โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra

Multimedia CAI: Integral Over General Region by GeoGebra

ชื่อนิสิต นายกิตติภัทร แก้วเจริญ 593 35053 23

นางสาวชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์ 593 35133 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra

นายกิตติภัทร แก้วเจริญ
นางสาวชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Multimedia CAI: Integral Over General Region by GeoGebra

Mr. Kittipat Kaewcharoen

Miss Chinnarin Chaisakgreenon

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

Copyright of Chulalongkorn University

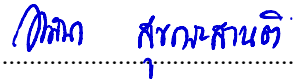
หัวข้อโครงงาน	สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra Multimedia CAI: Integral Over General Region by GeoGebra
โดย	นายกิตติภัทร แก้วเจริญ นางสาวชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

..... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

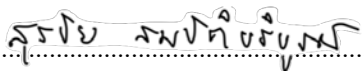


..... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธ์กล้า)



..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุรชัย สมบัติบริบูรณ์)

กิตติภัทร แก้วเจริญ, ชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์:
สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra.
(Multimedia CAI: Integral Over General Region by GeoGebra)
อ.ที่ปรึกษาโครงงาน: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ, 64 หน้า

โครงงานนี้เป็นสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra ซึ่งนำเสนอในรูปแบบของสื่อการเรียนการสอนแบบ Interactive ที่ผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับโปรแกรมได้ คือผู้เรียนสามารถเปลี่ยนฟังก์ชันและขอบเขตของการอินทิเกรตได้ แล้วโปรแกรมจะเปลี่ยนการแสดงผลไปตามฟังก์ชันที่ต้องการ ซึ่งสื่อการเรียนการสอนชุดนี้จะมีทั้งภาพสองมิติและสามมิติที่มีสีสันสวยงามประกอบเนื้อหา ทำให้ผู้เรียนสามารถทำความเข้าใจบทเรียนได้ง่ายขึ้น

สื่อการเรียนการสอนนี้พัฒนาขึ้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ver.6.0.562

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต กิตติภัทร ก.

ลายมือชื่อนิสิต ชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน วาสนา สุขกระสานติ

ปีการศึกษา 2562

#5933505323, 5933513323: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: MULTIMEDIA CAI/ INTEGRAL/ GENERAL REGION/ GEOGEBRA

KITTIPAT KAEWCHAROEN, CHINNARIN CHAISAKGREENON:

MULTIMEDIA CAI: INTEGRAL OVER GENERAL REGION BY GEOGEBRA.

ADVISOR: ASST. PROF. VASANA SUKKRASANTI, 64 pp.

The project is the multimedia CAI on integral over general region by GeoGebra presenting in the form of interactive that students can change function and boundary. Then the program will show the results. This CAI has colorful graphs that help students to comprehend the subject easily and conveniently.

The multimedia CAI is produced by GeoGebra ver.6.0.562

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature Kittipat K.

Student's Signature Chinnarin Chaisakgreenon

Field of Study Mathematics Advisor's Signature Vasana Sukkrasanti

Academic Year 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางคณะผู้จัดทำโครงงานจึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่างๆ ดังต่อไปนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษาในเรื่องต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นขั้นตอนวิธีการพัฒนา ข้อมูล และรูปภาพต่างๆ เป็นต้น รวมถึงสละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้า เสนอแนะ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่างๆ ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนนี้มาโดยตลอด ตั้งแต่เริ่มจัดทำ จนทำให้การพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra นี้ สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ จนสามารถนำไปเผยแพร่ และนำเสนอได้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธ์กล้าและผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการสอบโครงงานนี้ และให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงข้อผิดพลาดต่างๆ ซึ่งทำให้สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra นี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนของนิสิต นักศึกษาและบุคคลทั่วไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ขอบกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน เป็นกำลังใจ และติดตามความก้าวหน้าในการทำโครงงานนี้มาโดยตลอด และขอขอบคุณเพื่อน พี่ๆ ทุกคน ที่คอยให้ความช่วยเหลือให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่างๆ ในการทำโครงงานนี้เสมอมา

คณะผู้จัดทำโครงงาน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... จ

กิตติกรรมประกาศ..... ฉ

สารบัญ..... ช

สารบัญภาพ..... ฌ

บทที่ 1 บทนำ..... 1

1.1 หลักการและเหตุผล..... 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย..... 1

1.3 ขอบเขตของการวิจัย..... 1

1.4 วิธีการดำเนินงาน..... 2

1.5 ระยะเวลาที่ศึกษา..... 2

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ..... 3

1.7 อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้..... 3

บทที่ 2 เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง..... 4

2.1 เนื้อหาของการนำเสนอโครงงาน..... 4

บทที่ 1 การวาดกราฟสมการพหุนาม..... 5

บทที่ 2 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต..... 9

บทที่ 3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว..... 12

บทที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร..... 15

บทที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร..... 17

2.2 โปรแกรม GeoGebra เบื้องต้น..... 19

2.2.1 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra..... 19

2.2.2 การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง..... 22

2.2.3 การสร้าง Input Box..... 26

2.2.4 การสร้าง Check Box..... 28

2.2.5 การสร้าง Slide Bar..... 29

2.2.6 การสร้าง Text..... 31

2.2.7 การค้นหาคำสั่ง..... 32

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.2.8 การสร้าง Activity..... 33
2.2.9 การสร้าง Book..... 35
บทที่ 3 วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอน..... 37
3.1 สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย..... 39
3.2 คู่มือการใช้งาน..... 40
3.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม..... 40
3.4 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต..... 42
3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว..... 44
3.6 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร..... 46
3.7 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร..... 47
บทที่ 4 การเขียนโปรแกรม..... 49
4.1 นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู..... 49
4.2 การอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป..... 51
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ..... 54
5.1 สรุปผลการดำเนินงาน..... 54
5.2 ปัญหา อุปสรรค และวิธีการแก้ปัญหา..... 55
5.3 ข้อเสนอแนะ..... 55
รายการอ้างอิง..... 56
ภาคผนวก..... 57
ผู้จัดทำโครงงาน..... 63
QR CODE สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย..... 64

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	กราฟสมการเส้นตรง	5
2	กราฟสมการกำลังสอง	5
3	กราฟสมการกำลังสาม	5
4	กราฟสมการวงกลม	6
5	กราฟสมการวงรี	6
6	กราฟสมการพาราโบลา	6
7	กราฟสมการไฮเพอร์โบลา	6
8	กราฟสมการอิลลิปซอยด์	7
9	กราฟสมการอิลลิปติกพาราโบลอยด์	7
10	กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบชิ้นเดียว	7
11	กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบ 2 ชิ้น	8
12	กราฟสมการกรวยอิลลิปติก	8
13	กราฟสมการไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์	8
14	ผลบวกล่างแบบดาร์บู	9
15	ผลบวกบนแบบดาร์บู	9
16	ผลบวกรีมันน์	10
17	ค่าประมาณอินทิกรัลแบบสูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู	10
18	ค่าประมาณอินทิกรัลแบบสูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน	11
19	ขนาดของพื้นที่ A	12
20	ขนาดของพื้นที่ B	12
21	พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน	12
22	พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน	13
23	การแบ่งพื้นที่ออกเป็นส่วนย่อยๆ	13
24	ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบจานรอบแกน X	13
25	ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบจานรอบแกน Y	14
26	ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบวงแหวนรอบแกน X	14
27	ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบวงแหวนรอบแกน Y	14
28	โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D_{ij}	15

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
29	การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	16
30	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D ล้อมรอบ s	16
31	การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป	16
32	โดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	17
33	รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ครอบคลุม	18
34	การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 1)	19
35	การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 2)	20
36	การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 3)	20
37	โปรแกรม GeoGebra ที่หน้าจอ (ขั้นตอนที่ 4)	21
38	เข้าโปรแกรม GeoGebra จากหน้า Desktop (ขั้นตอนที่ 5)	21
39	การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง (ขั้นตอนที่ 1-2)	22
40	การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง (ขั้นตอนที่ 3)	22
41	หน้าต่างการใช้งาน	23
42	การลบแกนพิกัดในหน้าต่าง Graphics 2	23
43	การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 1)	24
44	การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 2	24
45	การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 3)	25
46	การเปลี่ยนสีในหน้าต่าง Graphics 2	25
47	การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 1)	26
48	การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 2)	26
49	การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 3)	27
50	Input Box	27
51	การสร้าง Check Box (ขั้นตอนที่ 1)	28
52	การสร้าง Check Box (ขั้นตอนที่ 2)	28
53	การแสดงหรือซ่อน สิ่งที่เชื่อมต่อกันกับ Check Box	29
54	การสร้าง Slide Bar (ขั้นตอนที่ 1)	29
55	การสร้าง Slide Bar (ขั้นตอนที่ 2)	30
56	Slide Bar	30

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่-		หน้า
57	การสร้าง Text (ขั้นตอนที่ 1)	31
58	การสร้าง Text (ขั้นตอนที่ 2)	31
59	Text	32
60	การค้นหาคำสั่ง (ขั้นตอนที่ 1)	32
61	การค้นหาคำสั่ง (ขั้นตอนที่ 2)	33
62	การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 1-2)	33
63	การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 3)	34
64	การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 4)	34
65	การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 1)	35
66	การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 2)	35
67	การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 3)	36
68	สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra	39
69	คู่มือการใช้งาน	40
70	การวาดกราฟสมการพหุนามตัวแปรเดียว	40
71	การวาดกราฟสมการพหุนาม 2 ตัวแปร	41
72	การวาดกราฟสมการพหุนาม 3 ตัวแปร	41
73	ผลบวกดาร์บู	42
74	ผลบวกรีมันน์	42
75	สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู	43
76	สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน	43
77	การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน	44
78	การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน	44
79	การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน	45
80	การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	45
81	การหมุนแบบวงแหวน	46
82	การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	46

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

83 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป..... 47
84 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก..... 47
85 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป..... 48
86 นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู..... 49
87 การอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป..... 51

บทที่ 1
บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

เนื่องจากนิสิต นักศึกษา ที่ศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์มีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาเนื้อหาการคำนวณเกี่ยวกับการหาพื้นที่และปริมาตรของรูปทรงตันที่ต้องใช้การวาดกราฟทั้งสองมิติและสามมิติ มีการคำนวณอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร ซึ่งเนื้อหาเรื่องการอินทิเกรต เป็นเรื่องที่ทำความเข้าใจได้ยาก และการนำเสนอในตำราเรียนนั้น จะทำได้เฉพาะภาพสองมิติ ทำให้ผู้ที่ศึกษาทำความเข้าใจได้ยากยิ่งขึ้น

ผู้จัดทำโครงงาน จึงต้องการพัฒนาสื่อการเรียนการสอน เรื่องการอินทิเกรต ตั้งแต่ขั้นพื้นฐานจนถึงขั้นสูง คือ เริ่มตั้งแต่ นิยามของการอินทิเกรต การหาพื้นที่ของบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง การหาปริมาตร ที่เกิดจากการหมุนบริเวณ การอินทิเกรตฟังก์ชัน 1, 2 และ 3 ตัวแปร การหาปริมาตรรูปทรงตัน โดยนำเสนอในรูปแบบของสื่อการเรียนการสอนแบบ Interactive ที่ผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับโปรแกรมได้ คือผู้เรียนสามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน และขอบเขตของการอินทิเกรตได้ แล้วโปรแกรมจะเปลี่ยนการแสดงผลไปตามฟังก์ชันที่ต้องการ ซึ่งสื่อการเรียนการสอนชุดนี้ จะมีทั้งภาพสองมิติ และสามมิติที่มีสีสันสวยงามประกอบเนื้อหา ทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจบทเรียนได้ง่ายขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียในรูปแบบ Interactive เกี่ยวกับ นิยามของการอินทิเกรต การหาพื้นที่ของบริเวณ การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ การอินทิเกรตฟังก์ชัน 1, 2 และ 3 ตัวแปร การหาปริมาตรรูปทรงตัน ที่ใช้เนื้อหาการคำนวณเรื่องการอินทิเกรต ให้สามารถนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ ได้โดยผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับสื่อการเรียนการสอนโดยเปลี่ยนฟังก์ชันและขอบเขตได้ตามต้องการโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. การคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง จะคำนวณเฉพาะการปิดล้อมด้วยเส้นโค้งไม่เกิน 3 เส้น
2. การคำนวณหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณรอบแกนหมุน โดยจะใช้แกนหมุนเป็นแกน X , Y และแกนที่ขนานกับแกน X , Y เท่านั้น

1.4 วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาและวิเคราะห์บทเรียนเกี่ยวกับเรื่องการอินทิเกรต เพื่อเรียบเรียงเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอ
2. ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra ver.6.0.562 และทดสอบขอบเขตความสามารถของโปรแกรม GeoGebra
3. วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอนทั้งรูปแบบการนำเสนอและการใช้งาน
4. พัฒนาและตกแต่งสื่อการเรียนการสอนให้สะดวกและง่ายต่อการใช้งาน
5. ทดสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้
6. วิเคราะห์ประสิทธิภาพของสื่อการสอน
7. สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน

1.5 ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ. 2562							พ.ศ. 2563			
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1.) ศึกษาและวิเคราะห์บทเรียนเกี่ยวกับเรื่องการอินทิเกรต											
2.) ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra											
3.) วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอน											
4.) พัฒนาสื่อการสอน											
5.) ทดสอบ และแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้											
6.) วิเคราะห์ประสิทธิภาพของสื่อการสอน											
7.) สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน											

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อผู้ดำเนินโครงงาน

1. ได้ทบทวนความรู้ความเข้าใจในบทเรียนเรื่องการอินทิเกรต
2. สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra ver.6.0.562
3. สามารถออกแบบและพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย
4. ได้เพิ่มพูนทักษะในการสืบค้นข้อมูล
5. ได้ประสบการณ์ในการนำเสนอความรู้ในรูปแบบออนไลน์
6. ได้ประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้อื่น

ประโยชน์ต่อผู้ใช้งาน

1. ใช้สื่อการเรียนการสอนเพื่อศึกษาบทเรียนเรื่องการอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป
2. นำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้
3. ผู้เรียนมีความเข้าใจในการมองรูปสามมิติที่ดีขึ้น
4. สร้างแรงจูงใจให้ผู้ใช้งานสนใจที่จะเรียนรู้มากขึ้น

1.7 อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Hardware

1. เครื่องคอมพิวเตอร์
   ความเร็วไม่ต่ำกว่า 2.7 GHZ
   RAM ความจุไม่ต่ำกว่า 4 GB
   Hard disk ความจุไม่ต่ำกว่า 1 TB
2. อุปกรณ์บันทึกข้อมูล Flash drive และ CD-RW
3. อุปกรณ์บันทึกเสียง

Software

1. ระบบปฏิบัติการ Microsoft Window 8
2. โปรแกรมงานเอกสาร Microsoft Office 2010
3. โปรแกรม GeoGebra ver.6.0.562

บทที่ 2
เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง

ผู้จัดทำโครงงานเห็นประโยชน์ของโปรแกรม GeoGebra จึงสนใจที่จะพัฒนาสื่อการเรียนการสอนด้านคณิตศาสตร์ และหัวข้อที่จะทำให้ใช้ข้อดีของ GeoGebra ได้มากที่สุดก็ คือ การวาดภาพ 2 และ 3 มิติ ผู้จัดทำจึงเลือกพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra ในบทนี้ จะอธิบายใน 2 หัวข้อคือ

2.1 เนื้อหาของการนำเสนอโครงงาน

2.2 โปรแกรม GeoGebra เบื้องต้น

2.1 เนื้อหาของการนำเสนอโครงงาน

ผู้จัดทำโครงงานมุ่งเน้นเนื้อหาที่ต้องใช้ภาพ สีสัน เพื่อให้ผู้ที่ใช้งานสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น จึงเน้นเนื้อหาด้านการคำนวณหาพื้นที่และปริมาตร โดยเริ่มตั้งแต่การวาดภาพลักษณะต่างๆ การหาอินทิกรัลจำกัดเขต และการประยุกต์ แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท ดังนี้

บทที่ 1 การวาดกราฟสมการพหุนาม

- 1.1 การวาดกราฟสมการพหุนามตัวแปรเดียว
- 1.2 การวาดกราฟสมการพหุนาม 2 ตัวแปร
- 1.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม 3 ตัวแปร

บทที่ 2 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

- 2.1 ผลบวกดาร์บู
- 2.2 ผลบวกรีมันน์
- 2.3 สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู
- 2.4 สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

บทที่ 3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

- 3.1 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน
- 3.2 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน
- 3.3 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน
- 3.4 การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน
  - 3.4.1 การหมุนแบบจาน
  - 3.4.2 การหมุนแบบวงแหวน

บทที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

- 4.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- 4.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

บทที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

5.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาแบบคร่าวๆ ที่จะแสดงในสื่อการเรียนการสอนนี้

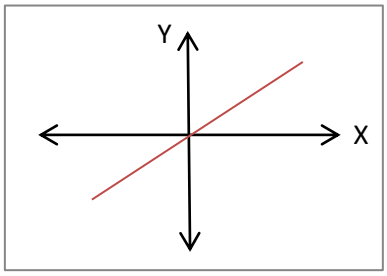
บทที่ 1 การวาดกราฟสมการพหุนาม

การวาดกราฟสมการพหุนาม คณะผู้จัดทำต้องการให้ผู้เรียนศึกษาการวาดกราฟในรูปแบบต่างๆ ตั้งแต่รูปแบบที่ง่ายจนถึงรูปแบบที่ยากขึ้น ทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจกราฟบทต่อไปได้ง่ายขึ้น

สมการพหุนาม หมายถึง สมการที่สร้างจากตัวแปรอย่างน้อย 1 ตัว และสัมประสิทธิ์ โดยใช้การดำเนินการ การบวก การลบ การคูณ และการยกกำลัง โดยเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

1.1 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

1.1.1 สมการเส้นตรง รูปแบบทั่วไป $f(x) = ax + b$

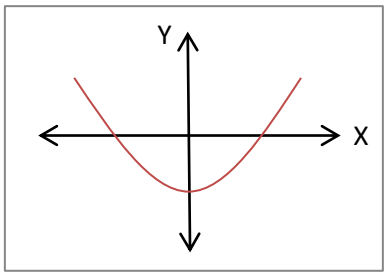


เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ภาพที่ 1 กราฟสมการเส้นตรง

1.1.2 สมการกำลังสอง รูปแบบทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$

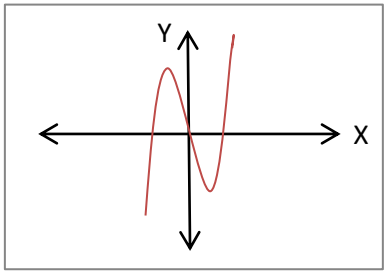


เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ภาพที่ 2 กราฟสมการกำลังสอง

1.1.3 สมการกำลังสาม รูปแบบทั่วไป $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



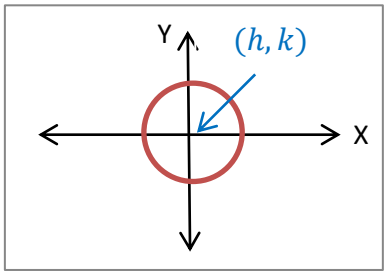
เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ภาพที่ 3 กราฟสมการกำลังสาม

1.2 สมการพหุนาม 2 ตัวแปร

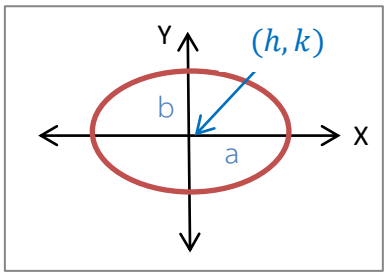
1.2.1 สมการวงกลม รูปแบบทั่วไป $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง
โดยที่ (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม
และ r เป็นความยาวรัศมีวงกลม

ภาพที่ 4 กราฟสมการวงกลม

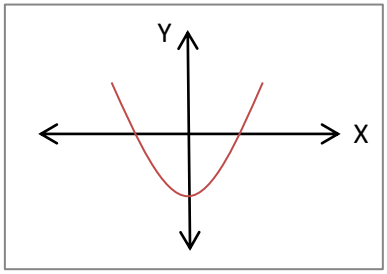
1.2.2 สมการวงรี รูปแบบทั่วไป $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว
และ (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางวงรี
ที่มีแกนเอกยาว $2a$ หน่วย และแกนโทยาว $2b$ หน่วย

ภาพที่ 5 กราฟสมการวงรี

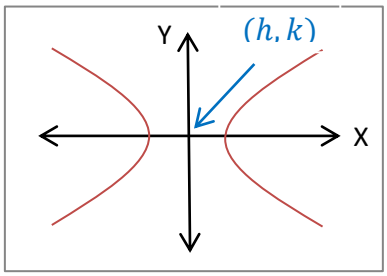
1.2.3 สมการพาราโบลา รูปแบบทั่วไป $y = ax^2 + bx + c$



เมื่อ x เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ภาพที่ 6 กราฟสมการพาราโบลา

1.2.4 สมการไฮเพอร์โบลา รูปแบบทั่วไป $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

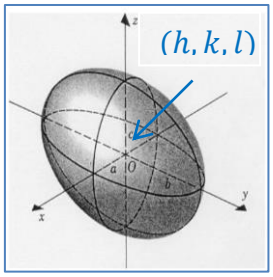


เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว
และ (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา

ภาพที่ 7 กราฟสมการไฮเพอร์โบลา

1.3 สมการพหุนาม 3 ตัวแปร

1.3.1 สมการอิลลิปซอยด์ (Ellipsoid) รูปแบบทั่วไป $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2+\left(\frac{z-l}{c}\right)^2=1$

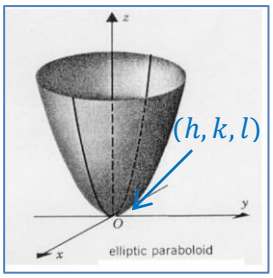


เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว
และ (h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางอิลลิปซอยด์

ภาพที่ 8 กราฟสมการอิลลิปซอยด์

1.3.2 สมการอิลลิปติกพาราโบลอยด์ (Elliptic Paraboloid) รูปแบบทั่วไป

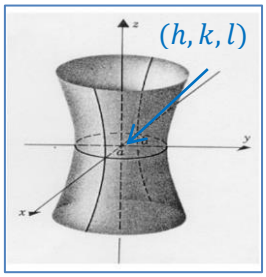
$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=\frac{z-l}{c}$$



เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว
และ (h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางอิลลิปติกพาราโบลอยด์

ภาพที่ 9 กราฟสมการอิลลิปติกพาราโบลอยด์

สมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบชิ้นเดียว (Elliptic Hyperboloid of One Sheet) รูปแบบทั่วไป $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2-\left(\frac{z-l}{c}\right)^2=1$

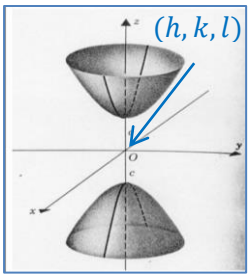


เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง
โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว
และ (h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบชิ้นเดียว

ภาพที่ 10 กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบชิ้นเดียว

1.3.3 สมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบ 2 ชิ้น (Elliptic Hyperboloid of Two Sheet)

รูปแบบทั่วไป $-\left(\frac{x-h}{a}\right)^2-\left(\frac{y-k}{b}\right)^2+\left(\frac{z-l}{c}\right)^2=1$



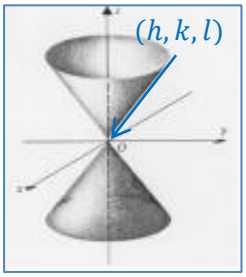
เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว

และ(h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบ 2 ชิ้น

ภาพที่ 11 กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบ 2 ชิ้น

1.3.4 สมการกรวยอิลลิปติก (Cone) รูปแบบทั่วไป $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2-\left(\frac{z-l}{c}\right)^2=0$



เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง

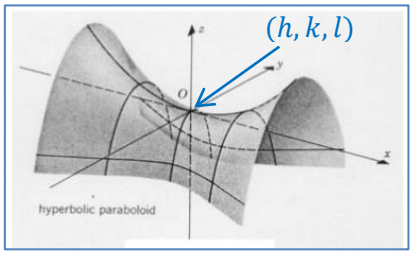
โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว

และ (h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางกรวยอิลลิปติก

ภาพที่ 12 กราฟสมการกรวยอิลลิปติก

1.3.5 สมการไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ (Hyperbolic Paraboloid)

รูปแบบทั่วไป $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2-\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=\frac{z-l}{c}$



เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง

โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว

และ (h, k, l) เป็นจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์

ภาพที่ 13 กราฟสมการไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์

บทที่ 2 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

ในการหาอินทิกรัลจำกัดเขต มีบทนิยามการหาต่าง ๆ กันหลายแบบ คือ แบบของดาร์บู และแบบของรีมันน์ นอกจากนี้ยังมีวิธีคำนวณค่าประมาณของอินทิกรัลโดยการใช้ฟังก์ชันพหุนาม คือ สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และ สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน โดยแบ่งเนื้อหาดังนี้

2.1 การอินทิกรัลจำกัดเขต แบบของดาร์บู เป็นการประมาณค่าเพื่อคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ แกน X โดยที่ x ∈ $[a, b]$ โดยใช้ผลบวกแบบดาร์บู

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a, b]$ และมีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

การแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

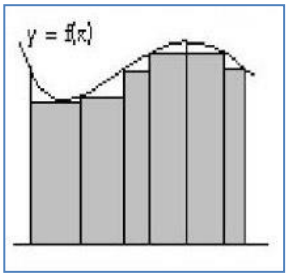
ให้ $m_i = glb.$ ของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

$M_i = lub.$ ของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

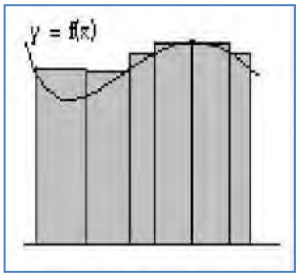
ในที่นี้ $glb.$ และ $lub.$ของ f หมายถึง ค่าขอบเขตล่างสูงสุดและค่าขอบเขตบนต่ำสุดของ f บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ตามลำดับ

เราเรียกผลบวก $L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ ว่าผลบวกล่างแบบดาร์บู

และเรียก $U = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ ว่าผลบวกบนแบบดาร์บู



ภาพที่ 14 ผลบวกล่างแบบดาร์บู



ภาพที่ 15 ผลบวกบนแบบดาร์บู

2.2 การอินทิกรัลจำกัดเขต แบบของรีมันน์ เป็นการประมาณค่าเพื่อคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ แกน X โดยที่ x ∈ $[a, b]$ โดยใช้ผลบวกแบบรีมันน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a, b]$ และมีขอบเขตบนช่วง$[a, b]$

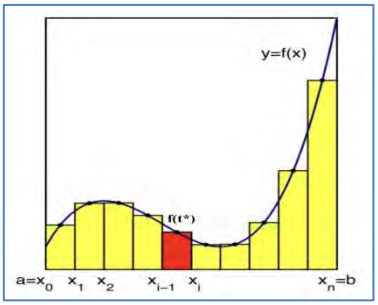
ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

การแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$

ให้ $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*$ เป็นจุดใดๆจากช่วงย่อย $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ ตามลำดับ

เราเรียกผลบวก $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$ ว่าผลบวกรีมันน์ของ f



ภาพที่ 16 ผลบวกรีมันน์

2.3 การประมาณค่าหาอินทิกรัล โดยใช้สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู เป็นการประมาณค่าเพื่อคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ แกน X โดยที่ $x \in [a, b]$ โดยใช้สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

ลำดับแรก เรามาพิจารณากันก่อนว่าหากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x) = c_0 + c_1 x$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) กับ (x_1, y_1) บนช่วง $[x_0, x_1]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} p(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} (c_0 + c_1 x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} c_0 dx + \int_{x_0}^{x_1} c_1 x dx \\ &= c_0(x_1 - x_0) + c_1\left(\frac{{x_1}^2 - {x_0}^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0)\end{aligned}$$

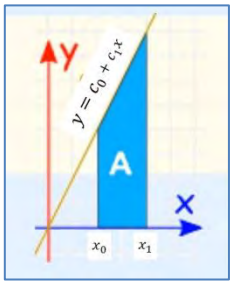
สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ y_0, y_1 โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0, c_1 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด

การเป็นเช่นนี้ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่งที่ผ่านจุด(x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) บนช่วง $[x_1, x_2]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และในทำนองเดียวกัน สำหรับช่วงถัดๆ ไป นั่นคือ สำหรับ $i = 2,3, \dots, n$ จะได้

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1})$$

ดังนั้นค่าประมาณอินทิกรัลของ f แบบสูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู คือ

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(+)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \text{ โดยที่ } h = \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$



ภาพที่ 17 ค่าประมาณอินทิกรัลแบบสูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

2.4 การประมาณค่าหาอินทิกรัล โดยใช้สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน เป็นการประมาณค่าหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ แกน X โดยที่ $x \in [a, b]$ โดยใช้สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

ในกรณีนี้ เรามาพิจารณากันเสียก่อนว่า หากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ที่ผ่านจุด $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$และ(x_2, y_2) บนช่วง $[x_0, x_2]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} (c_0 + c_1x + c_2x^2\ )dx \\
&= c_0(x_2 - x_0) + \tfrac{c_1}{2}\left({x_2}^2 - {x_0}^2\right) + \tfrac{c_2}{3}\left({x_2}^3 - {x_0}^3\right) \\
&= c_0\big((x_1 + h) - (x_1 - h)\big) + \tfrac{c_1}{2}((x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2) \\
&\quad + \frac{c_2}{3}((x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3) \\
&= 2hc_0 + \tfrac{c_1}{2}(4hx_1) + \tfrac{c_2}{3}(2h^3 + 6hx_1^2) \\
&= \tfrac{h}{3}[6c_0 + 6c_1x_1 + 6c_2x_1^2 + 2h^2c_2] \\
&= \tfrac{h}{3}\left[\begin{matrix}(c_0 + c_1(x_1 - h) + c_2(x_1 - h)^2) + 4(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2) \\ +\ (c_0 + c_1(x_1 + h) + c_2(x_1 + h)^2)\end{matrix}\right] \\
&= \tfrac{h}{3}\left[\begin{matrix}(c_0 + c_1x_0 + c_2{x_0}^2) + 4(c_0 + c_1x_1 + c_2{x_1}^2) \\ +(c_0 + c_1x_2 + c_2{x_2}^2)\end{matrix}\right] \\
&= \tfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

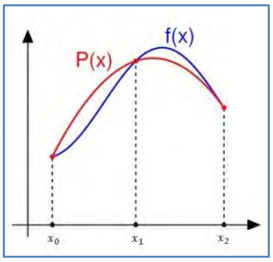
สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ y_0, y_1, y_2 โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0, c_1, c_2 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด

การเป็นเช่นนี้ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสองผ่านจุด $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ บนช่วง $[x_2, x_4]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และในทำนองเดียวกันสำหรับช่วงถัดๆ ไป เมื่อทราบค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามที่เราใช้ประมาณฟังก์ชัน f บนสองช่วงถัดๆ กันคู่ต่างๆ แล้ว ลำดับต่อไปเราก็นำค่าอินทิกรัลเหล่านี้ มารวมกันเป็นค่าประมาณ การอินทิกรัลของ f

ดังนั้นค่าประมาณอินทิกรัลของ f แบบสูตรของเกณฑ์ของซิมป์สันคือ

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n) \text{ เมื่อ } h = \frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนคู่



ภาพที่ 18 ค่าประมาณอินทิกรัลแบบสูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

บทที่ 3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว คณะผู้จัดทำได้นำเสนอเนื้อหาการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน และการหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน ดังนี้

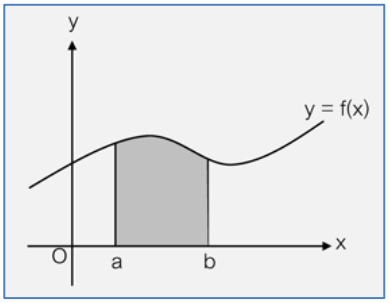
3.1 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

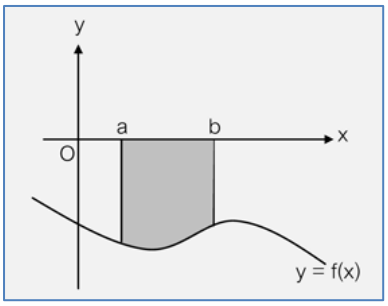
A และ B เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$

1. ถ้า x สำหรับทุกค่าของ $f(x) \geq 0$ ที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน Xแล้ว $A = \int_a^b f(x)dx$
2. ถ้า x สำหรับทุกค่าของ $f(x) \leq 0$ ที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ และ B เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว $B = -\int_a^b f(x)dx$



ภาพที่ 19 ขนาดของพื้นที่ A



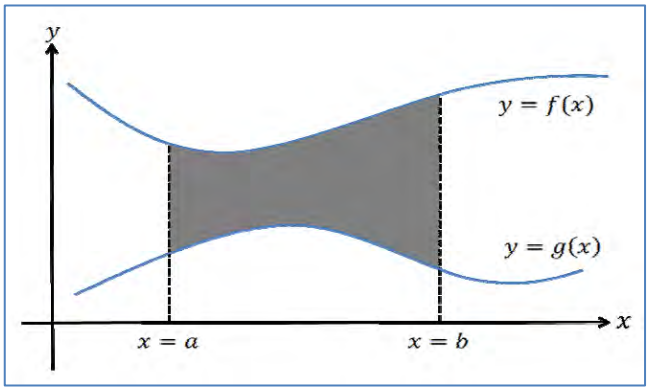
ภาพที่ 20 ขนาดของพื้นที่ B

ดังนั้น โดยทั่วไปจึงสรุปได้ว่า $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$

3.2 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

เมื่อ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[a,b]$

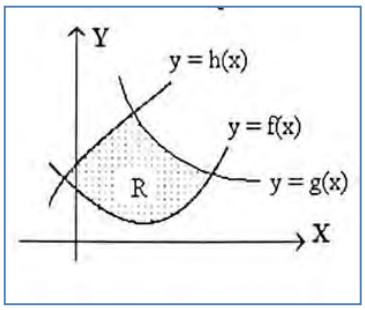
โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ แล้ว $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

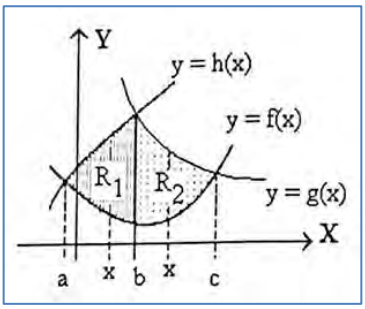


ภาพที่ 21 พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

3.3 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน

เมื่อ f, g, h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, c]$ และ R เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x), y = g(x)$ และ $y = h(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[a, c]$ ดังภาพที่ 21 ถ้าต้องการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งหลายเส้น เราจะแบ่งพื้นที่ออกเป็นส่วนย่อยๆ คือ





ภาพที่ 22 พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน ภาพที่ 23 การแบ่งพื้นที่ออกเป็นส่วนย่อยๆ

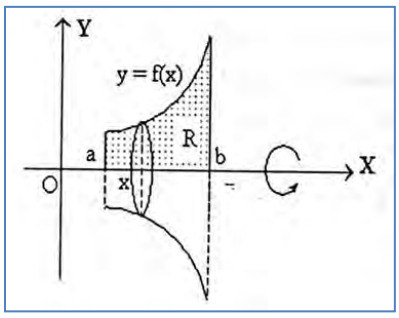
เราได้ว่าพื้นที่ $R =$ พื้นที่ของ $R_1 +$ พื้นที่ของ R_2

นั่นคือ $R = \int_a^b |h(x) - f(x)|\, dx + \int_b^c |g(x) - f(x)|\, dx$

3.4 การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

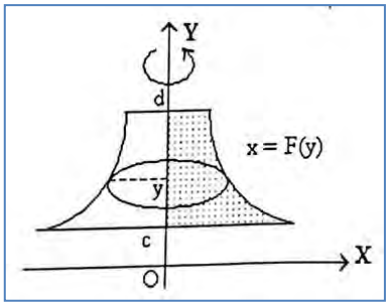
รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน หมายถึง รูปทรงตันที่ได้จากการหมุนบริเวณ รอบเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกันเรียกเส้นตรงนั้นว่า แกนหมุน ผู้จัดทำได้แบบการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนออกเป็น 2 แบบดังนี้

3.4.1 การหมุนแบบจาน



ภาพที่ 24 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบจานรอบแกน X

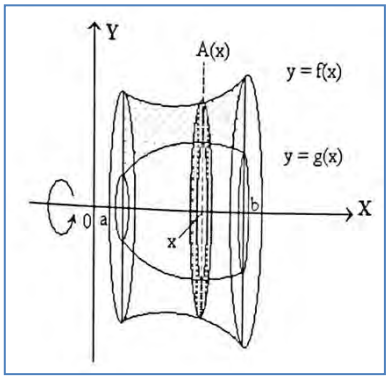
เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ รอบแกน X คือ $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$



ภาพที่ 25 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบจานรอบแกน Y

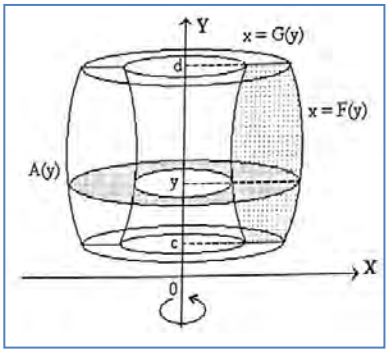
และในทำนองเดียวกัน เมื่อ $F(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = F(y)$ รอบแกน Y คือ $V = \int_c^d \pi[F(y)]^2\,dy$

3.4.2 การหมุนแบบวงแหวน



ภาพที่ 26 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบวงแหวนรอบแกน X

เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ โดยที่ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ รอบแกน X คือ $V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx$



ภาพที่ 27 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนแบบวงแหวนรอบแกน Y

และในทำนองเดียวกัน เมื่อ $F(y)$ และ $G(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนระนาบที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = F(y)$ และ $x = G(y)$ โดยที่ $F(y) \geq G(y) \geq 0$ รอบแกน Y คือ $V = \int_c^d \pi\left(\left[F(y)\right]^2 - \left[G(y)\right]^2\right)dy$

บทที่ 4. การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

4.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f: D \to R$ เมื่อ $D = [a,b] \times [c,d]$

แบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อย ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ โดยที่

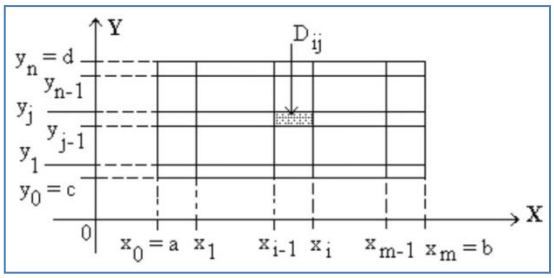
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

แบ่ง $[c,d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปย่อยที่ ij

เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$



ภาพที่ 28 โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D_{ij}

ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,m$

และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots,n$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ของ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = (\Delta x_i)(\Delta y_j)$

ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใดๆ ใน D_{ij}

และ $s_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta A_{ij}$

เราเรียก s_{mn} ว่า ผลบวกรีมันน์ของ f บน D

สำหรับการแบ่งอาณาบริเวณ D เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยๆ นี้

ถ้าเราแบ่งในลักษณะที่ Δx_i และ Δy_j มีค่าข้าใกล้ 0

สำหรับทุก $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$ เมื่อ m และ n มีค่ามากๆ

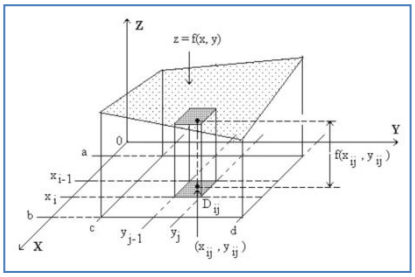
และถ้า $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{mn}$ มีค่าเป็นอย่างเดียวกันหมด สำหรับทุกๆ วิธีที่แบ่งดังกล่าว

และทุกๆ วิธีที่เลือกจุด (x_{ij}, y_{ij}) ใน D_{ij}

แล้วเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า อินทิกรัลสองชั้นของ f บน D หรืออินทิกรัลของ f บน D

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iint_D f$ หรือ $\iint_D f(x,y)dA$

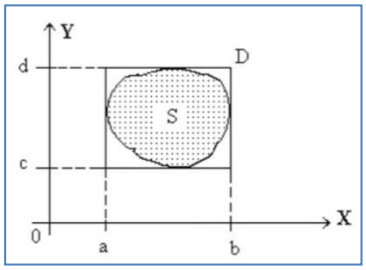


ภาพที่ 29 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

4.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ให้ $s = \{(x,y)|g_1(x) \le y \le g_2(x), a \le x \le b\}$

สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D ล้อมรอบ s



ภาพที่ 30 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D ล้อมรอบ s

เพราะฉะนั้น $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; c \le y < g_1(x) \\ f(x,y); & g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ 0 & ; g_2(x) < y \le d \end{cases}$

และ $\iint_s f = \iint_D \tilde{f}(x,y) dydx$

$$= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y) dydx$$

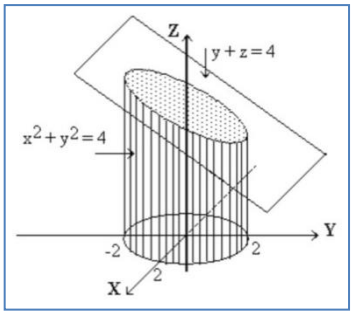
$$= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} 0 \, dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0 \, dy + \right] dx$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dydx$$

ในทำนองเดียวกัน

ให้ $s = \{(x,y)|h_1(y) \le x \le h_2(y), c \le y \le d\}$

ทำให้เราได้ว่า $\iint_s f = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dxdy$



ภาพที่ 31 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

หมายเหตุ ในทางเรขาคณิต

1. ถ้า $f:S\to R$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S และ $f(x,\mathrm{y})\geq 0$ ทุก $(x,y)\in S$ แล้ว $\iint_s f$ คือ ปริมาตรของรูปทรงตันภายใต้พื้นผิว $z=f(x,\mathrm{y})$ บน S
2. ถ้า $f(x,\mathrm{y})=1$ ทุก $(x,y)\in S$ แล้ว $\iint_s f$ คือ พื้นที่ของบริเวณ S

บทที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

5.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

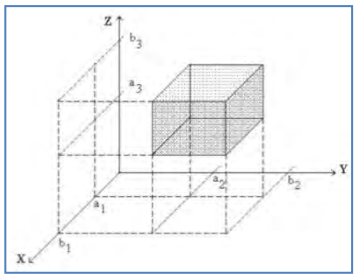
ให้ a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3 เป็นจำนวนจริง

และ $a_1\leq b_1,a_2\leq b_2,a_3\leq b_3$

ให้ $\mathrm{D}=\{(x,y,z)|a_1\leq x\leq b_1,a_2\leq y\leq b_2,a_3\leq z\leq b_3\}$

$$=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

จะได้ D เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใน R^3



ภาพที่ 32 โดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ให้ $f:D\to R$

การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร เราใช้หลักการเดียวกันกับการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

แบ่ง D ออกเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยๆโดย

แบ่ง $[a_1,b_1]$ ออกเป็น m ช่วงย่อย ด้วยจุด $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m$ โดยที่

$$a_1=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{m-1}<x_m=b_1$$

แบ่ง $[a_2,b_2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย ด้วยจุด $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$ โดยที่

$$a_2=y_0<y_1<y_2<y_3<\cdots<y_{n-1}<y_n=b_2$$

แบ่ง $[a_3,b_3]$ ออกเป็น p ช่วงย่อย ด้วยจุด $z_0,z_1,z_2,\cdots,z_p$ โดยที่

$$a_3=z_0<z_1<z_2<z_3<\cdots<z_{p-1}<z_p=b_3$$

ให้ $D_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$ เป็นส่วนแบ่งย่อยของ D

ซึ่งมีปริมาตรเท่ากับ $\Delta V_{ijk}=(\Delta x_i)(\Delta y_j)(\Delta z_k)$

เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,m$ $\quad j=1,2,3,\ldots,n$ และ $k=1,2,3,\ldots,p$

ให้ $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,m$

$\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$ เมื่อ $j=1,2,3,\ldots,n$

$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ เมื่อ $k=1,2,3,\ldots,p$

ให้ $(x_{ijk}, y_{ijk,} z_{ijk,}) \in D_{ijk}$

f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนโดเมน D

จะได้ผลบวกรีมันน์ของ f บน D คือ S_{mnp} เมื่อ

$S_{mnp} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}, y_{ijk,} z_{ijk,}) \Delta V_{ijk}$

ถ้า $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty \\ p\to\infty}} S_{mnp}$ มีค่าและมีค่าเท่ากัน

สำหรับทุกๆ วิธีการแบ่ง D เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยๆ ในลักษณะที่ความยาวของเส้นทแยงมุมของทุกรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยมีค่าเข้าสู่ศูนย์ เมื่อ m, n, p มีค่าเข้าสู่อนันต์ และทุกๆวิธีการเลือกจุด $\left(x_{ijk}, y_{ijk,} z_{ijk,}\right)$ ใน D_{ijk}

แล้วเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

ค่าลิมิตที่หาได้นี้ เรียกว่า อินทิกรัลสามชั้นของ f บน D หรืออินทิกรัลของ f บน D

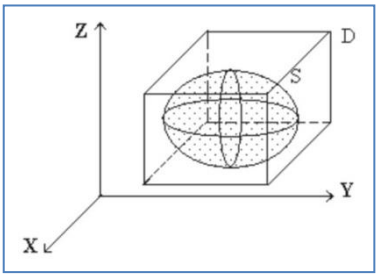
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iiint_D f$ หรือ $\iiint_D f(x,y,z)dV$

5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f: S \to R$ เมื่อ $S \subseteq R^3$

โดยที่ S เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

สร้างรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ครอบคลุม S



ภาพที่ 33 รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ครอบคลุม S

ให้ $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D โดยมีค่าดังนี้

เพราะฉะนั้น $\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z)\ ;\ (x,y,z) \in S \\ 0\ ;\ (x,y,z) \notin S \end{cases}$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S

โดยนิยามว่า อินทิกรัลของ f บน S

มีค่าเท่ากับ $\iiint_D \tilde{f}(x,y,z)dV$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\iiint_S f, \iiint_S f dV, \iiint_S f(x,y,z)dV, \iiint_S f(x,y,z)dxdydz$

2.2 โปรแกรม GeoGebra เบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีเครื่องมือที่ช่วยในการคำนวณ พร้อมทั้งสร้างกราฟทั้ง 2 และ 3 มิติ และมีสีสันที่สวยงาม เหมาะที่จะพัฒนาเป็นสื่อการเรียนการสอน ที่สามารถโต้ตอบกับผู้ใช้ได้ โดยในที่นี้จะอธิบายถึงการใช้โปรแกรม GeoGebra ในเบื้องต้นดังนี้

2.2.1 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra

2.2.2 การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง

2.2.3 การสร้าง Input Box

2.2.4 การสร้าง Check Box

2.2.5 การสร้าง Slide Bar

2.2.6 การสร้าง Text

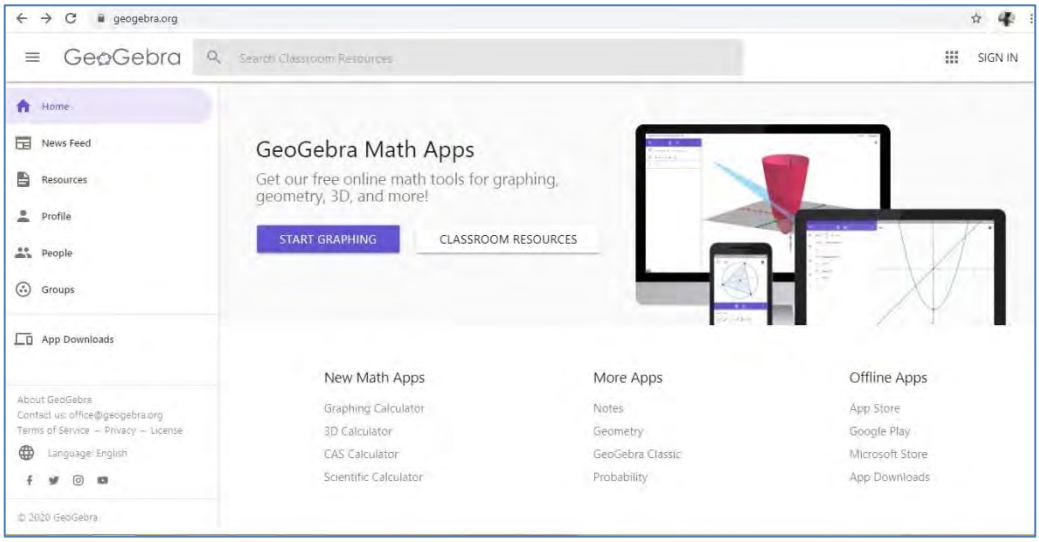
2.2.7 การค้นหาคำสั่ง

2.2.8 การสร้าง Activity

2.2.9 การสร้าง Book

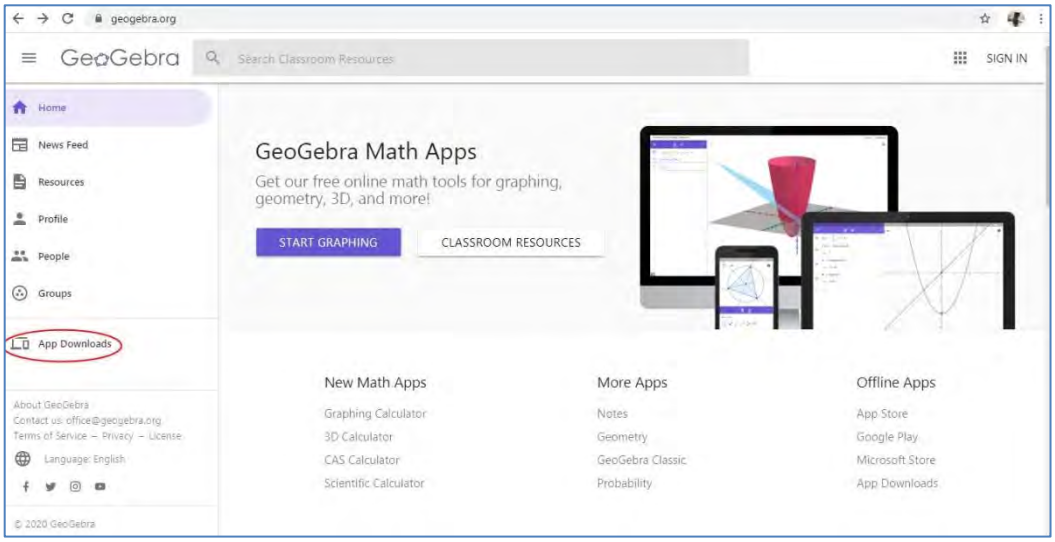
2.2.1 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra

ขั้นตอนที่ 1 เข้าโปรแกรม GeoGebra จาก https://www.geogebra.org/



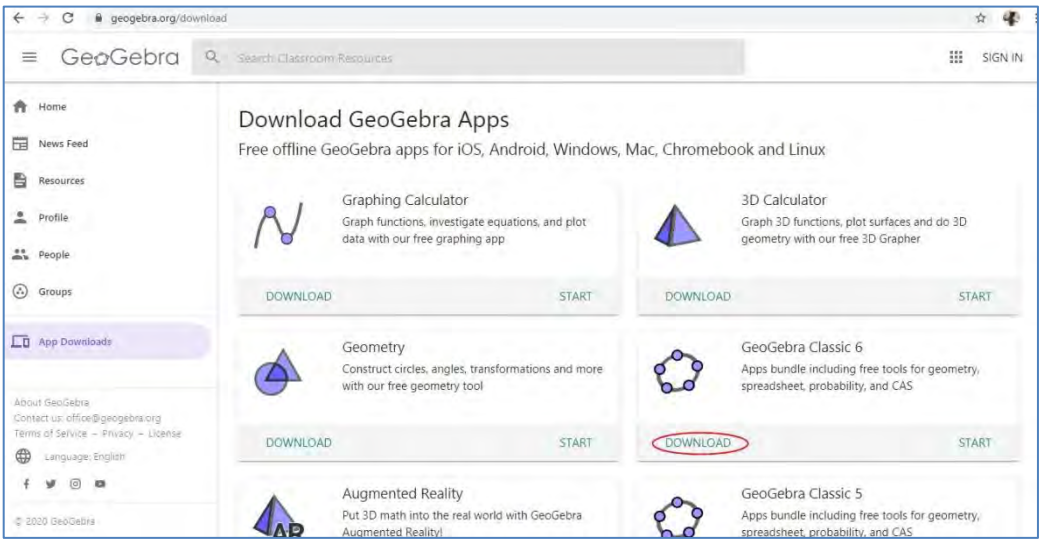
ภาพที่ 34 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 กด App Downloads



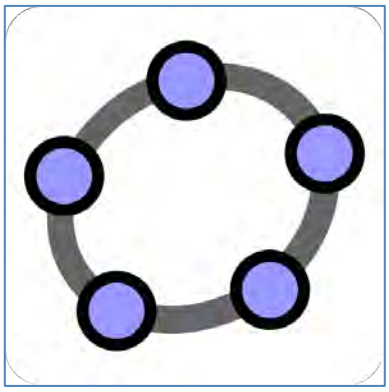
ภาพที่ 35 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 2)

ขั้นตอนที่ 3 กด Downloads ที่ GeoGebra Classic 6



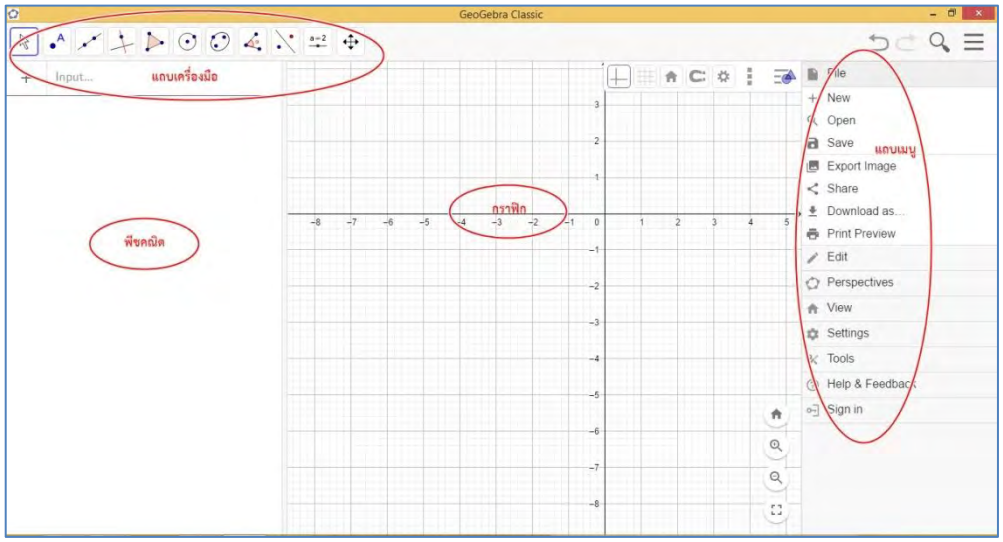
ภาพที่ 36 การ Downloads โปรแกรม GeoGebra (ขั้นตอนที่ 3)

ขั้นตอนที่ 4 ทำตามขั้นตอนการลงโปรแกรม จะปรากฏ โปรแกรม GeoGebra ที่หน้าจอ



ภาพที่ 37 โปรแกรม GeoGebra ที่หน้าจอ (ขั้นตอนที่ 4)

ขั้นตอนที่ 5 กดเข้าโปรแกรม GeoGebra จากหน้า Desktop จะปรากฏภาพดังนี้



ภาพที่ 38 เข้าโปรแกรม GeoGebra จากหน้า Desktop (ขั้นตอนที่ 5)

หน้าต่างนี้ แบ่งออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 รายการแถบเครื่องมือ (Toolbar)

ส่วนที่ 2 หน้าต่างพีชคณิต (Algebra)

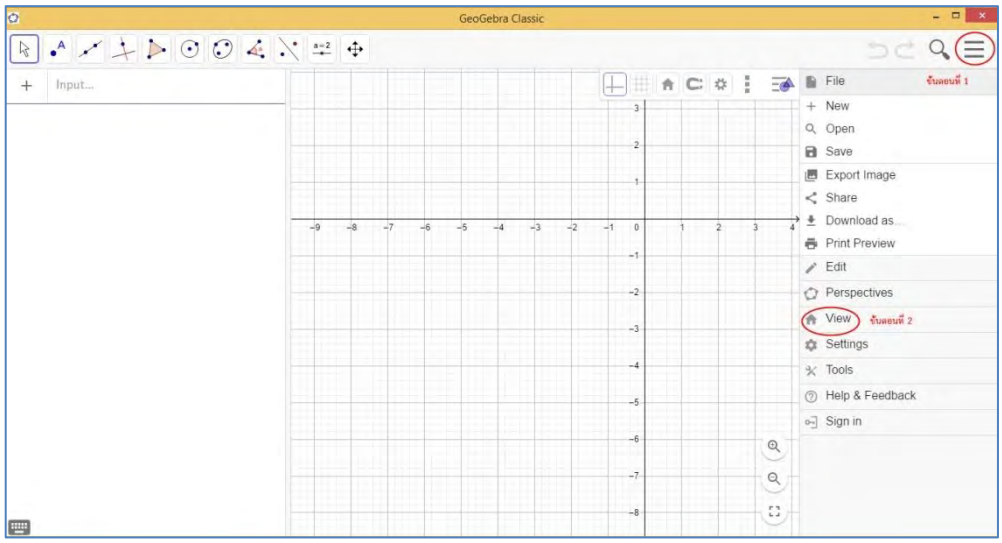
ส่วนที่ 3 หน้าต่างกราฟิก (Graphics)

ส่วนที่ 4 แถบเมนู (Menu Bar)

2.2.2 การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง ในที่นี้จะแบ่งการทำงานออกเป็น 2 หน้าต่าง ได้แก่ หน้าต่างกราฟิก (Graphics) และ หน้าต่างกราฟิก 2 (Graphics 2) เพื่อเป็นหน้าต่างแสดงภาพกราฟของผลลัพธ์ และหน้าต่างคำสั่ง ซึ่งเป็นการแยกหน้าต่างชุดคำสั่งไม่ให้ปนกับแสดงหน้าต่างกราฟ โดยในที่นี้จะแสดงการเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง หน้าต่างกราฟิก 2 (Graphics 2) เพื่อแยกความแต่งต่างระหว่าง 2 หน้าต่าง

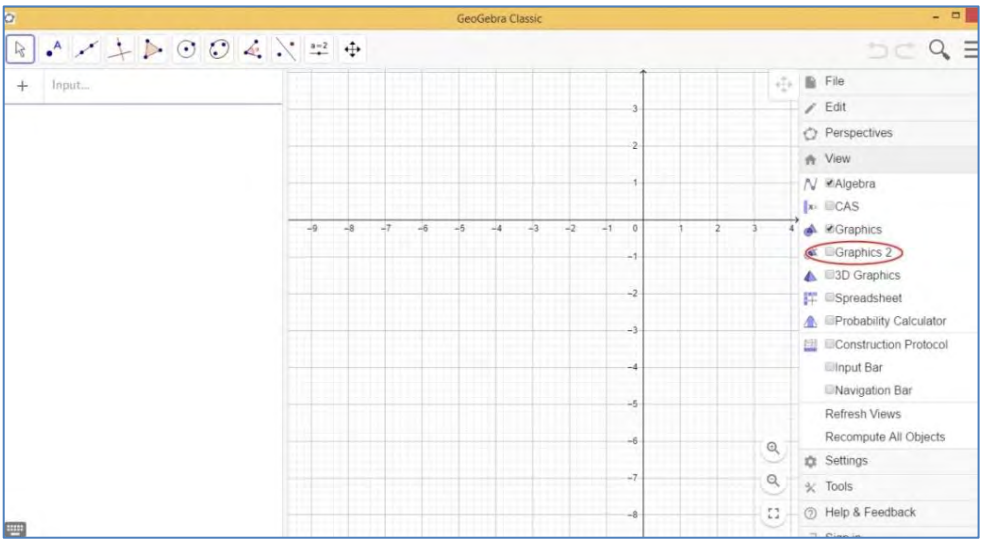
ขั้นตอนที่ 1 กดเข้าไปที่ มุมขวาด้านบน

ขั้นตอนที่ 2 กดเข้าไปที่ View



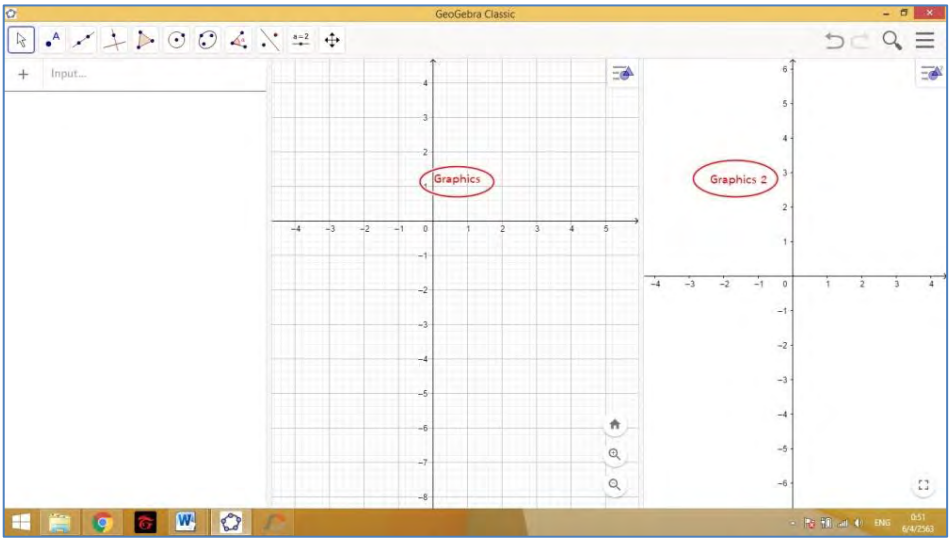
ภาพที่ 39 การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง (ขั้นตอนที่ 1-2)

ขั้นตอนที่ 3 กดเข้าไปที่ Graphics 2



ภาพที่ 40 การเปิดใช้งาน 2 หน้าต่าง (ขั้นตอนที่ 3)

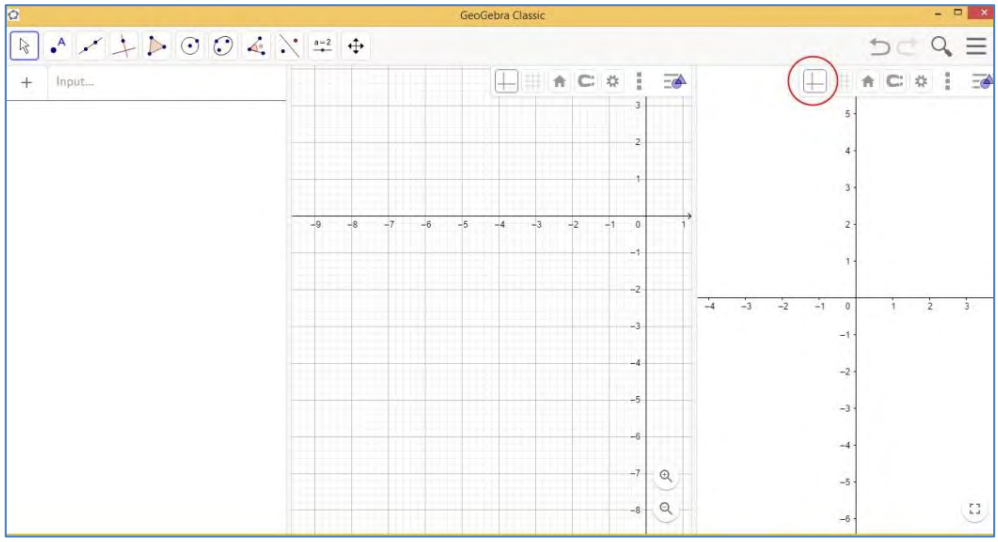
จะปรากฏหน้าต่างกราฟิก 2 (Graphics 2) เพิ่มอีก 1 หน้าต่างเป็น 2 หน้าต่าง ดังนี้



ภาพที่ 41 หน้าต่างการใช้งาน

และต่อไปจะทำให้หน้าต่างกราฟิก 2 (Graphics 2) เป็นหน้าต่างที่แสดงคำสั่งโต้ตอบกับผู้ใช้ จึงลบแกนพิกัด และเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่างกราฟิก 2 (Graphics 2) ด้วย ดังขั้นตอนที่ 3 และ 4

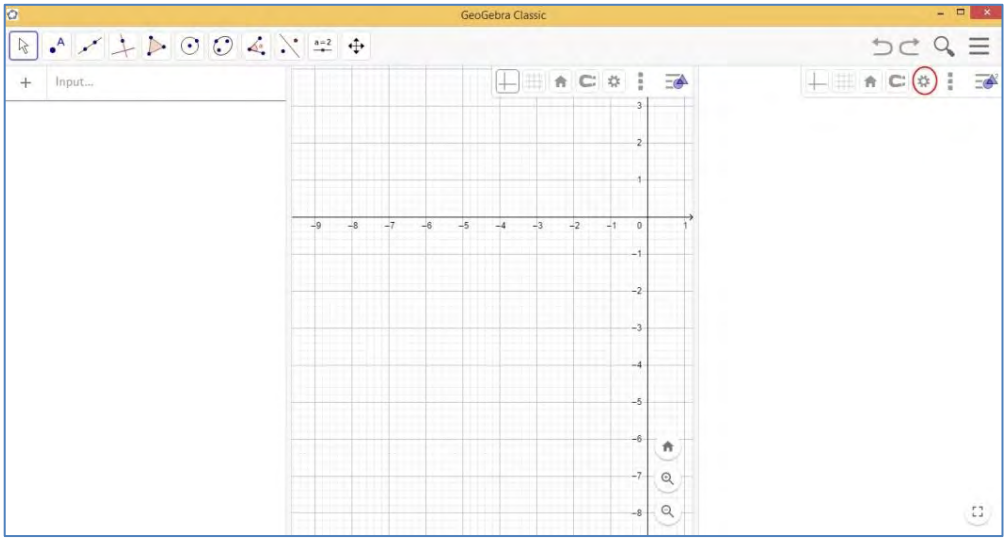
ขั้นตอนที่ 3 การลบแกนพิกัดในหน้าต่าง Graphics 2 โดยการกดปุ่มดังรูปจะทำให้เส้นแกนพิกัดหายไป



ภาพที่ 42 การลบแกนพิกัดในหน้าต่าง Graphics 2

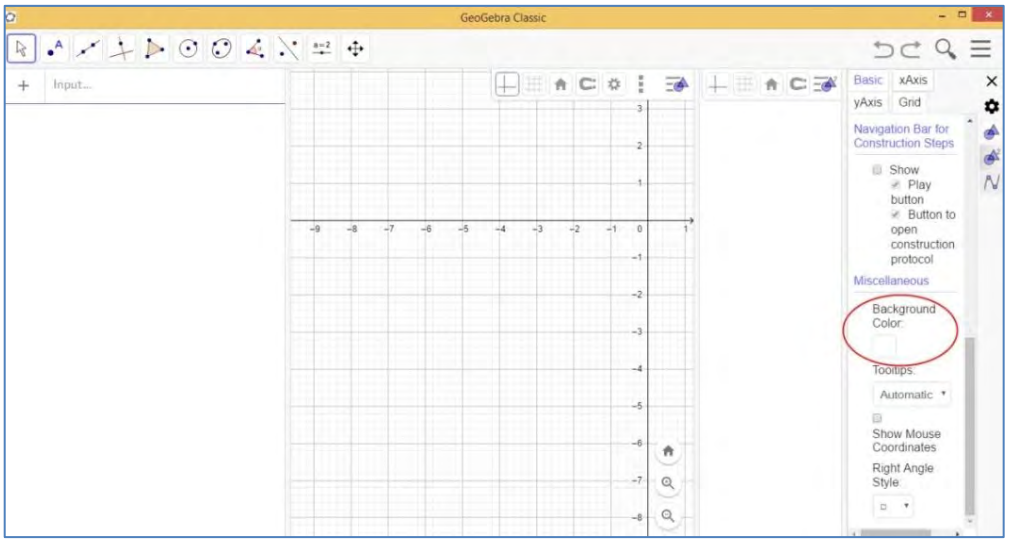
ขั้นตอนที่ 4 การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2

4.1 กดที่สัญลักษณ์ Setting ดังรูป เพื่อเปลี่ยนสีในหน้าต่าง Graphics 2

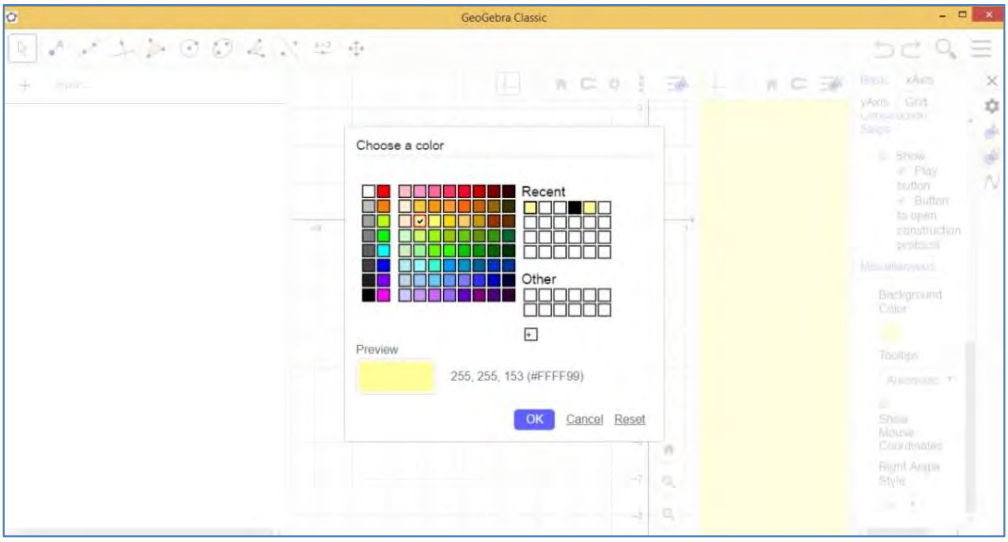


ภาพที่ 43 การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 1)

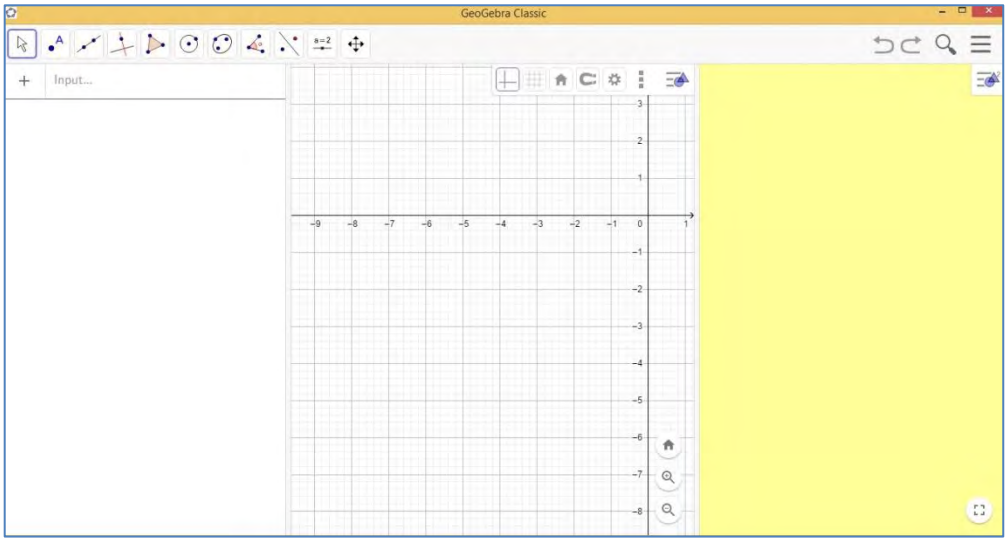
4.2 กด Background Color แล้วกดเลือกสีตามที่ต้องการ



ภาพที่ 44 การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 2)



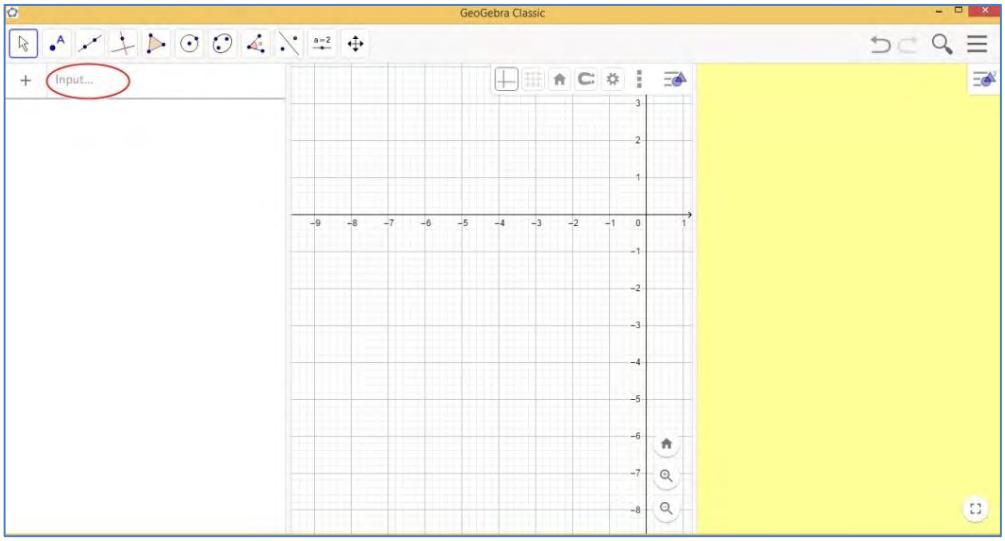
ภาพที่ 45 การเปลี่ยนสีพื้นหลังของหน้าต่าง Graphics 2 (ขั้นตอนที่ 3)



ภาพที่ 46 การเปลี่ยนสีในหน้าต่าง Graphics 2

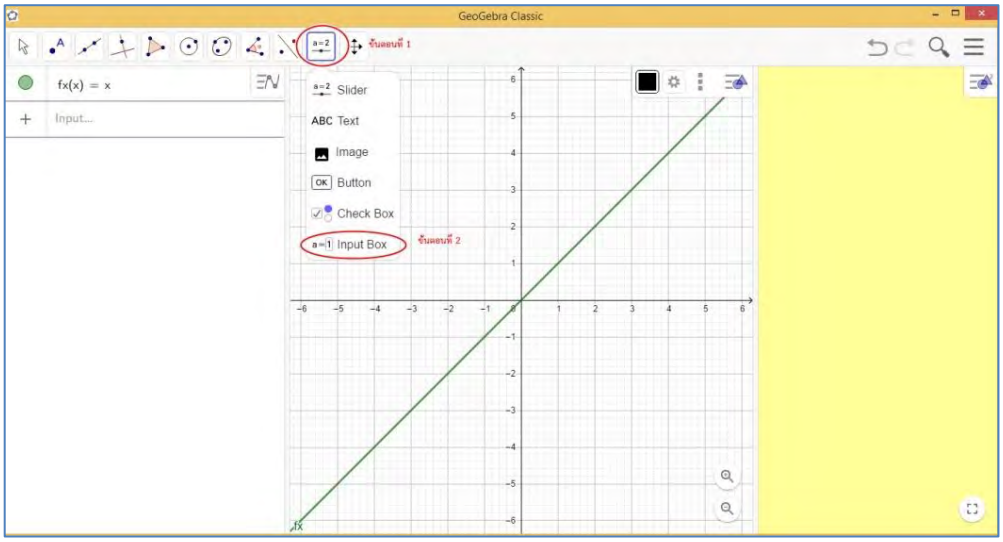
2.2.3 การสร้าง Input Box เพื่อให้ผู้ใช้ใส่ตัวอักษร ตัวเลข เพื่อประกอบเป็น ฟังก์ชัน และขอบเขตได้ตามต้องการ

ขั้นตอนที่ 1 สร้างฟังก์ชัน ที่ต้องการ โดยใส่นิพจน์ใส่ช่อง Input Box



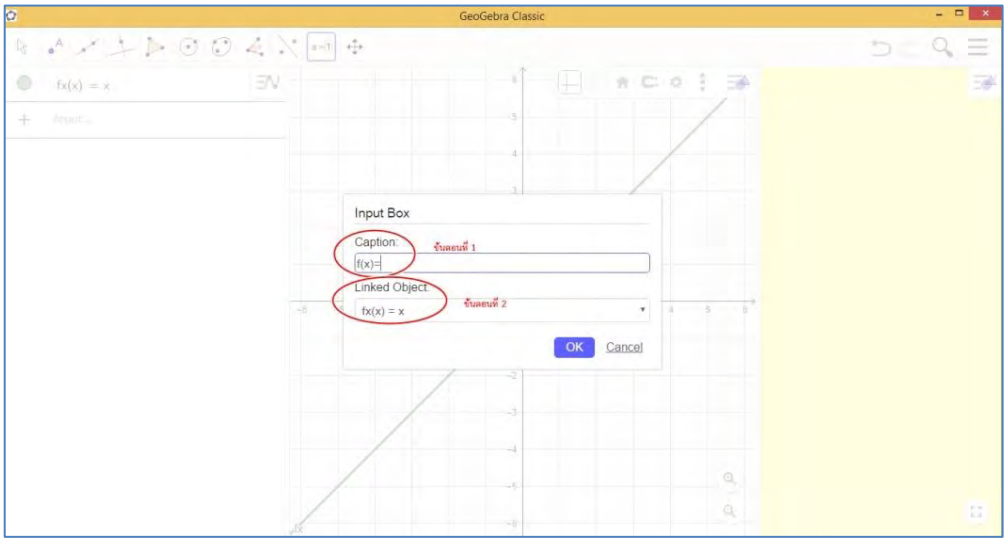
ภาพที่ 47 การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 จากการใส่ฟังก์ชัน $f(x) = x$ แล้วจะได้กราฟ $f(x) = x$ แสดงในส่วนของหน้าต่าง Graphics จากนั้นกดปุ่มคำสั่งดังรูป แล้วกดเลือกพื้นที่ที่ต้องการวาง Input Box ในหน้าต่าง Graphics 2

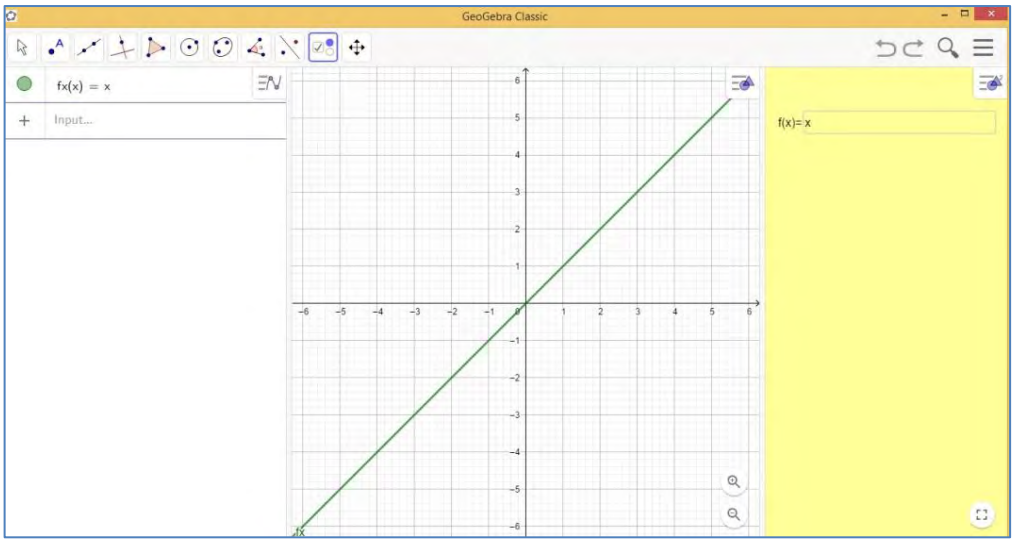


ภาพที่ 48 การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 2)

ขั้นตอนที่ 3 พิมพ์ชื่อ Input Box ในช่อง Caption แล้วกดปุ่มเลือกลิงก์ที่ต้องการเชื่อมต่อกัน ในช่อง Linear Object แล้วกดปุ่ม OK ในตัวอย่างนี้ คลิกเลือกลิงค์ที่ $f(x) = x$



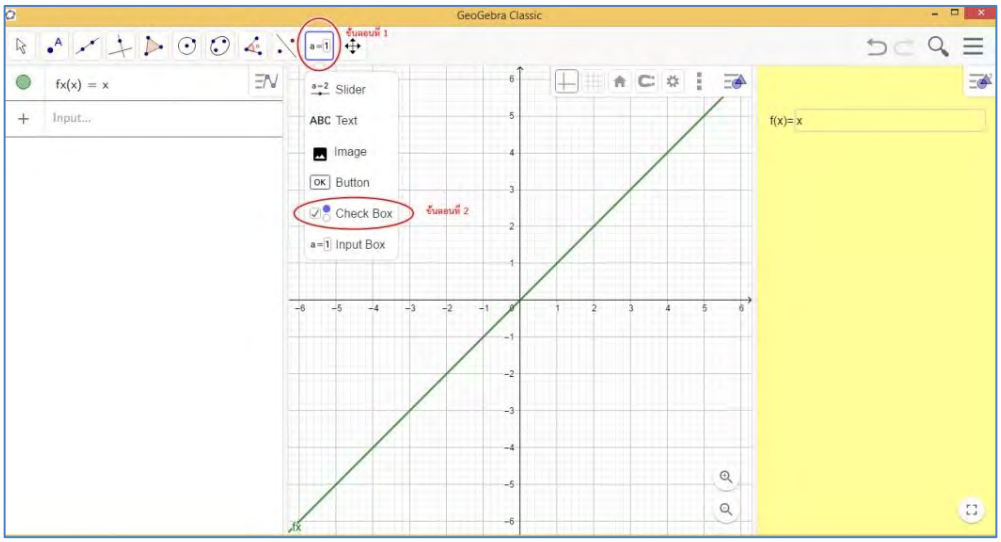
ภาพที่ 49 การสร้าง Input Box (ขั้นตอนที่ 3)



ภาพที่ 50 Input Box

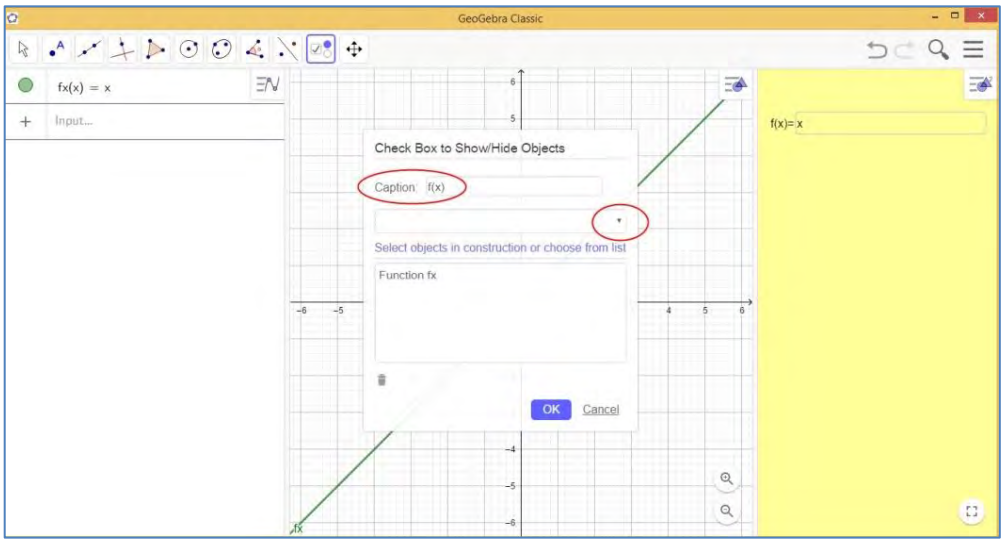
2.2.4 การสร้าง Check Box เพื่อให้ผู้ใช้เลือกที่จะแสดง หรือซ่อนสิ่งต่างๆ ในโปรแกรม

ขั้นตอนที่ 1 กดปุ่มคำสั่งดังรูป แล้วกดเลือกพื้นที่ที่ต้องการวาง Check Box ในหน้าต่าง Graphics 2



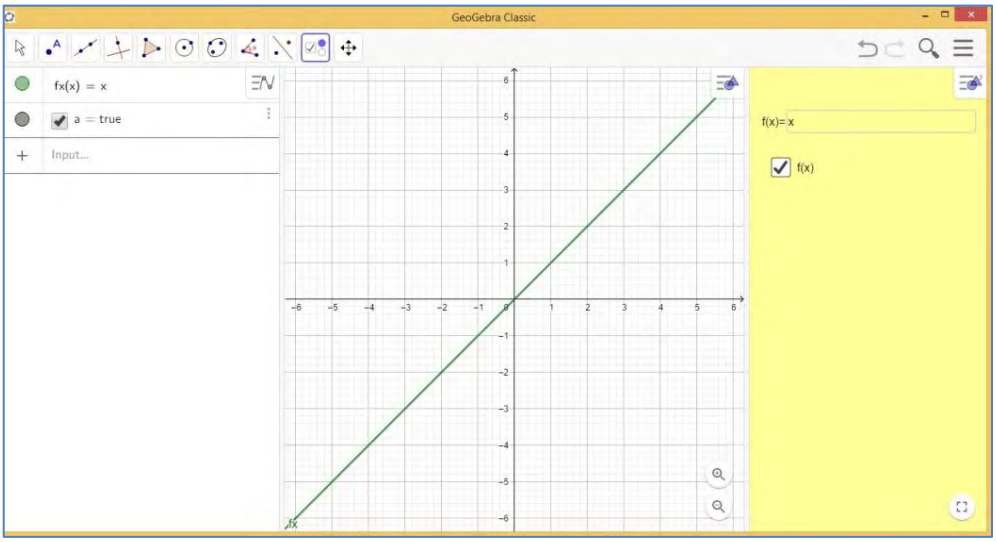
ภาพที่ 51 การสร้าง Check Box (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 พิมพ์ชื่อ Check Box แล้วกดปุ่มเลือกลิงก์ที่ต้องการเชื่อมต่อกัน จากนั้นกดปุ่ม OK



ภาพที่ 52 การสร้าง Check Box (ขั้นตอนที่ 2)

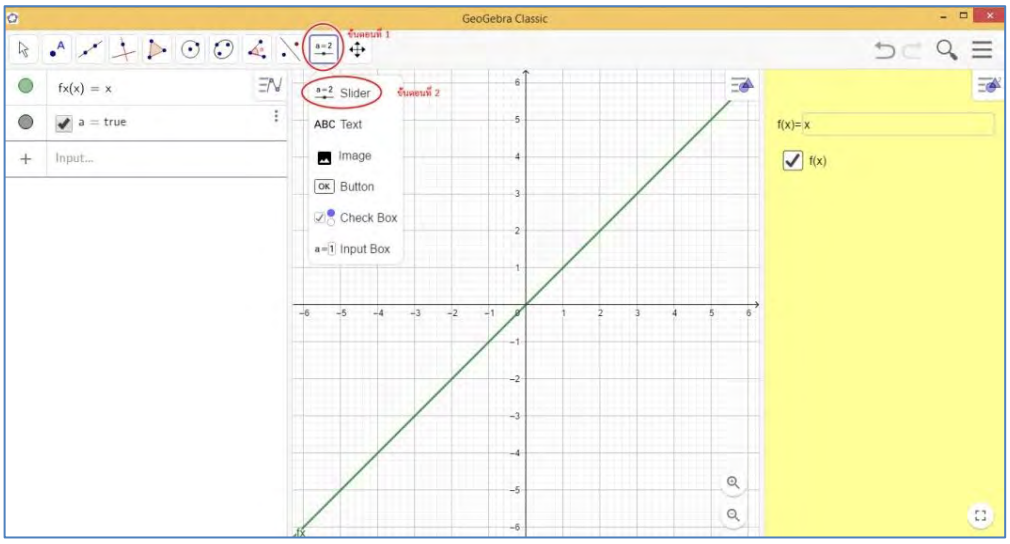
ถ้าผู้ใช้ต้องการแสดงหรือซ่อน สิ่งที่เชื่อมต่อกันกับ Check Box ให้กดที่ ช่อง ☐ ถ้าต้องการให้แสดง ให้กดที่ ช่อง ☐ เป็น ☑



ภาพที่ 53 การแสดงหรือซ่อน สิ่งที่เชื่อมต่อกันกับ Check Box

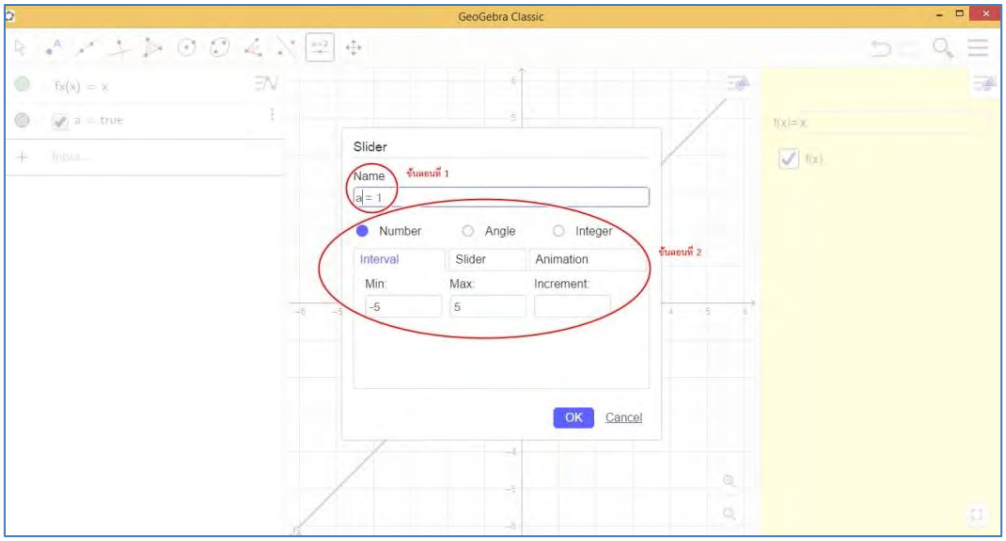
2.2.5 การสร้าง Slide Bar เพื่อให้ผู้ใช้เลื่อนเปลี่ยนค่าของตัวเลขหรือตัวแปรที่ผู้ใช้กำหนด

ขั้นตอนที่ 1 กดปุ่มคำสั่งดังรูป แล้วกดเลือกพื้นที่ที่ต้องการวางในหน้าต่าง Graphics 2

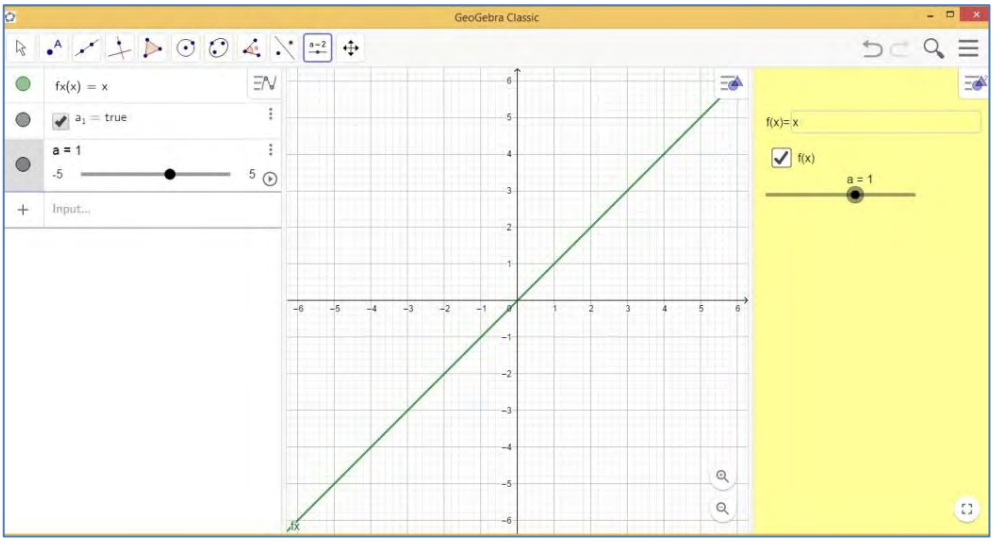


ภาพที่ 54 การสร้าง Slide Bar (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 พิมพ์ชื่อ Slide Bar แล้วกดตั้งค่าต่างๆ ตามที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม OK



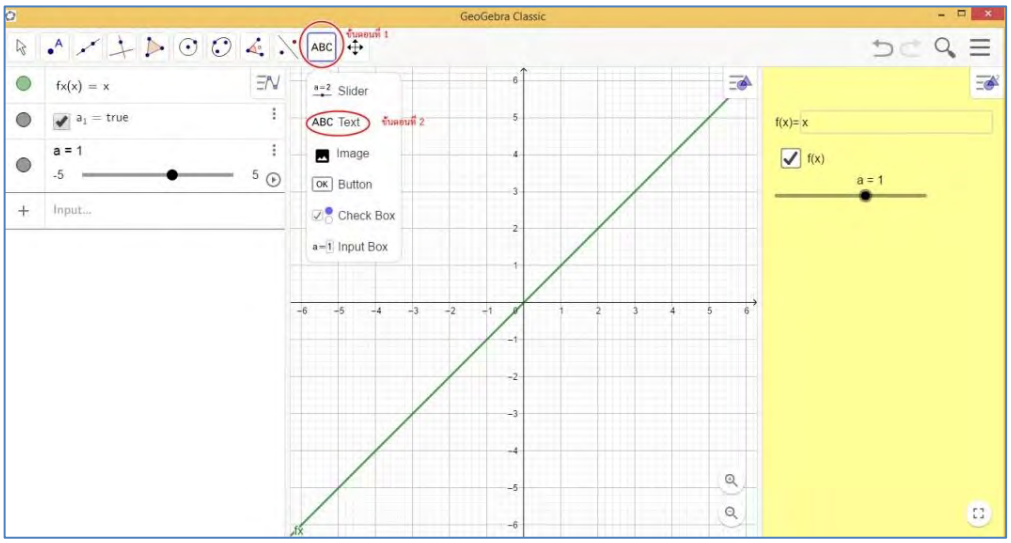
ภาพที่ 55 การสร้าง Slide Bar (ขั้นตอนที่ 2)



ภาพที่ 56 Slide Bar

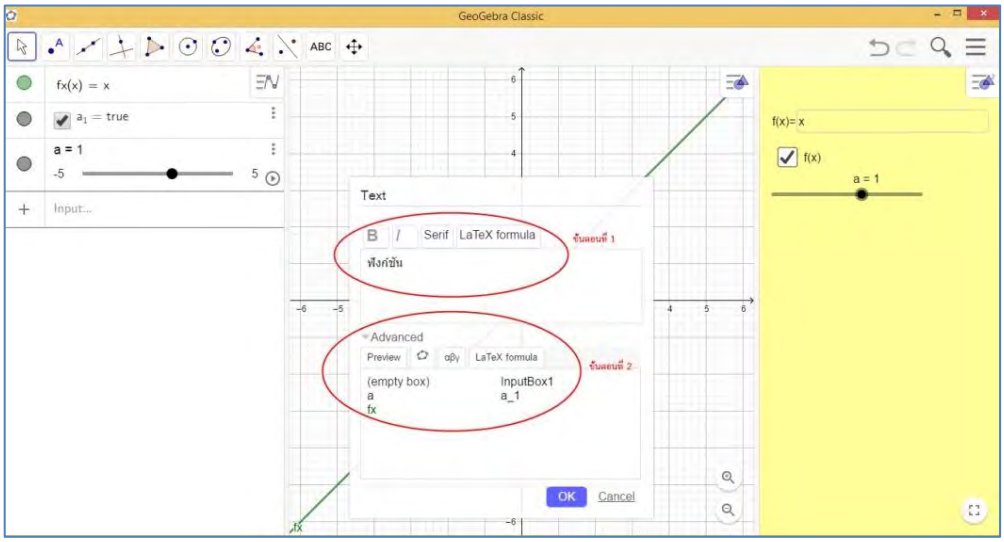
2.2.6 การสร้าง Text เพื่อนำเสนอข้อความที่ผู้ใช้ต้องการ

ขั้นตอนที่ 1 กดปุ่มคำสั่งดังรูป แล้วกดเลือกพื้นที่ที่ต้องการวางในหน้าต่าง Graphics 2

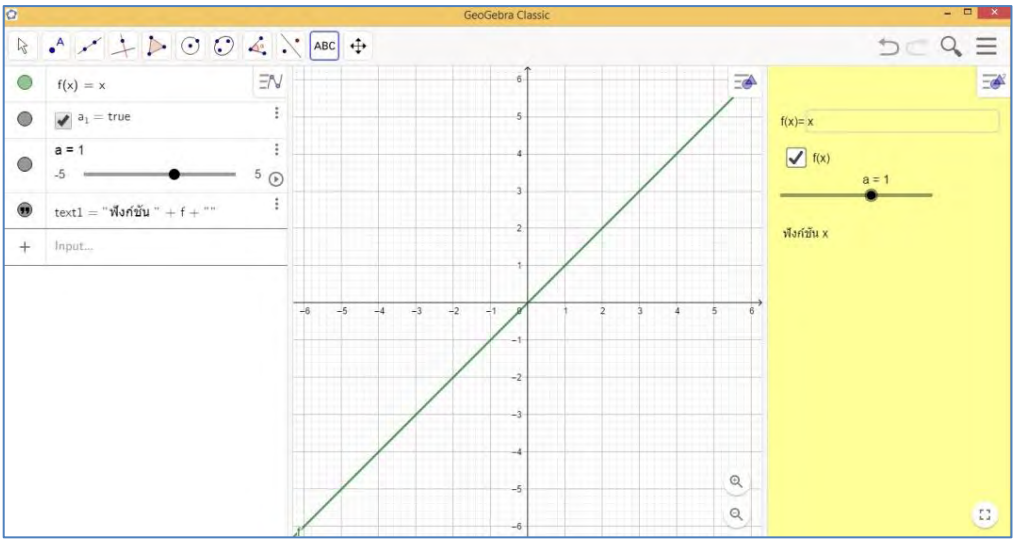


ภาพที่ 57 การสร้าง Text (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 พิมพ์ข้อความที่ต้องการ และหากต้องการใส่เครื่องหมาย หรือข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ Input ไว้ก่อนหน้านี้แล้ว ให้กดปุ่ม Advanced เพื่อเลือกข้อมูลที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม OK



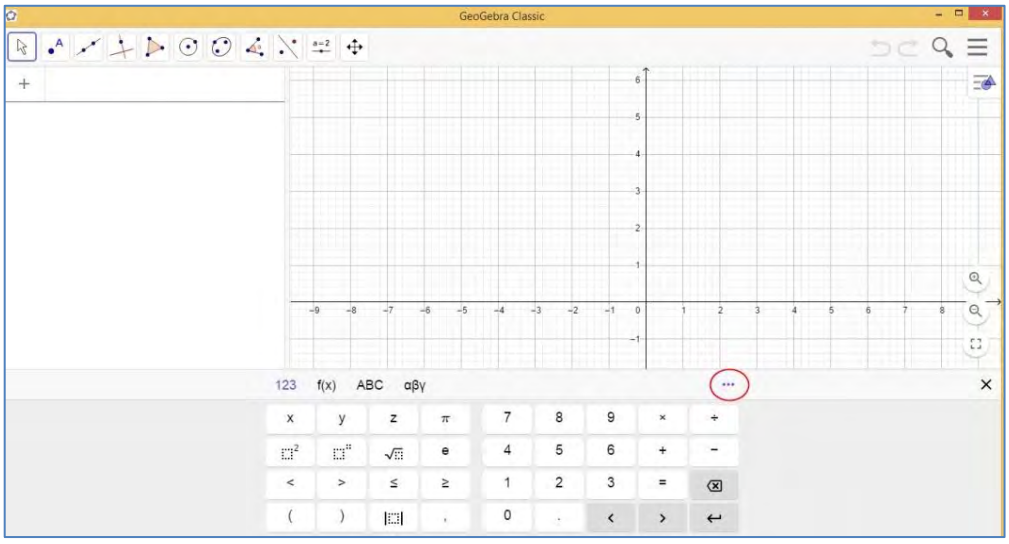
ภาพที่ 58 การสร้าง Text (ขั้นตอนที่ 2)



ภาพที่ 59 Text

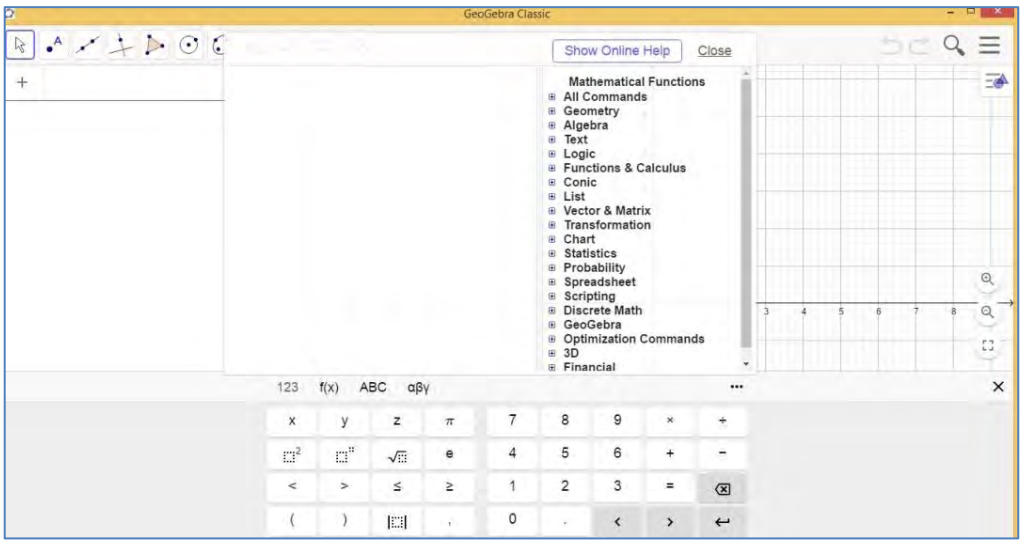
2.2.7 การค้นหาคำสั่ง หากผู้พัฒนาโปรแกรมต้องการหาวิธีการทำงานบางอย่างก็สามารถค้นหาคำสั่งที่ต้องการได้

ขั้นตอนที่ 1 กดปุ่มคำสั่งดังรูป



ภาพที่ 60 การค้นหาคำสั่ง (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 เลือกคำสั่งที่ต้องการ หรือถ้าต้องการหาคำสั่งเพิ่มเติมให้กด Show Online Help เพื่อค้นหาข้อมูลในอินเตอร์เน็ต

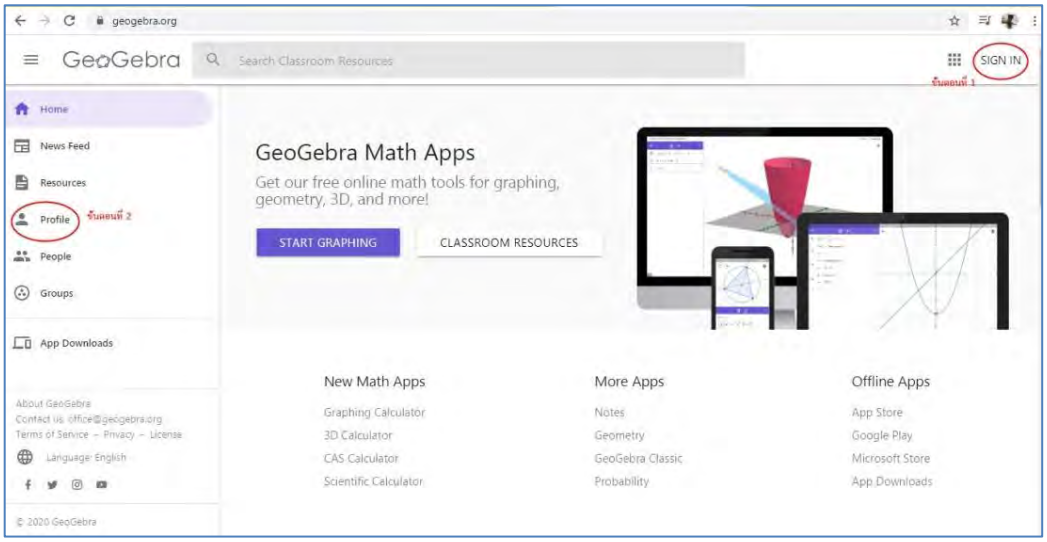


ภาพที่ 61 การค้นหาคำสั่ง (ขั้นตอนที่ 2)

2.2.8 การสร้าง Activity เพื่อนำเสนอโปรแกรม GeoGebra ที่สำเร็จแล้วลงบน https://www.geogebra.org/

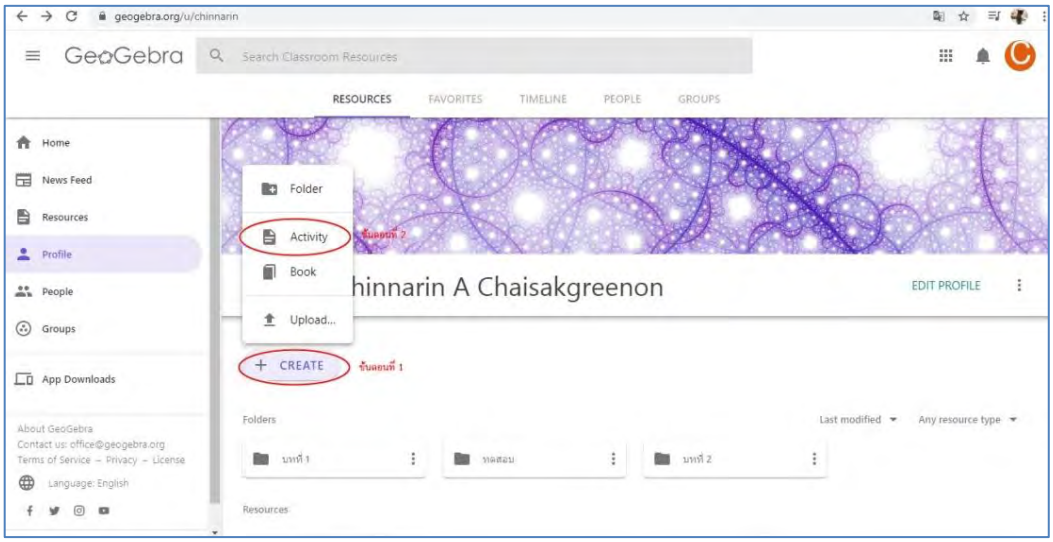
ขั้นตอนที่ 1 เข้าเว็บไซต์ https://www.geogebra.org/ แล้วเข้าสู่ระบบ

ขั้นตอนที่ 2 กดปุ่ม Profile



ภาพที่ 62 การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 1-2)

ขั้นตอนที่ 3 กดปุ่ม Create แล้ว กดปุ่ม Activity



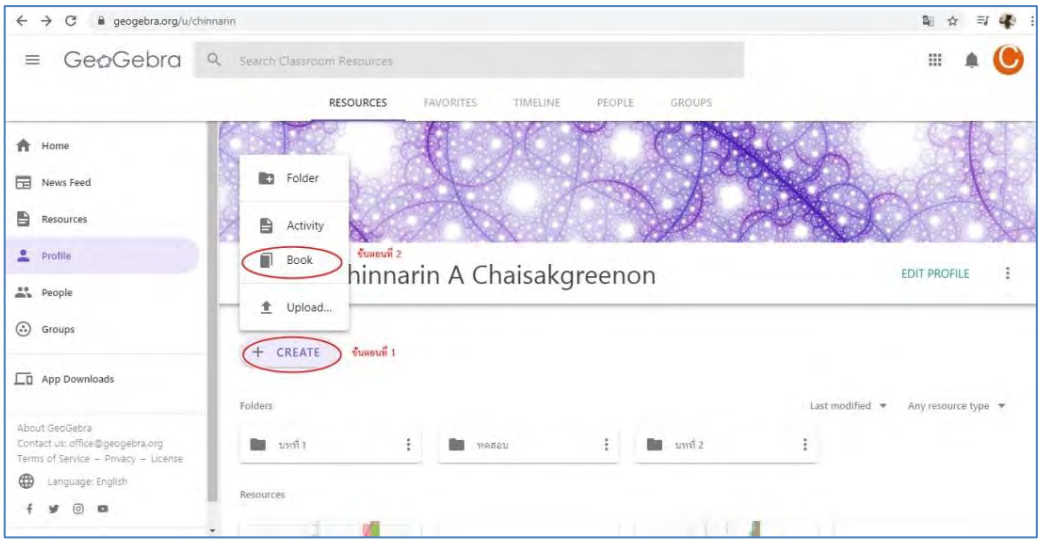
ภาพที่ 63 การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 3)

ขั้นตอนที่ 4 ใส่ข้อมูลที่ต้องการลงในหน้าต่างนี้ แล้วกดบันทึก

ภาพที่ 64 การสร้าง Activity (ขั้นตอนที่ 4)

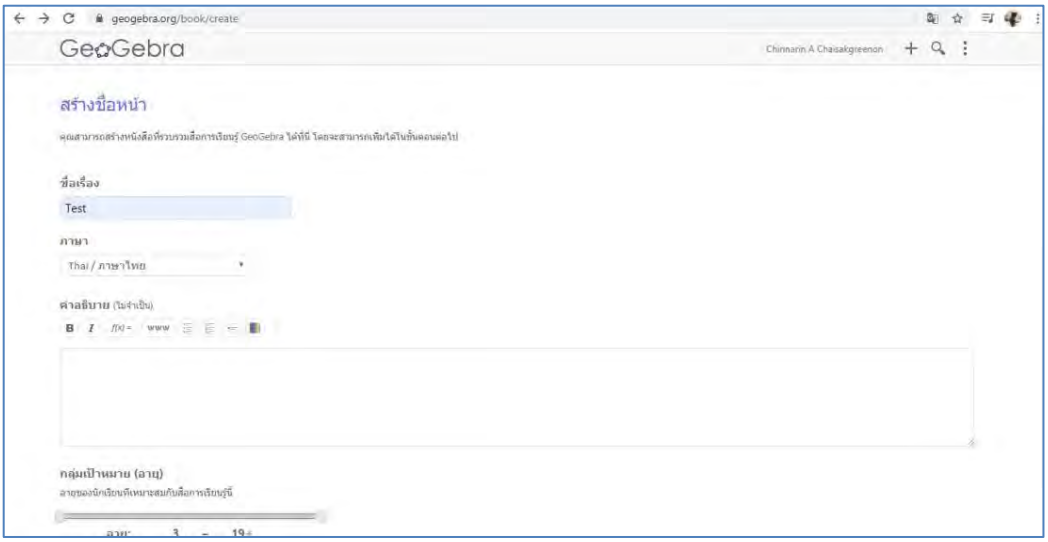
2.2.9 การสร้าง Book เพื่อรวบรวมหรือจัดเรียงข้อมูล Activity ที่ผู้ใช้สร้างขึ้น ให้เป็นระบบ

ขั้นตอนที่ 1 กดปุ่ม Create แล้ว กดปุ่ม Book



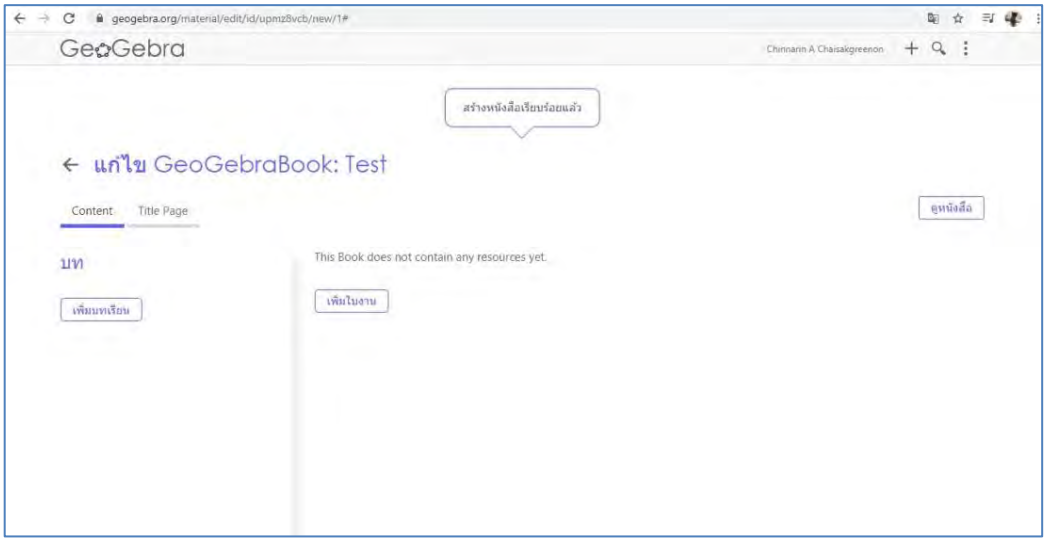
ภาพที่ 65 การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 2 ใส่ข้อมูลที่ต้องการลงในหน้าต่างนี้ แล้วกดบันทึก



ภาพที่ 66 การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 2)

ขั้นตอนที่ 3 เพิ่มบทเรียน หรือ เพิ่มใบงานได้ตามต้องการ



ภาพที่ 67 การสร้าง Book (ขั้นตอนที่ 3)

บทที่ 3
วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอน

จากการศึกษาเนื้อหาและการใช้งาน GeoGebra แล้ว ผู้จัดทำโครงงานได้วิเคราะห์และออกแบบโปรแกรม สำหรับพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra แล้วสรุปเป็นหัวข้อตามลำดับ ดังนี้

บทที่ 1 การวาดกราฟสมการพหุนาม

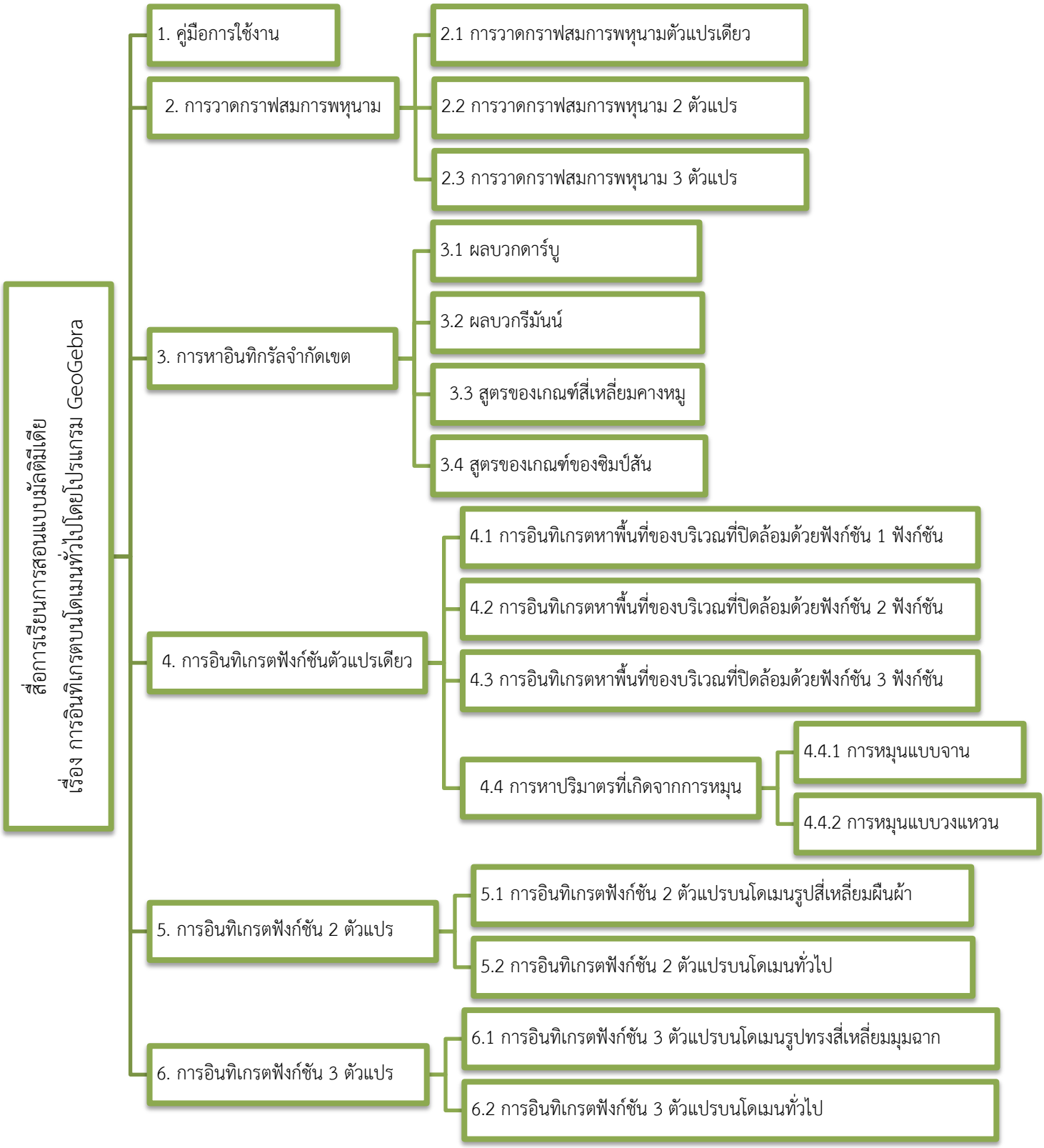
บทที่ 2 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

บทที่ 3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

บทที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

บทที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

โดยในแต่ละหัวข้อมีการนำเสนอในรูปแบบของกราฟ ผู้ใช้สามารถใส่ฟังก์ชัน และเปลี่ยนขอบเขตได้ตามต้องการ อีกทั้งยังออกแบบชิ้นงานให้มีความสวยงามน่าสนใจ ทั้งนี้ในบทที่ 2 เรื่อง การหาอินทิกรัลจำกัดเขต ผู้จัดทำได้ทำวีดีโอเกี่ยวกับเนื้อหา เพื่อให้ผู้ใช้ได้ทบทวนเนื้อหาก่อนการศึกษาจริง ทำให้เข้าใจเนื้อหาได้ง่ายขึ้น ซึ่งผู้จัดทำได้วางแผนการออกแบบสื่อ สรุปได้ดังนี้


สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย
เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra
1. คู่มือการใช้งาน
2. การวาดกราฟสมการพหุนาม
2.1 การวาดกราฟสมการพหุนามตัวแปรเดียว
2.2 การวาดกราฟสมการพหุนาม 2 ตัวแปร
2.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม 3 ตัวแปร
3. การหาอินทิกรัลจำกัดเขต
3.1 ผลบวกดาร์บู
3.2 ผลบวกรีมันน์
3.3 สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู
3.4 สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน
4. การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว
4.1 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน
4.2 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน
4.3 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน
4.4 การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน
4.4.1 การหมุนแบบจาน
4.4.2 การหมุนแบบวงแหวน
5. การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร
5.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป
6. การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร
6.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก
6.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ผู้จัดทำได้ดำเนินการออกแบบสื่อการเรียนการสอน โดยสร้างเว็บเพจใน www.GeoGebra.org และออกแบบหน้าต่างเว็บเพจในแต่ละหัวข้อ ดังต่อไปนี้

3.1 สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย

3.2 คู่มือการใช้งาน

3.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม

3.4 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

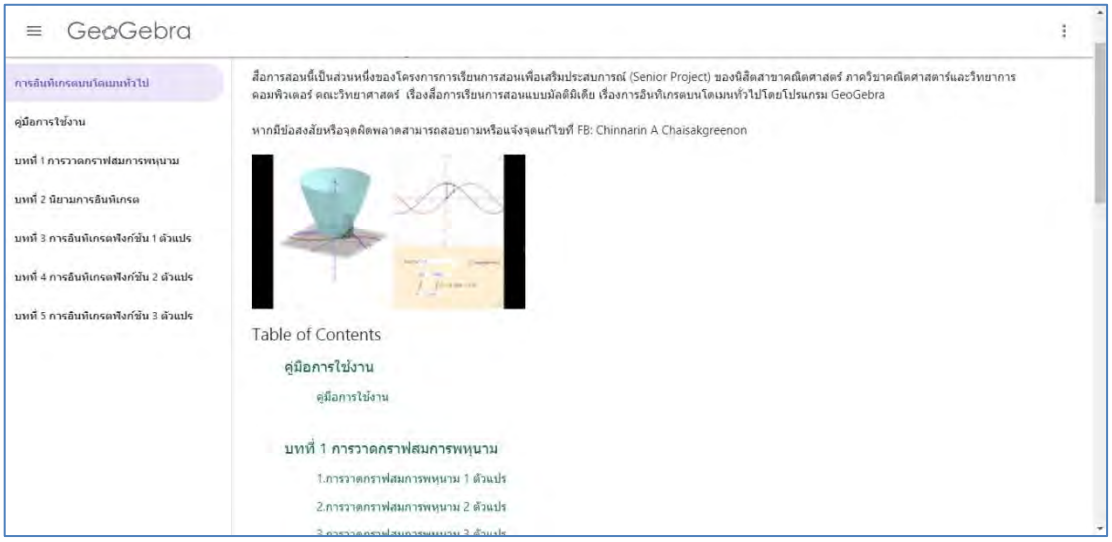
3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

3.6 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

3.7 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

3.1 สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra

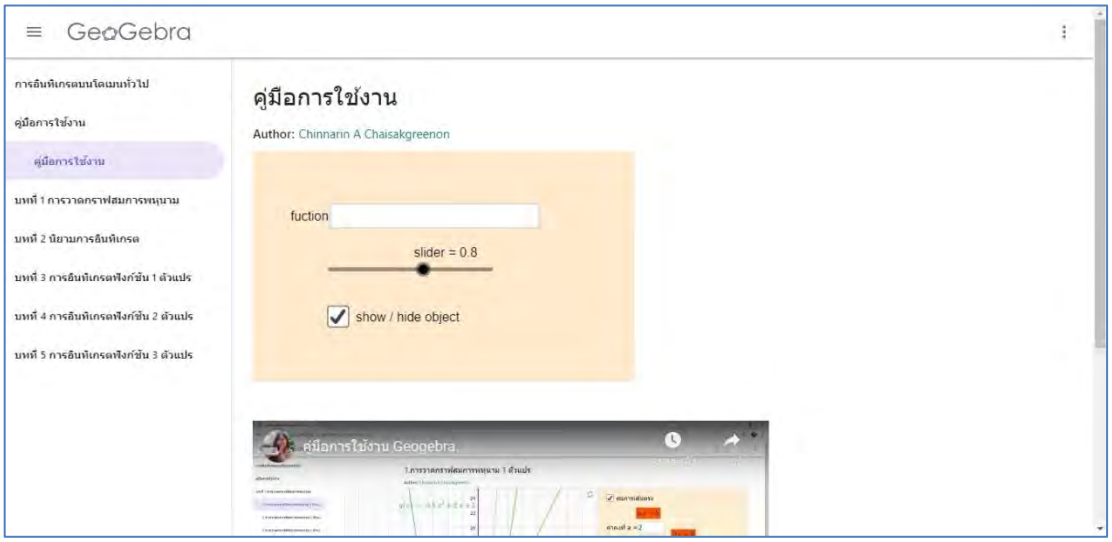
ผู้จัดทำได้จัดทำสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra ในทุกหัวข้อ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถเข้าไปใช้ในแต่ละหัวข้อได้อย่างสะดวก



ภาพที่ 68 สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไปโดยโปรแกรม GeoGebra

3.2 คู่มือการใช้งาน

ผู้จัดทำได้พัฒนาคู่มือการใช้งานสื่อการเรียนการสอน ในรูปแบบของวีดีโอ เพื่อให้ผู้ใช้ทราบวิธีการใช้งานเครื่องมือต่างๆ ของโปรแกรม GeoGebra ที่ใช้ในสื่อการเรียนการสอนนี้



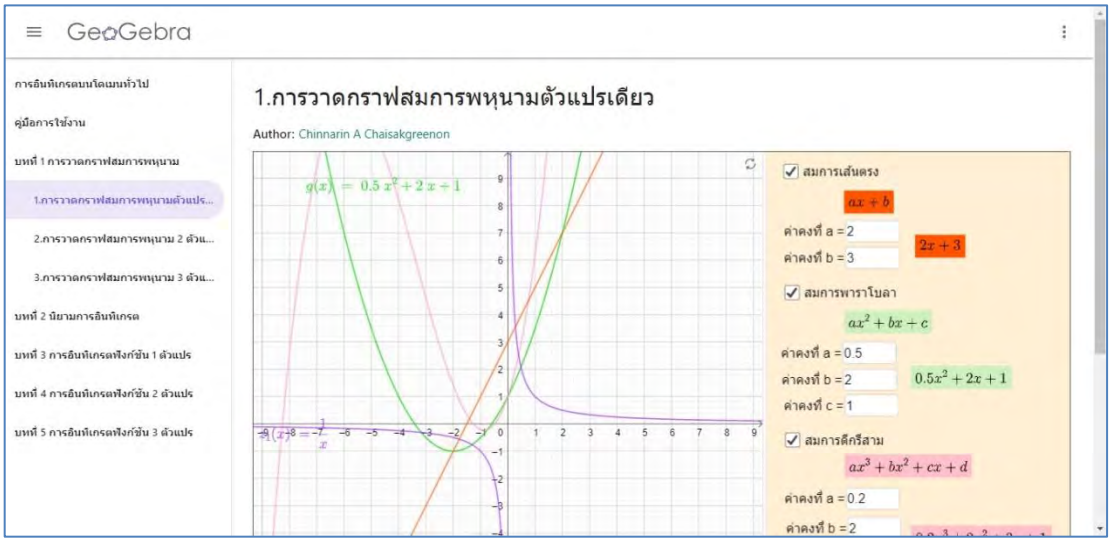
ภาพที่ 69 คู่มือการใช้งาน

3.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม

ผู้จัดทำได้แบ่งหัวข้อในบทนี้ออกเป็น 3 หัวข้อ ดังต่อไปนี้

3.3.1 การวาดกราฟสมการพหุนามตัวแปรเดียว

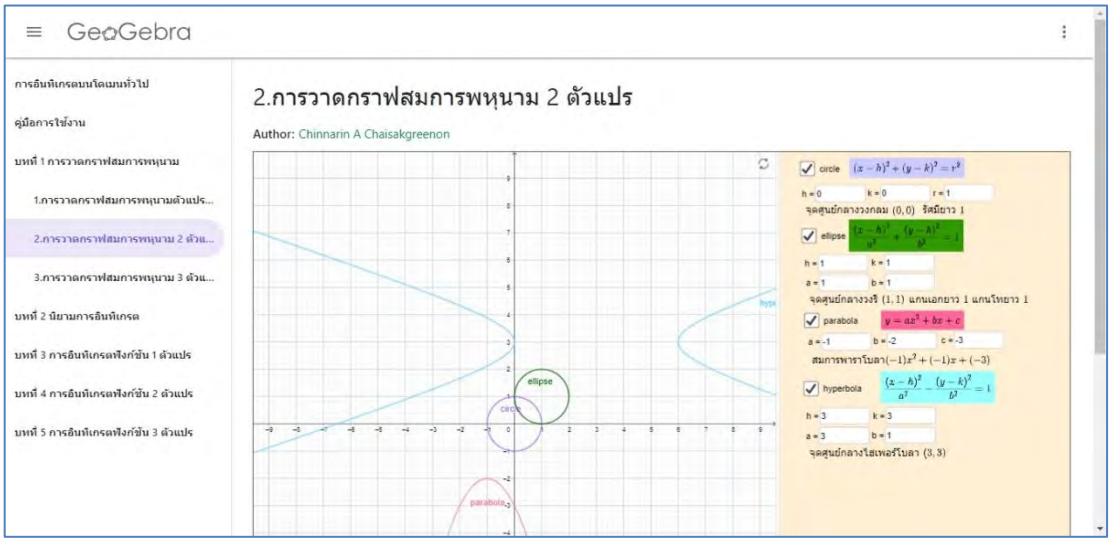
สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่นำเสนอกราฟลักษณะต่างๆ ดังนี้ กราฟสมการเส้นตรง กราฟสมการกำลังสอง กราฟสมการกำลังสาม และกราฟฟังก์ชันอื่นๆ ซึ่งผู้ใช้สามารถกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนสมการพหุนาม และเปลี่ยนค่าคงที่ใน Input Box ได้ตามต้องการ



ภาพที่ 70 การวาดกราฟสมการพหุนามตัวแปรเดียว

3.3.2 การวาดกราฟสมการพหุนาม 2 ตัวแปร

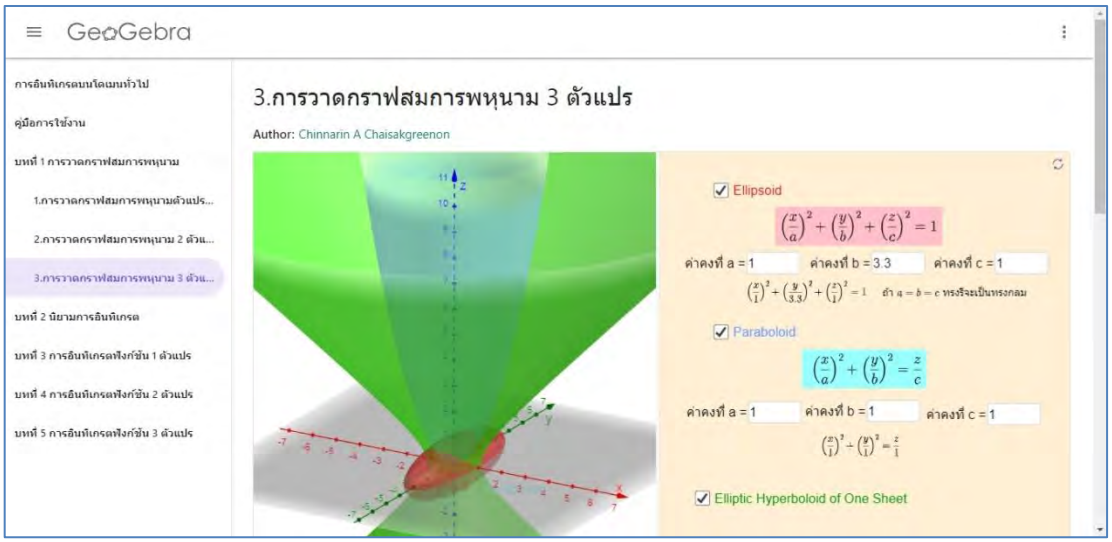
สมการพหุนาม 2 ตัวแปร นำเสนอกราฟลักษณะต่างๆ ดังนี้ กราฟสมการวงกลม กราฟสมการวงรี กราฟสมการพาราโบลา และกราฟสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งผู้ใช้สามารถกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนสมการพหุนาม และเปลี่ยนค่าคงที่ใน Input Box ได้ตามต้องการ



ภาพที่ 71 การวาดกราฟสมการพหุนาม 2 ตัวแปร

3.3.3 การวาดกราฟสมการพหุนาม 3 ตัวแปร

สมการพหุนาม 3 ตัวแปร นำเสนอกราฟลักษณะต่างๆ ดังนี้ กราฟสมการอิลลิปซอยด์ กราฟสมการอิลลิปติกพาราโบลอยด์ กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบชิ้นเดียว กราฟสมการอิลลิปติกไฮเพอร์โบลอยด์แบบ 2 ชิ้น กราฟสมการกรวยอิลลิปติก และกราฟสมการไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ ซึ่งผู้ใช้สามารถกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนสมการพหุนาม และเปลี่ยนค่าคงที่ใน Input Box ได้ตามต้องการ



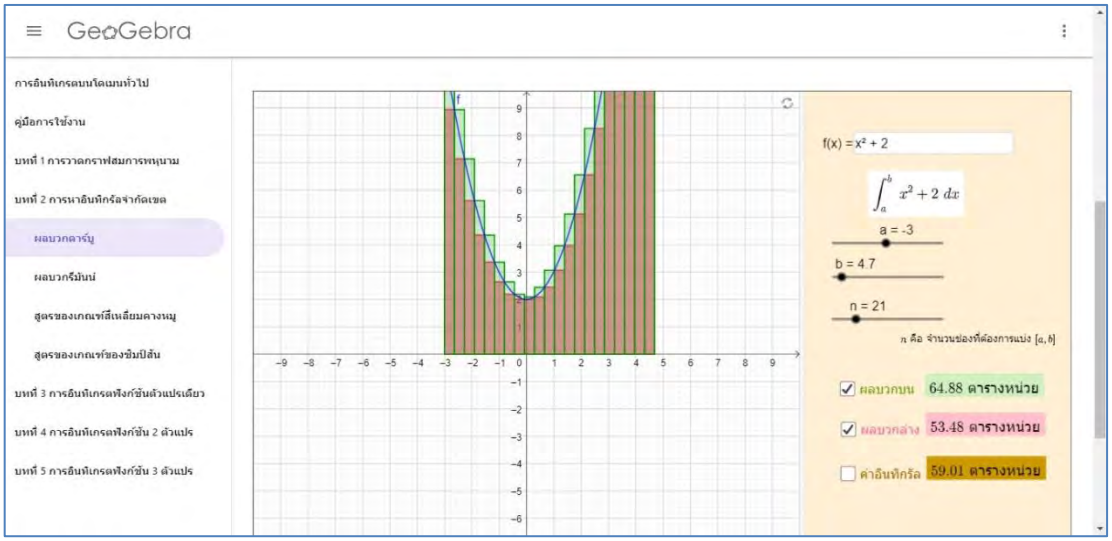
ภาพที่ 72 การวาดกราฟสมการพหุนาม 3 ตัวแปร

3.4 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

ผู้จัดทำแบ่งหัวข้อ การหาอินทิกรัลจำกัดเขตในออกเป็น 4 หัว ข้อดังต่อไปนี้

3.4.1 ผลบวกดาร์บู

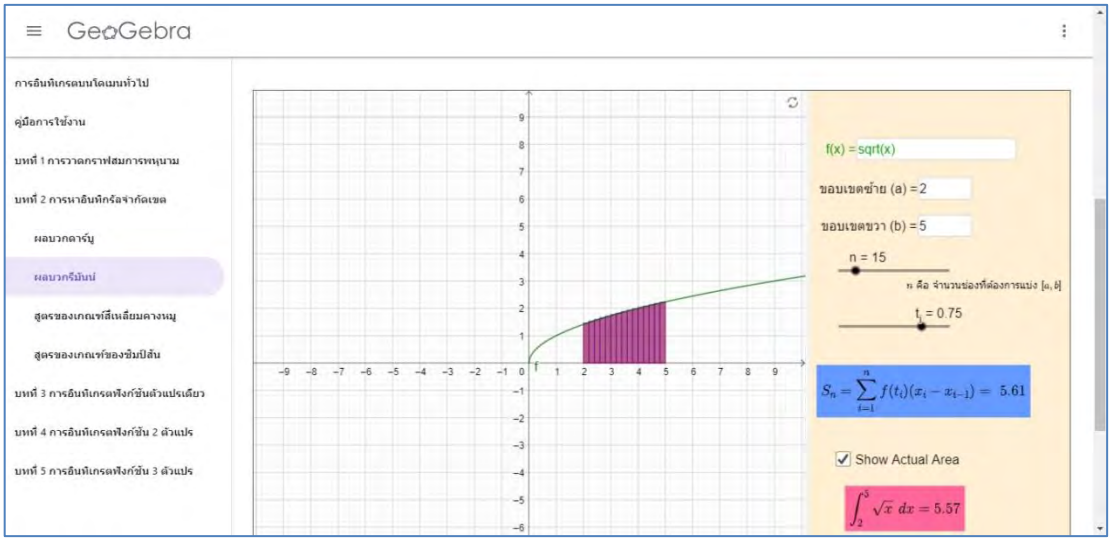
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดค่าขอบเขตล่าง ขอบเขตบน จำนวนช่องที่ต้องการแบ่ง และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนผลบวกบน ผลบวกล่าง และค่าอินทิกรัลได้ตามต้องการ



ภาพที่ 73 ผลบวกดาร์บู

3.4.2 ผลบวกรีมันน์

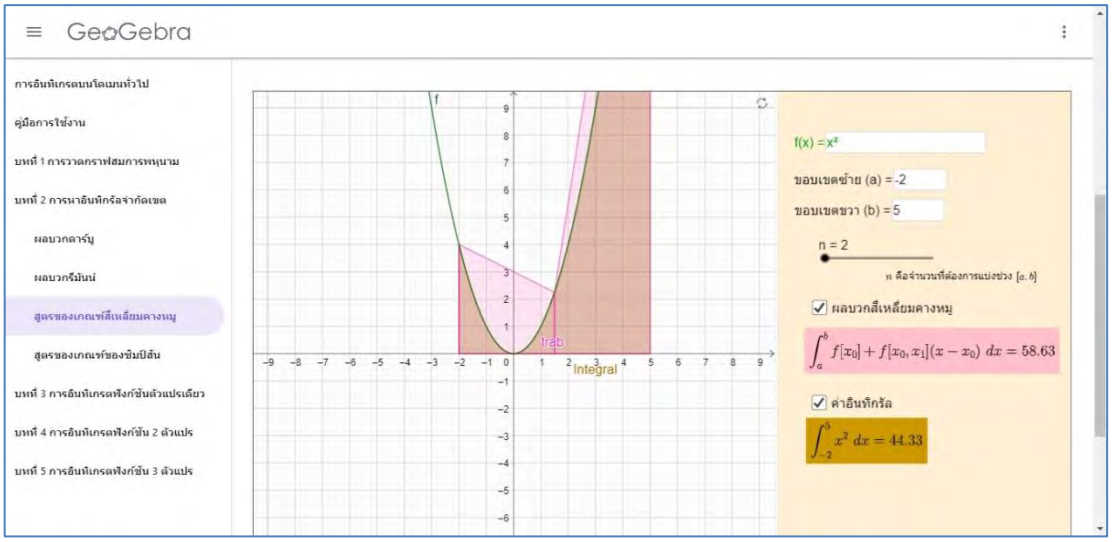
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดจำนวนช่องที่ต้องการแบ่ง จุดในช่วงย่อย และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนค่าอินทิกรัลได้ตามต้องการ



ภาพที่ 74 ผลบวกรีมันน์

3.4.3 สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

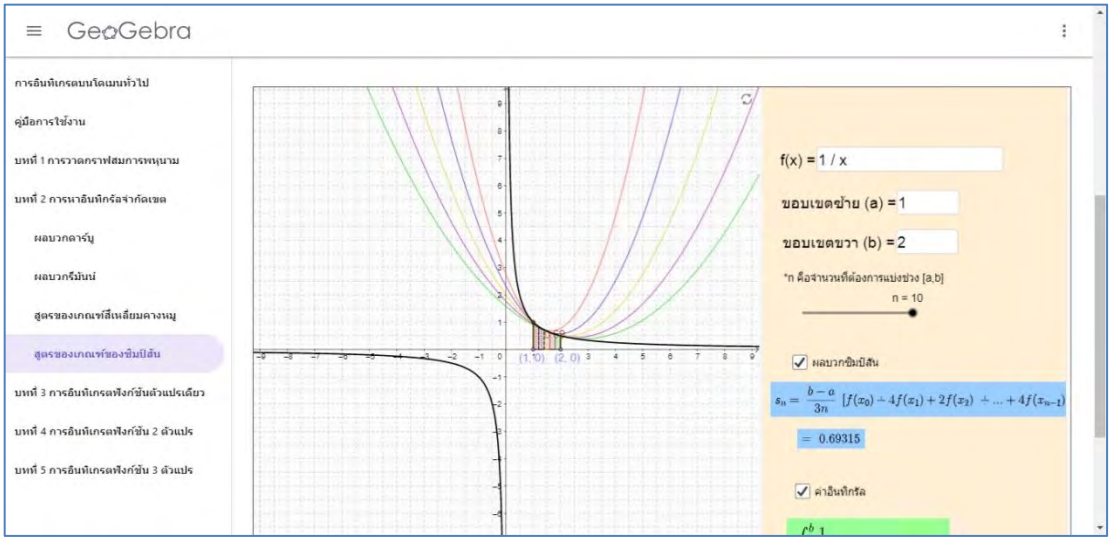
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดจำนวนช่องที่ต้องการแบ่ง และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนผลบวกสี่เหลี่ยมคางหมู ค่าอินทิกรัลได้ตามต้องการ



ภาพที่ 75 สูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

3.4.4 สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดจำนวนช่องที่ต้องการแบ่ง และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนผลบวกของซิมป์สัน ค่าอินทิกรัลได้ตามต้องการ



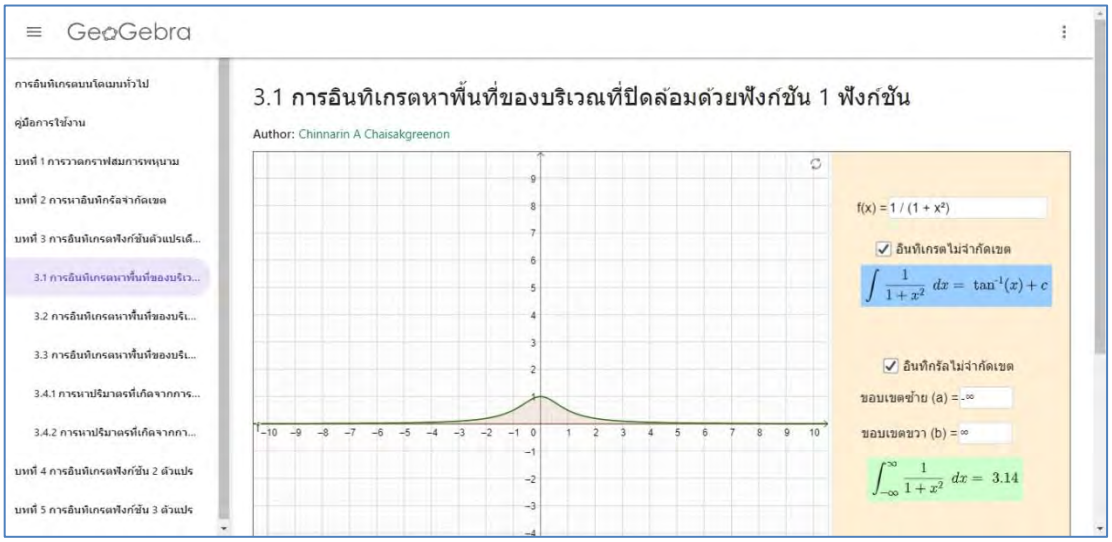
ภาพที่ 76 สูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ผู้จัดทำแบ่งหัวข้อการอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียวในบทนี้ออกเป็น 4 หัวข้อ ดังต่อไปนี้

3.5.1 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน

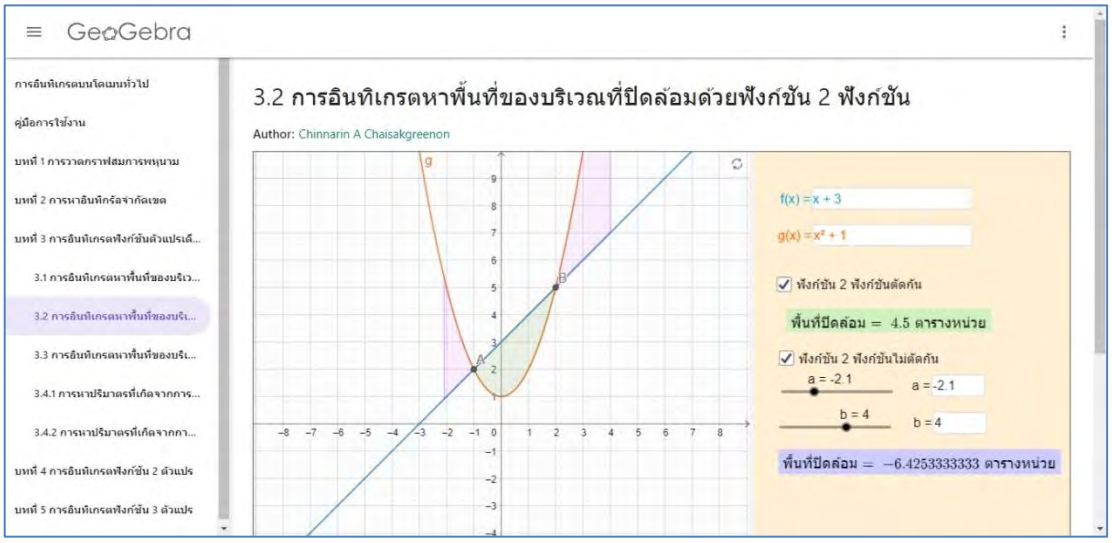
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนอินทิกรัลจำกัดเขต และอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ตามต้องการ



ภาพที่ 77 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 1 ฟังก์ชัน

3.5.2 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

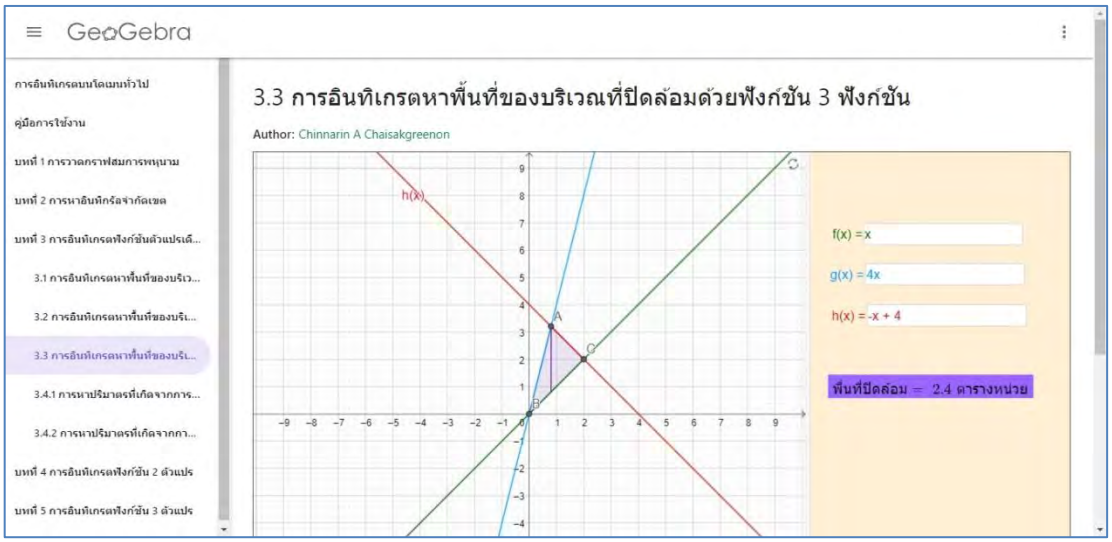
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันทั้ง 2 ฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดขอบเขตล่าง ขอบเขตบน และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนเมื่อฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันตัดกัน และเมื่อฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันไม่ตัดกันได้ตามต้องการ



ภาพที่ 78 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

3.5.3 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันทั้ง 3 ฟังก์ชัน ใน Input Box ได้ตามต้องการ



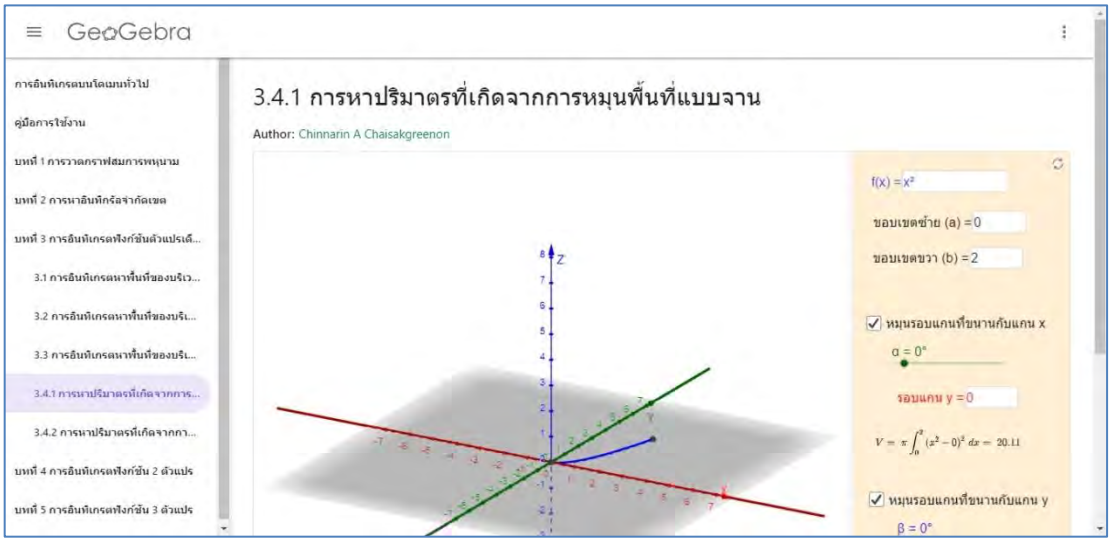
ภาพที่ 79 การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน

3.5.4 การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนที่ผู้จัดทำนำเสนอ ประกอบด้วย การหมุนแบบจาน การหมุนแบบวงแหวน และการหมุนแบบเปลือกทรงกระบอก ดังภาพต่อไปนี้

1) การหมุนแบบจาน

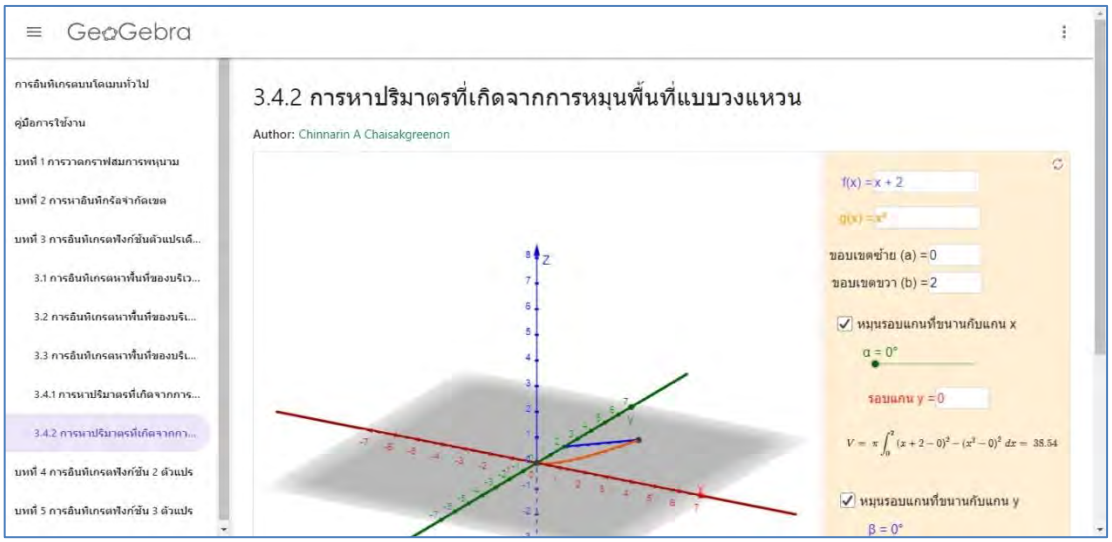
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดองศาที่ต้องการหมุน และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนการหมุนรอบแกนที่ขนานกับแกน X และการหมุนรอบแกนที่ขนานกับแกน Y ได้ตามต้องการ



ภาพที่ 80 การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

2) การหมุนแบบวงแหวน

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันทั้ง 2 ฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box เลื่อน Slide Bar เพื่อกำหนดองศาที่ต้องการหมุน และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนการหมุนรอบแกนที่ขนานกับแกน X และการหมุนรอบแกนที่ขนานกับแกน Y ได้ตามต้องการ



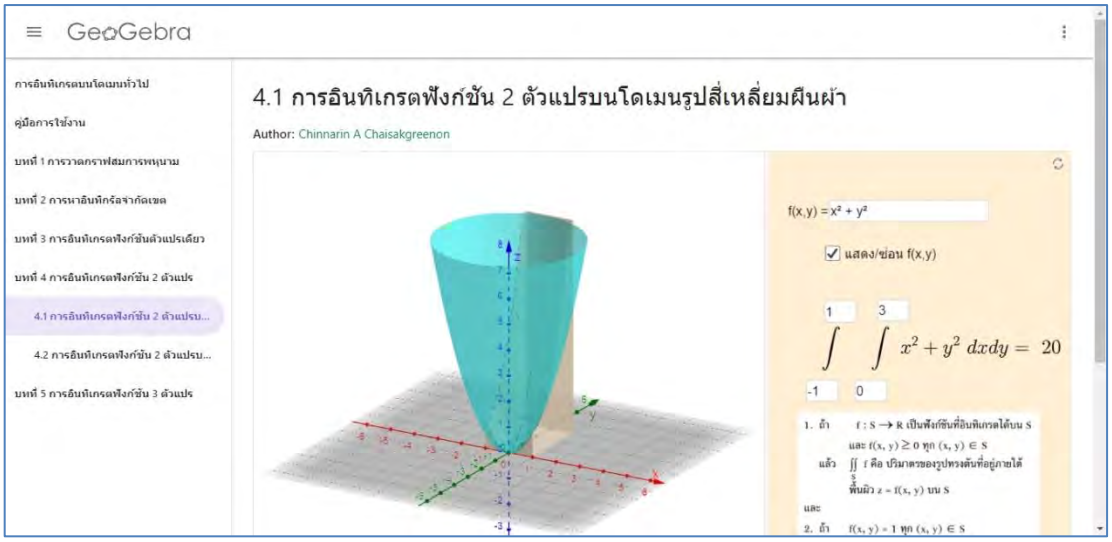
ภาพที่ 81 การหมุนแบบวงแหวน

3.6 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

ผู้จัดทำแบ่งหัวข้อการอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร ในบทนี้ออกเป็น 2 หัวข้อดังต่อไปนี้

3.6.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

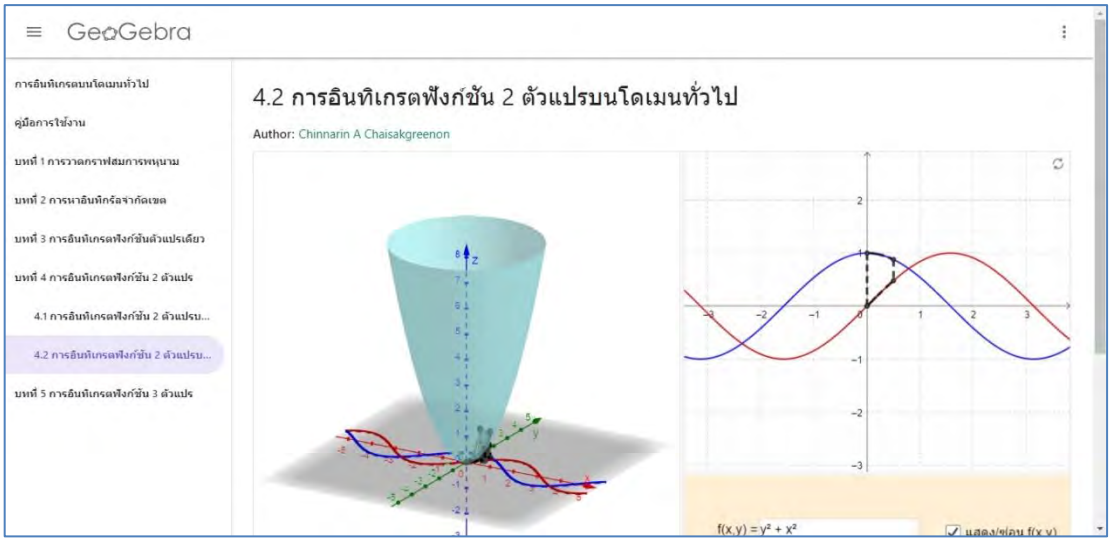
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนฟังก์ชันได้ตามต้องการ



ภาพที่ 82 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3.6.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box และกดปุ่ม Check Box เพื่อแสดงหรือซ่อนฟังก์ชันได้ตามต้องการ



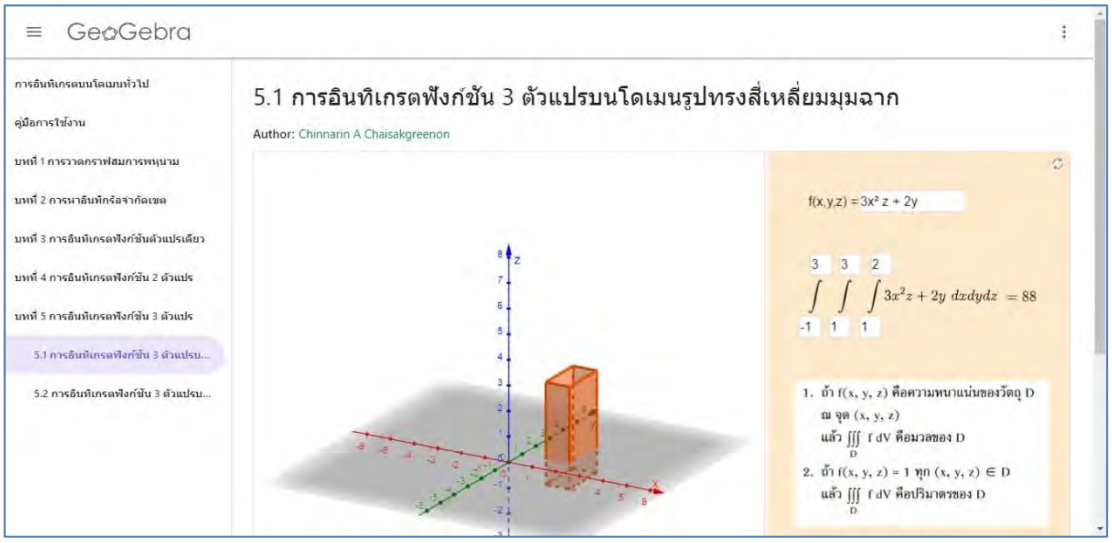
ภาพที่ 83 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

3.7 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

ผู้จัดทำแบ่งหัวข้อการอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร ในบทนี้ออกเป็น 2 หัวข้อดังต่อไปนี้

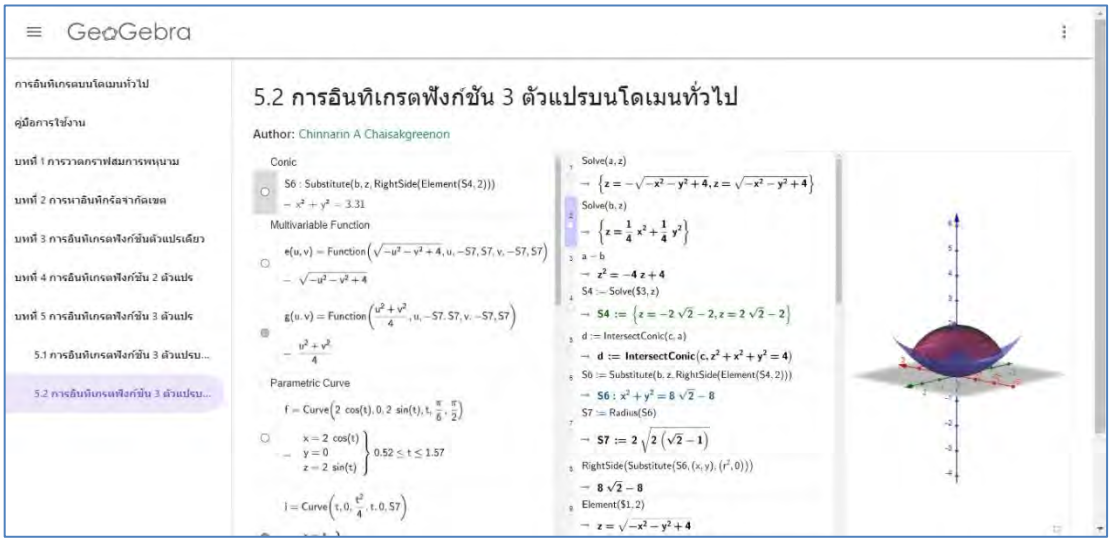
3.7.1 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน ใน Input Box ได้ตามต้องการ



ภาพที่ 84 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3.7.2 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป



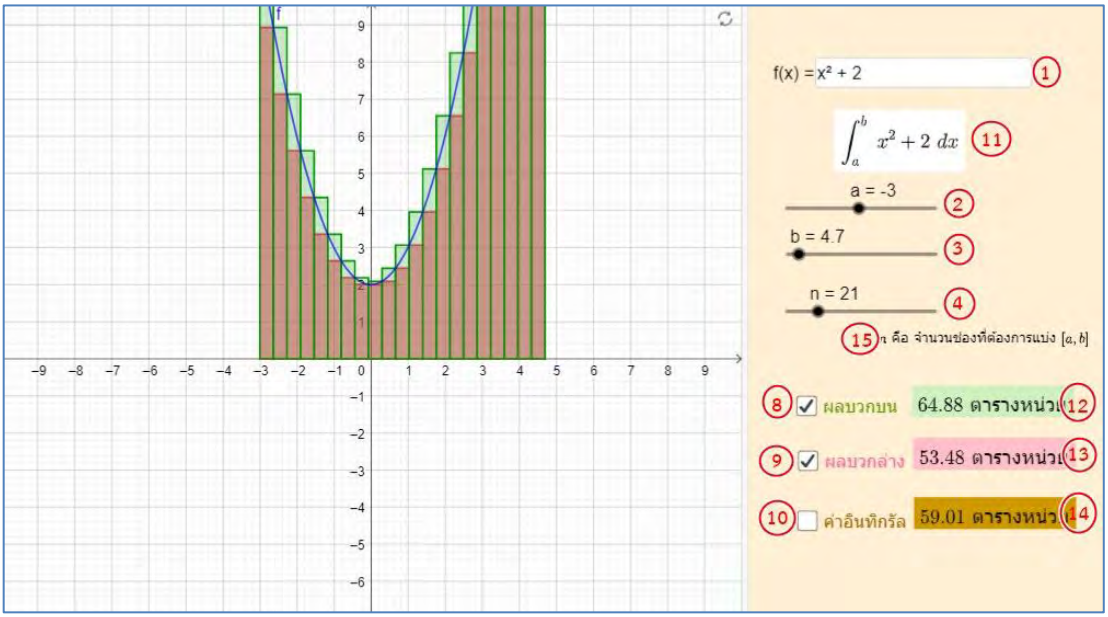
ภาพที่ 85 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

บทที่ 4
การเขียนโปรแกรม

ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป ผู้จัดทำเลือกใช้โปรแกรม GeoGebra เพราะโปรแกรมนี้มีฟังก์ชันการคำนวณ และแสดงการคำนวณ รวมทั้งสามารถแสดงรูปภาพที่มีสีสันได้ ในบทนี้จึงเลือกหัวข้อที่มีการใช้งาน GeoGebra เต็มรูปแบบ คือมีทั้ง Check Box, Slide Bar, Text Box ให้ใส่ฟังก์ชัน และวาดกราฟ พร้อมทั้งเขียนโค้ดในโปรแกรม GeoGebra คือเรื่อง นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู และการอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป มาอธิบายในบทนี้ ดังนี้

4.1 นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู

ในเรื่อง นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันขอบเขตบนขอบเขตล่าง จำนวนช่วงที่ต้องการแบ่ง ผลบวกบน และผลบวกล่างได้ ซึ่งเขียนโค้ดได้ดังนี้



ภาพที่ 86 นิยามการอินทิเกรตแบบผลบวกดาร์บู

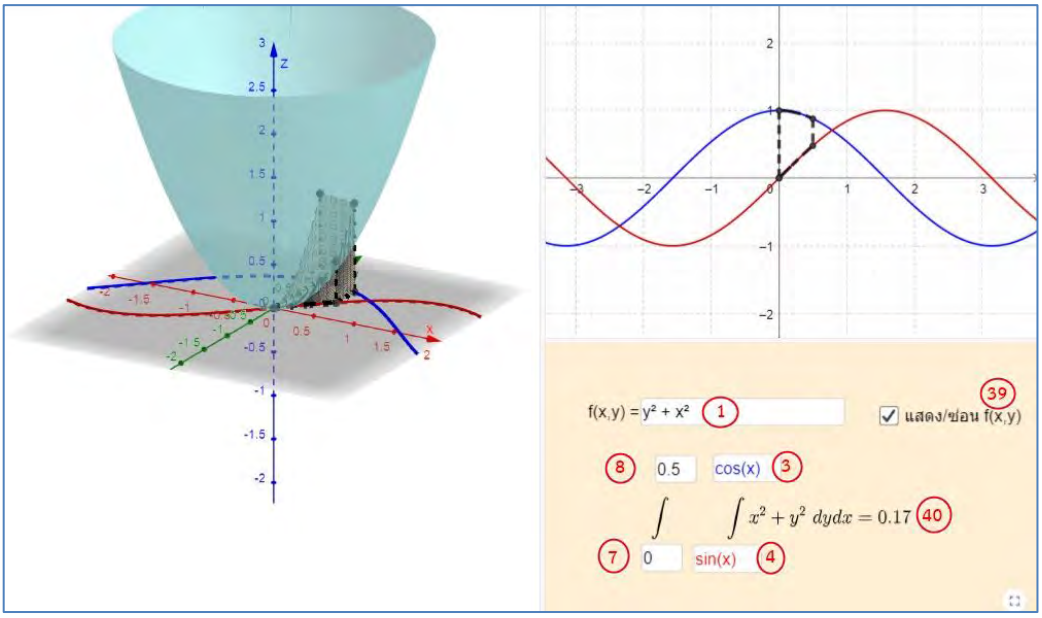
โดยการเขียนโค้ดในหน้าต่าง Algebra ดังนี้

ลำดับที่	โค้ด	ข้อมูล
1	$f(x) = x^2 + 2$	สร้างฟังก์ชันพร้อมสร้าง Input Box
2	$a = -3$	สร้าง Slider เพื่อกำหนดขอบเขตล่าง
3	$b = 4.7$	สร้าง Slider เพื่อกำหนดขอบเขตบน
4	$n = 21$	สร้าง Slider เพื่อกำหนดจำนวนช่วงที่ต้องการแบ่ง
5	$d = UpperSum(f, a, b, n)$	สร้างการคำนวณผลบวกบน
6	$e = LowerSum(f, a, b, n)$	สร้างคำนวณผลบวกล่าง
7	$g = Integral(f, a, b)$	สร้างคำนวณผลการอินทิเกรต
8	$c = true$	สร้าง Check Box เพื่อกำหนดการแสดงผลของผลบวกบน
9	$j = true$	สร้าง Check Box เพื่อกำหนดการแสดงผลของผลบวกล่าง
10	$h = true$	สร้าง Check Box เพื่อกำหนดการแสดงผลการอินทิเกรต
11	$\int_{a}^{b}\{\} f\ dx$	สร้าง Text เพื่อแสดงผลการอินทิเกรต
12	d ตารางหน่วย	สร้าง Text เพื่อแสดงผลบวกบน
13	e ตารางหน่วย	สร้าง Text เพื่อแสดงผลบวกล่าง
14	g ตารางหน่วย	สร้าง Text เพื่อแสดงผลการอินทิเกรต
15	n คือ จำนวนช่องที่ต้องการแบ่ง $[a, b]$	สร้าง Text เพื่อแสดงคำอธิบายค่าของ n

จากนั้นตกแต่งให้สวยงาม โดยการเปลี่ยนสี และปรับขนาดตามที่ผู้ใช้ต้องการ แล้วบันทึกข้อมูล

4.2 การอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ในเรื่อง การอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันและโดเมนได้ตามต้องการ ซึ่งเขียนโค้ดได้ดังนี้



ภาพที่ 87 การอินทิเกรต 2 ตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ลำดับที่	โค้ด	ข้อมูล
1	$f(x,y) = y^2 + x^2$	สร้างฟังก์ชันพร้อมสร้าง Input Box
2	$b(x,y) = Integral(f,y)$	อินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x,y)$ เทียบ y
3	$upper(x) = cos(x)$	สร้างขอบเขตบนค่า y พร้อมสร้าง Input Box
4	$lower(x) = sin(x)$	สร้างขอบเขตล่างค่า y พร้อมสร้าง Input Box
5	$h(x) = b(x, upper(x))$ $-b(x, lower(x))$	แทนค่าการอินทิเกรตเทียบ y
6	$p(x) = Simplify(h)$	แปลงรูปอย่างง่าย ฟังก์ชัน $h(x)$
7	$xlower = 0$	สร้างขอบเขตบนค่า x พร้อมสร้าง Input Box
8	$xupper = 0.5$	สร้างขอบเขตล่างค่า x พร้อมสร้าง Input Box
9	$d = Integral(p, xlower, xupper)$	อินทิเกรตฟังก์ชัน $p(x)$ เทียบ x
10	$c(x,y) = Simplify(f)$	แปลงรูปอย่างง่าย ฟังก์ชัน $f(x,y)$
11	$e_3: x = xlower$	กำหนดชื่อตัวแปร $xlower$
12	$i: x = xupper$	กำหนดชื่อตัวแปร $xupper$
13	$a_2: xlower < x < xupper$	กำหนดขอบเขตค่า x

ลำดับที่	โค้ด	ข้อมูล
14	$A = Intersect(upper, a_2)$	สร้างจุดตัดของขอบเขตบนค่า x และ ขอบเขตบนค่า y
15	$C = Intersect(upper, a_2)$	สร้างจุดตัดของขอบเขตล่างค่า x และ ขอบเขตบนค่า y
16	$B = Intersect(lower, a_2)$	สร้างจุดตัดของขอบเขตบนค่า x และ ขอบเขตล่างค่า y
17	$D = Intersect(lower, a_2)$	สร้างจุดตัดของขอบเขตล่างค่า x และ ขอบเขตล่างค่า y
18	$AB = Segment(A, B)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด A และ จุด B
19	$CD = Segment(C, D)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด C และ จุด D
20	$showx(x) = If(a_2(x), upper(x))$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด A และ จุด C
21	$showx2(x) = If(a_2(x), lower(x))$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด B และ จุด D
22	$e_4: Plane(x + 0z = xlower)$	สร้างระนาบ x=ขอบเขตล่างค่า x
23	$eq1: IntersectPath(e_4, f)$	เส้นตรงที่ตัดระนาบ x=ขอบเขตล่างค่า x กับฟังก์ชัน $f(x, y)$
24	$e_5: Plane(x + 0z = xupper)$	สร้างระนาบ x=ขอบเขตบนค่า x
25	$eq2: IntersectPath(e_5, f)$	เส้นตรงที่ตัดระนาบ x=ขอบเขตบนค่า x กับฟังก์ชัน $f(x, y)$
26	$A_z = (x(A), y(A), f(x(A), y(A)))$	สร้างจุด A_z โดยให้ $z = f(x(A), y(A))$
27	$AAZ = Segment(A, A_z)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด A และ จุด A_z
28	$B_z = (x(B), y(B), f(x(B), y(B)))$	สร้างจุด B_z โดยให้ $z = f(x(B), y(B))$
29	$BBZ = Segment(B, B_z)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด B และ จุด B_z
30	$C_z = (x(C), y(C), f(x(C), y(C)))$	สร้างจุด C_z โดยให้ $z = f(x(C), y(C))$
31	$CCZ = Segment(C, C_z)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด C และ จุด C_z
32	$D_z = (x(D), y(D), f(x(D), y(D)))$	สร้างจุด D_z โดยให้ $z = f(x(D), y(D))$
33	$DDZ = Segment(D, D_z)$	สร้างเส้นตรงระหว่างจุด D และ จุด D_z
34	$O_1 = Surface(xupper, u, w * f(xupper, u), u, lower(xupper), upper(xupper), w, 0,1)$	สร้างพื้นผิวการอินทิเกรต
35	$O_2 = Surface(xlower, u, w * f(xlower, u), u, lower(xl\ ower), upper(xlower), w, 0,1)$	สร้างพื้นผิวการอินทิเกรต

ลำดับที่	โค้ด	ข้อมูล
36	$O_3 = Surface(u, lower(u), w * f(lower(u), u), u, xlower, xupper,, 0,1)$	สร้างพื้นผิวการอินทิเกรต
37	$O_4 = Surface(u, upper(u), w * f\big(u, upper(u)\big), u, xlower, xupp\ er, w, 0,1)$	สร้างพื้นผิวการอินทิเกรต
38	$f_1(x, y) = If(lower(xlower) \leq x \leq lower(xupper) \wedge lower(x) \leq y \leq upper(x), f(x, y))$	สร้างพื้นผิว $f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
39	$a = true$	สร้าง Check Box เพื่อกำหนดการแสดงผลของสร้างพื้นผิว $f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
40	$\backslash int_\{\}\hat{}\{\}\{\ \}\backslash int_\{\}\hat{}\{\}\{\ \}c\backslash\ dydx\ = d$	สร้าง Text เพื่อแสดงผลการอินทิเกรต

จากนั้นตกแต่งให้สวยงาม โดยการเปลี่ยนสี และปรับขนาดตามที่ผู้ใช้ต้องการ แล้วบันทึกข้อมูล

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ผู้จัดทำได้พัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra ซึ่งสื่อการเรียนการสอนนี้เป็นสื่อการเรียนการสอน แบบมัลติมีเดียในรูปแบบ Interactive ที่ผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับโปรแกรมได้ คือผู้เรียนสามารถเปลี่ยนฟังก์ชันค่าคงตัว และขอบเขตของการอินทิเกรตได้ แล้วโปรแกรมจะเปลี่ยนการแสดงผลไปตามฟังก์ชันที่ต้องการ ซึ่งสื่อการเรียนการสอนชุดนี้ จะมีทั้งภาพสองมิติ และสามมิติที่มีสีสันสวยงามประกอบเนื้อหา ทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจบทเรียนได้ง่ายขึ้น อีกทั้งยังช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าเนื้อหาต่างๆ ของบทเรียนด้วย

การสร้างสื่อการเรียนการสอนนี้ ผู้จัดทำได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท คือ

บทที่ 1 การวาดกราฟสมการพหุนาม

บทที่ 2 การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

บทที่ 3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตัวแปรเดียว

บทที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

บทที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

ในลักษณะของกราฟที่ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันค่าคงตัว และขอบเขตได้ตามต้องการ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากพื้นฐานตั้งแต่ การวาดกราฟกราฟสมการพหุนามอย่างง่ายไปจนถึงการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของการศึกษาเนื้อหา พร้อมทั้งจัดทำคู่มือการใช้ในรูปแบบวีดีโอ สำหรับบอกวิธีการใช้สื่อการเรียนการสอนนี้

ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนนี้ ผู้จัดทำได้ทบทวนความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาบทเรียน เรื่อง การวาดกราฟสมการพหุนาม การหาอินทิกรัลจำกัดเขต การอินทิเกรตหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน การอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปร และการอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร ทั้งยังศึกษาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านมัลติมีเดีย โดยเฉพาะโปรแกรม GeoGebra รวมทั้งเทคนิคการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนรูปแบบต่างๆ เช่น การถ่ายทำ และการตัดต่อคลิปวีดีโอ การบันทึก เป็นต้น ทำให้สามารถวิเคราะห์ ออกแบบ และประยุกต์ความรู้ทั้งหมดเพื่อนำมาพัฒนาเป็นสื่อการเรียนการสอนนี้ได้

5.2 ปัญหา อุปสรรค และวิธีการแก้ปัญหา

5.5.1 ปัญหาเกี่ยวกับการออกแบบสื่อการเรียนการสอน

ผู้จัดทำ ต้องศึกษาการออกแบบสื่อว่าควรออกบบอย่างไรให้สื่อการเรียนการสอนมีความน่าสนใจและทำให้ผู้ศึกษาต้องการที่จะติดตามศึกษาต่อไป ผู้จัดทำจึงใช้เวลาค่อนข้างมากในการศึกษาหาข้อมูลเกี่ยวกับเนื้อหาและโปรแกรมที่จะใช้ในการออกแบบสื่อการเรียนการสอนนี้ ให้มีความน่าสนใจและมีความแปลกใหม่มากขึ้น และโดยเฉพาะการโต้ตอบกับผู้ใช้งาน จนกระทั่งผู้จัดทำตัดสินใจเลือกใช้โปรแกรม GeoGebra

5.5.2 ปัญหาเกี่ยวกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

เนื่องจากปัจจุบันคู่มือประกอบการใช้โปรแกรม GeoGebra มีน้อยและเป็นภาษาอังกฤษ ผู้จัดทำจึงได้ศึกษา ค้นคว้าและรวบรวมข้อมูลจากทั้งหนังสือ เว็บไซต์ สื่อมัลติมิเดีย และวิดีโอของต่างประเทศ ในหลากหลายประเทศ หลากหลายภาษา ซึ่งทำให้ใช้เวลาในการศึกษามาก แต่ในที่สุดผู้จัดทำก็สามารถใช้ประโยชน์ของโปรแกรม GeoGebra ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

5.5.3 ปัญหาเกี่ยวกับการจัดเรียงเนื้อหา

ในการจัดเรียงเนื้อหาของสื่อการเรียนการสอน ผู้จัดทำเน้นเนื้อหาที่สามารถนำเสนอในรูปของกราฟที่ผู้ใช้จะสามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน และขอบเขตตามต้องการได้ ทำให้การจัดเรียงเนื้อหามีข้อจำกัดมาก ผู้จัดทำใช้เวลานานในการค้นคว้า ทบทวนบทเรียน รวมทั้งได้ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา จนสามารถสรุปเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอใน 5 บท ที่กล่าวมาแล้ว

5.5.4 ปัญหาเกี่ยวกับการเชื่อมโยงข้อมูล

เนื่องจากสื่อการเรียนการสอน มีไฟล์ข้อมูลย่อยเป็นจำนวนมาก ในบางครั้งจึงเกิดความผิดพลาดในการเชื่อมโยงข้อมูล ผู้จัดทำจึงต้องทำการตรวจสอบและทบทวนอย่างละเอียดรอบคอบอยู่เสมอ

5.5.5 ปัญหาเกี่ยวกับการจัดทำคู่มือวีดีโอ

เนื่องจากผู้จัดทำไม่มีความชำนาญในการทำวีดีโอ จึงต้องใช้เวลาในการศึกษาข้อมูลที่ใช้ในการจัดทำวีดีโอ จะกระทั่งได้คู่มือการใช้โปรแกรม GeoGebra ในรูปแบบของวีดีโอที่สมบูรณ์

5.5.6 ปัญหาเกี่ยวกับการใช้ระบบปฏิบัติการของคอมพิวเตอร์

เนื่องจากผู้จัดทำ 2 คน ใช้ระบบปฏิบัติการของคอมพิวเตอร์ต่างกัน ทำให้เกิดปัญหาในการแลกเปลี่ยนข้อมูล ผู้จัดทำจึงตกลงที่จะใช้ระบบปฏิบัติการ Windows ที่มี Version เดียวกัน เพื่อง่ายต่อการแลกเปลี่ยนข้อมูลซึ่งกันและกัน

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 การพัฒนาสื่อการเรียนการสอน ในครั้งต่อไปควรมีเนื้อหาในเรื่องอื่นๆ เพิ่มขึ้น เพื่อให้ผู้ใช้งานสามารถเลือกใช้งานได้มากขึ้น

5.3.2 ถ้าจะให้สื่อการเรียนการสอนนี้สมบูรณ์ขึ้น ควรเพิ่มเติมแบบทดสอบ ในสื่อการเรียนการสอน เพื่อวัดผลผู้เรียน

รายการอ้างอิง

[1] ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, ยุวรีย์ พันธ์กล้า. (2562). แคลคูลัส 1. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์. (2562). แคลคูลัส 2. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[3] ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์. (2562). แคลคูลัส 3. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[4] คู่มือ GeoGebra สืบค้น 17 กันยายน 2562, จาก https://www.geogebra.org/m/aWhYSpvy

[5] Gerrit Stols. (2013), GeoGebra tutorial: Riemann sum, สืบค้น 25 กันยายน 2562 จาก https://www.youtube.com/watch?v=HluZOUumnb4

[6] Joseph M. (2018), Numerical Analysis: Riemann Integral, สืบค้น 9 เมษายน 2563 https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f16/math541/beamer/quad.pdf

[7] Paul.(2017), Simpson’s Rule, สืบค้น 9 เมษายน 2563 https://www.emathhelp.net/notes/calculus-2/numerical-approximate-integration/simpsons-rule/

[8] Rod Pierce.(2019), Definite Integrals, สืบค้น 9 เมษายน 2563 https://www.mathsisfun.com/calculus/integration-definite.html

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Multimedia CAI : Integral Over General Region by GeoGebra
อาจารย์ที่ปรึกษา	1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
ผู้ดำเนินโครงงาน	1. กิตติภัทร แก้วเจริญ เลขประจำตัวนิสิต 5933505323
	2. ชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์ เลขประจำตัวนิสิต 5933513323
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

เนื่องจากนิสิต นักศึกษา ที่ศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์มีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาเนื้อหาการคำนวณเกี่ยวกับ การหาพื้นที่ของบริเวณและปริมาตรของรูปทรงตันที่คำนวณได้ยาก ซึ่งต้องใช้การคำนวณการอินทิเกรตฟังก์ชัน 1, 2 และ 3 ตัวแปร เนื้อหาในเรื่องนี้จะเกี่ยวข้องกับรูปภาพทั้งสองมิติและสามมิติ สำหรับเนื้อหาเรื่องการอินทิเกรตก็เป็นเรื่องที่ทำความเข้าใจได้ยากและการนำเสนอในตำราต่าง ๆ นั้นจะทำได้เฉพาะภาพสองมิติ ทำให้ผู้ที่ศึกษาทำความเข้าใจได้ยากยิ่งขึ้น

ผู้ดำเนินโครงงานจึงต้องการพัฒนาบทเรียนช่วยสอนเรื่องการอินทิเกรต ตั้งแต่พื้นฐานจนถึงขั้นสูง คือเริ่มตั้งแต่ นิยามของการอินทิเกรต การหาพื้นที่ของบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ การหาปริมาตรรูปทรงตันต่าง ๆ ที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว โดยนำเสนอในรูปแบบของสื่อการเรียนการสอนแบบ Interactive ซึ่งที่ผู้เรียนจะสามารถโต้ตอบกับโปรแกรมได้ คือผู้เรียนสามารถเปลี่ยนฟังก์ชั่นและขอบเขตได้ แล้วโปรแกรมจะเปลี่ยนการแสดงผลไป ตามฟังก์ชั่นที่ต้องการทันที ซึ่งจะมีภาพสามมิติที่มีสีสันประกอบ ทำให้ผู้เรียนสามารถทำความเข้าใจบทเรียนได้ง่ายขึ้น

วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียเกี่ยวกับ การหาพื้นที่ของบริเวณและปริมาตรของรูปทรงตันต่าง ๆ ที่ใช้การคำนวณเรื่องการอินทิเกรต ให้สามารถนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ โดยผู้เรียนสามารถที่จะเปลี่ยนฟังก์ชันและขอบเขตได้ตามต้องการ

ขอบเขตของโครงงาน

1. การคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง จะคำนวณเฉพาะการปิดล้อมด้วยเส้นโค้งไม่เกิน 2 เส้น

2. การคำนวณหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณรอบแกนหมุนโดยจะใช้แกนหมุนเป็นแกน X , Y และแกนที่ขนานกับแกน X , Y เท่านั้น

3. การคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพร้อมทั้งหาค่าการอินทิเกรตฟังก์ชัน 2 ตัวแปรภายใต้บริเวณนั้น

4. การคำนวณหาปริมาตรที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว โดยจะคำนวณเฉพาะการปิดล้อมด้วยพื้นผิว 2 ถึง 3 พื้นผิว

5. การคำนวณหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวพร้อมทั้งหาค่าการอินทิเกรตฟังก์ชัน 3 ตัวแปร ภายใต้รูปทรงตันนั้น จะคำนวณเฉพาะการปิดล้อมด้วยพื้นผิว 2 พื้นผิว

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาและวิเคราะห์บทเรียนเกี่ยวกับเรื่องการอินทิเกรต เพื่อเรียบเรียงเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอ

2. ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra ver.6.0.562 และทดสอบขอบเขตความสามารถของโปรแกรม GeoGebra

3. วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอนทั้งรูปแบบการนำเสนอและการใช้งาน

4. พัฒนาและตกแต่งสื่อการเรียนการสอนให้สะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

5. ทดสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้

6. วิเคราะห์ประสิทธิภาพของสื่อการสอน

7. สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ. 2562							พ.ศ. 2563			
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1.) ศึกษาและวิเคราะห์บทเรียนเกี่ยวกับเรื่องการอินทิเกรต											
2.) ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra											
3.) วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอน											
4.) พัฒนาสื่อการสอน											
5.) ทดสอบ และแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้											
6.) วิเคราะห์ประสิทธิภาพของสื่อการสอน											
7.) สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน											

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อผู้ดำเนินโครงงาน

1. ได้ทบทวนความรู้ความเข้าใจในบทเรียนเรื่องการอินทิเกรต
2. สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูป GeoGebra ver.6.0.562
3. สามารถออกแบบและพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย
4. ได้เพิ่มพูนทักษะในการสืบค้นข้อมูล
5. ได้ประสบการณ์ในการนำเสนอความรู้ในรูปแบบออนไลน์
6. ได้ประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้อื่น

ประโยชน์ต่อผู้ใช้งาน

1. ใช้สื่อการเรียนการสอนเพื่อศึกษาบทเรียนเรื่องการอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป
2. นำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้
3. ผู้เรียนมีความเข้าใจในการมองรูปสามมิติที่ดีขึ้น
4. สร้างแรงจูงใจให้ผู้ใช้งานสนใจที่จะเรียนรู้มากขึ้น

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Hardware

1. เครื่องคอมพิวเตอร์

   ความเร็วไม่ต่ำกว่า 2.7 GHZ

   RAM ความจุไม่ต่ำกว่า 4 GB

   Hard disk ความจุไม่ต่ำกว่า 1 TB
2. เครื่องพิมพ์
3. อุปกรณ์บันทึกข้อมูล Flash drive และ CD-RW
4. อุปกรณ์บันทึกเสียง

Software

1. ระบบปฏิบัติการ Microsoft Window 8
2. โปรแกรมงานเอกสาร Microsoft Office 2010
3. โปรแกรม GeoGebra ver.6.0.562

งบประมาณ

1. ค่ากระดาษ A4	1,000	บาท
2. ค่าอุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	1,000	บาท
3. ค่าตลับหมึกพิมพ์	1,500	บาท
4. ค่าอุปกรณ์บันทึกเสียง	1,200	บาท
5. ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน	300	บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, ยุวรีย์ พันธ์กล้า. (2562). แคลคูลัส 1. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] ดำรง์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์. (2562). แคลคูลัส 2. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[3] ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์. (2562). แคลคูลัส 3. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[4] คู่มือ GeoGebra สืบค้น 17 กันยายน 2562, จาก https://www.geogebra.org/m/aWhYSpvy

[5] Gerrit Stols. (2013), GeoGebra tutorial: Riemann sum, สืบค้น 25 กันยายน 2562 จาก https://www.youtube.com/watch?v=HluZOUumnb4

ผู้จัดทำโครงงาน

นายกิตติภัทร แก้วเจริญ
เลขประจำตัวนิสิต 5933505323
นิสิตชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นางสาวชินรินทร์ ชัยศักกรีนนท์
เลขประจำตัวนิสิต 5933513323
นิสิตชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

QR CODE สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย

เรื่อง การอินทิเกรตบนโดเมนทั่วไป โดยโปรแกรม GeoGebra