12)$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตสมการ (ข.12)

$$\theta_s(\eta) = \theta_s(0) + \left[\theta_s(0)-1\right]\frac{erf\left(\frac{\sigma}{2}\eta\right)}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \qquad (ข.13)$$

เมื่อแทนค่า A จากสมการ (ข.11) ลงในสมการ (ข.9) จะได้

$$\frac{d\theta_s}{d\eta} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\left[\theta_s(0)-1\right]}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \qquad (ข.14)$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น

$$\frac{d^2\theta_w}{d\eta^2} + \frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)\frac{d\theta_w}{d\eta} = 0 \qquad (ข.15)$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{k_s}{k_w}\frac{d\theta_s}{d\eta} = \frac{d\theta_w}{d\eta} \qquad (ข.16a)$$

$$; \quad \theta_s(0) = \theta_w(0) \qquad (ข.16b)$$

$$\eta \to \infty \quad ; \quad \theta_w = 0 \qquad (ข.17)$$

เมื่อกำหนดให้

$$G = \frac{d\theta_w}{d\eta} \qquad (ข.18)$$

เมื่อนำสมการ (ข.18) แทนลงในสมการ (ข.15) จะได้ว่า

$$\frac{dG}{d\eta}+\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)G=0 \tag{ข.19}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{dG}{G}=-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{2}\eta\right)d\eta \tag{ข.20}$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (ข.20) จะได้

$$\ln G=-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\left(\frac{\sigma^2}{4}\eta\right)+B \qquad \text{; B = ค่าคงที่} \tag{ข.21}$$

$$G=\frac{dG}{d\eta}=B.\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \tag{ข.22}$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (ข.22) จาก $\eta=0$ ถึง $\eta=\xi$ (ค่าใดๆของ η)

$$\left[\theta_w\right]_{\eta=0}^{\eta=\xi}=B\int_{\eta=0}^{\eta=\xi}\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta \tag{ข.23}$$

แทนสมการ (ข.16b) และ (ข.17) ลงในสมการ (ข.23) เพื่อหาค่าของ B จะได้ว่า

$$B=\frac{-\theta_w(0)}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta} \tag{ข.24}$$

จากนั้นแทนค่า B (ข.24) ลงไปในสมการ (ข.23) จะได้ว่า

$$\theta_w-\theta_w(0)=\frac{-\theta_w(0)\int_0^\xi \exp\left(\frac{-\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)d\eta} \tag{ข.25}$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตสมการ (ข.25)

$$\theta_w(\eta)=\left(\theta_w(0)\right)\left[1-erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\frac{\sigma}{2}\eta\right)\right] \tag{ข.26}$$

เมื่อแทนค่า B ที่หาได้ลงในสมการ (ข.22) จะได้

$$\frac{d\theta_w}{d\eta}=-\left(\theta_w(0)\right)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\right)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \tag{ข.27}$$

แทนสมการ (ข.14) และ (ข.27) ลงในสมการ (ข.16a)

$$\left(\frac{k_s}{k_w}\right)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\left[\theta_s(0)-1\right]}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right)=-\left(\theta_w(0)\right)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\right)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\frac{\sigma^2}{4}\eta^2\right) \tag{ข.28}$$

จากสมการ (ข.16b) จะได้ว่า

$$\theta_w(0)=\theta_s(0)=\frac{1}{1+\left(\frac{k_w}{k_s}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_w}}\right)erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \qquad (ข.29)$$

กำหนดให้

$$R_1=\frac{k_w}{k_s} \qquad (ข.30)$$

$$R_2=\frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \qquad (ข.31)$$

นำสมการ (ข.30) และ (ข.31) แทนลงในสมการ (ข.29)

$$\theta_w(0)=\theta_s(0)=\frac{1}{1+\sqrt{R_1.R_2}.erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \qquad (ข.32)$$

แทนค่าจากสมการ (ข.2a)

$$\frac{[\theta_s(0)-1]}{erf\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}(-1)^2\right)=-\frac{\sigma^2}{2}Ste \qquad (ข.33)$$

แทนค่า $\theta_s(0)$ จากสมการ (ข.32) จะได้ว่า

$$1-\frac{2\left(\sqrt{R_1.R_2}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}\right)}{\sqrt{\pi}.\sigma.Ste.\left(1+\sqrt{R_1.R_2}.\exp\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)}=0 \qquad (ข.34)$$

ภาคผนวก ค

การประยุกต์เทอมไร้มิติเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ ในการวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

ค.1 การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดฉาก

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_s = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \qquad \text{(ค.1)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s C_{pS}} \qquad \text{(ค.2)}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$x = 0 \quad ; \; k_s\frac{\partial T_s}{\partial x} = k_w\frac{\partial T_w}{\partial x} \qquad \text{(ค.3a)}$$

$$; \; T_s = T_w \qquad \text{(ค.3b)}$$

$$x = -\delta \quad ; \; -k_s\frac{\partial T_s}{\partial x} = \rho_s \Delta h \frac{d\delta}{dt} \qquad \text{(ค.4a)}$$

$$; \; T_s = T_f \qquad \text{(ค.4b)}$$

เงื่อนไขเวลา

$$t = 0 \quad ; \; \delta = 0 \qquad \text{(ค.5)}$$

กำหนดเทอมไร้มิติ

$$\hat{t} = \frac{t\alpha_s}{D^2} \qquad \text{(ค.6)}$$

$$\hat{x}_s = \frac{x}{\delta} \qquad \text{(ค.7)}$$

$$\varphi = \frac{\delta}{D} \qquad \text{(ค.8)}$$

หาอนุพันธ์ของเทอมไร้มิติได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s}{D^2} \qquad \text{(ค.9)}$$

$$\frac{\partial \hat{x}_s}{\partial t} = -\frac{x}{\delta^2}\frac{d\delta}{dt} \tag{ค.10}$$

$$\frac{\partial \hat{x}_s}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \tag{ค.11}$$

$$\frac{d\delta}{d\hat{t}} = D\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{ค.12}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s}{D^2}\frac{d\delta}{d\hat{t}} = \frac{\alpha_s}{D}\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{ค.13}$$

จากสมการ (ค.6) ถึง (ค.13) จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ค.1) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial T_s}{\partial \hat{x}_s}\frac{\partial \hat{x}_s}{\partial t} + \frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \left(-\frac{\hat{x}_5}{\delta}\frac{\alpha_s}{D}\frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial T_s}{\partial \hat{x}_s} + \frac{\alpha_s}{D^2}\frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}} \tag{ค.14}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = \frac{\partial T_s}{\partial \hat{x}_s}\frac{\partial \hat{x}_s}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_s}{\partial \hat{x}_s} \tag{ค.15}$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_s}\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}\right)\frac{\partial \hat{x}_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}\right)\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 T_s}{\partial \hat{x}_s{}^2} \tag{ค.16}$$

เมื่อนำสมการ (ค.8) ,(ค.14) และ (ค.16) ไปแทนค่าในสมการ (ค.1) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial \hat{x}_s{}^2} + \left(\hat{x}_s\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial T_s}{\partial \hat{x}_s} - \varphi^2\frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{ค.17}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \tag{ค.18}$$

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \tag{ค.19}$$

$$R_2 = \frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \tag{ค.20}$$

$$\textit{Stefan number}\ (Ste) = \frac{\Delta h}{C_{pS}(T_f - T_O)} \tag{ค.21}$$

จากสมการ (ค.18) จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ค.17) ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \hat{x}_s{}^2} + \left(\hat{x}_s\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - \varphi^2\frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{ค.22}$$

เมื่อนำสมการ (ค.8) , (ค.13), (ค.15). (ค.18) และ (ค.21) แทนในสมการ (ค.4a) และ (ค.4b) จะเปลี่ยนรูปสมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\hat{x}_s = -1 \qquad ; \ \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} + Ste.\varphi.\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = 0 \tag{ค.23a}$$

$$; \ \theta_s = 1 \tag{ค.23b}$$

แทนสมการ (ค.7), (ค.8) ลงในสมการ (ค.5) จะได้สมการเงื่อนไขเวลาเป็น

$$\hat{t} = 0 \qquad ; \ \varphi = 0 \tag{ค.24}$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \tag{ค.25}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\alpha_w = \frac{k_w}{\rho_w C_{pW}} \tag{ค.26}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$x = 0 \qquad ; \ k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \tag{ค.27a}$$

$$; \ T_s = T_w \tag{ค.27b}$$

$$x = D \qquad ; \ -k_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = h_0 \left(T_w - T_0\right) \tag{ค.28}$$

เงื่อนไขเวลา

$$t = 0 \qquad ; \ T_w = T_0 \tag{ค.29}$$

กำหนดเทอมไร้มิติ

$$\hat{t} = \frac{t\alpha_s}{D^2} \tag{ค.6}$$

$$\hat{x}_w = \frac{x}{D} \tag{ค.30}$$

$$\varphi = \frac{\delta}{D} \tag{ค.8}$$

หาอนุพันธ์ของเทอมไร้มิติได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s}{D^2} \tag{ค.9}$$

$$\frac{\partial \hat{x}_w}{\partial x} = \frac{1}{D} \tag{ค.31}$$

$$\frac{d\delta}{d\hat{t}} = D\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{ค.12}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s}{D^2}\frac{d\delta}{d\hat{t}} = \frac{\alpha_s}{D}\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{ค.13}$$

จากสมการข้างต้นจะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ค.25) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial T_w}{\partial \hat{x}_w}\frac{\partial \hat{x}_w}{\partial t} + \frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\alpha_s}{D^2}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}} \tag{ค.32}$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial \hat{x}_w}\frac{\partial \hat{x}_w}{\partial x} + \frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{x}_w} \tag{ค.33}$$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_w}\left(\frac{\partial T_w}{\partial x}\right)\frac{\partial \hat{x}_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial T_w}{\partial x}\right)\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_w}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{x}_w}\right) = \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2 T_w}{\partial \hat{x}_w{}^2} \tag{ค.34}$$

เมื่อนำสมการ (ค.19) ,(ค.20) ,(ค.32) และ (ค.34) ไปแทนค่าในสมการ (ค.25) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial \hat{x}_w{}^2} - \frac{R_2}{R_1}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{ค.35}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_w = \frac{T_W - T_O}{T_F - T_O} \tag{ค.36}$$

จะสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (ค.35) ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \hat{x}_w{}^2} - \frac{R_2}{R_1}\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{t}} = 0 \tag{ค.37}$$

แทนสมการ (ค.8), (ค.15), (ค.18), (ค.19), (ค.30), (ค.33) และ (ค.36) ลงในสมการ (ค.27a) และ (ค.27b) จะได้สมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\hat{x}_w = 0 \qquad ; \ \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - R_1.\varphi.\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} = 0 \tag{ค.38a}$$

$$; \ \theta_s = \theta_w \tag{ค.38b}$$

แทนสมการ (ค.7), (ค.8), (ค.15), (ค.18), (ค.19), (ค.33) และ (ค.36) ลงในสมการ (ค.3a) และ (ค.3b) จะได้สมการเงื่อนไขขอบเขตของบริเวณที่เป็นน้ำแข็งดังนี้

$$\hat{x}_s = 0 \qquad ; \ \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{x}_s} - R_1.\varphi.\frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} = 0 \tag{ค.39a}$$

$$; \ \theta_s = \theta_w \tag{ค.39b}$$

นำสมการ (ค.30), (ค.33) และ (ค.36) แทนในสมการ (ค.28) จะเปลี่ยนรูปสมการเงื่อนไขขอบเขตได้เป็น

$$\hat{x}_w = 1 \qquad ; \ \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{x}_w} - Bi.\theta_w = 0 \tag{ค.40}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\text{Biot number } (Bi) = \frac{h_0 D}{k_w} \tag{ค.41}$$

แทนสมการ (ค.6) และ (ค.36) ลงในสมการ (ค.29) จะได้สมการเงื่อนไขเวลาเป็น

$$\hat{t} = 0 \qquad ; \ \theta_w = 0 \tag{ค.42}$$

ค.2 การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว

บริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_s = f(r,t)$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t} \tag{ค.43}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$T_s = (s_1, t) \qquad ; \ k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \tag{ค.44a}$$

$$; \ T_s = T_w \tag{ค.44b}$$

$$T_s = (\beta, t) \qquad ; \ -k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = \rho_s \Delta h \frac{d\delta}{dt} \tag{ค.45a}$$

$$; \ T_s = T_f \tag{ค.45b}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_s = (r, 0) \qquad ; \ \delta = 0 \tag{ค.46}$$

เมื่อกำหนดตัวแปรในเทอมไร้มิติดังต่อไปนี้

$$\hat{t} = \frac{\alpha_s t}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{\alpha_s t}{D^2} \tag{ค.47}$$

$$\hat{r}_s = \frac{r - s_1}{s_1 - \beta} = \frac{r - s_1}{\delta} \tag{ค.48}$$

$$\varphi = \frac{s_1 - \beta}{s_2 - s_1} = \frac{\delta}{D} \tag{ค.49}$$

$$\psi = \frac{s_1}{D} \quad \text{(ค.50)}$$

สามารถหาอนุพันธ์ของเทอมไร้มิติดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{d\delta}{d\hat{t}} = D\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \quad \text{(ค.51)}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\alpha_s}{D}\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \quad \text{(ค.52)}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s t}{D^2} \quad \text{(ค.53)}$$

$$\frac{\partial \hat{r}_s}{\partial t} = -\frac{\alpha_s \hat{r}_s}{\varphi D^2}\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \quad \text{(ค.54)}$$

$$\frac{\partial \hat{r}_s}{\partial r} = \frac{1}{\delta} \quad \text{(ค.55)}$$

จากสมการ (ค.51) ถึง (ค.55) เมื่อนำไปแทนค่าในสมการตั้งต้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = -\left(\frac{\alpha_s \hat{r}_s}{\varphi . D^2}\frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial T_s}{\partial \hat{r}_s} + \left(\frac{\alpha_s}{D^2}\right)\frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}} \quad \text{(ค.56)}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_s}{\partial \hat{r}_s} \quad \text{(ค.57)}$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 T_s}{\partial \hat{r}_s^{\,2}} \quad \text{(ค.58)}$$

ทำการจัดรูปสมการตั้งต้นโดยอาศัยสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial \hat{r}_s^{\,2}} + \left(\frac{\varphi}{\psi + \varphi . \hat{r}_s} + \hat{r}_s \varphi \frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial T_s}{\partial \hat{r}_s} - \varphi^2 \frac{\partial T_s}{\partial \hat{t}} = 0 \quad \text{(ค.59)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_s = \frac{T_s - T_0}{T_f - T_0} \quad \text{(ค.18)}$$

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \quad \text{(ค.19)}$$

$$\textit{Stefan number } (Ste) = \frac{\Delta h}{C_{pS}\left(T_f - T_O\right)} \quad \text{(ค.21)}$$

นำตัวแปรดังกล่าวข้างต้นแทนค่าลงในระบบสมการสำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะได้

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_s = f\left(\hat{r}_s,\hat{t}\right)$

$$\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\hat{r}_s{}^2}+\left(\frac{\varphi}{\psi+\varphi.\hat{r}_s}+\hat{r}_s\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}}\right)\frac{\partial\theta_s}{\partial\hat{r}_s}-\varphi^2\frac{\partial\theta_s}{\partial\hat{t}}=0 \qquad \text{(ค.60)}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\theta_s\left(-1,\hat{t}\right) \quad ; \; \frac{\partial\theta_s}{\partial\hat{r}_s}+Ste\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}}=0 \qquad \text{(ค.61a)}$$

$$; \; \theta_s = 1 \qquad \text{(ค.61b)}$$

$$\theta_s\left(0,\hat{t}\right) \quad ; \; \frac{\partial\theta_s}{\partial\hat{r}_s}=R_1\varphi\frac{\partial\theta_w}{\partial\hat{r}_w} \qquad \text{(ค.62a)}$$

$$; \; \theta_s = \theta_w \qquad \text{(ค.62b)}$$

เงื่อนไขเวลา

$$\theta_s\left(\hat{r}_s,0\right) \quad ; \; \varphi = 0 \qquad \text{(ค.63)}$$

บริเวณที่เป็นผนังท่อ

สมการตั้งต้น เมื่อ $T_w = f(r,t)$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_w}{\partial r}=\frac{1}{\alpha_w}\frac{\partial T_w}{\partial r} \qquad \text{(ค.64)}$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$T_w = \left(s_1,t\right) \quad ; \; k_s\frac{\partial T_s}{\partial r}=k_w\frac{\partial T_w}{\partial r} \qquad \text{(ค.65a)}$$

$$; \; T_s = T_w \qquad \text{(ค.65b)}$$

$$T_w = \left(s_2,t\right) \quad ; \; -k_w\frac{\partial T_w}{\partial r}=h_0\left(T_w-T_0\right) \qquad \text{(ค.67)}$$

เงื่อนไขเวลา

$$T_w = \left(r,0\right) \quad ; \; T_w = T_0 \qquad \text{(ค.68)}$$

เมื่อกำหนดตัวแปรในเทอมไร้มิติดังต่อไปนี้

$$\hat{t}=\frac{\alpha_s t}{\left(s_2-s_1\right)^2}=\frac{\alpha_s t}{D^2} \qquad \text{(ค.47)}$$

$$\hat{r}_w=\frac{r-s_1}{s_2-s_1}=\frac{r-s_1}{D} \qquad \text{(ค.69)}$$

$$\varphi=\frac{s_1-\beta}{s_2-s_1}=\frac{\delta}{D} \qquad \text{(ค.49)}$$

$$\psi = \frac{s_1}{D} \qquad (ค.50)$$

สามารถหาอนุพันธ์ของเทอมไร้มิติดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{d\delta}{d\hat{t}} = D\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \qquad (ค.51)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\alpha_s}{D}\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \qquad (ค.52)$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\alpha_s t}{D^2} \qquad (ค.53)$$

$$\frac{\partial \hat{r}_w}{\partial r} = \frac{1}{D} \qquad (ค.70)$$

จากสมการข้างต้นเมื่อนำไปแทนค่าในสมการตั้งต้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\alpha_s}{D^2}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}} \qquad (ค.71)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial r} = \frac{1}{D}\frac{\partial T_w}{\partial \hat{r}_w} \qquad (ค.72)$$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial r^2} = \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2 T_w}{\partial \hat{r}_w{}^2} \qquad (ค.73)$$

ทำการจัดรูปสมการตั้งต้นโดยอาศัยสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial \hat{r}_w{}^2} + \left(\frac{1}{\psi + \hat{r}_w}\right)\frac{\partial T_w}{\partial \hat{r}_w} - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_w}\right)\frac{\partial T_w}{\partial \hat{t}} = 0 \qquad (ค.74)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta_w = \frac{T_W - T_O}{T_F - T_O} \qquad (ค.36)$$

$$R_1 = \frac{k_w}{k_s} \qquad (ค.19)$$

$$R_2 = \frac{\rho_w C_{p_w}}{\rho_s C_{p_s}} \qquad (ค.20)$$

Biot number $(Bi) = \dfrac{h_0 D}{k_w}$ (ค.41)

นำตัวแปรดังกล่าวข้างต้นแทนค่าลงในระบบสมการสำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อจะได้

สมการตั้งต้น เมื่อ $\theta_w = f(\hat{r}_w, \hat{t})$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \hat{r}_w{}^2} + \left(\frac{1}{\psi + \hat{r}_w} \right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{t}} = 0 \qquad (ค.75)$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\theta_w = (0, \hat{t}) \qquad ; \ \frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{r}_s} - R_1 \varphi \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} = 0 \qquad (ค.76a)$$

$$; \ \theta_s = \theta_w \qquad (ค.76b)$$

$$\theta_w = (1, \hat{t}) \qquad ; \ \frac{\partial \theta_w}{\partial \hat{r}_w} - Bi\,\theta_w = 0 \qquad (ค.77)$$

เงื่อนไขเวลา

$$\theta_w = (\hat{r}_w, 0) \qquad ; \ \theta_w = 0 \qquad (ค.78)$$

ภาคผนวก ง

การประยุกต์สมการผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยาย

ในการประยุกต์สมการผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบปริยายจะแสดงสมการในรูปแบบสมการพื้นฐาน เนื่องจากทั้งในการพิจารณาในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้วมีรูปแบบของสมการที่เหมือนกัน โดยจะกำหนดตัวแปรขึ้นเพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้คำนวณซึ่งจะแยกวิเคราะห์ออกเป็นส่วนๆดังนี้

ง.1 สมการตั้งต้น

เมื่อ $\theta = f(\eta, \hat{t})$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + K\frac{\partial\theta}{\partial\eta} - L\frac{\partial\theta}{\partial\hat{t}} = 0 \qquad (ง.1)$$

ในการประยุกต์สมการผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (ง.11) จะใช้การประมาณจากผลต่างแบบไปข้างหน้า (Forward difference) ด้วยความผิดพลาด $O(\hat{t})$ เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาดังนี้

$$\frac{\partial\theta}{\partial\hat{t}} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta\hat{t}} \qquad (ง.2)$$

ในพจน์อนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะ จะใช้การประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบตรงกลาง (Central difference) ด้วยความผิดพลาด $O(\eta^2)$ ดังนี้

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} \qquad (ง.3)$$

ในพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับระยะ จะใช้การประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบตรงกลางด้วยความผิดพลาด $O(\eta^2)$ ดังนี้

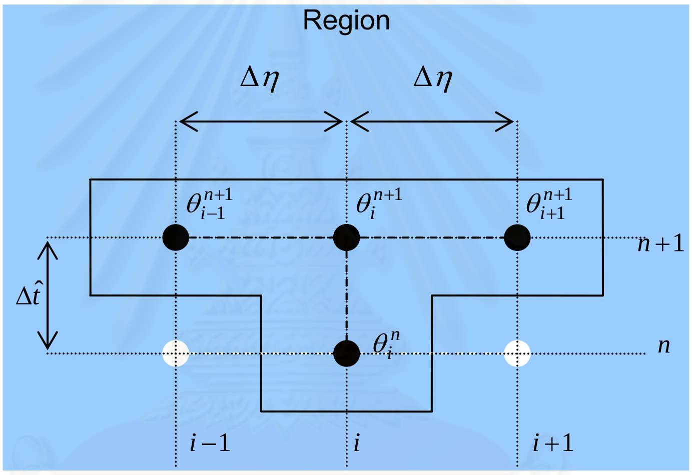
$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \qquad (ง.4)$$

จากนั้นนำสมการความสัมพันธ์ (ง.2), (ง.3) และ (ง.4) ไปแทนลงในสมการตั้งต้น (ง.1) จะได้

$$\frac{\theta_{i+1}^{n+1}-2\theta_i^{n+1}+\theta_{i-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2}+K\left(\frac{\theta_{i+1}^{n+1}-\theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\eta}\right)-L\left(\frac{\theta_i^{n+1}-\theta_i^n}{\Delta\hat{t}}\right)=0 \tag{ง.5}$$

จากนั้นทำการจัดรูปสมการให้ง่ายต่อการนำไปคำนวณในรูปแบบสมการสามแถวทแยง จะได้สมการในรูปพื้นฐานดังต่อไปนี้

$$-\left(\frac{\Delta\hat{t}}{L\Delta\eta^2}-\frac{K\Delta\hat{t}}{2L\Delta\eta}\right)\theta_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{2\Delta\hat{t}}{L\Delta\eta^2}\right)\theta_i^{n+1}-\left(\frac{\Delta\hat{t}}{L\Delta\eta^2}+\frac{K\Delta\hat{t}}{2L\Delta\eta}\right)\theta_{i+1}^{n+1}=\theta_i^n \tag{ง.6}$$



รูปที่ ง.1 จุดต่อที่อยู่ภายในบริเวณขอบเขตที่พิจารณา

สมการดังกล่าวสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ทั้งในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง และผนังท่อ ซึ่งรวมถึงในการพิจารณาปัญหาทั้งแบบระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งในแต่ละกรณีจะมีการกำหนดค่าตัวแปรต่าง ๆดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์สมการตั้งต้นโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดฉาก

1.1 สมการตั้งต้นสำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

เมื่อ $\theta_s = f\left(\hat{x}_s,\hat{t}\right)$

$$K_s = \hat{x}_s\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \tag{ง.7}$$

$$L_s = \varphi^2 \tag{ง.8}$$

1.2 สมการตั้งต้นสำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

เมื่อ $\theta_w = f\left(\hat{x}_w, \hat{t}\right)$

$$K_w = 0 \qquad (ง.9)$$

$$L_w = \frac{R_2}{R_1} \qquad (ง.10)$$

2. การวิเคราะห์สมการตั้งต้นโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในระบบพิกัดเชิงขั้ว

2.1 สมการตั้งต้นสำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง

เมื่อ $\theta_s = f\left(\hat{r}_s, \hat{t}\right)$

$$K_s = \frac{\varphi}{\psi + \varphi.\hat{r}_{s\,i}^{\;n}} + \hat{r}_{s\,i}^{\;n}\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}} \qquad (ง.11)$$

$$L_s = \varphi^2 \qquad (ง.12)$$

2.2 สมการตั้งต้นสำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

เมื่อ $\theta_w = f(\hat{r}_w, \hat{t})$

$$K_w = \frac{1}{\psi + \hat{r}_{w\,i}^{\;n}} \qquad (ง.13)$$

$$L_w = \frac{R_2}{R_1} \qquad (ง.14)$$

โดยกำหนดให้

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{t}} = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta\hat{t}} \qquad (ง.15)$$

$$\varphi = \frac{\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n}{2} \qquad (ง.16)$$

ง.2 เงื่อนไขขอบเขต

ในการวิเคราะห์เงื่อนไขขอบเขตนั้นรูปแบบของสมการเงื่อนไขขอบเขตจะมีรูปแบบที่เหมือนกันทั้งในระบบพิกัดฉาก และ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว แต่จะแตกต่างกันที่โดเมนที่พิจารณาเท่านั้นตามระบบพิกัดที่พิจารณา โดยในการวิเคราะห์จะใช้ตัวแปร η แทนโดเมนของระยะโดยจะมีตัวห้อยเพื่อระบุว่าอยู่ในบริเวณใด สำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะใช้ S เป็นตัวห้อยในการระบุ และ W สำหรับในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง ซึ่งจะแยกพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตเป็นส่วนๆ ดังต่อไปนี้

1. เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัว

เมื่อ $\theta_s = f(\eta_s, \hat{t})$

$$\theta_s(-1,\hat{t}) \qquad ; \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_s} + Ste\varphi\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = 0 \tag{ง.17a}$$

$$; \ \theta_s = 1 \tag{ง.17b}$$

เมื่อประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบแบบไปข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(\eta_s{}^2)$ ในพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับระยะ จะได้ว่า

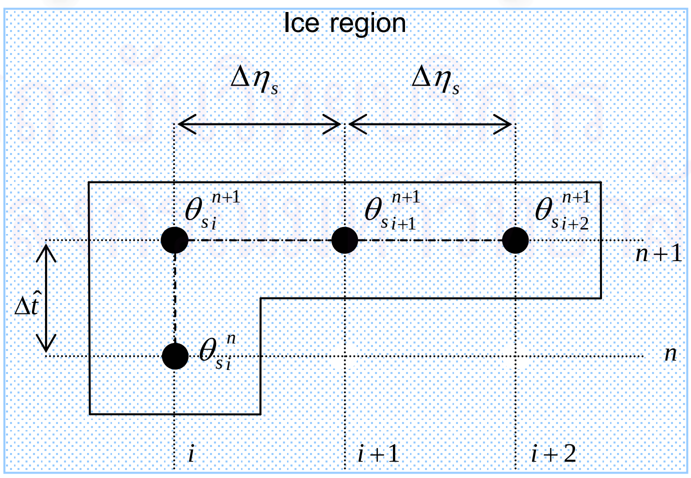
$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_s} = \frac{-\theta_{s\,i+2}^{\,n+1} + 4\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} - 3\theta_{s\,i}^{\,n+1}}{2\Delta\eta_s} \tag{ง.18}$$

ทำการแทนค่าจากสมการ (ง.15), (ง.16), (ง.17b) และ (ง.18) ลงไปสมการที่ (ง.17a) จะได้ว่า

$$\frac{-\theta_{s\,i+2}^{\,n+1} + 4\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} - 3}{2\Delta\eta_s} + Ste\left(\frac{\varphi_i^{n+1^2} - \varphi_i^{n^2}}{2\Delta\hat{t}}\right) = 0 \tag{ง.19}$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้สมการความสัมพันธ์เพื่อนำไปใช้ตรวจสอบค่าความหนาของน้ำแข็งในเทอมไร้มิติ (φ) ในโปรแกรมการคำนวณดังนี้

$$\varphi_i^{n+1} = \sqrt{\varphi_i^{n^2} + \frac{\Delta\hat{t}}{Ste\Delta\eta_s}\left(\theta_{s\,i+2}^{\,n+1} - 4\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} + 3\right)} \tag{ง.20}$$



รูปที่ ง.2 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณน้ำแข็งที่เกิดการแข็งตัว

2. เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อน

เมื่อ $\theta_w = f(\eta_w, \hat{t})$

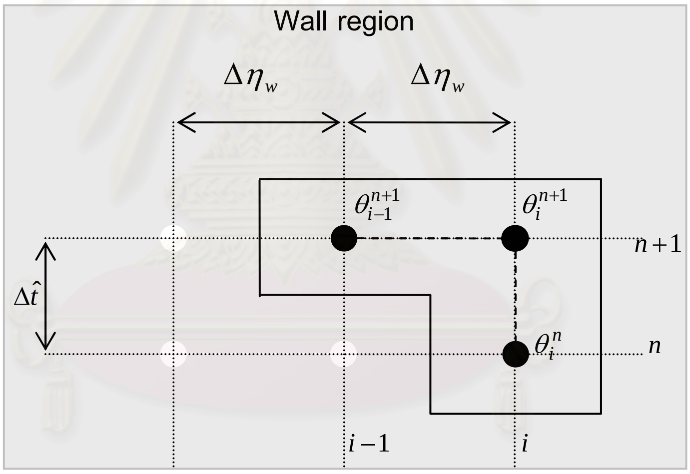
$$\theta_w = (1, \hat{t}) \qquad ; \; \frac{\partial \theta_w}{\partial \eta_w} + Bi\theta_w = 0 \tag{ง.21}$$

ในพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับระยะ จะใช้การประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบตรงกลางด้วยความผิดพลาด $O(\eta_w^{\ 2})$ ดังนี้

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \eta_w} = \frac{\theta_{wi+1}^{\ n+1} - \theta_{wi-1}^{\ n+1}}{2\Delta\eta_w} \tag{ง.22}$$

ทำการแทนค่าความสัมพันธ์ดังกล่าวลงไปสมการที่ (ง.21) จะได้

$$\theta_{wi+1}^{\ n+1} = \theta_{wi-1}^{\ n+1} - 2Bi\Delta\eta_w\theta_{wi}^{\ n+1} \tag{ง.23}$$



รูปที่ ง.3 จุดต่อที่อยู่บนขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อน

จากสมการตั้งต้นสำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ

$$-\left(\frac{\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w^{\ 2}} - \frac{K_w\Delta\hat{t}}{2L_w\Delta\eta_w}\right)\theta_{wi-1}^{\ n+1} + \left(1 + \frac{2\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w^{\ 2}}\right)\theta_{wi}^{\ n+1}$$
$$-\left(\frac{\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w^{\ 2}} + \frac{K_w\Delta\hat{t}}{2L_w\Delta\eta_w}\right)\theta_{wi+1}^{\ n+1} = \theta_{wi}^{\ n} \tag{ง.24}$$

นำความสัมพันธ์จากสมการ (ง.23) แทนลงในสมการตั้งต้นจะได้สมการสำหรับขอบเขตที่ขอบบริเวณผนังที่ถูกพาความร้อน ดังนี้

$$-\left(\frac{2\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w{}^2}\right)\theta_{w\,i-1}^{\;n+1}+\left(1+\frac{2\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w{}^2}+\frac{2Bi\Delta\hat{t}}{L_w\Delta\eta_w}+\frac{2BiK_w\Delta\hat{t}}{2L_w}\right)\theta_{w\,i}^{\;n+1}=\theta_{w\,i}^{\;n} \qquad (ง.25)$$

3. เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนัง

เมื่อ $\theta_w = f(\eta_w, \hat{t})$

$$\theta_w = (0,\hat{t}) \quad ; \; \frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_s} - R_1\varphi\frac{\partial\theta_w}{\partial\eta_w} = 0 \qquad (ง.26a)$$

$$; \; \theta_s = \theta_w \qquad (ง.26b)$$

กำหนดให้

$$J_s = \frac{1}{\varphi} \qquad (ง.27)$$

$$J_w = R_1 \qquad (ง.28)$$

เมื่อแทนสมการ (ง.27) และ (ง.28) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต (ง.26a) จะได้ว่า

$$J_s\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_s} = J_w\frac{\partial\theta_w}{\partial\eta_w} \qquad (ง.29)$$

จากสมการตั้งต้น (ง.1) สำหรับบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง เมื่อ $\theta_s = f(\eta_s, \hat{t})$

$$\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\eta_s{}^2} + K_s\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_s} - L_s\frac{\partial\theta_s}{\partial\hat{t}} = 0 \qquad (ง.30)$$

ทำการกระจายสมการแบบอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) จะสามารถเปลี่ยนรูปแต่ละพจน์ได้ดังนี้

ตัวประกอบน้ำหนัก	การกระจายแบบอนุกรมเทย์เลอร์	
[A]	$\theta_{s\,i}^{\;n} = \theta_{s\,i}^{\;n+1} - \frac{\partial\theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial\hat{t}}\Delta\hat{t} + \frac{\partial^2\theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial\hat{t}^2}\frac{\Delta\hat{t}^2}{2} + \ldots$	(ง.31)
[B]	$\theta_{s\,i-1}^{\;n} = \theta_{s\,i}^{\;n+1} - \frac{\partial\theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial\eta_s}\Delta\hat{x}_s + \frac{\partial^2\theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial\eta_s{}^2}\frac{\Delta\eta_s{}^2}{2} + \ldots$	(ง.32)

เมื่อคูณตัวประกอบน้ำหนักเข้ากับสมการที่ได้จากการกระจายแบบอนุกรมเทย์เลอร์ จากนั้นรวมสมการ (ง.31) และ (ง.32) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$A\theta_{s\,i}^{\;n} + B\theta_{s\,i-1}^{\;n+1} = (A+B)\theta_{s\,i}^{\;n+1} - A\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}}\Delta\hat{t}$$
$$+ A\frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}^2}\frac{\Delta\hat{t}^2}{2} - B\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \eta_s}\Delta\hat{x}_s + B\frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial {\eta_s}^2}\frac{\Delta {\eta_s}^2}{2} + .. \qquad (ง.33)$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial {\eta_s}^2}$ และ $\frac{\partial \theta_s}{\partial \hat{t}}$ ของสมการตั้งต้น (ง.30) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Sigma[weight]\frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial {\eta_s}^2} = 1 \qquad (ง.34)$$

$$\Sigma[weight]\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}} = -L_s \qquad (ง.35)$$

นำความสัมพันธ์ดังกล่าวไปเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (ง.33) จะได้ว่า

$$A = \frac{L}{\Delta\hat{t}} \qquad (ง.36)$$

$$B = \frac{2}{\Delta {\eta_s}^2} \qquad (ง.37)$$

นำค่าที่ได้แทนกลับลงไปในสมการ (ง.33)

$$\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}\right)\theta_{s\,i}^{\;n} + \left(\frac{2}{\Delta {\eta_s}^2}\right)\theta_{s\,i-1}^{\;n+1} = \left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}} + \frac{2}{\Delta {\eta_s}^2}\right)\theta_{s\,i}^{\;n+1} - (L_s)\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}}$$
$$+ \left(\frac{L_s\Delta\hat{t}}{2}\right)\frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}^2} - \left(\frac{2}{\Delta \eta_s}\right)\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \eta_s} + \frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial {\eta_s}^2} + \ldots \qquad (ง.38)$$

เมื่อกำหนดให้ $\left(\frac{L_s\Delta\hat{t}}{2}\right)\frac{\partial^2 \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \hat{t}^2} \approx 0$ และไม่พิจารณาเทอมที่มีออเดอร์สูงกว่านี้ จากนั้นทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่ายจะได้ว่า

$$\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}\right)\theta_{s\,i}^{\;n} + \left(\frac{2}{\Delta {\eta_s}^2}\right)\theta_{s\,i-1}^{\;n+1} = \left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}} + \frac{2}{\Delta {\eta_s}^2}\right)\theta_{s\,i}^{\;n+1} - \left(\frac{2}{\Delta \eta_s} + K_s\right)\frac{\partial \theta_{s\,i}^{\;n+1}}{\partial \eta_s} \qquad (ง.39)$$

จากนั้นคูณสมการ (ง.39) ด้วย $\frac{J_s}{\left(\frac{2}{\Delta \eta_s} + K_s\right)}$ จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$-\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{J_s\Delta\eta_s}{\left(2+K_s\Delta\eta_s\right)}\theta_{s\,i}^{\ n}-\left(\frac{2}{\Delta\eta_s^{\ 2}}\right)\frac{J_s\Delta\eta_s}{\left(2+K_s\Delta\eta_s\right)}\theta_{s\,i-1}^{\ n+1}$$
$$+\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}+\frac{2}{\Delta\eta_s^{\ 2}}\right)\frac{J_s\Delta\eta_s}{\left(2+K_s\Delta\eta_s\right)}\theta_{s\,i}^{\ n+1}=J_s\frac{\partial\theta_{s\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_s} \quad (ง.40)$$

จากสมการตั้งต้น (ง.1) สำหรับบริเวณที่เป็นผนังท่อ เมื่อ $\theta_w = f\left(\eta_w,\hat{t}\right)$

$$\frac{\partial^2\theta_w}{\partial\eta_w^{\ 2}}+K_w\frac{\partial\theta_w}{\partial\eta_w}-L_w\frac{\partial\theta_w}{\partial\hat{t}}=0 \quad (ง.41)$$

เมื่อกระจายสมการแบบอนุกรมเทย์เลอร์จะสามารถเปลี่ยนรูปแต่ละพจน์ได้ดังนี้

ตัวประกอบน้ำหนัก การกระจายแบบอนุกรมเทย์เลอร์

[C] $$\theta_{w\,i}^{\ n}=\theta_{w\,i}^{\ n+1}-\frac{\partial\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\hat{t}}\Delta\hat{t}+\frac{\partial^2\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\hat{t}^2}\frac{\Delta\hat{t}^2}{2}+\ldots \quad (ง.42)$$

[D] $$\theta_{w\,i+1}^{\ n}=\theta_{w\,i}^{\ n+1}+\frac{\partial\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_w}\Delta\hat{x}_w+\frac{\partial^2\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_w^{\ 2}}\frac{\Delta\eta_w^{\ 2}}{2}+\ldots \quad (ง.43)$$

ทำการคูณตัวประกอบน้ำหนักเข้ากับสมการที่ได้จากการกระจายแบบอนุกรมเทย์เลอร์ จากนั้นรวมสมการ (ง.42) และ (ง.43) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$C\theta_{w\,i}^{\ n}+D\theta_{w\,i+1}^{\ n+1}=\left(C+D\right)\theta_{w\,i}^{\ n+1}-C\frac{\partial\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\hat{t}}\Delta\hat{t}$$
$$+C\frac{\partial^2\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\hat{t}^2}\frac{\Delta\hat{t}^2}{2}+D\frac{\partial\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_w}\Delta\eta_w+D\frac{\partial^2\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_w^{\ 2}}\frac{\Delta\eta_w^{\ 2}}{2}+\ldots \quad (ง.44)$$

จากสมการตั้งต้น (ง.41) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Sigma\left[weight\right]\frac{\partial^2\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\eta_w^{\ 2}}=1 \quad (ง.45)$$

$$\Sigma\left[weight\right]\frac{\partial\theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial\hat{t}}=-L_w \quad (ง.46)$$

นำความสัมพันธ์ดังกล่าวไปเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (ง.44) จะได้ว่า

$$C=\frac{L_w}{\Delta\hat{t}} \quad (ง.47)$$

$$D = \frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}} \tag{ง.48}$$

นำค่าที่ได้แทนค่ากลับลงไปในสมการ (ง.44)

$$\begin{aligned}\left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}}\right)\theta_{w\,i}^{\ n} + \left(\frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\theta_{w\,i+1}^{\ n+1} &= \left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}} + \frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\theta_{w\,i}^{\ n+1} - \left(L_w\right)\frac{\partial \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \hat{t}}\Delta \hat{t} \\ &+ \left(\frac{L_w \Delta \hat{t}}{2}\right)\frac{\partial^2 \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \hat{t}^2} + \left(\frac{2}{\Delta \eta_w}\right)\frac{\partial \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \eta_w} + \frac{\partial^2 \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \eta_w^{\ 2}} + \ldots\end{aligned} \tag{ง.49}$$

เมื่อกำหนดให้ $\left(\frac{L_w \Delta \hat{t}}{2}\right)\frac{\partial^2 \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \hat{t}^2} \approx 0$ และมิจารณาเทอมที่มีออเดอร์สูงกว่านี้แล้วทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่ายจะได้ว่า

$$\left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}}\right)\theta_{w\,i}^{\ n} + \left(\frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\theta_{w\,i+1}^{\ n+1} = \left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}} + \frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\theta_{w\,i}^{\ n+1} + \left(\frac{2}{\Delta \eta_w} - K_w\right)\frac{\partial \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \eta_w} \tag{ง.50}$$

คูณสมการด้วย $\dfrac{J_w}{\left(\dfrac{2}{\Delta \eta_w} - K_w\right)}$ จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}&\left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}}\right)\frac{J_w \Delta \eta_w}{\left(2 - K_w \Delta \eta_w\right)}\theta_{w\,i}^{\ n} + \left(\frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\frac{J_w \Delta \eta_w}{\left(2 - K_w \Delta \eta_w\right)}\theta_{w\,i+1}^{\ n+1} \\ &- \left(\frac{L_w}{\Delta \hat{t}} + \frac{2}{\Delta \eta_w^{\ 2}}\right)\frac{J_w \Delta \eta_w}{\left(2 - K_w \Delta \eta_w\right)}\theta_{w\,i}^{\ n+1} = J_w \frac{\partial \theta_{w\,i}^{\ n+1}}{\partial \eta_w}\end{aligned} \tag{ง.51}$$

จากสมการเงื่อนไขขอบเขต

$$J_s \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_s} = J_w \frac{\partial \theta_w}{\partial \eta_w} \tag{ง.29}$$

เมื่อนำสมการ (ง.40) และ (ง.51) แทนค่าลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นพร้อมทำการจัดรูปสมการโดยให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการเพื่อให้ง่ายต่อการนำไปคำนวณในรูปแบบสมการสามแถวทแยงจะได้ว่า

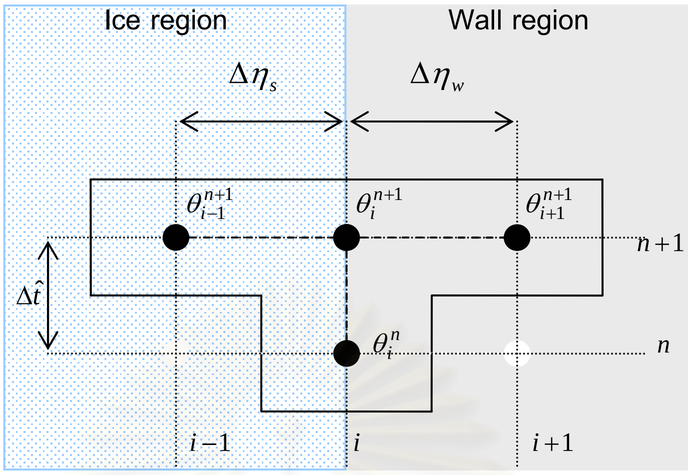
$$\frac{2J_s}{(2+K_s\Delta\eta_s)\Delta\eta_s}\theta_{s\,i-1}^{\,n+1}$$
$$-\left[\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}+\frac{2}{\Delta\eta_s^{\,2}}\right)\frac{J_s\Delta\eta_s}{(2+K_s\Delta\eta_s)}+\left(\frac{L_w}{\Delta\hat{t}}+\frac{2}{\Delta\eta_w^{\,2}}\right)\frac{J_w\Delta\eta_w}{(2-K_w\Delta\eta_w)}\right]\theta_{s\,i}^{\,n+1} \tag{ง.52}$$
$$+\frac{2J_w}{(2-K_w\Delta\eta_w)\Delta\eta_w}\theta_{s\,i+1}^{\,n+1}=-\left[\left(\frac{L_s}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{J_s\Delta\eta_s}{(2+K_s\Delta\eta_s)}+\left(\frac{L_w}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{J_w\Delta\eta_w}{(2-K_w\Delta\eta_w)}\right]\theta_{s\,i}^{\,n}$$

คูณสมการด้วย $\dfrac{\Delta\eta_s}{J_s}$ จะได้ว่า

$$\frac{2}{(2+K_s\Delta\eta_s)}\theta_{s\,i-1}^{\,n+1}$$
$$-\left[\left(2+\frac{L_s\Delta\eta_s^{\,2}}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{1}{(2+K_s\Delta\eta_s)}+\left(\frac{2\Delta\eta_s}{\Delta\eta_w}+\frac{L_w\Delta\eta_s\Delta\eta_w}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{J_w}{(2-K_w\Delta\eta_w)J_s}\right]\theta_{s\,i}^{\,n+1}$$
$$+\frac{2}{(2-K_w\Delta\eta_w)}\left(\frac{J_w\Delta\eta_s}{J_s\Delta\eta_w}\right)\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} \tag{ง.53}$$
$$=-\left[\left(\frac{L_s\Delta\eta_s^{\,2}}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{1}{(2+K_s\Delta\eta_s)}+\left(\frac{L_w\Delta\eta_s\Delta\eta_w}{\Delta\hat{t}}\right)\frac{J_w}{(2-K_w\Delta\eta_w)J_s}\right]\theta_{s\,i}^{\,n}$$

จากนั้นคูณด้วย $\dfrac{(2+K_s\Delta\eta_s)}{2}\times\dfrac{(2-K_w\Delta\eta_w)}{2}$ จะได้สมการสำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนังดังนี้

$$\left(1-\frac{K_w\Delta\eta_w}{2}\right)\theta_{s\,i-1}^{\,n+1}$$
$$-\left[\left(1+\frac{L_s\Delta\eta_s^{\,2}}{2\Delta\hat{t}}\right)\left(1-\frac{K_w\Delta\eta_w}{2}\right)+\left(\frac{\Delta\eta_s}{\Delta\eta_w}+\frac{L_w\Delta\eta_s\Delta\eta_w}{2\Delta\hat{t}}\right)\left(1+\frac{K_s\Delta\eta_s}{2}\right)\frac{J_w}{J_s}\right]\theta_{s\,i}^{\,n+1}$$
$$+\left(1+\frac{K_s\Delta\eta_s}{2}\right)\left(\frac{J_w\Delta\eta_s}{J_s\Delta\eta_w}\right)\theta_{s\,i+1}^{\,n+1} \tag{ง.54}$$
$$=-\left[\left(\frac{L_s\Delta\eta_s^{\,2}}{2\Delta\hat{t}}\right)\left(1-\frac{K_w\Delta\eta_w}{2}\right)+\left(\frac{L_w\Delta\eta_s\Delta\eta_w}{2\Delta\hat{t}}\right)\left(1+\frac{K_s\Delta\eta_s}{2}\right)\frac{J_w}{J_s}\right]\theta_{s\,i}^{\,n}$$



รูปที่ ง.4 จุดต่อที่อยู่บนขอบระหว่างบริเวณน้ำแข็งและผนัง

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนันทวัฒน์ ไพรัชเวทย์ เกิดเมื่อวันที่ 22 ตุลาคม 2522 ที่ จ.เชียงใหม่ สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย จ.เชียงใหม่ ในปีการศึกษา 2539 ได้เข้าศึกษาต่อและสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตจาก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เมื่อปีการศึกษา 2544 และได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิตที่ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2545