โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ แบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกัน และการประมาณค่าพารามิเตอร์

Stochastic smoking model with dependent noises and parameter estimation

ชื่อนิสิต นายทินภัทร จิรายุวุฒิ **เลขประจำตัว** 5933520723

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกันและการประมาณค่าพารามิเตอร์

นายทินภัทร จิรายุวุฒิ

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

Stochastic smoking model with dependent noises and parameter estimation

Mr. Tinnaphat Jirayuwutti

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science, Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	แบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกันและการประมาณค่าพารามิเตอร์
โดย	นายทินภัทร จิรายุวุฒิ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	1. อาจารย์ ดร. เรวัต ถนัดกิจหิรัญ
	2. รองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ .... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(อาจารย์ ดร. เรวัต ถนัดกิจหิรัญ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(รองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุจินต์ คมฤทัย)

เพชรอาภา บุญเสริม .... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม)

ทินภัทร จิรายุวุฒิ: แบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกันและการประมาณค่าพารามิเตอร์ (Stochastic smoking model with dependent noises and parameter estimation) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน: อาจารย์ ดร. เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย, 35 หน้า

ในโครงงานนี้ เราจะศึกษาแบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกัน อีกทั้งจะจำลองข้อมูลเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมของแบบจำลอง และประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลที่จำลองขึ้นมา

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ทินภัทร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

ปีการศึกษา 2562 ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน

##5933520723: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: stochastic smoking model, quadratic variation, least squares estimation

TINNAPHAT JIRAYUWUTTI: Stochastic smoking model with dependent noises and parameter estimation. ADVISORS: RAYWAT TANADKITHIRUN, Ph.D. and ASSOC. PROF. KHAMRON MEKCHAY, Ph.D., 35 pp.

In this work, we will study the stochastic smoking model with dependent noises. We then simulate the data in order to analyse the behavior of the model and estimate the parameters based on simulated data.

Department Mathematics and Computer Science Student's Signature Tinnaphat

Field of Study Mathematics Advisor's Signature เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

Academic Year 2019 Advisor's Signature

กิตติกรรมประกาศ

ในการดำเนินงานครั้งนี้ได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่านด้วยกัน จึงขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน พร้อมทั้งให้ความรู้ คำปรึกษาแนะนำ สละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้า ดูแลเอาใจใส่ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ และให้ความช่วยเหลือหลายสิ่งหลายอย่างตั้งแต่การเริ่มต้นทำโครงงานจนกระทั่งทำโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ตลอดจนขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สุจินต์ คมฤทัย และ รองศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน และได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขปรับปรุงโครงงานนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัว รวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคน ที่คอยให้กำลังใจ คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่าง ๆ มาตลอดการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ดังที่ทุกคนทราบกันดีว่า การสูบบุหรี่ไม่เพียงแต่เป็นอันตรายต่อสุขภาพของตนเอง แต่ยังเป็นอันตรายต่อคนรอบข้างของผู้สูบบุหรี่ด้วย และยังเป็นอันตรายต่อสังคมโดยรวมในระยะยาว ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมานักวิจัยหลาย ๆ คนได้เสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อระบุลักษณะพฤติกรรมการสูบบุหรี่ โดยเริ่มที่ Castillo-Garsow และคณะ [1] ได้นำเสนอแบบจำลองดีเทอร์มีนิสติกของคนสูบบุหรี่ จากนั้น Sharomi และ Gumel [2] ได้พัฒนาแบบจำลองดีเทอร์มีนิสติกนี้ นั่นคือ สำหรับเวลา $t \geq 0$ พวกเขาได้แยกประชากรทั้งหมด (N) เป็น 4 ประเภท: ผู้ที่ไม่เคยสูบบุหรี่ (potential smokers; P), ผู้ที่กำลังสูบบุหรี่ (current smokers; S), ผู้ที่เลิกสูบบุหรี่ชั่วคราว (smokers who temporarily quit smoking; Q_t) และผู้ที่เลิกสูบบุหรี่อย่างถาวร (smokers who have quit smoking permanently; Q_p) โดยแบบจำลองของคนสูบบุหรี่ [2] ซึ่งมีสมมติฐานดังนี้

1. c คือ จำนวนเฉลี่ยของคนที่จะพบเจอกันต่อหนึ่งหน่วยเวลา
2. μ คือ อัตราการเกิดของประชากรทั้งหมด
3. μ_i คือ อัตราการตายของประชากรแต่ละประเภท
4. γ คือ อัตราการเลิกสูบบุหรี่ของผู้ที่กำลังสูบบุหรี่
5. α คือ อัตราการกลับมาสูบบุหรี่อีกครั้งของผู้ที่เลิกสูบบุหรี่ชั่วคราว
6. σ คือ อัตราการเลิกสูบบุหรี่อย่างถาวรของผู้ที่เลิกสูบบุหรี่
7. q คือ ความน่าจะเป็นที่จะสูบบุหรี่หลังจากพบเจอกับผู้ที่สูบบุหรี่ของผู้ที่ไม่เคยสูบบุหรี่

สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
dP(t) &= \left[\Lambda - \mu_1 P(t) - \beta P(t)S(t)\right]dt, \\
dS(t) &= \left[-\left(\mu_2 + \gamma\right)S(t) + \beta P(t)S(t) + \alpha Q_t(t)\right]dt, \\
dQ_t(t) &= \left[-\left(\mu_3 + \alpha\right)Q_t(t) + \gamma\left(1-\sigma\right)S(t)\right]dt, \\
dQ_p(t) &= \left[-\mu_4 Q_p(t) + \gamma\sigma S(t)\right]dt,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

โดยที่ $P(0)\geq 0$, $S(0)\geq 0$, $Q_t(0)\geq 0$, $Q_p(0)\geq 0$, $\Lambda>0$ และ $0<\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\alpha,\beta,\gamma,\sigma<1$

เมื่อ $\beta := \dfrac{cq}{N}$, และ $\Lambda := \mu N$

แม้ว่าแบบจำลองดีเทอร์มีนิสติกของคนสูบบุหรี่สามารถบ่งบอกแนวโน้มพฤติกรรมของประชากรที่สูบบุหรี่ แต่ก็ถือว่าพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้นนั้นไม่ได้คำนึงถึงความผันผวนของสิ่งแวดล้อม ซึ่งทำให้เกิดข้อจำกัดบางอย่างในการสร้างแบบจำลองระบบนิเวศทางคณิตศาสตร์ โดยเมื่อเร็ว ๆ นี้ Zhang และคณะ [3] ได้เสนอระบบสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (stochastic differential equations, SDEs) ดังต่อไปนี้

$$dP(t)=\left[\Lambda-\mu_1 P(t)-\beta P(t)S(t)\right]dt+\sigma_1 P(t)dB_1(t),$$

$$dS(t)=\left[-\left(\mu_2+\gamma\right)S(t)+\beta P(t)S(t)+\alpha Q_t(t)\right]dt+\sigma_2 S(t)dB_2(t),$$

$$dQ_t(t)=\left[-\left(\mu_3+\alpha\right)Q_t(t)+\gamma\left(1-\sigma\right)S(t)\right]dt+\sigma_3 Q_t(t)dB_3(t),$$

$$dQ_p(t)=\left[-\mu_4 Q_p(t)+\gamma\sigma S(t)\right]dt+\sigma_4 Q_p(t)dB_4(t),$$

โดยที่ $\sigma_i \geq 0$ เป็นค่าคงที่ และ $B_i(t),\, i=1,\ldots,4$ เป็นกระบวนการวีเนอร์ (Wiener process) ที่เป็นอิสระต่อกัน สำหรับในโครงงานนี้ เราจะปรับตัวแบบของ Zhang และคณะ [3] ให้สมบูรณ์มากขึ้น โดยจะศึกษาระบบ SDEs ข้างต้น ในกรณีที่กระบวนการวีเนอร์ $B_i(t),\, i=1,\ldots,4$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน เนื่องจากโดยทั่วไปประชากรทั้ง 4 ประเภทนั้นมีความสัมพันธ์กัน ความแปรปรวนในแต่ละกลุ่มประชากรก็น่าที่จะเกี่ยวข้องกันด้วย ตัวอย่างเช่น ผู้ที่เลิกสูบบุหรี่อย่างถาวร (Q_p) อาจโน้มน้าวให้ผู้ที่กำลังสูบบุหรี่ (S) เลิกสูบบุหรี่

เพื่อให้สะดวกยิ่งขึ้น เราจะให้

$$x_1(t)=P(t),\qquad x_2(t)=S(t),\qquad x_3(t)=Q_t(t),\qquad x_4(t)=Q_p(t)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
dx_1(t)&=\left(\Lambda-\mu_1 x_1(t)-\beta x_1(t)x_2(t)\right)dt+\sigma_1 x_1(t)dB_1\left(t\right)\\
dx_2(t)&=\left(-\left(\mu_2+\gamma\right)x_2(t)+\beta x_1(t)x_2(t)+\alpha x_3(t)\right)dt+\sigma_2 x_2(t)dB_2\left(t\right)\\
dx_3(t)&=\left(-\left(\mu_3+\alpha\right)x_3(t)+\gamma\left(1-\sigma\right)x_2(t)\right)dt+\sigma_3 x_3(t)dB_3\left(t\right)\\
dx_4(t)&=\left(-\mu_4 x_4(t)+\gamma\sigma x_2(t)\right)dt+\sigma_4 x_4(t)dB_4\left(t\right)
\end{aligned}\tag{1.2}$$

โดยที่ $B_i\left(t\right),\, i=1,\ldots,4$ เป็นกระบวนการวีเนอร์ที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมีเมทริกซ์ความแปรปรวนความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{34} \in [-1,1]$

นอกจากนี้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ในระบบ SDEs เป็นหัวใจสำคัญอันหนึ่งสำหรับการนำตัวแบบ SDEs ไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงเพื่อให้ได้มาซึ่งค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลสำหรับการนำไปใช้ในขั้นตอนต่อ ๆ ไป ดังนั้น โครงงานนี้ได้ขยายแนวคิดของ Zhang และคณะ [3] มาพัฒนาต่อยอดสำหรับตัวโมเดล (1.2) ในกรณีที่ความแปรปรวนไม่เป็นอิสระต่อกัน

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 ตัวแปรสุ่ม X จะถูกเรียกว่า มี**การแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2** ซึ่งเขียนแทนด้วย $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

ถ้า $X \sim N\left(0,1\right)$ แล้วเราจะกล่าวว่า X มี**การแจกแจงปกติมาตรฐาน**

บทนิยาม 2.2 ให้ I เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$, กลุ่มของตัวแปรสุ่ม $\left\{X_t\right\}_{t\in I}$ จะเรียกว่า**กระบวนการสโตแคสติก**

บทนิยาม 2.3 ให้ $\left\{X_t\right\}_{t\in I}$ เป็นกระบวนการสโตแคสติกบนปริภูมิความน่าจะเป็น $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ สำหรับแต่ละ $\omega\in\Omega$ ฟังก์ชัน $X_{\cdot}\left(\omega\right):I\to\mathbb{R}$ จะถูกเรียกว่าเป็น**ทางเดินตัวอย่าง (sample path)** ของ $\left\{X_t\right\}_{t\in I}$

บทนิยาม 2.4 ตัวแปรสุ่ม X และ Y จะถูกเรียกว่า**เป็นอิสระต่อกัน** ถ้าสำหรับทุกบอเรลเซต A และ B ใน $\mathbb{R}$

$$P\left(X\in A,Y\in B\right)=P\left(X\in A\right)P\left(Y\in B\right)$$

บทนิยาม 2.5 กระบวนการวีเนอร์บนช่วงเวลา $\left[0,T\right]$ คือกระบวนการสโตแคสติก $\left\{W_t\right\}_{t\in[0,T]}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $W_0=0$ ด้วยความน่าจะเป็น 1
2. สำหรับ $0\le s<t\le T$ ได้ว่า $W_t-W_s\sim N\left(0,t-s\right)$
3. สำหรับ $0\le s<t\le u<v\le T$ ได้ว่า W_t-W_s และ W_v-W_u เป็นอิสระต่อกัน
4. $\left\{W_t\right\}_{t\in[0,T]}$ มีทางเดินตัวอย่างที่ต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก โดยทั่วไปแล้วจะถูกเขียนในรูป

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{2.1}$$

$$X_0 = x$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ t และ X_t, W_t เป็นกระบวนการวีเนอร์ และ $x \in \mathbb{R}$

สมการ (2.1) เป็นสัญลักษณ์ที่แทนสมการเชิงปริพันธ์

$$X(t) - X(0) = \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \tag{2.2}$$

โดยปริพันธ์ทางด้านขวามือของสมการ (2.2) ถูกตีความแบบปริพันธ์รีมันน์สามัญและปริพันธ์แบบอิโต [4]

ทฤษฎีบท 2.7 สูตรของอิโต (Itô Formula)

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{u}(t)dt + \boldsymbol{v}(t)d\boldsymbol{W}(t)$$

ให้ $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))^T$ ซึ่งสำหรับเวกเตอร์ u มิติ $\boldsymbol{u}(t)$ และ $n \times m$ เมทริกซ์ $\boldsymbol{v}(t)$ โดยที่ $\boldsymbol{W}(t)$ เป็นกระบวนการวีเนอร์ m มิติ และ $g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_p(t,x))$ เป็นฟังก์ชันจาก $[0,\infty] \times \mathbb{R}^n$ ถึง $\mathbb{R}^p$ ที่อนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ต่อเนื่อง จะได้ว่า $\boldsymbol{Y}(t,\omega) = g(t, \boldsymbol{X}(t))$ เป็นกระบวนการอิโตซึ่ง

$$dY_k(t) = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, \boldsymbol{X}(t))dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{X}(t))dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, \boldsymbol{X}(t))dX_i(t)dX_j(t)$$

ทุก $k = 1, \ldots, p$

โดยที่ $dW_i \cdot dW_j = \delta_{ij}dt,\ dW_i \cdot dt = dt \cdot dW_i = 0$ และ $dt \cdot dt = 0$

วิธีการออยเลอร์-มารุยามา (Euler-Maruyama mathod)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{2.3}$$

เราจะแบ่งเวลาในช่วง $[0,T]$ ออกเป็น N ช่วง ที่แต่ละช่วงมีความกว้างเท่ากัน

ให้ $t_n = n\Delta \quad \forall n = 0, \ldots, N$ เมื่อ $\Delta = \dfrac{T}{N}$

ให้ x_n เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (2.3) ที่เวลา t_n โดยใช้สูตรของออยเลอร์-มารุยามา

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\Delta + g(t_n, x_n)\Delta W_n$$

เมื่อ $\Delta W_n \sim N(0, \Delta)$ และ $x_0 = X_0$

บทที่ 3
การประมาณค่าพารามิเตอร์

ให้ $\left\{x_{i,\kappa}\right\}_{\kappa=0}^{n}$ เป็นข้อมูลของจำนวนผู้ที่ไม่เคยสูบบุหรี่, ผู้ที่กำลังสูบบุหรี่, ผู้ที่เลิกสูบบุหรี่ชั่วคราว และผู้ที่เลิกสูบบุหรี่อย่างถาวรในแต่ละช่วงเวลาบนช่วง $\left[0,T\right]$ สมมติให้ข้อมูลมาแบบเวลาห่างเท่า ๆ กัน เช่น $\Delta t=1$ วัน เราต้องการจะประมาณค่าพารามิเตอร์ $\Lambda,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \sigma,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \rho_{12},\ \rho_{13},\ \rho_{14},\ \rho_{23},$ $\rho_{24},\ \rho_{34}$

จากสมการ (1.2)

$$dx_1(t)=\left(\Lambda-\mu_1x_1(t)-\beta x_1(t)x_2(t)\right)dt+\sigma_1x_1(t)dB_1\left(t\right)$$

$$dx_2(t)=\left(-\left(\mu_2+\gamma\right)x_2(t)+\beta x_1(t)x_2(t)+\alpha x_3(t)\right)dt+\sigma_2x_2(t)dB_2\left(t\right)$$

$$dx_3(t)=\left(-\left(\mu_3+\alpha\right)x_3(t)+\gamma\left(1-\sigma\right)x_2(t)\right)dt+\sigma_3x_3(t)dB_3\left(t\right)$$

$$dx_4(t)=\left(-\mu_4x_4(t)+\gamma\sigma x_2(t)\right)dt+\sigma_4x_4(t)dB_4\left(t\right)$$

โดยที่ $B_i\left(t\right),\ i=1,\ldots,4$ เป็นกระบวนการวีเนอร์ที่ไม่อิสระต่อกัน ซึ่งมีเมทริกซ์ความแปรปรวนความแปรปรวนร่วมเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{13}&\rho_{14}\\\rho_{12}&1&\rho_{23}&\rho_{24}\\\rho_{13}&\rho_{23}&1&\rho_{34}\\\rho_{14}&\rho_{24}&\rho_{34}&1\end{bmatrix}$$

ให้

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0&0\\0&\sigma_2&0&0\\0&0&\sigma_3&0\\0&0&0&\sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{13}&\rho_{14}\\\rho_{12}&1&\rho_{23}&\rho_{24}\\\rho_{13}&\rho_{23}&1&\rho_{34}\\\rho_{14}&\rho_{24}&\rho_{34}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0&0\\0&\sigma_2&0&0\\0&0&\sigma_3&0\\0&0&0&\sigma_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_1^2&\rho_{12}\sigma_1\sigma_2&\rho_{13}\sigma_1\sigma_3&\rho_{14}\sigma_1\sigma_4\\\rho_{12}\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2&\rho_{23}\sigma_2\sigma_3&\rho_{24}\sigma_2\sigma_4\\\rho_{13}\sigma_1\sigma_3&\rho_{23}\sigma_2\sigma_3&\sigma_3^2&\rho_{34}\sigma_3\sigma_4\\\rho_{14}\sigma_1\sigma_4&\rho_{24}\sigma_2\sigma_4&\rho_{34}\sigma_3\sigma_4&\sigma_4^2\end{bmatrix}$$

โดยการแยกแบบโชเลสกี้ (Cholesky decomposition) จะได้ว่ามีเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}$$

ที่ $\Sigma = A \cdot A^T$

จากสมการ (1.2) สามารถจัดรูปใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
dx_1(t) &= \left(\Lambda - \mu_1 x_1(t) - \beta x_1(t) x_2(t)\right)dt + x_1(t)\left(a_1 dW_1(t)\right) \\
dx_2(t) &= \left(-\left(\mu_2 + \gamma\right)x_2(t) + \beta x_1(t)x_2(t) + \alpha x_3(t)\right)dt + x_2(t)\left(a_2 dW_1(t) + a_3 dW_2(t)\right) \\
dx_3(t) &= \left(-\left(\mu_3 + \alpha\right)x_3(t) + \gamma\left(1-\sigma\right)x_2(t)\right)dt + x_3(t)\left(a_4 dW_1(t) + a_5 dW_2(t) + a_6 dW_3(t)\right) \\
dx_4(t) &= \left(-\mu_4 x_4(t) + \gamma\sigma x_2(t)\right)dt + x_4(t)\left(a_7 dW_1(t) + a_8 dW_2(t) + a_9 dW_3(t) + a_{10} dW_4(t)\right)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

โดยที่ $W_i(t),\ i = 1,\dots,4$ เป็นกระบวนการวีเนอร์ที่เป็นอิสระต่อกัน

ต่อมา เราจะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยจะเริ่มจากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน นั่นคือ $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ โดยการใช้สูตรของอิโต (Itô Formula) จะได้ว่า

$$d\log x_i(t) = \frac{1}{x_i(t)}dx_i(t) - \frac{1}{2\left(x_i(t)\right)^2}dx_i(t)\cdot dx_i(t) \qquad \forall i = 1,\dots,4$$

นั่นคือ

$$d\log x_1(t) = \left(\frac{\Lambda}{x_1(t)} - \mu_1 - \beta x_2(t) - \frac{1}{2}a_1^2\right)dt + a_1 dW_1(t),$$

$$d\log x_2(t) = \left(-(\mu_2 + \gamma) + \beta x_1(t) + \alpha\frac{x_3(t)}{x_2(t)} - \frac{1}{2}\left(a_2^2 + a_3^2\right)\right)dt + a_2 dW_1(t) + a_3 dW_2(t),$$

$$d\log x_3(t) = \left(-(\mu_3 + \alpha) + \gamma(1-\sigma)\frac{x_2(t)}{x_3(t)} - \frac{1}{2}\left(a_4^2 + a_5^2 + a_6^2\right)\right)dt + a_4 dW_1(t) + a_5 dW_2(t) + a_6 dW_3(t),$$

$$d\log x_4(t) = \left(-\mu_4 + \gamma\sigma\frac{x_2(t)}{x_4(t)} - \frac{1}{2}\left(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 + a_{10}^2\right)\right)dt + a_7 dW_1(t) + a_8 dW_2(t) + a_9 dW_3(t) + a_{10} dW_4(t)$$

สำหรับ $t>0$ จะได้

$$\log x_1(t)=\log x_1(0)+\int_0^t\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_2(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds+\int_0^t a_1 dW_1(s),$$

$$\log x_2(t)=\log x_2(0)+\int_0^t\left(-(\mu_2+\gamma)+\beta x_1(\mathrm{s})+\alpha\frac{x_3(\mathrm{s})}{x_2(\mathrm{s})}-\frac{1}{2}\left(a_2^2+a_3^2\right)\right)ds+\int_0^t a_2 dW_1(s)+\int_0^t a_3 dW_2(s),$$

$$\log x_3(t)=\log x_3(0)+\int_0^t\left(-(\mu_3+\alpha)+\gamma(1-\sigma)\frac{x_2(\mathrm{s})}{x_3(\mathrm{s})}-\frac{1}{2}\left(a_4^2+a_5^2+a_6^2\right)\right)ds$$

$$+\int_0^t a_4 dW_1(s)+\int_0^t a_5 dW_2(s)+\int_0^t a_6 dW_3(s),$$

$$\log x_4(t)=\log x_4(0)+\int_0^t\left(-\mu_4+\gamma\sigma\frac{x_2(\mathrm{s})}{x_4(\mathrm{s})}-\frac{1}{2}\left(a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2\right)\right)ds$$

$$+\int_0^t a_7 dW_1(s)+\int_0^t a_8 dW_2(s)+\int_0^t a_9 dW_3(s)+\int_0^t a_{10} dW_4(s)$$

โดยคุณสมบัติของการแปรผันกำลังสอง (the properties of the quadratic variation) จะได้ว่า

$$\left[\log x_1,\log x_1\right](t)$$

$$=\left[\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_2(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds,\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_2(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds\right](t)$$

$$+2\left[\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_2(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds,\int_0^{\cdot}a_1 dW_1(s)\right](t)+\left[\int_0^{\cdot}a_1 dW_1(s),\int_0^{\cdot}a_1 dW_1(s)\right](t)$$

เนื่องจาก

$$dW_i(t)\cdot dW_i(t)=dt,\ \ dW_i(t)\cdot dt=0,\ \ dt\cdot dW_i(t)=0\ \ \forall i=1,\ldots,4,$$

$$dW_i(t)\cdot dW_j(t)=0\ \ \forall i\neq j,\ \text{และ}\ \ dt\cdot dt=0$$

นั่นคือ

$$\left[\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_1(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds,\int_0^{\cdot}a_1 dW_1(s)\right](t)=0,$$

$$\left[\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_1(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds,\int_0^{\cdot}\left(\frac{\Lambda}{x_1(s)}-\mu_1-\beta x_1(s)-\frac{1}{2}a_1^2\right)ds\right]=0,$$

และ

$$\left[\int_0^{\cdot} a_1 dW_1(s), \int_0^{\cdot} a_1 dW_1(s)\right](t) = a_1^2 t$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left[\log x_1, \log x_1\right](t) = a_1^2 t$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\left[\log x_1, \log x_2\right](t) = a_1 a_2 t$$

$$\left[\log x_2, \log x_2\right](t) = a_2^2 t + a_3^2 t$$

$$\left[\log x_1, \log x_3\right](t) = a_1 a_4 t$$

$$\left[\log x_2, \log x_3\right](t) = a_2 a_4 t + a_3 a_5 t$$

$$\left[\log x_3, \log x_3\right](t) = a_4^2 t + a_5^2 t + a_6^2 t$$

$$\left[\log x_1, \log x_4\right](t) = a_1 a_7 t$$

$$\left[\log x_2, \log x_4\right](t) = a_2 a_7 t + a_3 a_8 t$$

$$\left[\log x_3, \log x_4\right](t) = a_4 a_7 t + a_5 a_8 t + a_6 a_9 t$$

$$\left[\log x_4, \log x_4\right](t) = a_7^2 t + a_8^2 t + a_9^2 t + a_{10}^2 t$$

เมื่อ $n \to \infty,\ \Delta t \to 0$ โดยที่ $t = n\Delta t$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\Big(\log x_i(\kappa\Delta t) - \log x_i\big((\kappa-1)\Delta t\big)\Big)\Big(\log x_j(\kappa\Delta t) - \log x_j\big((\kappa-1)\Delta t\big)\Big) \to \frac{1}{t}\left[\log x_i, \log x_j\right](t)$$

$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้น เราจะได้สมการประมาณค่า $a_1, a_2, ..., a_{10}$ ด้วย $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_{10}$ ดังนี้

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)^2 = \hat{a}_1^2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right) = \hat{a}_1\hat{a}_2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)^2 = \hat{a}_2^2 + \hat{a}_3^2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right) = \hat{a}_1\hat{a}_4$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right) = \hat{a}_2\hat{a}_4 + \hat{a}_3\hat{a}_5$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right)^2 = \hat{a}_4^2 + \hat{a}_5^2 + \hat{a}_6^2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right) = \hat{a}_1\hat{a}_7$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right) = \hat{a}_2\hat{a}_7 + \hat{a}_3\hat{a}_8$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right) = \hat{a}_4\hat{a}_7 + \hat{a}_5\hat{a}_8 + \hat{a}_6\hat{a}_9$$

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right)^2 = \hat{a}_7^2 + \hat{a}_8^2 + \hat{a}_9^2 + \hat{a}_{10}^2$$

ดังนั้น เราจะได้การประมาณค่าพารามิเตอร์ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)^2}, \\
\hat{a}_2 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)}{\hat{a}_1}, \\
\hat{a}_3 &= \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)^2 - \hat{a}_2^2}, \\
\hat{a}_4 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right)}{\hat{a}_1}, \\
\hat{a}_5 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right) - \hat{a}_2\hat{a}_4}{\hat{a}_3}, \\
\hat{a}_6 &= \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right)^2 - \hat{a}_4^2 - \hat{a}_5^2}, \\
\hat{a}_7 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{1,\kappa} - \log x_{1,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right)}{\hat{a}_1}, \\
\hat{a}_8 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{2,\kappa} - \log x_{2,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right) - \hat{a}_2\hat{a}_7}{\hat{a}_3}, \\
\hat{a}_9 &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{3,\kappa} - \log x_{3,\kappa-1}\right)\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right) - \hat{a}_4\hat{a}_7 - \hat{a}_5\hat{a}_8}{\hat{a}_6}, \\
\hat{a}_{10} &= \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\log x_{4,\kappa} - \log x_{4,\kappa-1}\right)^2 - \hat{a}_7^2 - \hat{a}_8^2 - \hat{a}_9^2}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

นั่นคือ จะได้ว่า

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^2 & \hat{a}_1\hat{a}_2 & \hat{a}_1\hat{a}_4 & \hat{a}_1\hat{a}_7 \\ \hat{a}_1\hat{a}_2 & \hat{a}_2^2+\hat{a}_3^2 & \hat{a}_2\hat{a}_4+\hat{a}_3\hat{a}_5 & \hat{a}_2\hat{a}_7+\hat{a}_3\hat{a}_8 \\ \hat{a}_1\hat{a}_4 & \hat{a}_2\hat{a}_4+\hat{a}_3\hat{a}_5 & \hat{a}_4^2+\hat{a}_5^2+\hat{a}_6^2 & \hat{a}_4\hat{a}_7+\hat{a}_5\hat{a}_8+\hat{a}_6\hat{a}_9 \\ \hat{a}_1\hat{a}_7 & \hat{a}_2\hat{a}_7+\hat{a}_3\hat{a}_8 & \hat{a}_4\hat{a}_7+\hat{a}_5\hat{a}_8+\hat{a}_6\hat{a}_9 & \hat{a}_7^2+\hat{a}_8^2+\hat{a}_9^2+\hat{a}_{10}^2 \end{bmatrix}$$

หรือก็คือ

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_1 = \hat{a}_1,\ \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\hat{a}_2^2+\hat{a}_3^2},\ \hat{\sigma}_3 = \sqrt{\hat{a}_4^2+\hat{a}_5^2+\hat{a}_6^2},\ \hat{\sigma}_4 = \sqrt{\hat{a}_7^2+\hat{a}_8^2+\hat{a}_9^2+\hat{a}_{10}^2},\ \hat{\rho}_{12} = \frac{\hat{a}_2}{\hat{\sigma}_2}, \\ &\hat{\rho}_{13} = \frac{\hat{a}_4}{\hat{\sigma}_3},\ \hat{\rho}_{14} = \frac{\hat{a}_7}{\hat{\sigma}_4},\ \hat{\rho}_{23} = \frac{\hat{a}_2\hat{a}_4+\hat{a}_3\hat{a}_5}{\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3},\ \hat{\rho}_{24} = \frac{\hat{a}_2\hat{a}_7+\hat{a}_3\hat{a}_8}{\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_4},\ \hat{\rho}_{34} = \frac{\hat{a}_4\hat{a}_7+\hat{a}_5\hat{a}_8+\hat{a}_6\hat{a}_9}{\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_4} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ต่อมา เราจะประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหลือ นั่นคือ $\Lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ โดยวิธีการของออยเลอร์-มารุยามา (Euler-Maruyama) โดยสำหรับช่วงย่อย $\left[\left(\kappa-1\right)\Delta t, \kappa\Delta t\right]$ จากสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{1,\kappa} - x_{1,\kappa-1} &= (\Lambda - \mu_1 x_{1,\kappa-1} - \beta x_{1,\kappa-1}x_{2,\kappa-1})\Delta t + x_{1,\kappa-1}(a_1\varepsilon_{1,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}) \\ x_{2,\kappa} - x_{2,\kappa-1} &= (-(\mu_2+\gamma)x_{2,\kappa-1} + \beta x_{1,\kappa-1}x_{2,\kappa-1} + \alpha x_{3,\kappa-1})\Delta t + x_{2,\kappa-1}(a_2\varepsilon_{1,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_3\varepsilon_{2,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}) \\ x_{3,\kappa} - x_{3,\kappa-1} &= (-(\mu_3+\alpha)x_{3,\kappa-1} + \gamma(1-\sigma)x_{2,\kappa-1})\Delta t + x_{3,\kappa-1}(a_4\varepsilon_{1,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_5\varepsilon_{2,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_6\varepsilon_{3,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}) \\ x_{4,\kappa} - x_{4,\kappa-1} &= (-\mu_4 x_{4,\kappa-1} + \gamma\sigma x_{2,\kappa-1})\Delta t + x_{4,\kappa-1}(a_7\varepsilon_{1,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_8\varepsilon_{2,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_9\varepsilon_{3,\kappa-1}\sqrt{\Delta t} + a_{10}\varepsilon_{4,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

โดยที่ $\varepsilon_{\mathrm{i},\kappa}$ มีการแจงแจกแบบปกติมาตรฐานและเป็นอิสระต่อกัน ทุก $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $\kappa \in \{1,2,...,n\}$

โดยการใช้แนวคิดในงานของ Zhang และคณะ [3] (ทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2) จะได้ว่า

$$\mu_2 + \gamma = \frac{\Lambda}{\nu_2} - \mu_1\frac{\nu_1}{\nu_2} + \alpha\frac{\nu_3}{\nu_2},\ \ \gamma\left(1-\sigma\right) = \frac{\nu_3}{\nu_2}\left(\mu_3+\alpha\right),\ \ \sigma\gamma = \frac{\nu_4}{\nu_2}\mu_4$$

โดยที่ $\nu_i = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} x_{i,\kappa}\ \ \forall i = 1,...,4$ เมื่อ μ_i และ σ_i สอดคล้องเงื่อนไข

$2\mu_1 > \sigma_1^2,\ 2\mu_2 > \sigma_2^2,\ 2\mu_3 > \sigma_3^2,$ และ $2\mu_4 > \sigma_4^2$

ดังนั้น เราสามารถเขียนระบบสมการ (4.2) ให้อยู่ในรูป $X = S + AE$ โดยที่

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{1,\kappa} - x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}} \\ \dfrac{x_{2,\kappa} - x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}} \\ \dfrac{x_{3,\kappa} - x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}} \\ \dfrac{x_{4,\kappa} - x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}\sqrt{\Delta t}} \end{bmatrix}, \qquad S = \sqrt{\Delta t}\begin{bmatrix} \dfrac{\Lambda}{x_{1,\kappa-1}} - \mu_1 - \beta x_{2,\kappa-1} \\ -\dfrac{\Lambda}{\nu_2} + \mu_1\dfrac{\nu_1}{\nu_2} + \beta x_{1,\kappa-1} - \alpha\left(\dfrac{\nu_3}{\nu_2} - \dfrac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right) \\ -(\mu_3 + \alpha)\left(1 - \dfrac{\nu_3}{\nu_2}\dfrac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right) \\ -\mu_4\left(1 - \dfrac{\nu_4}{\nu_2}\dfrac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,\kappa-1} \\ \varepsilon_{2,\kappa-1} \\ \varepsilon_{3,\kappa-1} \\ \varepsilon_{4,\kappa-1} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $E = A^{-1}(X - S)$ โดยที่

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) เพื่อหาผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด (minimize sum square error) คือ

$$F(\Lambda,\mu_1,\mu_3,\mu_4,\beta,\alpha)=$$

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_1\left(\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}\cdot\Delta t}-\frac{\Lambda}{x_{1,\kappa-1}}+\mu_1+\beta x_{2,\kappa-1}\right)\right)^2\right.$$

$$+\left(b_2\left(\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}\cdot\Delta t}-\frac{\Lambda}{x_{1,\kappa-1}}+\mu_1+\beta x_{2,\kappa-1}\right)+b_3\left(\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\frac{\Lambda}{v_2}-\mu_1\frac{v_1}{v_2}-\beta x_{1,\kappa-1}+\alpha\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\right)\right)^2$$

$$+\left(b_4\left(\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}\cdot\Delta t}-\frac{\Lambda}{x_{1,\kappa-1}}+\mu_1+\beta x_{2,\kappa-1}\right)+b_5\left(\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\frac{\Lambda}{v_2}-\mu_1\frac{v_1}{v_2}-\beta x_{1,\kappa-1}+\alpha\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+b_6\left(\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\left(\mu_3+\alpha\right)\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\right)^2$$

$$+\left(b_7\left(\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}\cdot\Delta t}-\frac{\Lambda}{x_{1,\kappa-1}}+\mu_1+\beta x_{2,\kappa-1}\right)+b_8\left(\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\frac{\Lambda}{v_2}-\mu_1\frac{v_1}{v_2}-\beta x_{1,\kappa-1}+\alpha\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.+b_9\left(\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\left(\mu_3+\alpha\right)\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)+b_{10}\left(\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}\cdot\Delta t}+\mu_4\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\right)\right)^2\right]$$

เราต้องการหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย นั่นคือ

$$\frac{\partial F}{\partial\Lambda}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\mu_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\mu_3}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\mu_4}=0$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}
a_{11}\Lambda+a_{12}\mu_1+a_{13}\beta+a_{14}\alpha+a_{15}\mu_3+a_{16}\mu_4&=c_1\\
a_{21}\Lambda+a_{22}\mu_1+a_{23}\beta+a_{24}\alpha+a_{25}\mu_3+a_{26}\mu_4&=c_2\\
a_{31}\Lambda+a_{32}\mu_1+a_{33}\beta+a_{34}\alpha+a_{35}\mu_3+a_{36}\mu_4&=c_3\\
a_{41}\Lambda+a_{42}\mu_1+a_{43}\beta+a_{44}\alpha+a_{45}\mu_3+a_{46}\mu_4&=c_4\\
a_{51}\Lambda+a_{52}\mu_1+a_{53}\beta+a_{54}\alpha+a_{55}\mu_3+a_{56}\mu_4&=c_5\\
a_{61}\Lambda+a_{62}\mu_1+a_{63}\beta+a_{64}\alpha+a_{65}\mu_3+a_{66}\mu_4&=c_6
\end{aligned}$$

โดยที่

$$a_{11}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(-\frac{b_1}{x_{1,\kappa-1}}\right)^2+\left(-\frac{b_2}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_3}{v_2}\right)^2+\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)^2+\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)^2\right]$$

$$a_{12}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[-\frac{b_1^2}{x_{1,\kappa-1}}+\left(b_2-b_3\frac{v_1}{v_2}\right)\left(-\frac{b_2}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_3}{v_2}\right)+\left(b_4-b_5\frac{v_1}{v_2}\right)\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)+\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{13}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[-\frac{b_1^2x_{2,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}}+\left(b_2x_{2,\kappa-1}-b_3x_{1,\kappa-1}\right)\left(-\frac{b_2}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_3}{v_2}\right)+\left(b_4x_{2,\kappa-1}-b_5x_{1,\kappa-1}\right)\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{14}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_3\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_2}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_3}{v_2}\right)+\left(b_5\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{15}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{16}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{21}=a_{12}$$

$$a_{22}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_1^2+\left(b_2-b_3\frac{v_1}{v_2}\right)^2+\left(b_4-b_5\frac{v_1}{v_2}\right)^2+\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)^2\right]$$

$$a_{23}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_1^2x_{2,\kappa-1}+\left(b_2x_{2,\kappa-1}-b_3x_{1,\kappa-1}\right)\left(b_2-b_3\frac{v_1}{v_2}\right)+\left(b_4x_{2,\kappa-1}-b_5x_{1,\kappa-1}\right)\left(b_4-b_5\frac{v_1}{v_2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{24}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_3\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(b_2-b_3\frac{v_1}{v_2}\right)+\left(b_5\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(b_4-b_5\frac{v_1}{v_2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{25}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_4-b_5\frac{v_1}{v_2}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{26}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_7-b_8\frac{v_1}{v_2}\right)\right]$$

$$a_{31}=a_{13}$$

$$a_{32}=a_{23}$$

$$a_{33}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_1x_{2,\kappa-1}\right)^2+\left(b_2x_{2,\kappa-1}-b_3x_{1,\kappa-1}\right)^2+\left(b_4x_{2,\kappa-1}-b_5x_{1,\kappa-1}\right)^2+\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)^2\right]$$

$$a_{34}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_3\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(b_2x_{2,\kappa-1}-b_3x_{1,\kappa-1}\right)+\left(b_5\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(b_4x_{2,\kappa-1}-b_5x_{1,\kappa-1}\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)\right]$$

$$a_{35}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_4x_{2,\kappa-1}-b_5x_{1,\kappa-1}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)\right]$$

$$a_{36}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_7x_{2,\kappa-1}-b_8x_{1,\kappa-1}\right)\right]$$

$$a_{41}=a_{14}$$

$$a_{42}=a_{24}$$

$$a_{43}=a_{34}$$

$$a_{44}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_3^2\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)^2+\left(b_5\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)^2\right]$$

$$a_{45}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_5\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_6\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\right]$$

$$a_{46}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_8\left(\frac{v_3}{v_2}-\frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)+b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\right]$$

$$a_{51}=a_{15}$$

$$a_{52}=a_{25}$$

$$a_{53}=a_{35}$$

$$a_{54}=a_{45}$$

$$a_{55}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_6^2\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)^2+b_9^2\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)^2\right]$$

$$a_{56}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_9\left(1-\frac{v_3}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\right)\right]$$

$$a_{61}=a_{16}$$

$$a_{62}=a_{26}$$

$$a_{63}=a_{36}$$

$$a_{64}=a_{46}$$

$$a_{65}=a_{56}$$

$$a_{66}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_{10}^2\left(1-\frac{v_4}{v_2}\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}c_1=-\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\Bigg[&-b_1^2\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}^2}+\left(b_2\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}}+b_3\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_2}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_3}{v_2}\right)\\&+\left(b_4\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}}+b_5\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}+b_6\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_4}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_5}{v_2}\right)\\&+\left(b_7\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}}+b_8\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}+b_9\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}+b_{10}\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(-\frac{b_7}{x_{1,\kappa-1}}+\frac{b_8}{v_2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$c_2 = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\left[b_1^2\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + \left(b_2\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_3\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(b_2 - b_3\,\frac{v_1}{v_2}\right)\right.$$

$$+\left(b_4\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_5\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_6\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_4 - b_5\,\frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$\left.+\left(b_7\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_8\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_9\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}} + b_{10}\,\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_7 - b_8\,\frac{v_1}{v_2}\right)\right]$$

$$c_3 = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_1^2\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}}\right)\left(x_{2,\kappa-1}\right) + \left(b_2\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_3\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(b_2 x_{2,\kappa-1} - b_3 x_{1,\kappa-1}\right)\right.$$

$$+\left(b_4\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_5\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_6\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(b_4 x_{2,\kappa-1} - b_5 x_{1,\kappa-1}\right)$$

$$\left.+\left(b_7\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_8\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_9\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}} + b_{10}\,\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(b_7 x_{2,\kappa-1} - b_8 x_{1,\kappa-1}\right)\right]$$

$$c_4 = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_2\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_3\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)\left(\frac{v_3}{v_2} - \frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)b_3\right.$$

$$+\left(b_4\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_5\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_6\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(\left(\frac{v_3}{v_2} - \frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)b_5 + \left(1 - \frac{v_3}{v_2}\,\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)b_6\right)$$

$$\left.+\left(b_7\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_8\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_9\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}} + b_{10}\,\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(\left(\frac{v_3}{v_2} - \frac{x_{3,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}}\right)b_8 + \left(1 - \frac{v_3}{v_2}\,\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)b_9\right)\right]$$

$$c_5 = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_4\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_5\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_6\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)\left(1 - \frac{v_3}{v_2}\,\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)b_6\right.$$

$$\left.+\left(b_7\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_8\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_9\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}} + b_{10}\,\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(1 - \frac{v_3}{v_2}\,\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}}\right)b_9\right]$$

$$c_6 = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\left(b_7\,\frac{x_{1,\kappa}-x_{1,\kappa-1}}{x_{1,\kappa-1}} + b_8\,\frac{x_{2,\kappa}-x_{2,\kappa-1}}{x_{2,\kappa-1}} + b_9\,\frac{x_{3,\kappa}-x_{3,\kappa-1}}{x_{3,\kappa-1}} + b_{10}\,\frac{x_{4,\kappa}-x_{4,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)\left(1 - \frac{v_4}{v_2}\,\frac{x_{2,\kappa-1}}{x_{4,\kappa-1}}\right)b_{10}\right]$$

ดังนั้น เราจะได้การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสุดโดยการใช้กฎของครามเมอร์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{D}_1}{\hat{D}}, \qquad \hat{\mu}_1 = \frac{\hat{D}_2}{\hat{D}}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\hat{D}_3}{\hat{D}}, \qquad \hat{\alpha} = \frac{\hat{D}_4}{\hat{D}}, \qquad \hat{\mu}_3 = \frac{\hat{D}_5}{\hat{D}}, \qquad \hat{\mu}_4 = \frac{\hat{D}_6}{\hat{D}} \tag{3.5}$$

โดยที่

$$\hat{D}_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_6 & a_{62} & \cdots & a_{66} \end{vmatrix}, \qquad \hat{D}_i = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{26} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \cdots & c_6 & \cdots & a_{66} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ i^{th} \quad column \end{array}, \qquad \hat{D}_6 = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{15} & c_1 \\ a_{22} & \cdots & a_{25} & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{62} & \cdots & a_{65} & c_6 \end{vmatrix},$$

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & \cdots & a_{66} \end{vmatrix}$$

และ

$$\hat{\gamma} = \left(\hat{\mu}_3 + \hat{\alpha}\right)\frac{\nu_3}{\nu_2} + \hat{\mu}_4 \frac{\nu_4}{\nu_2}, \qquad \hat{\sigma} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\gamma}} \frac{\nu_4}{\nu_2}, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{\hat{\Lambda}}{\nu_2} - \hat{\mu}_1 \frac{\nu_1}{\nu_2} + \hat{\alpha} \frac{\nu_3}{\nu_2} - \hat{\gamma} \tag{3.6}$$

สำหรับการทดสอบการหาค่าของพารามิเตอร์ เราจะทำการจำลองตัวแบบ (1.2) เพื่อเป็นข้อมูลจำลองสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ แล้วทดสอบประสิทธิภาพโดยการเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์จริงที่ใช้ในการจำลอง ซึ่งจะแสดงผลในบทต่อไป

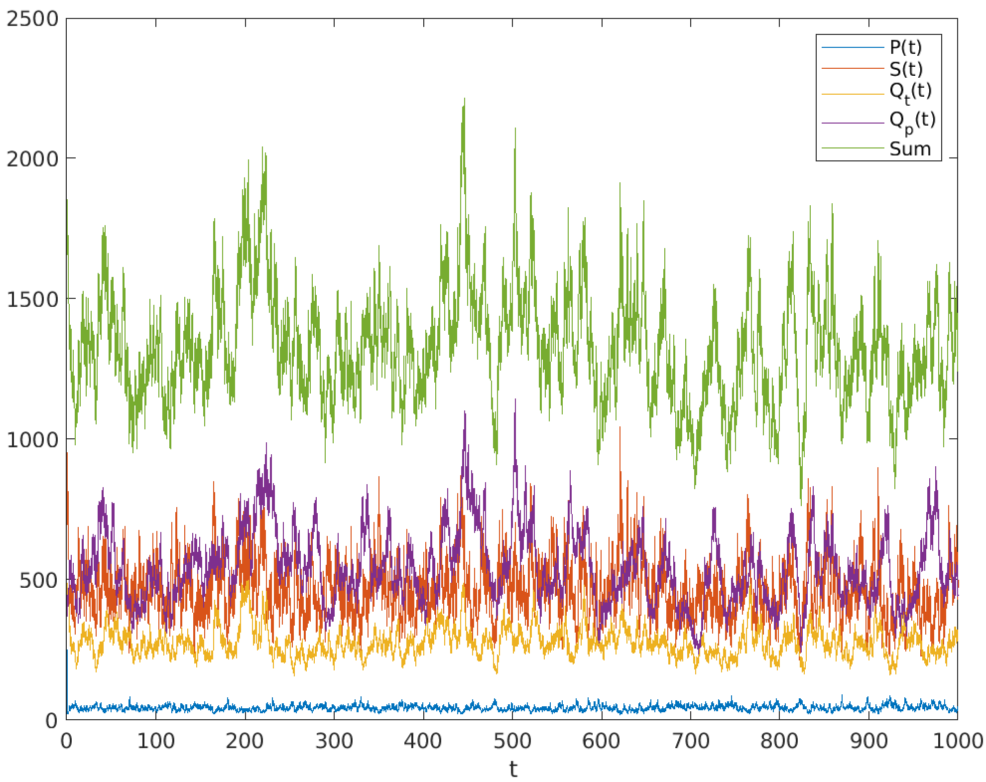
บทที่ 4
การจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

เราจะจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (1.2) โดยใช้วิธีการออยเลอร์-มารุยามาซึ่งมีช่วงย่อยกว้าง $\Delta = 0.001,\ t \in [0,1000]$ โดยเราจะให้ $\rho_{13},\ \rho_{14}$ มีค่าเป็นบวก และ $\rho_{12},\ \rho_{23},\ \rho_{24},\ \rho_{34}$ มีค่าเป็นลบ เนื่องจากผู้ที่กำลังสูบบุหรี่จะเป็นแบบอย่างให้ผู้อื่นอยากสูบบุหรี่ตามด้วย

ดังนั้น เราจะให้พารามิเตอร์มีค่าดังต่อไปนี้

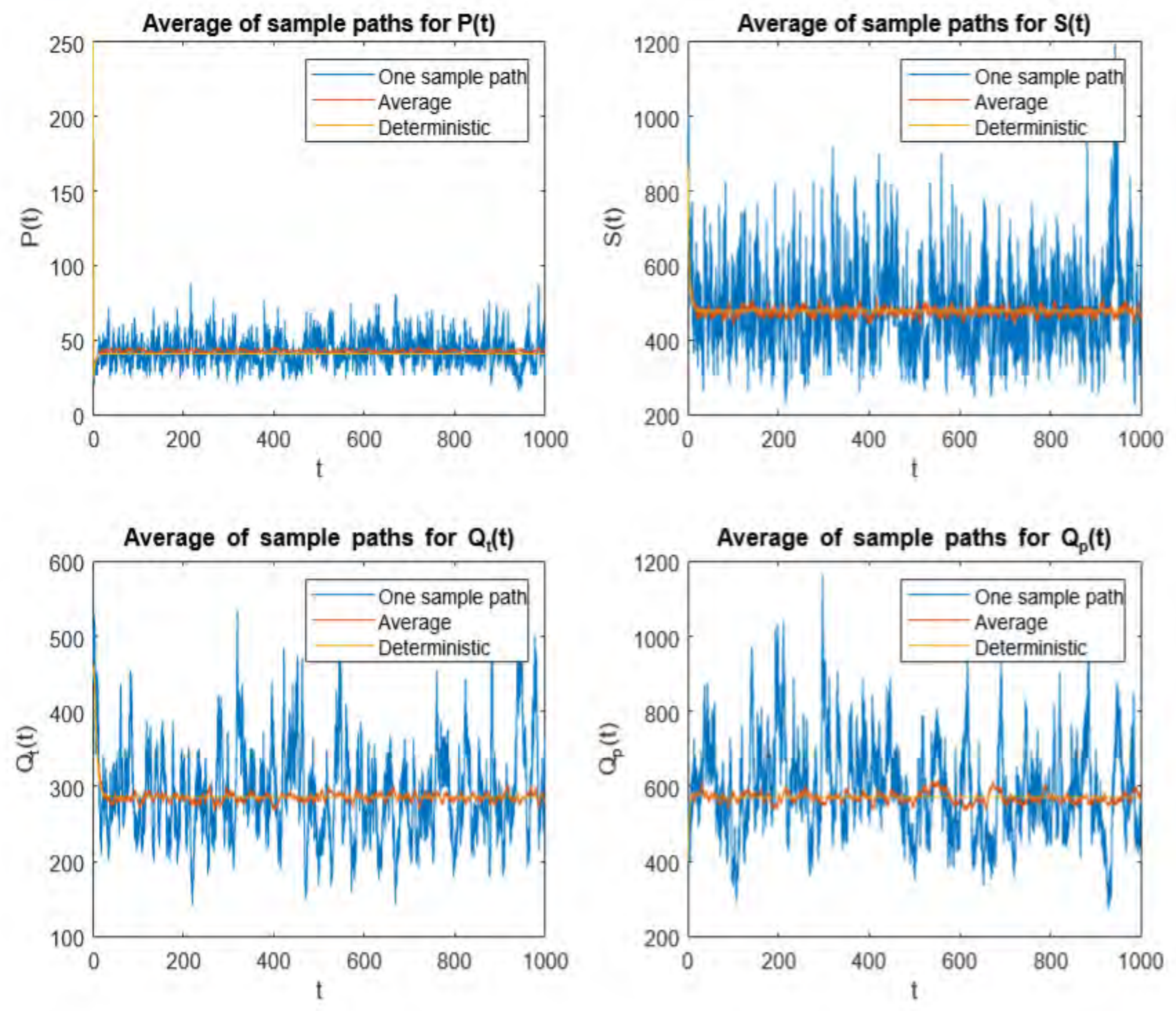
$$
\begin{array}{lllll}
\Lambda = 200, & \mu_1 = 0.1, & \mu_2 = 0.2, & \mu_3 = 0.15, & \mu_4 = 0.1, \\
\alpha = 0.15, & \beta = 0.01, & \gamma = 0.3, & \sigma = 0.4, & \sigma_1 = 0.2, \\
\sigma_2 = 0.2, & \sigma_3 = 0.1, & \sigma_4 = 0.1, & \rho_{12} = -0.1, & \rho_{13} = 0.025, \\
\rho_{14} = 0.05, & \rho_{23} = -0.05, & \rho_{24} = -0.05, & \rho_{34} = -0.005 &
\end{array}
\tag{4.1}
$$

และค่าเริ่มต้น $x_1(0) = 250,\ x_2(0) = 700,\ x_3(0) = 450,\ x_4(0) = 400$ โดยการเปรียบเทียบจำนวนประชากรทั้ง 4 ประเภท และประชากรทั้งหมด ดังรูป 4.1



รูป 4.1

ต่อมา เราจะเปรียบเทียบสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (1.2) กับสมการดีเทอร์มีนิสติก (1.1) และเพื่อที่จะหาจำนวนประชากรแต่ละประเภทให้ใกล้เคียงค่าที่แท้จริง เราจึงหาค่าเฉลี่ยจากการจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก 100 ครั้ง ดังรูป 4.2



รูป 4.2

สุดท้ายนี้ เราจะประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้สมการ (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) ซึ่งใช้ข้อมูลจากการจำลองด้วยพารามิเตอร์ในสมการ (4.1) จะได้ค่าประมาณแต่ละครั้ง ดังนี้

พารามิเตอร์	ค่าประมาณ				
	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
$\hat{\Lambda}$	202.9396	199.2079	207.2476	198.4450	199.0914
$\hat{\mu}_1$	0.1439	0.1151	0.1221	0.0761	0.0993
$\hat{\mu}_2$	0.1881	0.1840	0.2056	0.1799	0.2244
$\hat{\mu}_3$	0.1800	0.1582	0.1582	0.1730	0.1043
$\hat{\mu}_4$	0.0928	0.1097	0.1077	0.1070	0.1149
$\hat{\alpha}$	0.1489	0.1311	0.1521	0.1156	0.2090
$\hat{\beta}$	0.0101	0.0099	0.0103	0.0100	0.0100
$\hat{\gamma}$	0.3119	0.3024	0.3115	0.2972	0.3214
$\hat{\sigma}$	0.3737	0.4273	0.3987	0.4122	0.4201
$\hat{\sigma}_1$	0.2004	0.2004	0.2006	0.2003	0.2002
$\hat{\sigma}_2$	0.2002	0.2001	0.1997	0.2001	0.2001
$\hat{\sigma}_3$	0.1001	0.1001	0.0999	0.1000	0.1000
$\hat{\sigma}_4$	0.0999	0.1001	0.1000	0.1001	0.1000
$\hat{\rho}_{12}$	-0.0992	-0.0996	-0.1002	-0.0988	-0.0986
$\hat{\rho}_{13}$	0.0260	0.0241	0.0235	0.0242	0.0242
$\hat{\rho}_{14}$	0.0506	0.0492	0.0485	0.0508	0.0507
$\hat{\rho}_{23}$	-0.0509	-0.0502	-0.0488	-0.0508	-0.0519
$\hat{\rho}_{24}$	-0.0518	-0.0499	-0.0507	-0.0490	-0.0502
$\hat{\rho}_{34}$	-0.0053	-0.0055	-0.0029	-0.0057	-0.0050

พารามิเตอร์	ค่าประมาณ				
	ครั้งที่ 6	ครั้งที่ 7	ครั้งที่ 8	ครั้งที่ 9	ครั้งที่ 10
$\hat{\Lambda}$	198.5562	202.4569	199.2865	207.9369	200.1692
$\hat{\mu}_1$	0.0675	0.01550	0.1114	0.1151	0.1120
$\hat{\mu}_2$	0.2228	0.2069	0.2373	0.2088	0.1968
$\hat{\mu}_3$	0.0847	0.1261	0.1164	0.1578	0.2008
$\hat{\mu}_4$	0.1096	0.0997	0.0897	0.1041	0.0885
$\hat{\alpha}$	0.1966	0.1666	0.1936	0.1398	0.1166
$\hat{\beta}$	0.0100	0.0100	0.0099	0.0104	0.0100
$\hat{\gamma}$	0.3018	0.2989	0.2963	0.3022	0.2943
$\hat{\sigma}$	0.4448	0.4135	0.3717	0.4181	0.3597
$\hat{\sigma}_1$	0.2005	0.2004	0.2004	0.2007	0.2003
$\hat{\sigma}_2$	0.2000	0.1999	0.1999	0.2003	0.2001
$\hat{\sigma}_3$	0.1001	0.1000	0.1000	0.1001	0.1001
$\hat{\sigma}_4$	0.1000	0.1001	0.1001	0.0999	0.1000
$\hat{\rho}_{12}$	-0.1010	-0.0993	-0.0999	-0.1012	-0.0993
$\hat{\rho}_{13}$	0.0244	0.0247	0.0223	0.0240	0.0231
$\hat{\rho}_{14}$	0.0503	0.0494	0.0492	0.0506	0.0511
$\hat{\rho}_{23}$	-0.0512	-0.0512	-0.0499	-0.0499	-0.0492
$\hat{\rho}_{24}$	-0.0502	-0.0521	-0.0501	-0.0507	-0.0511
$\hat{\rho}_{34}$	-0.0039	-0.0054	-0.0036	-0.0050	-0.0042

ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์จากการจำลอง 10 ครั้ง นำมาเปรียบเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งคำนวณค่าความผิดพลาด absolute error and relative error แสดงดังตารางต่อไปนี้

พารามิเตอร์	ค่าประมาณ	ค่าจริง	abs-err	rel-err
$\hat{\Lambda}$	201.5337	200	1.5337	0.7669
$\hat{\mu}_1$	0.1118	0.1	0.0118	11.8000
$\hat{\mu}_2$	0.2054	0.2	0.0054	2.7000
$\hat{\mu}_3$	0.1459	0.15	0.0041	2.7333
$\hat{\mu}_4$	0.1024	0.1	0.0024	2.4000
$\hat{\alpha}$	0.1570	0.15	0.0070	4.6667
$\hat{\beta}$	0.0101	0.01	0.0001	1.0000
$\hat{\gamma}$	0.3038	0.3	0.0038	1.2667
$\hat{\sigma}$	0.4040	0.4	0.0040	1.0000
$\hat{\sigma}_1$	0.2004	0.2	0.0004	0.2000
$\hat{\sigma}_2$	0.2000	0.2	0.0000	0.0000
$\hat{\sigma}_3$	0.1000	0.1	0.0000	0.0000
$\hat{\sigma}_4$	0.1000	0.1	0.0000	0.0000
$\hat{\rho}_{12}$	-0.0997	-0.1	0.0003	0.3000
$\hat{\rho}_{13}$	0.0240	0.025	0.0010	4.0000
$\hat{\rho}_{14}$	0.0500	0.05	0.0000	0.0000
$\hat{\rho}_{23}$	-0.0504	-0.05	0.0004	0.8000
$\hat{\rho}_{24}$	-0.0506	-0.05	0.0006	1.2000
$\hat{\rho}_{34}$	-0.0047	-0.005	0.0003	6.0000

จากตารางจะเห็นได้ว่า ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ในการทดสอบมีความแม่นยำ เป็นการยืนยันความถูกต้องของสูตรและวิธีการที่ใช้ในการคำนวณที่ได้เสนอไว้ในบทก่อนหน้านี้

บทที่ 5
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ในโครงงานนี้ เราได้ปรับตัวแบบของ Zhang และคณะ [3] ให้สมบูรณ์มากขึ้น โดยพิจารณาระบบสมการ SDEs (1.2) ในกรณีที่กระบวนการวีเนอร์ $B_i(t),\ i=1,\ldots,4$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน อีกทั้งเรายังหาสูตรการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบนี้ด้วย ดังสมการ (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) ซึ่งจากการจำลองข้อมูลเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ จะเห็นว่าค่าประมาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงมาก

ผู้ที่สนใจอาจจะนำตัวอย่างสมการจากโครงงานนี้ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ต่าง ๆ ให้เป็นประโยชน์มากยิ่งขึ้น เช่น การระบาดของโรคไวรัส การเติบโตของสิ่งมีชีวิต ฯลฯ

เอกสารอ้างอิง

[1] Castillo-Garsow, Jordán-Salivia, Rodriguez-Herrera, Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery, and relapse. Technical Report Series, BU-1505-M, Department of Biometrics, Cornell University, (2000)

[2] O. Sharomi and A. B. Gumel, Curtailing smoking dynamics: a mathematical modeling approach. Appl. Math. Comput. 195, 475-499 (2008)

[3] Xuekang Zhang, Zhenzhong Zhang, Jinying Tong and Mei Dong, Ergodicity of stochastic smoking model and parameter estimation. Advances in Difference Equations (2016)

[4] B. Øksendal: Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 6th Edition, 2003.

ภาคผนวก ก

The Project Proposal of Course 2301399 Project Proposal

Academic Year 2019

Project Title (Thai)	แบบจำลองสโตแคสติกของคนสูบบุหรี่ที่สัญญาณรบกวนไม่อิสระต่อกันและการประมาณค่าพารามิเตอร์
Project Title (English)	Stochastic smoking model with dependent noises and parameter estimation
Project Advisor	Raywat Tanadkithirun, Ph.D. and Khamron Mekchay, Ph.D.
By	Mr. Tinnaphat Jirayuwutti ID 5933520723
	Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science
	Faculty of Science, Chulalongkorn University

Background and Rationale

As we all know, smoking is not only harmful to human health, but it also does harm to a smoker's whole family. In the long run, smoking also harm to the whole society. In recent years, several researchers have proposed some mathematical models to characterize smoking behavior. First, Castillo-Garsow et al [1] presented a deterministic smoking model, then Sharomi and Gumel [2] further developed the deterministic model. For fixed time $t \geq 0$, they separated the total population N into four classes: potential smokers $P(t)$, current smokers $S(t)$, smokers who temporarily quit smoking $Q_t(t)$, and smokers who have quit smoking permanently $Q_p(t)$. The smoking model [2] can be written as

$$
\begin{aligned}
dP(t) &= [\mu N - \mu_1 P(t) - \beta P(t)S(t)]dt, \\
dS(t) &= [-(\mu_2 + \gamma)S(t) + \beta P(t)S(t) + \alpha Q_t(t)]dt, \\
dQ_t(t) &= [-(\mu_3 + \alpha)Q_t(t) + \gamma(1-\sigma)S(t)]dt, \\
dQ_p(t) &= \left[-\mu_4 Q_p(t) + \gamma\sigma S(t)\right]dt,
\end{aligned}
$$

where $P(0) > 0$, $S(0) > 0$, $Q_t(0) > 0$, $Q_p(0) > 0$ and $0 < \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \alpha, \beta, \gamma, \sigma < 1$.

Although deterministic smoking model can characterize the dynamical behavior of the smoking population in some way, it assumes that parameters are deterministic irrespective of environmental fluctuations, which imposes some limitations in mathematical modeling of ecological systems. Recently, X. Zhang et al [3] proposed the following system of stochastic differential equations (SDEs)

$$
\begin{aligned}
dP(t) &= [\mu N - \mu_1 P(t) - \beta P(t)S(t)]dt + \sigma_1 P(t)dW_1(t),\\
dS(t) &= [-(\mu_2+\gamma)S(t) + \beta P(t)S(t) + \alpha Q_t(t)]dt + \sigma_2 S(t)dW_2(t),\\
dQ_t(t) &= [-(\mu_3+\alpha)Q_t(t) + \gamma(1-\sigma)S(t)]dt + \sigma_3 Q_t(t)dW_3(t),\\
dQ_p(t) &= \left[-\mu_4 Q_p(t) + \gamma\sigma S(t)\right]dt + \sigma_4 Q_p(t)dW_4(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where $\sigma_i > 0$ are constants and $W_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, are independent standard Brownian motions.

In this work, we will study the system of SDEs (1) in the case that the standard Brownian motions, $W_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, are dependent as a more general model. The dependent condition is considered in this work because we think that the four classes are related to each other in general. For example, the smokers who have quit smoking permanently $Q_p(t)$ can also motivate the current smokers $S(t)$ to quit smoking.

Moreover, parameter estimation for stochastic differential equations has been a topic of interest in recent years. We will simulate the data in order to analyse the behavior of the stochastic smoking model and estimate the parameters by using maximum likelihood estimation based on simulated data.

Objectives

1. To develop the stochastic smoking model by adding dependent noises
2. To estimate the parameters in stochastic smoking model with dependent noises

Scope

1. The SDE model in this work is given by the equation (1).
2. We will use maximum likelihood estimation for estimating the parameters.
3. We will use Euler–Maruyama method for the simulation.

Project Activities

1. Review basic knowledge and articles on SDEs which are related to our project
2. Defend the project proposal
3. Perform parameter estimation and simulation
4. Conclude results and write a report

Research Plan

Project Activities	Month, 2019						Month, 2020			
	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.
1. Review basic knowledge and articles on SDEs which are related to our project										
2. Defend the project proposal										
3. Perform parameter estimation and simulation										
4. Conclude results and write a report										

Benefits

The benefits to the student who implements this project are as follows.

1. Obtain the skills to search for information and to improve thinking process
2. Gain knowledge in SDE and know how to implement a numerical method for a certain system of SDEs

The benefits for users of this project are as follows.

1. Obtain the general model for smoking behavior based on stochastic with dependent noises

Equipment

1. Computer
2. Paper
3. Printer
4. Software

Budget

1. Paper A4 600 Baht.
2. Printer ink 2,500 Baht.
3. Stationery 400 Baht.
4. Photocopy 1,500 Baht.

References

1. Castillo-Garsow, Jordán-Salivia, Rodriguez-Herrera, Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery, and relapse. Technical Report Series, BU-1505-M, Department of Biometrics, Cornell University, (2000)
2. O. Sharomi and A. B. Gumel, Curtailing smoking dynamics: a mathematical modeling approach. Appl. Math. Comput. 195, 475-499 (2008)
3. Xuekang Zhang, Zhenzhong Zhang, Jinying Tong and Mei Dong, Ergodicity of stochastic smoking model and parameter estimation. Advances in Difference Equations (2016)

ภาคผนวก ข

สำหรับการจำลองข้อมูลนั้น เราจะใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งมีชุดคำสั่ง ดังนี้

```
T = 1000;
dt = 0.001; t = 0:dt:T;
n = length(t);
p = zeros(1,n); p(1) = 250;
s = zeros(1,n); s(1) = 700;
qt = zeros(1,n); qt(1) = 450;
qp = zeros(1,n); qp(1) = 400;
lambda = 200;
mu1 = 0.1; mu2 = 0.2; mu3 = 0.15; mu4 = 0.1;
beta = 0.01; alpha = 0.15; gamma = 0.3;
sigma = 0.4; sigma1 = 0.15; sigma2 = 0.2;
sigma3 = 0.15; sigma4 = 0.3;
rho12 = -0.05; rho13 = 0.015; rho14 = 0.005;
rho23 = -0.01; rho24 = -0.01; rho34 = -0.005;
Sigma = [ sigma1,0,0,0 ; 0,sigma2,0,0 ; 0,0,sigma3,0 ; 0,0,0,sigma4 ];
Rho = [1,rho12,rho13,rho14;
       rho12,1,rho23,rho24;
       rho13,rho23,1,rho34;
       rho14,rho24,rho34,1];

if 2*mu1 <= sigma1^2 || 2*mu2 <= sigma2^2 || 2*mu3<= sigma3^2 || 2*mu4 <= sigma4^2
    error('The parameters do not satisfy the required condition.')
end

A = Sigma*Rho*Sigma;
B = chol(A,'lower');
for i = 1:n-1
    W = sqrt(dt)*B*randn(4,1);
    p(i+1) = p(i) + (lambda - mu1*p(i) - beta*p(i)*s(i))*dt + p(i)*W(1);
    s(i+1) = s(i) + (beta*p(i)*s(i) - (mu2 + gamma)*s(i) + alpha*qt(i))*dt + s(i)*W(2);
    qt(i+1) = qt(i) + (-(mu3 + alpha)*qt(i) + gamma*(1 - sigma)*s(i))*dt + qt(i)*W(3);
    qp(i+1) = qp(i) + (-mu4*qp(i) + gamma*sigma*s(i))*dt + qp(i)*W(4);
end
```

ในส่วนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ จะมีชุดคำสั่งดังนี้

```
dp = log(p(2:n))-log(p(1:n-1));
ds = log(s(2:n))-log(s(1:n-1));
dqt = log(qt(2:n))-log(qt(1:n-1));
dqp = log(qp(2:n))-log(qp(1:n-1));

log11 = sum(dp.^2)/T;      % n*dt = T + dt
log12 = sum(dp.*ds)/T;
log22 = sum(ds.^2)/T;
log13 = sum(dp.*dqt)/T;
log23 = sum(ds.*dqt)/T;
log33 = sum(dqt.^2)/T;
log14 = sum(dp.*dqp)/T;
log24 = sum(ds.*dqp)/T;
log34 = sum(dqt.*dqp)/T;
log44 = sum(dqp.^2)/T;

a1_hat = sqrt(log11);
a2_hat = log12/a1_hat;
a3_hat = sqrt(log22 - a2_hat^2);
a4_hat = log13/a1_hat;
a5_hat = (log23 - a2_hat*a4_hat)/a3_hat;
a6_hat = sqrt(log33 - a4_hat^2 - a5_hat^2);
a7_hat = log14/a1_hat;
a8_hat = (log24 - a2_hat*a7_hat)/a3_hat;
a9_hat = (log34 - a4_hat*a7_hat - a5_hat*a8_hat)/a6_hat;
a10_hat = sqrt(log44 - a7_hat^2 - a8_hat^2 -a9_hat^2);

sigma1_hat = a1_hat;
sigma2_hat = sqrt(a2_hat^2 + a3_hat^2);
sigma3_hat = sqrt(a4_hat^2 + a5_hat^2 + a6_hat^2);
sigma4_hat = sqrt(a7_hat^2 + a8_hat^2 + a9_hat^2 + a10_hat^2);
rho12_hat = a2_hat/sigma2_hat;
rho13_hat = a4_hat/sigma3_hat;
rho14_hat = a7_hat/sigma4_hat;
rho23_hat = (a2_hat*a4_hat + a3_hat*a5_hat)/(sigma2_hat*sigma3_hat);
rho24_hat = (a2_hat*a7_hat + a3_hat*a8_hat)/(sigma2_hat*sigma4_hat);
rho34_hat = (a4_hat*a7_hat + a5_hat*a8_hat + a6_hat*a9_hat)/(sigma3_hat*sigma4_hat);
```

จากภาพ เป็นขั้นตอนของการหาค่า $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{34}$

```
n = n-1;
v1 = sum(p(2:end))/n;
v2 = sum(s(2:end))/n;
v3 = sum(qt(2:end))/n;
v4 = sum(qp(2:end))/n;

A_hat = [   a1_hat  0       0       0;...
            a2_hat  a3_hat  0       0;...
            a4_hat  a5_hat  a6_hat  0;...
            a7_hat  a8_hat  a9_hat  a10_hat ];
Ainv = inv(A_hat);
b1 = Ainv(1,1);
b2 = Ainv(2,1); b3 = Ainv(2,2);
b4 = Ainv(3,1); b5 = Ainv(3,2); b6 = Ainv(3,3);
b7 = Ainv(4,1); b8 = Ainv(4,2); b9 = Ainv(4,3); b10 = Ainv(4,4);

a11 = sum( (b1./p(1:n)).^2 + ...
           (-b2./p(1:n) + b3/v2).^2 + ...
           (-b4./p(1:n) + b5/v2).^2 + ...
           (-b7./p(1:n) + b8/v2).^2 );
a12 = sum( -b1^2./p(1:n) + ...
           (b2 - b3*v1/v2)*(-b2./p(1:n) + b3/v2) + ...
           (b4 - b5*v1/v2)*(-b4./p(1:n) + b5/v2) + ...
           (b7 - b8*v1/v2)*(-b7./p(1:n) + b8/v2) );
a13 = sum( -b1^2*s(1:n)./p(1:n) + ...
           (b2*s(1:n) - b3*p(1:n)).*(-b2./p(1:n) + b3/v2) + ...
           (b4*s(1:n) - b5*p(1:n)).*(-b4./p(1:n) + b5/v2) + ...
           (b7*s(1:n) - b8*p(1:n)).*(-b7./p(1:n) + b8/v2) );
a14 = sum(  b3*(v3/v2 - qt(1:n)./s(1:n)).*(-b2./p(1:n) + b3/v2) + ...
            (b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)) + b6*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))).*(-b4./p(1:n) + b5/v2) + ...
            (b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)) + b9*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))).*(-b7./p(1:n) + b8/v2) );
a15 = sum(  b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(-b4./p(1:n)+b5/v2) + ...
            b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(-b7./p(1:n)+b8/v2));
a16 = sum(  b10*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n)).*(-b7./p(1:n)+b8/v2) );
a21 = a12;
a22 = n*( b1^2 + (b2-b3*v1/v2)^2 + (b4-b5*v1/v2)^2 + (b7-b8*v1/v2)^2 );
a23 = sum(  b1^2*s(1:n) + ...
            (b2*s(1:n)-b3*p(1:n))*(b2-b3*v1/v2) + ...
            (b4*s(1:n)-b5*p(1:n))*(b4-b5*v1/v2) + ...
            (b7*s(1:n)-b8*p(1:n))*(b7-b8*v1/v2) );
a24 = sum(  b3*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))*(b2-b3*v1/v2) + ...
            (b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)) + b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)))*(b4-b5*v1/v2) + ...
            (b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)) + b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)))*(b7-b8*v1/v2) );
a25 = sum(  b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))*(b4-b5*v1/v2) + ...
            b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))*(b7-b8*v1/v2) );
a26 = sum(  b10*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n))*(b7-b8*v1/v2));
a31 = a13;
a32 = a23;
a33 = sum(  (b1*s(1:n)).^2 + (b2*s(1:n)-b3*p(1:n)).^2 + ...
            (b4*s(1:n)-b5*p(1:n)).^2 + (b7*s(1:n)-b8*p(1:n)).^2 );
a34 = sum(  b3*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)).*(b2*s(1:n)-b3*p(1:n)) + ...
            (b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))).*(b4*s(1:n)-b5*p(1:n)) + ...
            (b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))).*(b7*s(1:n)-b8*p(1:n)) );
a35 = sum(  b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(b4*s(1:n)-b5*p(1:n)) + ...
            b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(b7*s(1:n)-b8*p(1:n)) );
a36 = sum(  b10*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n)).*(b7*s(1:n)-b8*p(1:n)) );
a41 = a14;
a42 = a24;
a43 = a34;
a44 = sum(  b3^2*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n)).^2 + ...
            (b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b6*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))).^2 + ...
            (b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b9*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))).^2 );
a45 = sum(  b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b6*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))) + ...
            b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n)).*(b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b9*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))) );
a46 = sum(  b10*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n)).*(b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b9*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n))) );
a51 = a15;
a52 = a25;
a53 = a35;
a54 = a45;
a55 = sum(  b6^2*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n)).^2 + ...
            b9^2*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n)).^2 );
a56 = sum(  b10*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n))*b9.*(1-v3/v2.*s(1:n)./qt(1:n)) );
a61 = a16;
a62 = a26;
a63 = a36;
a64 = a46;
a65 = a56;
a66 = sum(  b10^2*(1-v4/v2.*s(1:n)./qp(1:n)).^2 );

c1 = -1/dt*sum( -b1^2*diff(p)./p(1:n).^2 + ...
                (b2*diff(p)./p(1:n)+b3*diff(s)./s(1:n)).*(-b2./p(1:n)+b3/v2) + ...
                (b4*diff(p)./p(1:n)+b5*diff(s)./s(1:n)+b6*diff(qt)./qt(1:n)).*(-b4./p(1:n)+b5/v2) + ...
                (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*(-b7./p(1:n)+b8/v2) );
c2 = -1/dt*sum( b1^2*diff(p)./p(1:n) + ...
                (b2*diff(p)./p(1:n)+b3*diff(s)./s(1:n)).*(b2-b3*v1/v2) + ...
                (b4*diff(p)./p(1:n)+b5*diff(s)./s(1:n)+b6*diff(qt)./qt(1:n)).*(b4-b5*v1/v2) + ...
                (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*(b7-b8*v1/v2) );
c3 = -1/dt*sum( b1^2.*diff(p)./p(1:n).*s(1:n) + ...
                (b2*diff(p)./p(1:n)+b3*diff(s)./s(1:n)).*(b2*s(1:n)-b3*p(1:n)) + ...
                (b4*diff(p)./p(1:n)+b5*diff(s)./s(1:n)+b6*diff(qt)./qt(1:n)).*(b4*s(1:n)-b5*p(1:n)) + ...
                (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*(b7*s(1:n)-b8*p(1:n)) );
c4 = -1/dt*sum( (b2*diff(p)./p(1:n)+b3*diff(s)./s(1:n)).*(b3.*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))) + ...
                (b4*diff(p)./p(1:n)+b5*diff(s)./s(1:n)+b6*diff(qt)./qt(1:n)).*(b5*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b6*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))) + ...
                (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*(b8*(v3/v2-qt(1:n)./s(1:n))+b9*(1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))) );
c5 = -1/dt*sum( (b4*diff(p)./p(1:n)+b5*diff(s)./s(1:n)+b6*diff(qt)./qt(1:n)).*((1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))*b6) + ...
                (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*((1-v3/v2*s(1:n)./qt(1:n))*b9) );
c6 = -1/dt*sum( (b7*diff(p)./p(1:n)+b8*diff(s)./s(1:n)+b9*diff(qt)./qt(1:n)+b10*diff(qp)./qp(1:n)).*(1-v4/v2*s(1:n)./qp(1:n))*b10 );
```

```
Dd = [  a11, a12, a13, a14, a15, a16;...
        a21, a22, a23, a24, a25, a26;...
        a31, a32, a33, a34, a35, a36;...
        a41, a42, a43, a44, a45, a46;...
        a51, a52, a53, a54, a55, a56;...
        a61, a62, a63, a64, a65, a66];
Dd1 = [ c1, a12, a13, a14, a15, a16;...
        c2, a22, a23, a24, a25, a26;...
        c3, a32, a33, a34, a35, a36;...
        c4, a42, a43, a44, a45, a46;...
        c5, a52, a53, a54, a55, a56;...
        c6, a62, a63, a64, a65, a66];
Dd2 = [ a11, c1, a13, a14, a15, a16;...     %
        a21, c2, a23, a24, a25, a26;...
        a31, c3, a33, a34, a35, a36;...
        a41, c4, a43, a44, a45, a46;...
        a51, c5, a53, a54, a55, a56;...
        a61, c6, a63, a64, a65, a66];
Dd3 = [ a11, a12, c1, a14, a15, a16;...
        a21, a22, c2, a24, a25, a26;...
        a31, a32, c3, a34, a35, a36;...
        a41, a42, c4, a44, a45, a46;...
        a51, a52, c5, a54, a55, a56;...
        a61, a62, c6, a64, a65, a66];
Dd4 = [ a11, a12, a13, c1, a15, a16;...
        a21, a22, a23, c2, a25, a26;...
        a31, a32, a33, c3, a35, a36;...
        a41, a42, a43, c4, a45, a46;...
        a51, a52, a53, c5, a55, a56;...
        a61, a62, a63, c6, a65, a66];
Dd5 = [ a11, a12, a13, a14, c1, a16;...
        a21, a22, a23, a24, c2, a26;...
        a31, a32, a33, a34, c3, a36;...
        a41, a42, a43, a44, c4, a46;...
        a51, a52, a53, a54, c5, a56;...
        a61, a62, a63, a64, c6, a66];
Dd6 = [ a11, a12, a13, a14, a15, c1;...
        a21, a22, a23, a24, a25, c2;...
        a31, a32, a33, a34, a35, c3;...
        a41, a42, a43, a44, a45, c4;...
        a51, a52, a53, a54, a55, c5;...
        a61, a62, a63, a64, a65, c6];

lambda_hat = det(Dd1)/det(Dd);
mu1_hat = det(Dd2)/det(Dd);
beta_hat = det(Dd3)/det(Dd);
alpha_hat = det(Dd4)/det(Dd);
mu3_hat = det(Dd5)/det(Dd);
mu4_hat = det(Dd6)/det(Dd);
gamma_hat = (mu3_hat+alpha_hat)*v3/v2 + mu4_hat*v4/v2;
sigma_hat = mu4_hat/gamma_hat*v4/v2;
mu2_hat = lambda_hat/v2 - mu1_hat*v1/v2 + alpha_hat*v3/v2 - gamma_hat;
```

จากภาพ เป็นขั้นตอนของการหาค่า $\Lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$

ประวัติผู้เขียน

นายทินภัทร จิรายุวุฒิ

รหัสนิสิต 5933520723

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย