โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ	**ตัวแบบสโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ**
	Stochastic model for climate change with temperature dependent perturbation
ชื่อนิสิต	**นางสาวทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์ 5933519123**
ภาควิชา	**คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์**
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	**2562**

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวแบบสโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ

นางสาวทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

Stochastic model for climate change with temperature dependent perturbation

Miss Thikamphon Yutthanapakon

A project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน ตัวแบบสโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ

โดย นางสาวทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รศ.ดร. คำรณ เมฆฉาย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(รองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพชรอาภา บุญเสริม)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุจินต์ คมฤทัย)

ทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์ : ตัวแบบสโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ (Stochastic model for climate change with temperature dependent perturbation) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รศ.ดร. คำรณ เมฆฉาย, 45 หน้า.

ในโครงงานนี้ เราศึกษาตัวแบบสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ โดยจะจำลองโมเดลด้วยวิธีการออยเลอร์ – มารุยา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอุณภูมิตามเวลา และศึกษาผลกระทบของค่าพารามิเตอร์จากการรบกวนส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิโลก

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ....ทิฆัมพร....

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ....เรวัต ถนัดกิจหิรัญ....

ปีการศึกษา 2562

5933519123: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: CLIMATE CHANGE MODEL, NUMERICAL METHOD, STOCHASTIC, STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

THIKAMPHON YUTTHANAPAKON: STOCHASTIC MODEL FOR CLIMATE CHANGE WITH TEMPERATURE DEPENDENT PERTURBATION. ADVISOR: RAYWAT TANADKITHIRUN, PH.D. AND KHAMRON MEKCHAY, PH.D., 45 PP.

In this project, we study the stochastic model for climate change with temperature dependent perturbation. We simulate the model by using the Euler - Maruyama method to study the behavior of temperature. In addition, we also study the effect of parameters from perturbation to the changes of Earth temperature.

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature ทิฆัมพร

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

Academic Year: 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงาน “ตัวแบบสโตแคสติกสำหรับการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ” สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากอาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รศ.ดร. คำรณ เมฆฉาย ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทั้งสองท่านเป็นอย่างยิ่งที่คอยให้คำปรึกษาและคำแนะนำตลอดช่วงระยะเวลาที่ผ่านมา ทั้งยังสละเวลาส่วนตัวเพื่อให้ความช่วยเหลือ ข้าพเจ้าทราบซึ้งใจเป็นอย่างยิ่ง และขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร. เพชรอาภา บุญเสริม และ รศ.ดร. สุจินต์ คมฤทัย ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการสอบโครงงานในครั้งนี้ และยังให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดที่เป็นประโยชน์ รวมทั้งยังชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ เพื่อนำไปแก้ไขโครงงานให้สำเร็จลุล่วง นอกจากนี้ยังขอขอบคุณครอบครัวและเพื่อน ๆ ที่คอยให้คำปรึกษา และกำลังใจให้การทำงานในครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้สนับสนุนเงินทุนสำหรับการจัดทำโครงงานนี้

สารบัญ

สารบัญภาพ

สารบัญตาราง

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ในปัจจุบันนี้สภาพอากาศได้เปลี่ยนแปลงไปอย่างมาก โดยเฉพาะปัญหาโลกร้อน หรือสภาพอากาศที่เปลี่ยนแปลงบ่อย ทำให้เกิดผลกระทบต่อสิ่งมีชีวิตมากมาย ยกตัวอย่างเช่น ในหน้าหนาวแทนที่จะมีอากาศหนาวแต่กลับร้อนมาก หรือช่วงหน้าร้อนที่ฝนตกหนักจนทำให้น้ำท่วม ซึ่งหลาย ๆ อย่างก็เกิดการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติและจากมนุษย์ เช่น การตัดไม้ทำลายป่า การปล่อยก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์จากโรงงาน หรือจากครัวเรือน และการเผาไหม้เชื้อเพลิงต่าง ๆ ซึ่งโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศก็เป็นโมเดลที่น่าสนใจ โดยโมเดลสโตแคสติกของการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศถูกเสนอโดย Budyko และ Sellers ในปี 1969 [1] พวกเขาได้พิจารณาวิวัฒนาการของอุณหภูมิโลกซึ่งมีสาเหตุมาจากการแผ่รังสีเข้าของดวงอาทิตย์ และการแผ่รังสีออกจากโลก ที่มาของสมการจะถูกอธิบายอย่างละเอียดในได้จากบทที่ 3 หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1983 Benzi และคณะ [2] ได้เพิ่มการก่อกวน ดังสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (stochastic differential equation)

$$dT_t = \frac{E(T_t)}{c}\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\left(Acos\omega t+1\right)+Acos\omega t\right]dt+\varepsilon^{1/2}dW_t \qquad (1.1)$$

โดยที่ T_t คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก ณ เวลา t

T_1 = 278.6 เคลวิน, T_2 = 283.3 เคลวิน และ T_3 = 288.6 เคลวิน

$E(T_t)$ คือ พลังงานจากการแผ่รังสีคลื่นยาว

c คือ ความจุความร้อนของโลก

β, A และ ω คือ ค่าคงที่

ε คือ ความแปรปรวนของการก่อกวน, และ W_t คือ กระบวนการวีเนอร์ (Wiener process)

จะเห็นได้ว่าโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศที่ศึกษา (1.1) สัมประสิทธิ์ในส่วนที่เป็นสโตแคสติกจะเป็นค่าคงที่ ในงานนี้เราจะศึกษาโมเดล (1.2) ที่พัฒนาเพิ่มเติมจากโมเดล (1.1) โดยในส่วนของสโตแคสติกจะให้สัมประสิทธิ์การก่อกวนมีค่าที่ขึ้นกับอุณหภูมิ เพื่อทำให้เป็นสมการทั่วไปมากขึ้น ดังสมการ (1.2) ด้านล่าง

$$dT_t = \frac{E(T_t)}{c}\left[\beta\left(\frac{1-T_t}{T_1}\right)\left(\frac{1-T_t}{T_2}\right)\left(\frac{1-T_t}{T_3}\right)\left(Acos\omega t+1\right)+Acos\omega t\right]dt+\delta T_t^{\alpha}dW_t \qquad (1.2)$$

โดยที่ $\alpha \in [0,1]$ และ δ เป็น ค่าคงที่

โครงงานนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาพฤติกรรมของอุณหภูมิว่าเปลี่ยนแปลงอย่างไรตามเวลาด้วยสมการ (1.2) โดยโมเดลที่ศึกษานั้นจะมีค่าของอุณหภูมิที่อยู่ระหว่างอุณหภูมิสถานะคงที่ คือ $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ และ T_3 โดยที่ T_1 และ T_3 เป็นอุณหภูมิสถานะคงที่ที่เสถียร และ T_2 เป็นอุณหภูมิสถานะคงที่ที่ไม่เสถียร โดยจะศึกษาผลกระทบ ของค่าพารามิเตอร์ α , δ ต่อพฤติกรรมของอุณหภูมิว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร ผ่านการจำลองโมเดลด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) โดยใช้วิธีออยเลอร์-มารุยามา (Euler–Maruyama method) ซึ่งอธิบายไว้ในบทที่ 4

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะแนะนำบทนิยามและความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้อง อันได้แก่สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในโครงงานนี้

1. ความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

บทนิยาม 2.1 ตัวแปรสุ่ม X จะถูกเรียกว่า มี**การแจกแจงปกติ**ด้วยค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

ถ้า $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(0,1)$ แล้วเราจะกล่าวว่า X มี**การแจกแจงปกติมาตรฐาน**

บทนิยาม 2.2 ให้ I เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ กลุ่มของตัวแปรสุ่ม $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in \mathrm{I}}$ ถูกเรียกว่าเป็น**กระบวนการสโตแคสติก**

บทนิยาม 2.3 ให้ $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in \mathrm{I}}$ เป็นกระบวนการสโตแคสติกบนปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ สำหรับแต่ละ $\omega \in \Omega$ ฟังก์ชัน $\mathrm{X}_{\bullet}(\omega): \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ จะถูกเรียกว่าเป็น**ทางเดินตัวอย่าง (sample path)** ของ $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in \mathrm{I}}$

บทนิยาม 2.4 ตัวแปรสุ่ม X และ Y จะถูกเรียกว่า**เป็นอิสระต่อกัน** ถ้าสำหรับทุกบอเรลเซต A และ B ใน $\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}, \mathrm{Y} \in \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{B})$$

บทนิยาม 2.5 กระบวนการวีเนอร์ หรือการเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian motion) บนช่วงเวลา $[0, T]$ เป็นกลุ่มของตัวแปรสุ่ม $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $W_0 = 0$ ด้วยความน่าจะเป็น 1

2. สำหรับ $0 \le s < t \le T$ ได้ว่า $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ หรือนั่นคือ $W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}\, N(0,1)$

3. สำหรับ $0 \le s < t \le u < v \le T$ ได้ว่า $W_t - W_s$ และ $W_v - W_u$ เป็นอิสระต่อกัน

4. $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ มีทางเดินตัวอย่างที่ต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกโดยทั่วไปแล้วจะถูกเขียนอยู่ในรูป

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dW_t, \qquad 0 \le t \le T \tag{2.1}$$
$$X_0 = x$$

เมื่อ f และ g เป็น ฟังก์ชันค่าจริงของ t และ X_t , W_t เป็นกระบวนการวีเนอร์ และ $x \in \mathbb{R}$
สมการที่ (2.1) เป็นสัญลักษณ์ที่แทนสมการเชิงปริพันธ์

$$X_t - X_0 = \int_0^t f(s, X_s)\,ds + \int_0^t g(s, X_s)\,dW_s \tag{2.2}$$

โดยปริพันธ์ทางด้านขวามือของสมการ (2.2) ถูกตีความแบบปริพันธ์รีมันน์สามัญและปริพันธ์แบบอิโตะ [3]

2. ความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dW_t, \qquad t \in [0, T] \tag{2.3}$$

เราแบ่งเวลาในช่วง $[0,T]$ ออกเป็น N ช่วง แต่ละช่วงมีความกว้างเท่ากัน ให้ $t_i = i\Delta$ สำหรับ $i = 0, \ldots, N$ เมื่อ $\Delta = \dfrac{T}{N}$

ให้ x_n เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (2.3) ที่เวลา t_n โดยใช้สูตรออยเลอร์-มารุยามา

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\Delta + g(t_n, x_n)\Delta W_n \tag{2.4}$$

เมื่อ ΔW_n มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน Δ และ $x_0 = X_0$

บทที่ 3

ตัวแบบสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

ในโครงงานนี้ผู้จัดทำได้ศึกษาโมเดลสโตแคสติกของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิโลกจากงานวิจัยของ Budyko และ Sellers (1969) [1] ซึ่งได้พิจารณาวิวัฒนาการของอุณหภูมิโลกที่มีสาเหตุมาจากการแผ่รังสีเข้ามาสู่โลกของดวงอาทิตย์ (R_{in}) และการแผ่รังสีและการสะท้อนออกจากโลก (R_{out}) ดังสมการ

$$c\frac{d}{dt}T_t = R_{in} - R_{out} \tag{3.1}$$

โดย c คือ ค่าความจุความร้อนของโลก $c = 4000$ และ T_t คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก

$$R_{in} = Q(1 + A\cos\omega t) \tag{3.2}$$

Q คือ ค่าคงที่ของแสงอาทิตย์ และ A คือ forcing amplitude และ

R_{out} อยู่ในรูป

$$R_{out} = \alpha(T_t)R_{in} + E(T_t) \tag{3.3}$$

โดย $\alpha(T_t)$ คือ สัดส่วนการสะท้อน (albedo) และ $E(T_t)$ คือ พลังงานจากการแผ่รังสีคลื่นยาว

เมื่อนำ (3.2) และ (3.3) แทนใน (3.1) จะได้

$$c\frac{d}{dt}T_t = Q(1 + A\cos\omega t)(1 - \alpha(T_t)) - E(T_t) \tag{3.4}$$

เมื่อพิจารณา $A = 0$

$$c\frac{d}{dt}T_t = Q(1 - \alpha(T_t)) - E(T_t) \tag{3.5}$$

และให้ $$F(T_t) = Q(1 - \alpha(T_t)) - E(T_t)$$

ดังนั้นจะได้ $$c\frac{d}{dt}T_t = F(T_t) \tag{3.6}$$

เมื่อพิจารณาที่ สถานะคงที่ (steady state) จาก (3.6)

$$F(T_t) = 0 \tag{3.7}$$

จาก (3.6) และ (3.7) จะได้

$$Q(1-\alpha(T_t)) = E(T_t) \tag{3.8}$$

นิยามฟังก์ชัน $\gamma(T_t)$ ดังนี้

$$\gamma(T) = \left[\frac{Q\left(1-\alpha(T)\right)}{E(T)}\right] - 1 \tag{3.9}$$

จะได้ว่า $\gamma(T) = 0$ ถ้า $T = T_i$, $i = 1, 2, 3$ เป็นอุณหภูมิที่เป็นสถานะคงที่ ซึ่งในงานวิจัยนี้ จากการเก็บข้อมูล จะมีค่า อุณหภูมิแบบนี้อยู่ 3 ค่า จึงทำให้สามารถที่จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\gamma(T) = \beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right) \tag{3.10}$$

โดย $T_1 = 278.6\,K$, $T_2 = 283.3\,K$ และ $T_3 = 288.6\,K$

β เป็นค่าคงที่ ที่สามารถประมาณค่าได้จากความสัมพันธ์ $\beta = \frac{1}{\tau} T_3 \frac{c}{E(T_3)}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{T_3}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_3}{T_2}\right)}\right]$

จาก (3.9) และ (3.10) จะได้สมการ

$$Q(1-\alpha(T)) = E(T)(1+\gamma(T)) = E(T)\left[1+\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\right] \tag{3.11}$$

จาก (3.4) และ (3.11) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T_t &= \frac{E(T_t)}{c}(1+\gamma(T_t))(1+A\cos\omega t) - \frac{E(T_t)}{c} \\
&= \frac{E(T_t)}{c}\left[\gamma(T_t)(A\cos\omega t) + A\cos\omega t + \gamma(T_t)\right] \\
&= \frac{E(T_t)}{c}\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)(A\cos\omega t + 1) + A\cos\omega t\right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

เมื่อให้ $$F(T_t,t)=E(T_t)\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\left(A\cos\omega t+1\right)+A\cos\omega t\right]$$

ดังนั้นจะได้สมการเป็น $$c\frac{d}{dt}T_t=F(T_t,t)$$

ซึ่งในงานวิจัยของเขา จะพิจารณาสมการสโตแคสติก (1.1) คือ

$$dT_t=\frac{F(T_t,t)}{c}+\varepsilon^{1/2}dW_t$$

นั่นคือ $$dT_t=\frac{E(T_t)}{c}\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\left(A\cos\omega t+1\right)+A\cos\omega t\right]dt+\varepsilon^{1/2}dW_t \tag{1.1}$$

ในงานนี้ผู้จัดทำได้ปรับปรุงโมเดลส่วนที่เป็นการรบกวนเพื่อให้ครอบคลุมกรณีทั่วไปมากขึ้น โดยทำการดัดแปลงการรบกวนที่ควรจะขึ้นกับอุณหภูมิด้วย แทนค่าคงที่ตามโมเดลด้านล่าง (1.2)

$$dT_t=\frac{E(T_t)}{c}\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\left(A\cos\omega t+1\right)+A\cos\omega t\right]dt+\delta T_t^{\alpha}dW_t \tag{1.2}$$

โดยที่ $\alpha\in[0,1]$ และ δ เป็นค่าคงที่ สังเกตว่า ถ้า $\alpha=0$ สมการ (1.2) ก็คือ สมการต้นแบบ (1.1) จากงานวิจัยของ [1] ที่มีการรบกวนเป็นค่าคงที่

ในงานวิจัยนี้ จะทำการศึกษาโมเดล (1.2) ดังนี้

1. ศึกษาพฤติกรรมของโมเดล ผ่านการจำลองตัวแบบสมการ (1.2) โดยวิธีออยเลอร์-มารุยามา สำหรับค่าพารามิเตอร์ในช่วงของพารามิเตอร์ที่เหมาะสม โดยเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์ของสมการ (1.1)

2. ศึกษาพฤติกรรมจำนวนการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิโลกที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา 1,000,000 ปี ที่มีผลมาจากการรบกวน โดยจะพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของการรบกวน α และ δ

บทที่ 4

การจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

จากบทที่แล้วได้ศึกษาโมเดลจากงานวิจัย ในบทนี้จะจำลองโมเดลโดยใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อศึกษาพฤติกรรมของโมเดล ในการจำลองโมเดลโดยใช้สูตรวิธีออยเลอร์-มารุยามา คือ

$$\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_n + \frac{E(\tilde{T}_n)}{c}\left[\beta\left(1-\frac{\tilde{T}_n}{T_1}\right)\left(1-\frac{\tilde{T}_n}{T_2}\right)\left(1-\frac{\tilde{T}_n}{T_3}\right)\left(A\cos\omega t_n+1\right)+A\cos\omega t_n\right]\Delta t+\delta\tilde{T}_n^{\alpha}\,\Delta W_n$$

เมื่อ $\Delta t = 1,\ t_n = n\,\Delta$ สำหรับ $n = 0,1,\ldots,1,000,000$,

$\tilde{T}_n$ คือผลเฉลยเชิงตัวเลข ณ เวลา t_n

$\tilde{T}_0 = 280$ เคลวิน

และ $\Delta W_n \sim N(0,\Delta t)$

โดยพารามิเตอร์แต่ละค่า มีดังนี้

$c = 4,000$

$T_1 = 278.6$ เคลวิน, $T_2 = 283.3$ เคลวิน และ $T_3 = 288.6$ เคลวิน

$A = 0.0005$

$\omega = \frac{2\pi}{10^5}$

$\tau = 8$ ปี

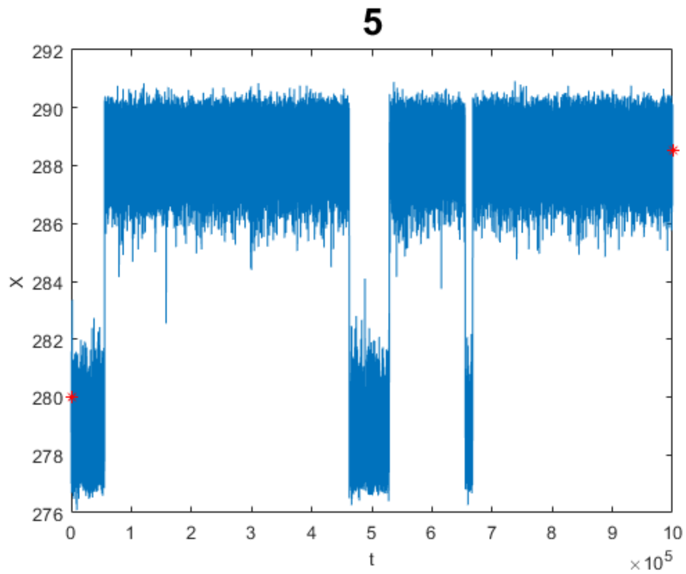
$E(T_t) = k \times T_t^4$ เมื่อ $k = 5.6705\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ คือค่าคงที่ของสเตฟาน-โบลทซ์มานน์ (Stefan-Boltzmann)

และ $\beta = \frac{1}{\tau}\times T_3 \times \frac{c}{E(T_3)} \times \left[\frac{1}{\left(1-\frac{T_3}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_3}{T_2}\right)}\right]$

1. ศึกษาพฤติกรรมทั่วไปของทางเดินตัวอย่าง

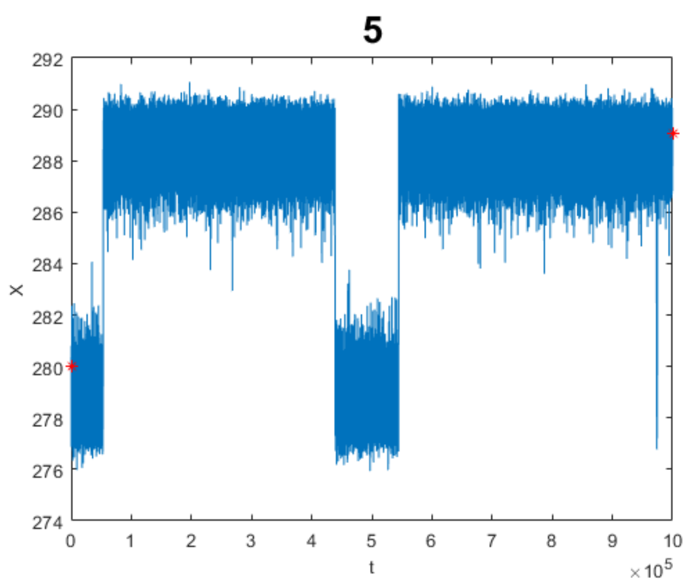
ในส่วนแรกจะจำลองโมเดลโดยเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α และ δ และสังเกตพฤติกรรมของทางเดินตัวอย่าง ของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิแต่ละค่าพารามิเตอร์ เพื่อสังเกตจำนวนครั้งของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเสถียรระหว่าง T_1 และ T_3

จากโมเดล (1.2) ที่ศึกษา ถ้าให้ $\alpha = 0$ จะได้โมเดลเป็นเหมือนโมเดลต้นแบบ (1.1) จากงานวิจัย [1] ซึ่งได้ศึกษาไว้ว่า ในกรณีนี้ ค่า δ ที่เหมาะสมจะอยู่ในช่วง $\delta \in [0.06, 0.15]$
เช่น ตัวอย่างนี้เราให้ $\alpha = 0$ และ $\delta = 0.09$ ที่แสดงผลการจำลองได้ดังรูปที่ 1 สังเกตว่ามีการกระโดดของทางเดินตัวอย่างจาก T_1 และ T_3 จำนวน 5 ครั้ง



รูปภาพที่ 1: ทางเดินตัวอย่างเมื่อ $\alpha = 0$ และ $\delta = 0.09$

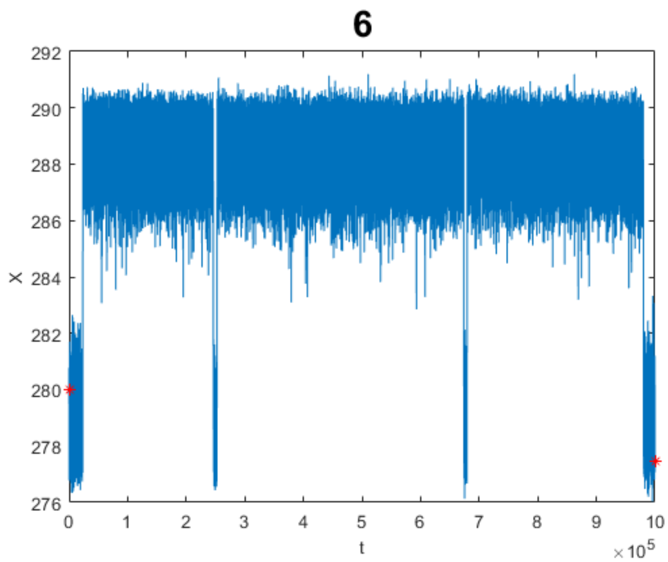
ซึ่งในงานของเราจากสมการ (2.2) ถ้าเราเปลี่ยน $\alpha = 0.1$ และ $\delta = 0.03$ จะได้ดังรูปภาพที่ 2 มีการกระโดดของทางเดินตัวอย่างจาก T_1 และ T_3 จำนวน 5 ครั้ง



รูปภาพที่ 2: ทางเดินตัวอย่าง เมื่อ $\alpha = 0.1$ และ $\delta = 0.03$

จากรูปภาพที่ 2 ถ้าเราเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ α ให้เพิ่มขึ้น สังเกตว่าค่า δ จะน้อยลงจึงจะทำให้พฤติกรรมของกราฟใกล้เคียงกับโมเดลต้นแบบ (1.1)

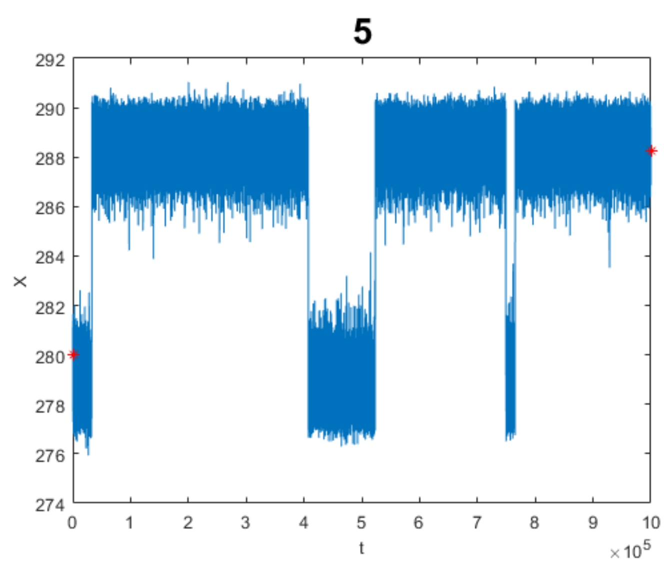
และ ถ้าเราเปลี่ยน $\alpha = 0.2$ และ $\delta = 0.011$ จะได้ดังรูปภาพที่ 3 มีการกระโดดของทางเดินตัวอย่างจาก T_1 และ T_3 จำนวน 6 ครั้ง



รูปภาพที่ 3: ทางเดินตัวอย่าง เมื่อ $\alpha = 0.2$ และ $\delta = 0.011$

จากรูปภาพที่ 3 สังเกตว่าถ้าการเปลี่ยนแปลงของกราฟใกล้เคียงกับรูปภาพที่ 1 ค่า δ จะมีค่าน้อยลงมากกว่าเดิม

และ ถ้าเราเปลี่ยน $\alpha = 0.5$ และ $\delta = 0.00032$ จะได้ดังรูปภาพที่ 4



รูปภาพที่ 4: ทางเดินตัวอย่าง เมื่อ $\alpha = 0.5$ และ $\delta = 0.00032$

จากรูปภาพที่ 4 ค่า δ ลดลงมาเยอะมาก เนื่องจาก α มากขึ้น เนื่องจากถ้าเราต้องการให้ได้ผลใกล้เคียงกับสมการต้นแบบ (1.1) การรบกวนของเรามีอุณหภูมิไปเกี่ยวข้องด้วยผ่านพารามิเตอร์ α และถ้าอุณหภูมิมีค่ากำลัง α มากขึ้น จึงทำให้ค่าคงที่ δ ต้องลดลง การรบกวนจึงจะอยู่ในช่วงที่เหมาะสมเช่นเดียวกับตัวสมการต้นแบบ

2. จำลองพฤติกรรมแต่ละค่าพารามิเตอร์

ต่อมาเราจะจำลองโมเดลทั้งหมด 10 ทางเดินตัวอย่างในแต่ละค่าพารามิเตอร์ และสังเกตค่าเฉลี่ยของการกระโดดของทางเดินตัวอย่างระหว่าง T_1 และ T_3 โดยมีการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ โดยให้ $\alpha \in [0,1]$ และจะได้ค่า δ อยู่ในช่วง ดังนี้

ตารางที่ 1 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.06, 0.15]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่างที่**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.06	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0.7
2	0.09	5	3	3	3	5	7	7	2	9	5	4.9
3	0.12	25	19	13	25	33	11	19	25	23	25	21.8
4	0.15	79	74	51	85	81	79	69	75	93	83	76.9

เนื่องจากโมเดลที่จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้สมมติฐานว่าจะทำให้โมเดลทั่วไปมากขึ้น ถ้าให้ $\alpha = 0$ จะได้โมเดลต้นแบบที่ได้ศึกษา โดยในงานที่ศึกษาใช้ $\varepsilon \in [0.06, 0.15]$ เนื่องจากเป็นค่าที่เหมาะสมเนื่องจากการกระโดดไม่มากเกินไป ต่อไปเราจะจำลองพฤติกรรมของตัวแบบแต่ละค่าดังนี้

ตารางที่ 2 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.03$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.05, 0.11]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่าง**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.07	13	9	3	5	3	7	7	5	9	5	6.6
3	0.09	24	29	29	33	33	39	31	27	31	24	30
4	0.11	109	84	93	99	93	96	85	87	100	123	97.1

ถ้าค่า $\delta > 0.11$ ทำให้การกระโดดมากกว่า 100 ซึ่งมีค่าเยอะมาก ทำให้การรบกวนเยอะมากเกินไป แต่ถ้าค่า $\delta < 0.11$ ทำให้การกระโดดใกล้เคียง 0 คือไม่มีการกระโดดเลย

ตารางที่ 3 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.06$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.03, 0.08]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.03	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0.7
2	0.05	7	7	7	3	5	11	5	9	13	3	7
3	0.07	55	57	55	59	49	43	47	59	49	53	52.6
4	0.08	98	92	85	111	107	99	105	109	109	101	101.6

จากตารางที่ 3 ค่า δ มีค่าดังนี้ $\delta \in [0.03, 0.08]$ ซึ่งถ้าค่า $\delta > 0.08$ จะทำให้การรบกวนเยอะเกินไป และตารางข้างล่างจะให้ค่า α เพิ่มขึ้น และ δ ลดลงเรื่อย ๆ

ตารางที่ 4 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.08$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.03, 0.06]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.03	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.04	8	5	1	8	7	11	7	5	7	3	6.2
3	0.05	31	23	37	27	25	29	25	27	31	37	29.2
4	0.06	87	69	81	89	81	78	67	79	85	75	79.1

จากตารางที่ 4 ให้ $\alpha = 0.08$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.03 ถึง 0.06

ตารางที่ 5 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.10$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.02, 0.05]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.02	2	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1.1
2	0.03	5	5	7	3	3	5	3	5	4	1	4.1
3	0.04	31	33	29	39	21	31	31	31	35	35	31.6
4	0.05	77	93	85	101	106	95	113	93	103	78	94.4

จากตารางที่ 5 ให้ $\alpha = 0.10$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.02 ถึง 0.05

ตารางที่ 6 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.16$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.01, 0.025]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.010	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0.6
2	0.015	3	5	4	5	3	3	3	7	1	5	3.9
3	0.020	33	39	23	30	25	29	15	31	29	23	27.7
4	0.025	91	95	103	73	89	98	110	81	103	77	92

จากตารางที่ 6 ให้ $\alpha = 0.16$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.01 ถึง 0.025

ตารางที่ 7 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.18$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.01, 0.02]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.014	9	8	11	9	6	17	1	17	15	3	9.6
3	0.017	41	45	27	19	32	37	41	33	33	68	37.6
4	0.02	95	101	109	75	72	71	69	83	106	111	89.2

จากตารางที่ 7 ให้ $\alpha = 0.18$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.01 ถึง 0.02

ตารางที่ 8 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.20$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.007, 0.016]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.007	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0.8
2	0.009	1	1	1	3	1	3	2	3	3	3	2.1
3	0.012	21	15	17	245	18	11	13	23	9	15	16.7
4	0.016	97	101	95	79	85	85	103	83	99	93	92

จากตารางที่ 8 ให้ $\alpha = 0.20$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.007 ถึง 0.016 จากตารางนี้เห็นชัดเจนมากขึ้นว่า ค่าพารามิเตอร์ δ มีช่วงที่แคบลงเรื่อย ๆ

ตารางที่ 9 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.26$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.004, 0.008]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่าง**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.004	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1.2
2	0.005	7	9	1	5	1	7	3	1	9	7	5
3	0.007	27	33	33	40	29	33	31	39	40	21	32.6
4	0.008	91	81	95	66	83	93	66	74	93	101	84.3

จากตารางที่ 9 ให้ $\alpha = 0.26$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.004 ถึง 0.008

ตารางที่ 10 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.30$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.002, 0.005]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่าง**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.002	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0.7
2	0.003	3	1	3	5	1	5	3	1	3	1	2.6
3	0.004	19	27	17	17	21	25	30	28	29	31	24.4
4	0.005	68	79	69	87	81	59	77	88	79	63	75

จากตารางที่ 10 ให้ $\alpha = 0.30$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.002 ถึง 0.005

ตารางที่ 11 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.36$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0011, 0.0027]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่าง**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.0011	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0.8
2	0.0016	1	7	5	11	3	5	3	8	5	3	5.1
3	0.0023	45	63	56	33	39	49	45	53	37	37	45.7
4	0.0027	91	107	88	87	97	85	105	81	79	63	88.3

จากตารางที่ 11 ให้ $\alpha = 0.36$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0011 ถึง 0.0027

ตารางที่ 12 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.40$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0007, 0.0016]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.0007	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0.9
2	0.0010	9	5	1	3	9	9	4	9	1	1	5.1
3	0.0013	19	13	27	13	13	25	15	17	225	21	18.8
4	0.0016	107	75	76	81	83	73	91	59	58	69	77.2

จากตารางที่ 12 ให้ $\alpha = 0.40$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0007 ถึง 0.0016

ตารางที่ 13 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.46$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0004, 0.0008]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.0004	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0.8
2	0.0006	11	11	15	15	21	13	13	11	7	13	13
3	0.0007	31	29	35	31	35	21	23	32	23	35	29.5
4	0.0008	63	93	64	79	77	67	77	73	75	73	74.1

จากตารางที่ 13 ให้ $\alpha = 0.46$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0004 ถึง 0.0008

ตารางที่ 14 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.50$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.00023, 0.00053]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.00023	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.00030	4	1	3	3	1	3	3	1	1	1	2.1
3	0.00040	11	7	21	14	23	16	15	18	19	13	15.7
4	0.00053	121	95	93	101	97	83	111	79	99	82	96.1

จากตารางที่ 14 ให้ $\alpha = 0.46$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.00023 ถึง 0.00053

ตารางที่ 15 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.56$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.00013, 0.00027]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.00013	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.00018	9	3	9	3	3	11	1	7	7	9	6.2
3	0.00023	46	50	27	47	31	39	45	35	29	36	38.5
4	0.00027	91	101	83	92	83	98	93	73	85	72	87.1

จากตารางที่ 15 ให้ $\alpha = 0.56$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.00013 ถึง 0.00027

ตารางที่ 16 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.60$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.00008, 0.00017]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.00008	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.00013	11	17	11	19	25	17	11	15	11	23	16.4
3	0.00015	37	50	47	51	45	47	37	37	47	49	44.7
4	0.00017	96	93	89	85	88	78	105	79	99	90	90.2

จากตารางที่ 16 ให้ $\alpha = 0.60$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.00008 ถึง 0.00017

ตารางที่ 17 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.66$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.00004, 0.000085]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.00004	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.00006	11	9	9	17	13	7	11	5	9	7	9.8
3	0.00007	31	15	33	27	38	23	25	29	33	33	28.7
4	0.000085	70	62	81	71	94	83	89	77	87	78	79.2

จากตารางที่ 17 ให้ $\alpha = 0.66$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.00004 ถึง 0.000085

ตารางที่ 18 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.70$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.000025, 0.000055]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.000025	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.4
2	0.000035	3	1	7	5	5	9	3	3	7	7	5
3	0.000045	35	27	27	29	17	33	34	23	29	35	28.9
4	0.000055	67	71	85	73	89	101	84	87	85	107	84.9

จากตารางที่ 18 ให้ $\alpha = 0.70$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.000025 ถึง 0.00055

ตารางที่ 19 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.76$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.000013, 0.000028]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.000013	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.000018	5	7	1	1	11	8	7	9	3	7	5.9
3	0.000023	39	33	21	25	25	21	21	31	35	32	28.3
4	0.000028	89	93	71	93	59	81	73	81	69	91	80

จากตารางที่ 19 ให้ $\alpha = 0.76$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.000013 ถึง 0.000028

ตารางที่ 20 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.80$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.000008, 0.000018]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.000008	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.000011	3	7	3	3	7	1	3	6	3	7	4.3
3	0.000014	21	29	19	13	23	29	19	17	19	21	21
4	0.000018	90	73	83	92	80	85	86	77	106	93	86.5

จากตารางที่ 20 ให้ $\alpha = 0.80$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.000008 ถึง 0.000018

ตารางที่ 21 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.86$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.000004, 0.000009]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.000004	1	1	1	1	3	0	1	1	0	1	1
2	0.000006	3	9	5	7	4	5	13	5	12	3	6.6
3	0.000008	53	43	33	35	51	39	51	47	49	43	44.4
4	0.000009	74	91	74	90	87	91	83	81	82	95	84.8

จากตารางที่ 21 ให้ $\alpha = 0.86$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.000004 ถึง 0.000009

ตารางที่ 22 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.90$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0000025, 0.0000058]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.0000025	3	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
2	0.0000035	3	7	3	4	1	5	9	5	1	13	5.1
3	0.0000045	17	29	34	27	15	17	23	33	29	23	24.7
4	0.0000058	79	106	97	123	109	80	102	68	69	95	92.8

จากตารางที่ 22 ให้ $\alpha = 0.90$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0000025 ถึง 0.0000058

ตารางที่ 23 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 0.96$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0000015, 0.0000030]$

ครั้งที่	δ	ทางเดินตัวอย่าง										จำนวนการกระโดดเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.0000015	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1.2
2	0.0000020	7	13	15	9	7	14	3	3	7	8	8.6
3	0.0000025	36	47	32	37	27	46	39	37	30	37	36.8
4	0.0000030	117	88	87	88	103	105	107	111	103	67	97.6

จากตารางที่ 23 ให้ $\alpha = 0.96$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0000015 ถึง 0.0000030

ตารางที่ 24 จำนวนการกระโดดของ 10 ทางเดินตัวอย่าง เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 1.00$ และเปลี่ยนค่า $\delta \in [0.0000009, 0.0000019]$

ครั้งที่	δ	**ทางเดินตัวอย่าง**										**จำนวนการกระโดดเฉลี่ย**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	0.0000009	1	3	1	1	1	2	1	1	1	1	1.3
2	0.0000012	3	3	5	7	7	3	7	9	9	3	5.6
3	0.0000015	19	25	34	29	27	29	23	29	13	29	25.7
4	0.0000019	71	67	93	79	72	91	83	76	55	57	74.4

จากตารางที่ 24 ให้ $\alpha = 1.00$ พบว่าค่าที่เหมาะสมของ δ ควรจะอยู่ในช่วง 0.0000009 ถึง 0.0000019

จากตารางข้างต้น จะสังเกตเห็นว่า เมื่อค่า α เปลี่ยนเพิ่มมากขึ้น ทำให้ค่า δ มีค่าแคบลง และลดลงเรื่อย ๆ จากตารางตารางที่ 1 $\alpha = 0$ ค่า δ อยู่ในช่วง $\delta \in [0.06, 0.15]$ แต่เมื่อค่า α เพิ่มมากขึ้น จากตารางตารางที่ 24 $\alpha = 1.00$ ทำให้ค่า δ อยู่ในช่วง $\delta \in [0.0000009, 0.0000019]$ ซึ่งสังเกตว่าค่า δ น้อยลงมากและช่วงค่าของ δ แคบลงด้วย ที่ทำให้ช่วงที่ทำให้การกระโดดของกราฟระหว่าง T_1 และ T_3 ใกล้เคียงกับโมเดลต้นแบบ ซึ่งถ้าค่ามากกว่าช่วงนี้ก็ทำให้การกระโดดของกราฟเยอะมาก แต่ถ้าน้อยไปก็จะไม่มีการกระโดดของกราฟเลย

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผล

โครงงานนี้ศึกษาสมการสโตแคสติกที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศที่มีการรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ โดยศึกษาตัวแบบและเพิ่มการรบกวนให้ขึ้นกับอุณหภูมิดังสมการ (1.2) จำลองสมการเพื่อดูพฤติกรรมของอุณหภูมิต่อเวลา โดยสังเกตการเคลื่อนที่ระหว่างอุณหภูมิ T_1 และ T_3 โดยเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ α และ δ จากบทที่ 4 เราจะแบ่งการทดลองเป็น 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 ศึกษาพฤติกรรมทั่วไปของทางเดินตัวอย่าง โดยสังเกตกราฟการเคลื่อนที่ระหว่างอุณหภูมิ T_1 และ T_3 และดูจำนวนการกระโดดว่ามีการเคลื่อนที่กี่ครั้งในแต่ละค่าพารามิเตอร์ โดยจำนวนครั้งจะแสดงในส่วนที่ 2 จากกราฟเราจะสังเกตเห็นว่า ถ้าค่าของ $\alpha = 0$ ค่า δ ที่เหมาะสมจะอยู่ในช่วง $\delta \in [0.06, 0.15]$ จาก [1] โดยเราได้เปรียบเทียบจำนวนการกระโดดโดยเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ α และ δ จากตัวอย่างที่แสดงในบทที่ 4 ได้เปลี่ยนค่า $\alpha = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.5 สังเกตว่าแต่ละกราฟมีการกระโดดประมาณ 5 ครั้ง แต่ค่าพารามิเตอร์ไม่เท่ากัน โดยถ้าค่าพารามิเตอร์ของ α เพิ่มขึ้น ทำให้ค่าพารามิเตอร์ δ จะมีค่าที่ลดลงเรื่อย ๆ ด้วย ซึ่งจากการสังเกตพฤติกรรมของโมเดล (1.2) พบว่าพฤติกรรมการกระโดดของอุณหภูมิ T_1 และ T_3 คล้ายกับการจำลองของพฤติกรรมอุณหภูมิของสมการที่ (1.1) ต่อมาในส่วนที่ 2 จะจำลองค่าพารามิเตอร์เพื่อดูว่า ถ้าค่า α และ δ เปลี่ยนไป ค่าที่เหมาะสมควรจะอยู่ในช่วงใด

ส่วนที่ 2 จำลองพฤติกรรมแต่ละค่าพารามิเตอร์ โดยจำลองค่าพารามิเตอร์ α อยู่ในช่วง $\alpha \in [0,1]$ และปรับค่า δ ให้จำนวนการกระโดดใกล้เคียงกับสมการต้นแบบ โดยค่าเฉลี่ยการกระโดดที่เหมาะสมจะอยู่ในช่วง 0.5 ถึง 100 ครั้ง จะจำลองทั้งหมด 10 ทางเดินตัวอย่าง จากการศึกษาพบว่าถ้าค่าของการรบกวนมีค่ามากขึ้น จำนวนการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเถียรระหว่าง T_1 และ T_3 จะมีค่ามากขึ้นด้วย และถ้าค่าของพารามิเตอร์ α เพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าพารามิเตอร์ δ ลดลง และช่วงที่เหมาะสมของค่าพารามิเตอร์ δ ที่ศึกษาจะมีช่วงที่แคบลงด้วย

โดยจากการศึกษาและการทดลอง พบว่าถ้าค่าของ $\alpha = 0$ จะได้สมการเหมือนต้นแบบ (1.1) ซึ่งค่าพารามิเตอร์ δ ที่เหมาะสมจะอยู่ในช่วง $\delta \in [0.06, 0.15]$ ซึ่งถ้าเราเพิ่มค่าพารามิเตอร์ α ก็จะทำให้ค่าพารามิเตอร์ของ δ นั้นลดลง และมีช่วงที่เหมาะสมแคบลงด้วย ซึ่งจำนวนการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเถียรระหว่าง T_1 และ T_3 จะขึ้นอยู่กับขนาดการเปลี่ยนแปลงของค่าการรบกวน และจากการสังเกตพฤติกรรมในการ

จำลองโมเดลพบว่าพฤติกรรมของโมเดลที่ศึกษา (1.2) คล้ายกับพฤติกรรมของโมเดล (1.1) แม้ว่าค่าของการรบกวนจะมีค่าของอุณหภูมิมาเกี่ยวข้องด้วย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงานนี้ คือ ได้ฝึกทักษะในการค้นคว้าข้อมูลและพัฒนากระบวนการคิด ได้ความรู้เรื่อง SDE และการวิเคราห์เชิงตัวเลขมากขึ้น ได้โมเดลสโตแคสติกของการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ

เอกสารอ้างอิง

[1] M. I. Budyko, The effect of solar radiation variations on the climate of the earth, Tellus, 21 (1969), 611-619.

[2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, A theory of stochastic resonance in climatic change, Siam J. Appl. Math., 43 (1983), 565-578.

[3] B. Oksenda, Stochastic differential equations, Springer-Verlag (2000).

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	ตัวแบบสโตแคสติกของการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Stochastic model for climate change with temperature dependent perturbation
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ และ รศ.ดร. คำรณ เมฆฉาย
ผู้ดำเนินการ	นางสาวทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์ รหัสนิสิต 5933519123 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความเป็นมาและมูลเหตุจูงใจในการเสนอโครงการ

เนื่องจากปัจจุบันนี้โลกได้ประสบปัญหาภาวะโลกร้อน หรือสภาพอากาศที่เปลี่ยนแปลงบ่อย ทำให้เกิดผลกระทบต่อสิ่งมีชีวิตมากมาย ซึ่งเป็นเป็นสิ่งที่น่าสนใจที่จะศึกษาโมเดลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ โดยโมเดลสโตแคสติกของการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศถูกเสนอโดย Budyko และ Sellers (1969) [1] พวกเขาได้พิจารณาวิวัฒนาการของอุณหภูมิโลกซึ่งสาเหตุมาจากการแผ่รังสีเข้าของดวงอาทิตย์ และการแผ่รังสีออกจากโลก หลังจากนั้น Benzi และคณะ (1983) [2] ได้เพิ่มการก่อกวนที่ต่อเนื่องกับเวลาแสดงด้วย white noise ดังสมการ

$$\mathrm{dT_t} = \frac{\mathrm{F(T_t,t)}}{\mathrm{c}}\mathrm{dt} + \varepsilon^{1/2}\mathrm{dW_t} \qquad (1)$$

เมื่อ $F\left(T_t,t\right) = E(T_t)\left[\beta\left(1-\frac{T_t}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_t}{T_3}\right)\left(A\cos\omega t+1\right)+A\cos\omega t\right]$

T_t คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก ณ เวลา t

T_1 = 278.6 เคลวิน, T_2 = 283.3 เคลวิน และ T_3 = 288.6 เคลวิน

$E(T_t)$ คือ พลังงานจากการแผ่รังสีคลื่นยาว

c คือ ความจุความร้อนของโลก

β, A และ ω คือ ค่าคงที่

ε คือ ความแปรปรวนของการก่อกวน, และ W_t คือ กระบวนการวีเนอร์ (Wiener process)

ในโครงงานนี้จะศึกษาโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศโดยเพิ่มการก่อกวนในสมการที่ (1) เพื่อทำให้สมการขึ้นกับอุณหภูมิ ทำให้สมการทั่วไปมากขึ้น ดังสมการ

$$dT_t = \frac{F(T_t, t)}{c}dt + \delta T_t^{\alpha} dW_t \qquad (2)$$

เมื่อ $\alpha \in [0,1]$ และ δ คือ ค่าคงที่ โดยที่เราจะจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกเพื่อศึกษาพฤติกรรมของอุณหภูมิ

วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. เพื่อศึกษาโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ
2. เพื่อพัฒนาโมเดลให้ทั่วไปมากขึ้น
3. จำลองโมเดลเพื่อศึกษาพฤติกรรมของโมเดล

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ และจำลองโมเดลโดยใช้วิธีการออยเลอร์-มารุยามา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของโมเดล

วิธีการดำเนินงาน

1. ทบทวนความรู้พื้นฐาน SDE และโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ
2. ศึกษาโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ
3. เริ่มจำลองโมเดล (2)
4. สรุปผลและรายงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	เดือน/ปีการศึกษา 2562									
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ทบทวนความรู้พื้นฐาน SDE และโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ										
2. ศึกษาโมเดลการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ										
3. เริ่มจำลองโมเดล (2)										
4. สรุปผลและรายงาน										

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ฝึกทักษะในการค้นคว้าข้อมูลและพัฒนากระบวนการคิด
2. ได้ความรู้เรื่อง SDE และการวิเคราห์เชิงตัวเลขมากขึ้น
3. ได้โมเดลสโตแคสติกเรโซแนนซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาพภูมิอากาศที่การรบกวนขึ้นกับอุณหภูมิ

งบประมาณ

ค่ากระดาษ A4	600	บาท
ค่าอุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	1,500	บาท
ค่าหมึกพิมพ์	2,000	บาท
ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน	400	บาท
ค่าถ่ายเอกสาร	500	บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] M. I. Budyko, The effect of solar radiation variations on the climate of the earth, Tellus, 21 (1969), 611-619.

[2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, A theory of stochastic resonance in climatic change, Siam J. Appl. Math., 43 (1983), 565-578.

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างโค้ดที่ใช้ใน MATLAB แบ่งออกเป็น 3 ส่วน ส่วนที่ 1 เป็นส่วนของค่าคงที่ และสมการที่ต้องการจำลอง โดยใช้วิธีการออยเลอร์-มารุยามา ส่วนที่ 2 เป็นการดูค่าการกระโดด และส่วนสุดท้ายเป็นส่วนสังเกตพฤติกรรมของโมเดล

value

`clear All`	
`tic;`	
`c = 4000;`	โดย c คือ ความจุความร้อนของโลก (c)
`X1 = 280;`	X1 คือ อุณหภูมิเริ่มต้น (T_0)
`w = (2*pi)/(10^5);`	w คือ ω เป็นค่าคงที่
`A = 0.0005;`	A คือ A เป็นค่าคงที่
`T1 = 278.6;`	T1 คือ T_1
`T2 = 283.3;`	T2 คือ T_2
`T3 = 288.6;`	T3 คือ T_3
`al = 0.06 ; %[0,1]`	al คือ α
`del1 = 0.05;`	del1 คือ δ
`del = sqrt(del1);`	
`T = 1000000;`	T คือ t
`Et = 5.6705*(10^(-8));`	Et คือ $E(T_t)$
`E3 = 5.6705*(10^(-8))*(T3)^4;`	E3 คือ $E(T_3)$
`t = 8;`	t คือ τ
`B =(1/(t))*T3*(c/E3)*(1/((1-(T3/T1))*(1-(T3/T2)))); %(3.14)`	B คือ β
`Delta = 1;       % # subintervals`	
`M = 10;          % # sample paths`	
`N = T/Delta;`	
`%Numerical solution`	
`Xt = zeros(M,N+1);`	
`Xt(:,1) = X1;`	

```
for j = 1:N
    Xt(:,j+1) = Xt(:,j) + ...
        (   Et.*Xt(:,j).^4/c.*(B...
        .*(1-Xt(:,j)/T1).*(1-Xt(:,j)/T2).*(1-Xt(:,j)/T3)...
        .*(A.*cos(w.*(j-1).*Delta) + 1)) ...
        + A.*cos(w.*(j-1).*Delta) ...
        ).*Delta ...
        + del.*Xt(:,j).^al.*sqrt(Delta).*randn(M,1);
end
Time1 = toc;
```

counting

```
tic;
Total = zeros(M,1);
Upper = 287;
Lower = 280;        % rng default: figure17
for i = 1:M         % for paths
    Count = 0;
    status = -1;    % X1 = 280
    for k = 2:N+1
        if Xt(i,k) < Lower && status == 1
            Count = Count + 1;
            status = -1;
        elseif Xt(i,k) > Upper && status == -1
            Count = Count + 1;
            status = 1;
        else
```

```
        end
    end
    Total(i) = Count;
end
Time2 = toc;

%%value

disp(del1)
D=0;
for j = 1:M
    disp(Total(j))
    D=D+Total(j);
end
disp(D/M)
```

การแสดงผล

ค่า δ = 0.0500

ค่าการกระโดดครั้งที่ 1 = 3

ค่าการกระโดดครั้งที่ 2 = 3

ค่าการกระโดดครั้งที่ 3 = 7

ค่าการกระโดดครั้งที่ 4 = 9

ค่าการกระโดดครั้งที่ 5 = 3

ค่าการกระโดดครั้งที่ 6 = 7

ค่าการกระโดดครั้งที่ 7 = 13

ค่าการกระโดดครั้งที่ 8 = 9

ค่าการกระโดดครั้งที่ 9 = 8

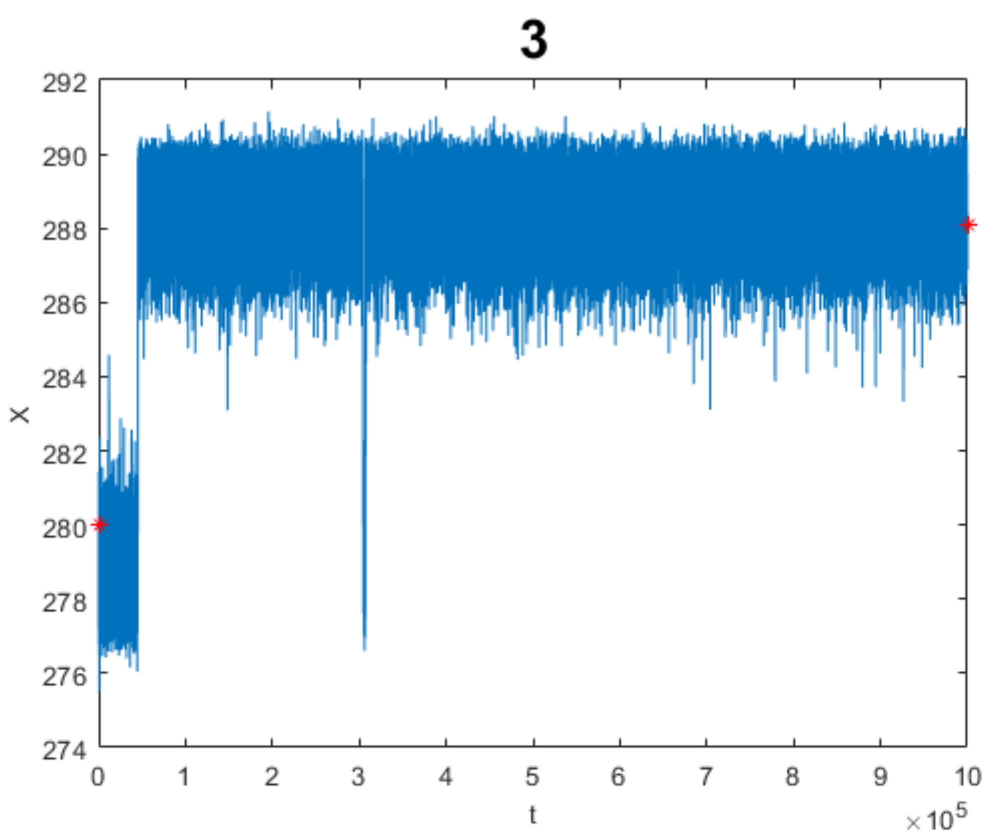
ค่าการกระโดดครั้งที่ 10 = 7

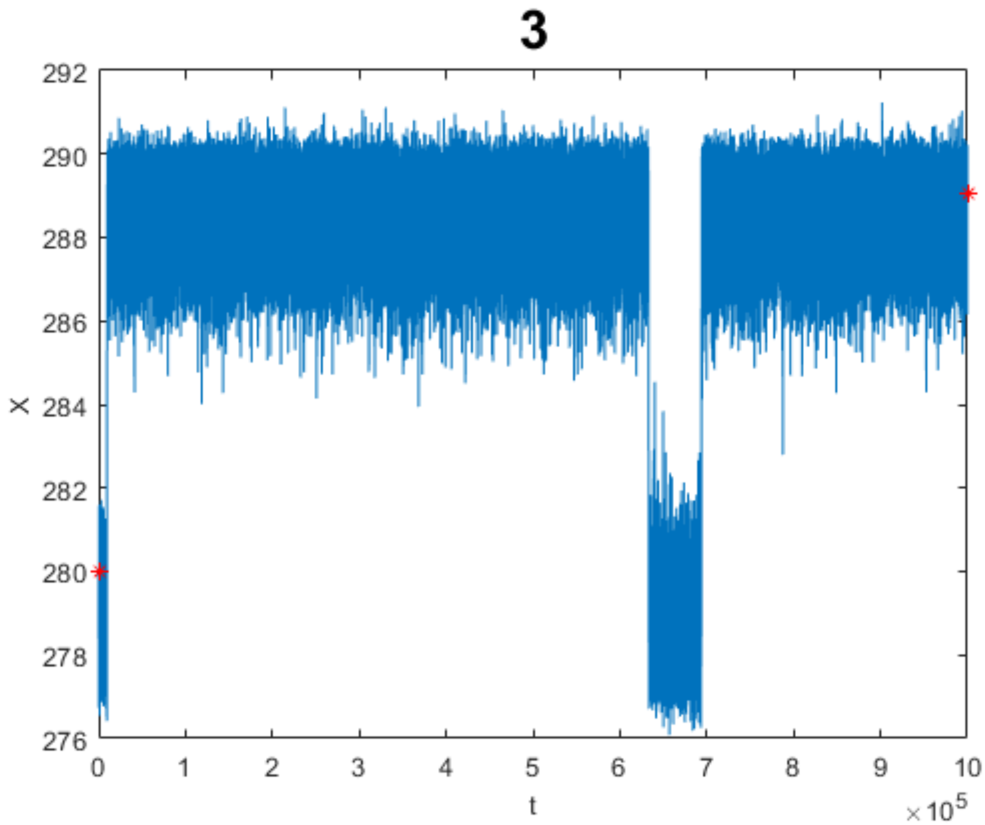
ค่าการกระโดดเฉลี่ย = 6.9000

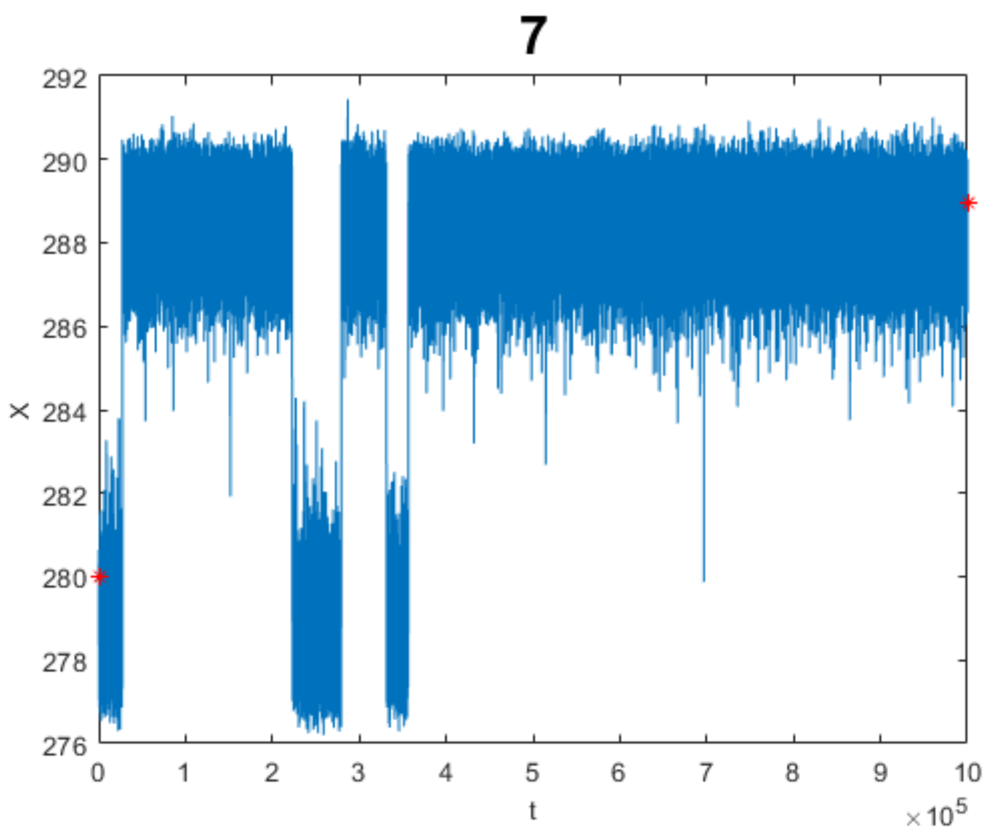
plot

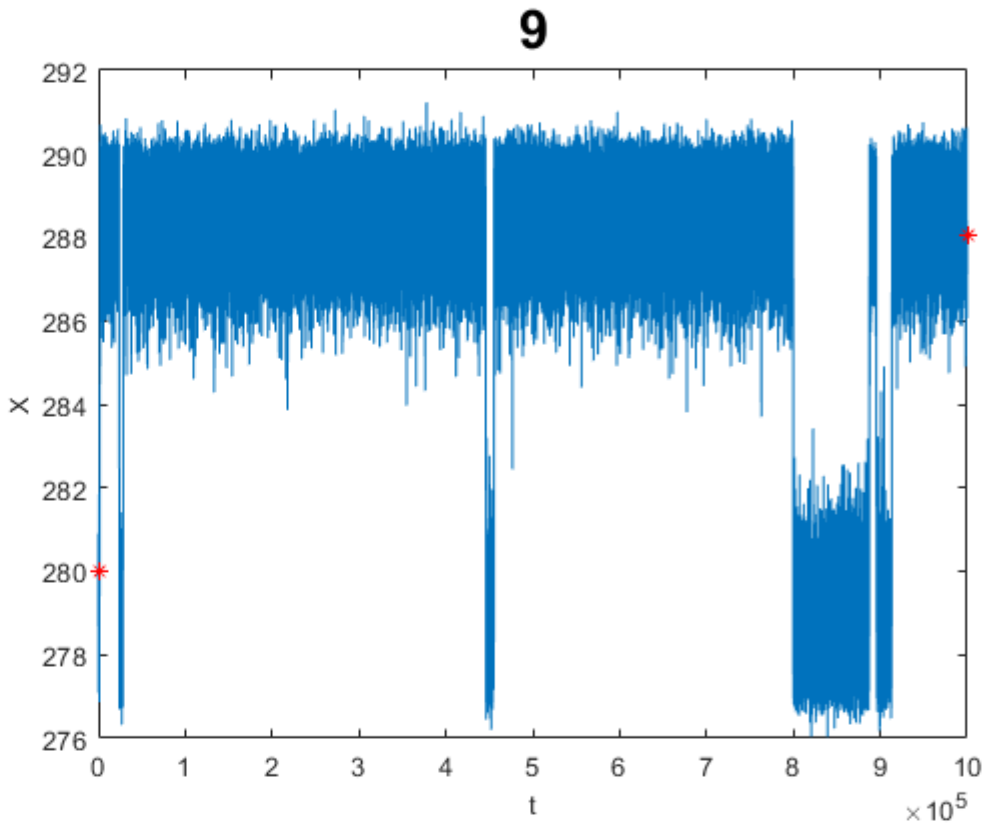
```
for i = 1:M
    figure(i)
    plot( 0:Delta:T, Xt(i,:) )
    hold on
    plot( 0,X1,'r*', T,Xt(i,end),'r*')
    hold off
    xlabel('t', 'FontSize' ,10), ylabel('X', 'FontSize' ,10)
    title( num2str(Total(i)) , 'FontSize' ,20)
end
```

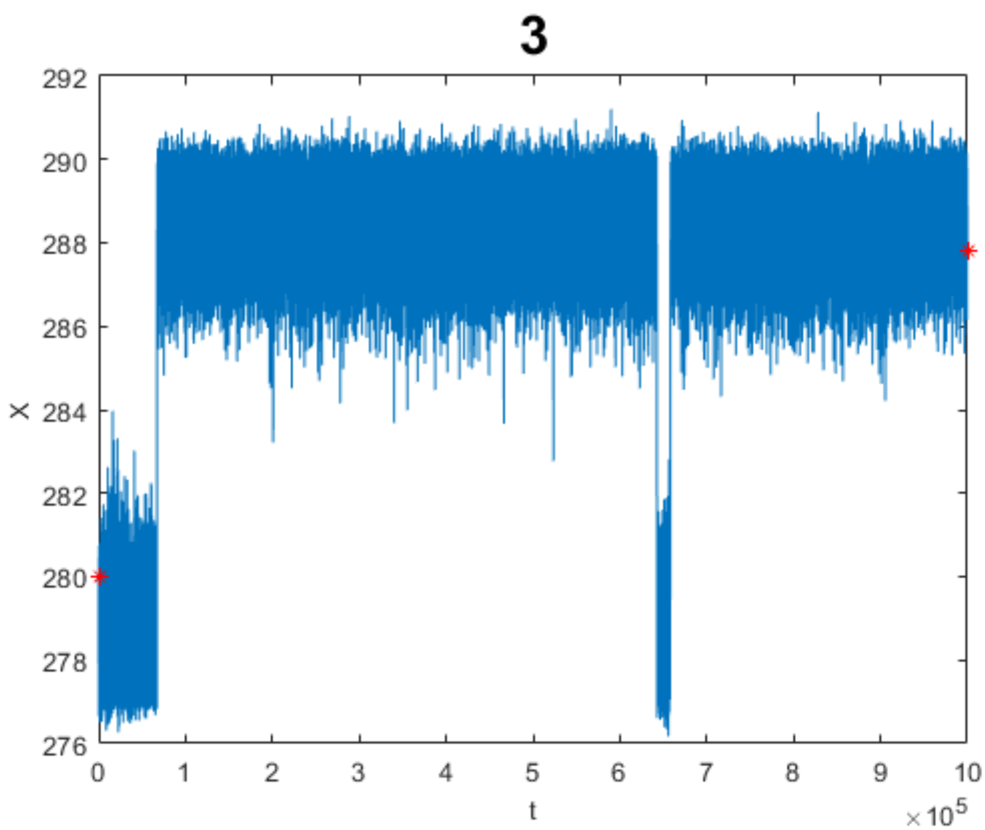
ผลกราฟที่ได้ แต่ละค่า

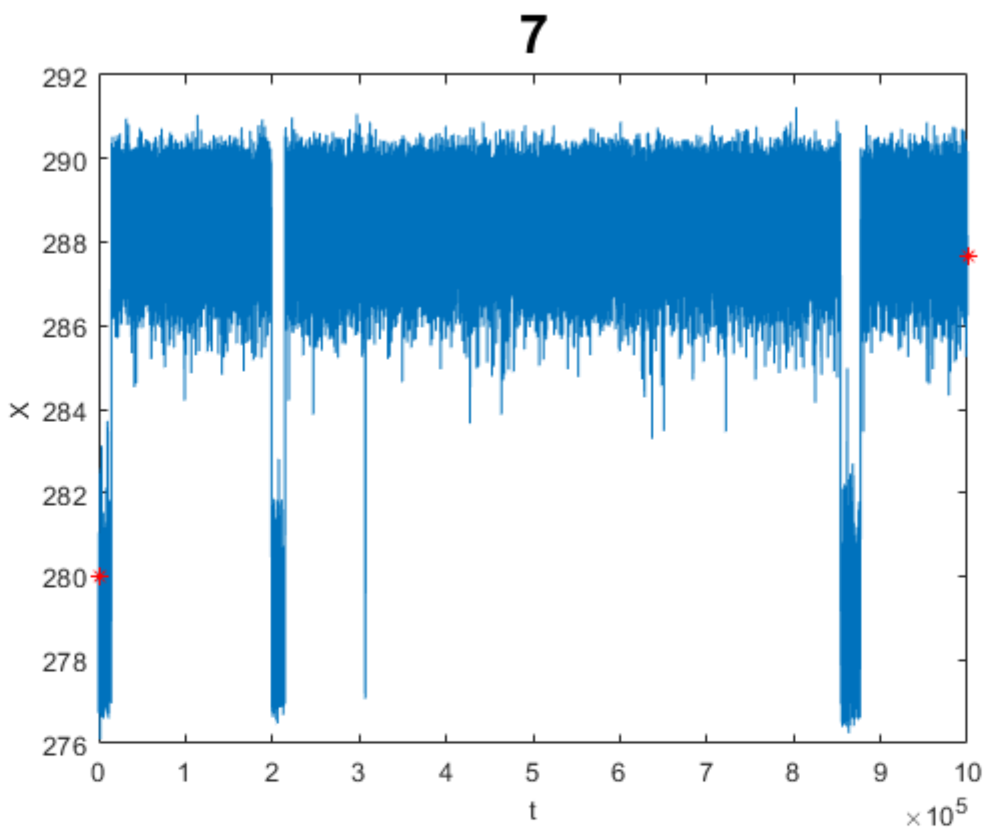


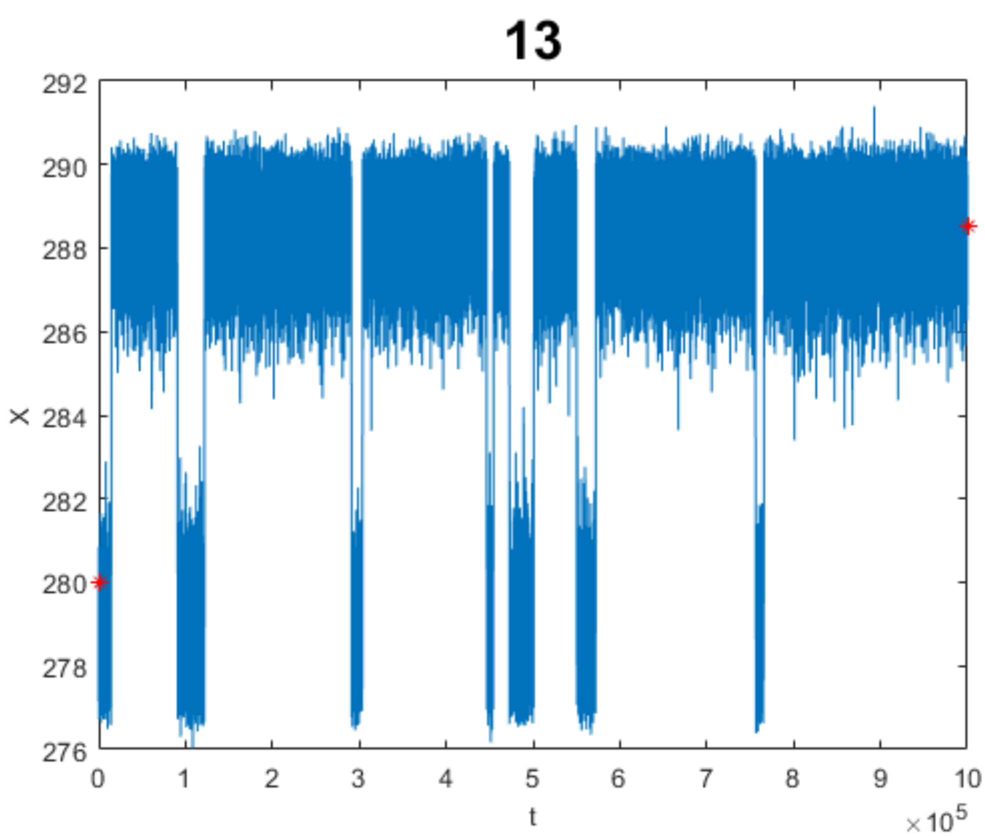

3
292
290
288
286
284
282
280
278
276
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
$\times 10^5$


7
292
290
288
286
284
282
280
278
276
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
$\times 10^5$

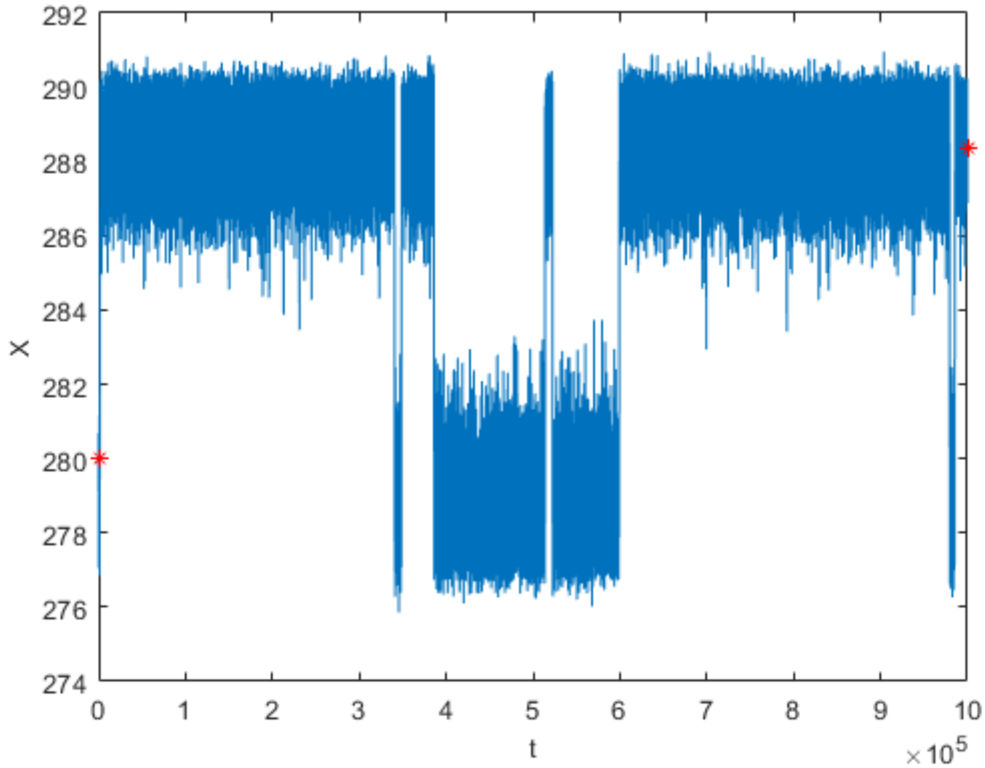

9
292
290
288
286
284
282
280
278
276
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
×10^5


3
292
290
288
286
284
282
280
278
276
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
×10^5

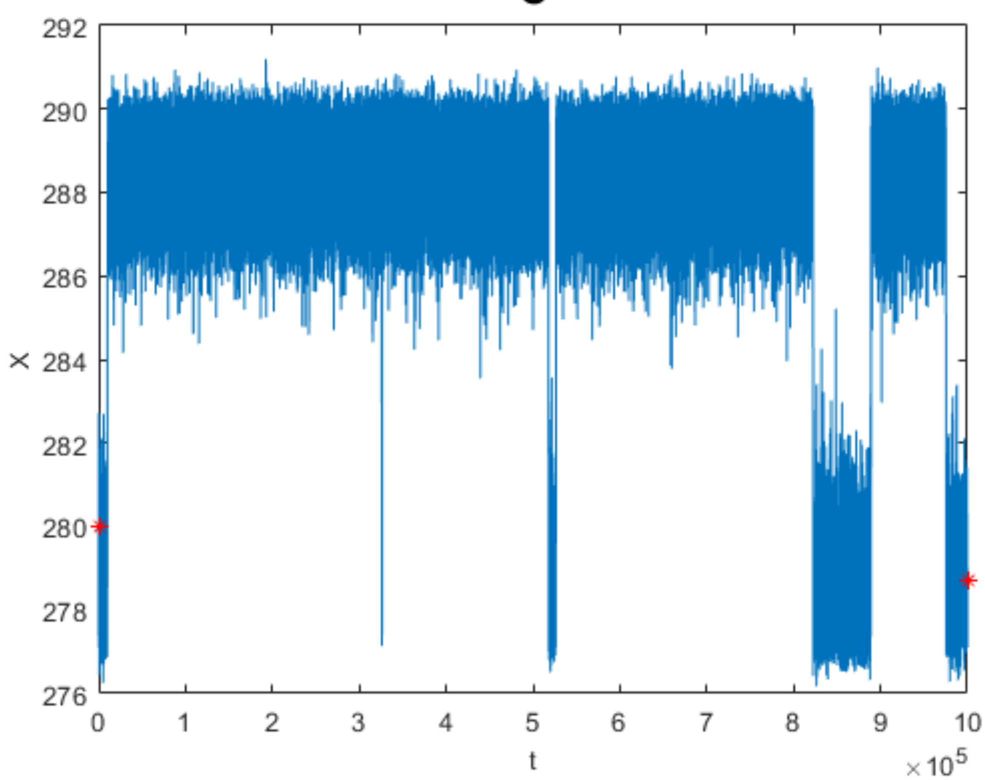

7
292
290
288
286
X
284
282
280
278
276
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
×10^5

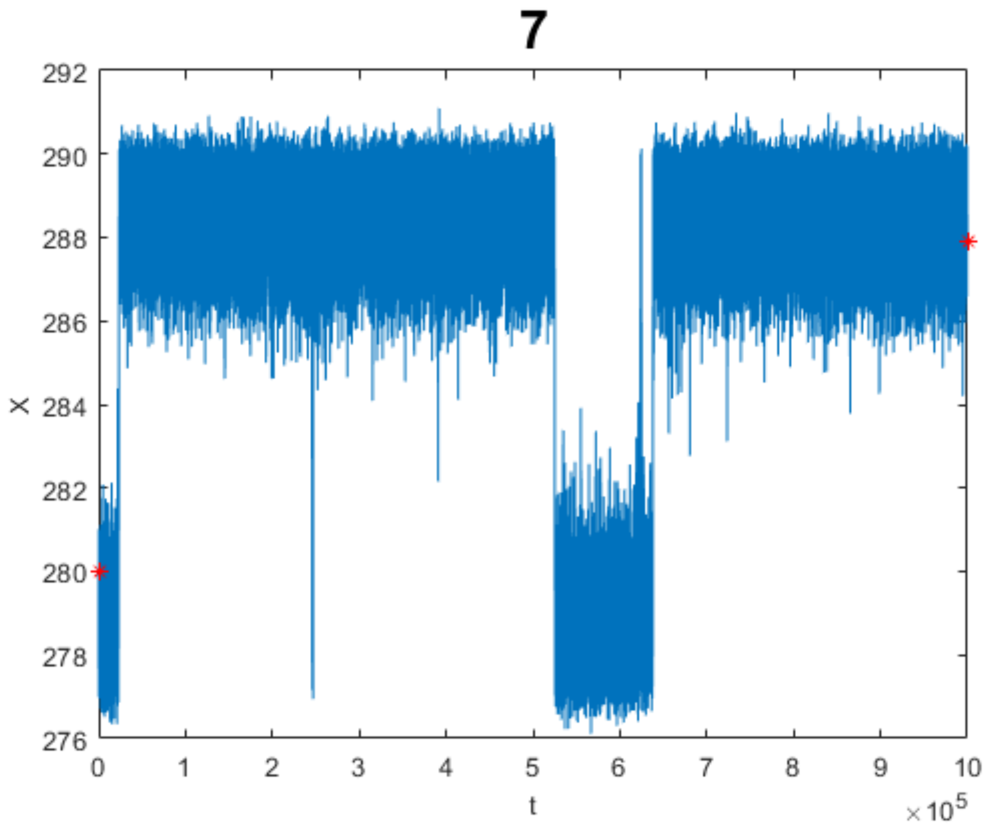

13
292
290
288
286
X
284
282
280
278
276
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
×10^5

9


292
290
288
286
284
282
280
278
276
274
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
$\times 10^5$

8


292
290
288
286
284
282
280
278
276
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
$\times 10^5$



Published with MATLAB® R2018a

ประวัติผู้เขียน

นางสาวทิฆัมพร ยุทธนาปกรณ์

เลขประจำตัวนิสิต 5933519123

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย