โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ
Stochastic Risk Models based on Zero Inflated Distribution

ชื่อนิสิต นาย กิตติวัฒน์ วรเกตุ 603 35035 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ

นาย กิตติวัฒน์ วรเกตุ

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Stochastic Risk Models based on Zero Inflated Distribution

Mr. Kittiwat Woragate

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2020

โครงงาน ตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ
โดย นายกิตติวัฒน์ วรเกตุ รหัสประจำตัวนิสิต 6033503523
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิราพรรณ สุนทรโชติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

จิราพรรณ สุนทรโชติ
.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิราพรรณ สุนทรโชติ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ อินทิยศ)

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ
.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ)

กิตติวัฒน์ วรเกตุ : ตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ. (STOCHASTIC RISK MODELS BASED ON ZERO INFLATED DISTRIBUTION) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิราพรรณ สุนทรโชติ, 79 หน้า.

แบบจำลองความเสี่ยงมีความสำคัญมากต่อบริษัทประกันในการประมาณค่าความเสี่ยงของบริษัทประกัน กลุ่มของแบบจำลองความเสี่ยงที่เราใช้วิเคราะห์หรือวัดความเสี่ยงของบริษัทประกันภัย คือ กลุ่มของแบบจำลองความเสี่ยงพื้นฐานที่มีการรบกวน การแจกแจงของจำนวนเคลมประกันส่วนมากจะมีการแจกแจงแบบปัวซง อย่างไรก็ตาม คุณสมบัติการมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากันของการแจกแจงปัวซงอาจจะไม่เหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการกระจายมากๆ ดังนั้นการแจกแจงแบบกระบวนการเชิงประกอบจึงถูกนำเสนอขึ้นอาทิเช่นการแจกแจงแบบกระบวนการปัวซงเชิงประกอบ อย่างไรก็ตาม ในสถานการณ์การเกิดมูลค่าความเสียหายทั้งหมด ถ้าค่าความเสียหายน้อยกว่ามูลค่าการรับผิดชอบส่วนแรกที่ผู้เอาประกันต้องจ่าย ผู้เอาประกันจะไม่แจ้งบริษัทประกัน ทำให้ข้อมูลของบริษัทประกันจึงมีความถี่ของจำนวนการเคลมเป็นศูนย์ค่อนข้างสูง ในขณะที่การแจกแจงปัวซงเดิมมีน้ำหนักในการเกิดศูนย์ต่ำ ดังนั้นเราจึงนำเสนอแนวคิดการแจกแจงแบบกระบวนปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ นำไปสู่การสร้างตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ ยิ่งไปกว่านั้น เราจะศึกษาคุณสมบัติทางทฤษฎีความน่าจะเป็น และความน่าจะเป็น ในการล้มละลาย

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต . . กิตติวัฒน์ วรเกตุ . . .

สาขาวิชา . คณิตศาสตร์ . ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก . จิราพรรณ สุนทรโชติ . .

ปีการศึกษา . . . 2563 . . .

6033503523 : MAJOR MATHEMATICS.
KEYWORDS : RISK MODEL, MARTINGALE, INSURANCE, ZERO INFLATED DISTRIBUTION

KITTIWAT WORAGATE : STOCHASTIC RISK MODELS BASED ON ZERO INFLATED DISTRIBUTION. ADVISOR : ASST. PROF. JIRAPHAN SUNTORNCHOST, Ph.D., 79 pp.

Risk models are very important for insurers in estimating risk of insurance policies. One family of risk models which can be used to analyse or determine such insurance policy's risk levels is the family of the classical risk models with interference. The most common distribution for claim counts considered is the poisson distribution. However, the property of having equal mean and variance of the poisson distribution may not hold in some applications in particular when the data is overdispersed. Therefore, alternative compound process distributions have been proposed such as compound poisson process, However, in some contracts with deductible if the damage value is less than the deductible level, then the insured will not get paid from the insurer. Therefore, the insured will not notify the insurer, so the insurer's information has a high frequency of zero claims, which the original poisson distribution has lower probability of zero occurrence. Consequently, we introduce the concept of poisson-zero inflated poisson distribution to construct a stochastic risk models based on zero inflated distribution. Moreover, we study its probabilistic probabilities and obtain its ruin probability.

Department Mathematics and Computer Science Student's Signature Kittiwat Woragate

Field of Study Mathematics Advisor's Signature จิราพรรณ สุนทรโชติ

Academic Year 2020

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีด้วยความช่วยเหลือของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิราพรรณ สุนทรโชติ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำโครงงาน อีกทั้งยังช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างการดำเนินงานอีกด้วย นอกจากนี้ ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ อินทิยศ และ อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ สำหรับข้อแนะนำและความคิดเห็นในทุกๆด้านในการทำโครงงาน นอกจากนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกคนที่เป็นกำลังใจและให้ความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์เรื่องนี้

ในการทำโครงงานนี้ได้รับทุนสนับสนุนจาก ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดามารดา และ ครอบครัว ซึ่งเปิดโอกาสให้ได้รับการศึกษาเล่าเรียน ตลอดจนคอยช่วยเหลือ ให้การสนับสนุน และ ให้กำลังใจผู้วิจัย ตลอดระยะเวลาของโครงงานนี้ จนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 1
บทนำ (Introduction)

แบบจำลองความเสี่ยง คือ แบบจำลองของมูลค่าทุนรวมของการทำประกัน มักใช้สำหรับการจัดการความเสี่ยงของการทำประกัน แบบจำลองความเสี่ยงที่เหมาะสมสามารถช่วยบริษัทประกันในการวางแผน แผนธุรกิจได้ เพราะฉะนั้น เราจึงสนใจในการค้นคว้าโมเดลความเสี่ยงใหม่ แบบจำลองความเสี่ยงที่หลากหลายถูกนำมาใช้ในการวิจัย หนึ่งในแบบจำลองความเสี่ยงที่รู้จักกันดี คือ แบบจำลองความเสี่ยงพื้นฐานที่ต่อเนื่อง โดยการแจกแจงทั่วไปสำหรับมูลค่าการเคลมนั้นมีได้หลากหลาย และ การแจกแจงทั่วไปที่พบได้มากที่สุดสำหรับจำนวนการเคลม คือ การแจกแจงปัวซง ดังนั้น เราจึงสนใจการแจกแจงของจำนวนการเคลมที่เกิดขึ้นในเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง ซึ่งก็คือการแจกแจงปัวซง แต่อย่างไรก็ตาม คุณสมบัติการมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากันของการแจกแจงปัวซงอาจจะไม่เหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการกระจายมากๆ ดังนั้น การแจกแจงแบบกระบวนการเชิงประกอบจึงถูกนำเสนอขึ้นอาทิเช่น การแจกแจงแบบกระบวนการปัวซงเชิงประกอบ

ในการเกิดมูลค่าความเสียหายทั้งหมด ถ้าค่าความเสียหายน้อยกว่ามูลค่าการรับผิดชอบส่วนแรกที่ผู้เอาประกันต้องจ่าย ผู้เอาประกันจะไม่แจ้งบริษัทประกัน เพราะจะทำให้เบี้ยประกันเพิ่มขึ้น ดังนั้น ข้อมูลของบริษัทประกันจึงมีความถี่ของจำนวนการเคลมเป็นศูนย์สูง ซึ่งการแจกแจงปัวซงเดิมมีน้ำหนักในการเกิดศูนย์น้อย ดังนั้น จึงมีการใช้แนวคิดศูนย์เฟ้อ (zero-inflation) ซึ่งแนะนำโดย Lambert (2) เพื่อรองรับข้อมูลที่มีความถี่ที่เป็นศูนย์มาก ทำให้เราสนใจที่จะใช้การแจกแจงปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อ ในการสร้างแบบจำลองความเสี่ยงใหม่สำหรับข้อมูลที่มีความถี่ที่เป็นศูนย์มาก

ในโครงงานนี้เราจะขยายแบบจำลองความเสี่ยงแบบต่อเนื่องบนการแจกแจงแบบกระบวนการปัวซงเชิงประกอบ (Compound Poisson Process) ไปยัง การแจกแจงแบบกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ (Poisson-Zero Inflated Poisson Process) และเพิ่มตัวแปรการรบกวน (white noise) ที่เป็นกระบวนการสโตแคสติกซึ่งมีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Standard Brownian Motion)

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน (Preliminary)

ในบทที่ 2 นี้ เราจะแนะนำเกี่ยวกับความรู้พื้นฐาน นิยาม และ ทฤษฎี ในทฤษฎีความน่าจะเป็น ที่จะใช้ในโครงงานนี้

2.1 พื้นฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็น (Basic of Probability Theory)

ในหัวข้อนี้ เราจะใช้เทคนิคบางอย่างในการหาคุณสมบัติความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 2.1. ให้ $\mathscr{F}$ เป็นเซตของเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง Ω เรากล่าวว่า $\mathscr{F}$ เป็น $\sigma - algebra$ หรือ $\sigma - field$ บน Ω ถ้า $\mathscr{F}$ มีสมบัติทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. ถ้า $A \in \mathscr{F}$ แล้ว $A^c \in \mathscr{F}$
3. ถ้า $A_i \in \mathscr{F}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ แล้ว $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

เราจะเรียกสมาชิกใน $\mathscr{F}$ ว่า เหตุการณ์ (event)

บทนิยาม 2.2. สำหรับ $\mathbb{R}$ เราสามารถนิยาม $\sigma - algebra$ ที่เล็กที่สุดที่เซตเปิดใดๆ ใน $\mathbb{R}$ เป็นสมาชิกได้ เราจะเรียก $\sigma - algebra$ นี้ว่า $Borel\ \sigma - algebra$ บน $\mathbb{R}$ และ จะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

บทนิยาม 2.3. สำหรับปริภูมิตัวอย่าง Ω และ $\mathscr{C} \subseteq \wp(\Omega)$
$\sigma - algebra$ ที่สร้างจาก $\mathscr{C}$ คือ $\sigma - algebra$ ที่เล็กที่สุดที่มีสมาชิกทุกตัวใน $\mathscr{C}$ เป็นสมาชิก เราจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\sigma(\mathscr{C})$

บทนิยาม 2.4. ให้ $\mathscr{F}$ เป็น $\sigma - algebra$ บนปริภูมิตัวอย่าง Ω และ ฟังก์ชัน $P : \mathscr{F} \longrightarrow [0,1]$ มีสมบัติว่า

1. $P(\Omega)$ = 1
2. ถ้า $A_i \in \mathscr{F}$ สำหรับ $i \in \mathbb{N}$ และ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$ แล้ว

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

เราจะเรียก P ว่า เมเชอร์ความน่าจะเป็น (probability measure) และ เรียกสมบัติข้อ 2 ว่า สมบัติการบวกนับได้ (countably additive property)
เราจะเรียกสามสิ่งอันดับ $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ว่า ปริภูมิความน่าจะเป็น (probability space)

บทนิยาม 2.5. ให้ $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น และ B แทนเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(B) > 0$ กำหนดให้ $P(\,\cdot\,|B) : \mathscr{F} \to [0,1]$ กำหนดโดย

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{เมื่อ } A \in \mathscr{F}$$

จะได้ว่า $P(\,\cdot\,|B)$ เป็นเมเชอร์ความน่าจะเป็น

บทนิยาม 2.6. ให้ A และ B แทนเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(B) > 0$ เราจะเรียก ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้นโดยทราบว่าเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว ว่า ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) และเขียนแทนด้วย $P(A|B)$ โดยที่

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

บทนิยาม 2.7. กฎการคูณ (Multiplication Law)
ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(B) > 0$ จะได้ว่า

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

บทนิยาม 2.8. เหตุการณ์ A และ เหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกัน (independent) ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ถ้า A และ B ไม่เป็นอิสระต่อกัน เราจะเรียก A และ B ไม่เป็นอิสระต่อกัน (dependent)

บทนิยาม 2.9. ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใดๆ เราจะกล่าวว่า
1. เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นอิสระต่อกัน (mutually independent) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

เมื่อ $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

2. เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นอิสระต่อกันเป็นคู่ (pairwise independent) ก็ต่อเมื่อ

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

เมื่อ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ และ $i \neq j$

บทนิยาม 2.10. เซตของเหตุการณ์ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ประกอบกันเป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของปริภูมิตัวอย่าง Ω ถ้า

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ ทุก $i \neq j$
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

ทฤษฎีบท 2.11. กฎของความน่าจะเป็นรวม (Law of Total Probability)
ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ และ $B_i \cap B_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ และ $P(B_i) > 0$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ สำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ จะได้ว่า

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

ข้อสังเกต 2.12. ถ้า เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ อิสระต่อกันเป็นคู่ด้วย

ทฤษฎีบท 2.13. กฎของเบย์ (Bayes' Rule)
ให้ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง Ω โดยที่ $P(B_i) > 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ และ ให้ A เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A) > 0$ จะได้ว่า

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$

บทนิยาม 2.14. ให้ $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น เราจะกล่าวว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม (random variable) ถ้า X เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็น Ω (นั่นคือ $X : \Omega \to \mathbb{R}$) และ $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ สำหรับทุก $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

บทนิยาม 2.15. เราเรียกฟังก์ชัน $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function) หรือเรียกโดยย่อว่า ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function) ของตัวแปรสุ่ม X ถ้าสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(-\infty, x])$$

บทนิยาม 2.16. เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable) ถ้ามีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx \quad \text{สำหรับทุก } A \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

โดยเราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function, PDF) ของตัวแปรสุ่ม X

บทนิยาม 2.17. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องบนปริภูมิตัวอย่างเดียวกัน เราจะเรียกฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ ที่มีสมบัติว่า

$$P[(X,Y) \in A] = \int\int_{(X,Y)\in A} f(x,y)dxdy \quad \text{เมื่อ } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$$

ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม (joint probability density function) ของ X และ Y และเราจะเรียกฟังก์ชัน $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)dsdt \quad \text{เมื่อ } x, y \in \mathbb{R}$$

ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution function) ของ X และ Y

บทนิยาม 2.18. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง โดยที่มี $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม เราจะเรียก g ว่าการแจกแจงมาร์จินัลของ X (marginal distribution of X) และเรียก h ว่าการแจกแจงมาร์จินัลของ Y (marginal distribution of Y) ก็ต่อเมื่อ

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \;\text{ และ }\; h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

บทนิยาม 2.19. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง โดยที่มี $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม เราจะเรียก

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x) > 0$$

ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด $X = x$ และ

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad \text{เมื่อ } h(y) > 0$$

ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด $Y = y$

บทนิยาม 2.20. เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่นิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็นเดียวกันเป็นอิสระต่อกัน (independent) ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ใดๆ

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน เราจะกล่าวว่า X และ Y ขึ้นต่อกัน (dependent)

บทนิยาม 2.21. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะได้ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

เมื่อ

f คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

g คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X

h คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ Y

บทนิยาม 2.22. เราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ใดๆ

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\ldots P(X_n \in A_n)$$

เราจะกล่าวว่าลำดับ (X_n) เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน (sequence of independent random variable) ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ ซึ่ง $n \geq 2$

$$X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n} \text{ เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ } i_j \neq i_k \text{ เมื่อ } j \neq k$$

บทนิยาม 2.23. เราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกันเป็นคู่ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ซึ่ง $i \neq j$ ใดๆ X_i และ X_j เป็นอิสระต่อกัน

ทฤษฎีบท 2.24. ให้ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกันเป็นคู่ด้วย

บทนิยาม 2.25. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ค่าคาดคะเน (expected value) ของ X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $E(X)$ กำหนดโดย

1. $E(X) = \sum\limits_{x \in ImX} xf(x)$ ถ้า $\sum\limits_{x \in ImX} |x|f(x) < \infty$
   เมื่อ X คือ ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f
2. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$
   เมื่อ X คือ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f

ถ้า $\sum\limits_{x \in ImX} |x|f(x)$ หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$ ลู่ออก เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X ไม่มีค่าคาดคะเน

ทฤษฎีบท 2.26. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ซึ่ง $g(X)$ เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ว่า

1. $E(g(X)) = \sum\limits_{x \in ImX} g(x)f(x)$ ถ้า $\sum\limits_{x \in ImX} |g(x)|f(x) < \infty$
   เมื่อ X คือ ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f
2. $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$
   เมื่อ X คือ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f

ทฤษฎีบท 2.27. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า สำหรับค่าคงตัว a และ b ใดๆ

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

ข้อสังเกต 2.28. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้

1. $E(X \pm Y) = E(X) \pm\ E(Y)$
2. ถ้า $X \geq 0$ แล้ว $E(X) \geq 0$
3. ถ้า $X \geq Y$ ดังนั้น $X - Y \geq 0$ ทำให้ได้ว่า $E(X) - E(Y) = E(X - Y) \geq 0$ แล้ว

$$E(X) \geq E(Y)$$

ทฤษฎีบท 2.29. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า XY สามารถหาค่าคาดคะเนได้ โดยที่

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

ทฤษฎีบท 2.30. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม และ $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $g(X)$ และ $h(Y)$ หาค่าคาดคะเนได้ ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

บทนิยาม 2.31. ให้ X แทนตัวแปรสุ่มใดๆ ซึ่งมีค่าคาดคะเน μ ความแปรปรวน (variance) ของ X เขียนแทนด้วย $Var(X)$ หรือ σ^2 กำหนดโดย

$$Var(X) = \ E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

และ เราจะเรียกรากที่ 2 ของ $Var(X)$ ว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ของ X และเขียนแทนด้วย SD หรือ σ

บทนิยาม 2.32. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของ X และ Y เขียนแทนด้วย $Cov(X,Y)$ หรือ σ_{XY} กำหนดโดย

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

บทนิยาม 2.33. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ สหสัมพันธ์ (correlation) ของ X และ Y เขียนแทนด้วย $Corr(X,Y)$ หรือ ρ_{XY} กำหนดโดย

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

ซึ่ง $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$

ทฤษฎีบท 2.34. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าความแปรปรวนได้ และ a, b เป็นค่าคงตัวใดๆ

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
2. $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X,Y)$

ข้อสังเกต 2.35.

1. $Var(b) = 0$
2. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $Cov(X,Y) = 0$ นั่นคือ

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

ทฤษฎีบท 2.36. ให้ X, Y และ Z เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ จะได้ว่า

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(X, X) = Var(X)$
3. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ
4. $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

ข้อสังเกต 2.37. ให้ $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ จะได้ว่า

1. $Cov\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$
2. $Var\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} Cov(X_i, Y_j)$

บทนิยาม 2.38. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable) เราจะเรียก $E(X|Y = y)$ ว่า ค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไข (conditional expectation) ของ X เมื่อทราบ $Y = y$ ซึ่งจะนิยามดังนี้

$$E(X|Y = y) \; = \sum_{x \in ImX} x f(x|y)$$

บทนิยาม 2.39. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง เราจะเรียก $E(X|Y = y)$ ว่า ค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อทราบ $Y = y$ ซึ่งจะนิยามดังนี้

$$E(X|Y = y) \; = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) \; dx$$

หมายเหตุ 2.40. $E(X|Y = y)$ เป็นค่าคงที่

บทนิยาม 2.41. ให้ $k(y) = E(X|Y = y)$ เป็นฟังก์ชันของ y จะนิยามให้ $E(X|Y) \equiv k(Y)$ เป็นค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อทราบ Y

หมายเหตุ 2.42. $E(X|Y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม Y ดังนั้นจึงเป็นตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 2.43. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ เราจะเรียกฟังก์ชัน G ซึ่งกำหนดโดย

$$G_X(t) \;\; = \;\; E[t^X]$$

ว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) ของตัวแปรสุ่ม X

หมายเหตุ 2.44.

$$E[t^X] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in ImX} t^x P(X=x) & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^x f(x)dx & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชัน} \\ & \quad\text{ความหนาแน่นความน่าจะเป็น } f \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.45. ถ้า X มีฟังก์ชันก่อกำเนิด $G_X(t)$ จะได้ว่า

1. $G'_X(1) = E(X)$
2. $G_X^{(n)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-(n-1)))$ เมื่อ $n \geq 1$

ทฤษฎีบท 2.46. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม และ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $G_{X+a}(t) = t^a G_X(t)$
2. $G_{bX}(t) = G_X(t^b)$
3. $G_{bX+a}(t) = t^a G_X(t^b)$
4. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

ทฤษฎีบท 2.47. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ถ้า $G_X(t) = G_Y(t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า X และ Y มีการแจกแจงเดียวกัน

บทนิยาม 2.48. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ เราจะเรียกฟังก์ชัน M ซึ่งกำหนดโดย

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

ว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (moment generating function) ของตัวแปรสุ่ม X

หมายเหตุ 2.49.

$$E[e^{tX}] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in ImX} e^{tx} P(X=x) & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชัน} \\ & \quad\text{ความหนาแน่นความน่าจะเป็น } f \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.50. ถ้า X มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ $M_X(t)$ จะได้ว่า

1. $M'_X(0) = E(X)$
2. $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$ เมื่อ $n \geq 1$

ทฤษฎีบท 2.51. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม และ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$
2. $M_{bX}(t) = M_X(bt)$
3. $M_{bX+a}(t) = e^{at}M_X(bt)$
4. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$

ทฤษฎีบท 2.52. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ถ้า $M_X(t) = M_Y(t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า X และ Y มีการแจกแจงเดียวกัน

ข้อสังเกต 2.53. เนื่องจาก $G_X(t) = E[t^X] = E[e^{ln(t)X}] = M_X(ln(t))$ ดังนั้น $G_X(t) = M_X(ln(t))$

บทนิยาม 2.54. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ เราจะเรียกฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย

$$K_X(t) = ln(E[e^{tX}]) = ln(M_X(t))$$

ว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดคิวมูแลนต์ (cumulant generating function) ของตัวแปรสุ่ม X

ทฤษฎีบท 2.55. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ จะได้ว่า

1. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$
2. $K'_X(0) = E(X)$
3. $K''_X(0) = E([X - E(X)]^2) = Var(X)$
4. $K'''_X(0) = E([X - E(X)]^3)$

บทนิยาม 2.56. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่ง

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, ...$$

โดยที่ λ คือ ค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ เราจะเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มปัวซง (Poisson random variable) ที่มีพารามิเตอร์ λ โดยใช้สัญลักษณ์ $X \sim Poi(\lambda)$

ทฤษฎีบท 2.57. คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ มีดังต่อไปนี้

1. $E(X) = \lambda$
2. $Var(X) = \lambda$
3. $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$
4. $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

บทนิยาม 2.58. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย

$$f(x) \quad = \begin{cases} \eta e^{-\eta x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

โดยที่ η เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ เราจะเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง (exponential random variable) ที่มีพารามิเตอร์ η โดยใช้สัญลักษณ์ $X \sim Exp(\eta)$

ทฤษฎีบท 2.59. คุณสมบัติของการแจกแจงเลขชี้กำลัง (exponential distribution) ที่มีพารามิเตอร์ η มีดังต่อไปนี้

1. $E(X) = \dfrac{1}{\eta}$
2. $Var(X) = \dfrac{1}{\eta^2}$
3. $M_X(t) = \dfrac{\eta}{\eta - t}$ เมื่อ $t < \eta$

บทนิยาม 2.60. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ}$$

เราจะเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable) ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 โดยใช้สัญลักษณ์ $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$

ถ้า $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ เราจะเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน (standard normal random variable)

ทฤษฎีบท 2.61. คุณสมบัติของการแจกแจงปกติ (normal distribution) ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 มีดังต่อไปนี้

1.$E(X) = \mu$

2.$Var(X) = \sigma^2$

3.$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

4.$K_X(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$

บทนิยาม 2.62. ให้ X เป็น ตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อ (Zero Inflated Poisson random variable) ที่มีพารามิเตอร์ p และ α โดยใช้สัญลักษณ์ $X \sim ZIP(p, \alpha)$ ซึ่ง

$$P(X = k) \quad = \begin{cases} p + (1-p)\, e^{-\alpha} & \text{เมื่อ } k = 0 \\ \dfrac{(1-p)\, e^{-\alpha} \alpha^k}{k!} & \text{เมื่อ } k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

โดยที่ $p \in (0,1)$ และ $\alpha > 0$

ทฤษฎีบท 2.63. คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อ (Zero Inflated Poisson distribution) ที่มีพารามิเตอร์ p และ α มีดังต่อไปนี้

1. $E(X) = \alpha\,(1-p)$
2. $Var(X) = \alpha\,(1-p)\,(1+\alpha p)$
3. $G_X(t) = p + (1-p)e^{-\alpha(1-t)}$
4. $M_X(t) = p + (1-p)e^{-\alpha(1-e^t)}$

ทฤษฎีบท 2.64. อสมการมาร์คอฟ (Markov's Inequality)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และสำหรับจำนวนจริงบวก a ใดๆ จะได้ว่า

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

2.2 พื้นฐานของกระบวนการสโตแคสติก และ ทฤษฎีความเสี่ยง (Basic of Risk Theory and Stochastic Processes)

ในหัวข้อนี้ เราจะแนะนำเกี่ยวกับนิยาม ความหมาย คุณสมบัติ และ ทฤษฎีต่างๆ ของทฤษฎีความเสี่ยง และ กระบวนการสโตแคสติก ที่ใช้ในโครงงานนี้

บทนิยาม 2.65. ให้ $X_1, X_2, \ldots$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) และ N เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าอยู่ใน $\{0,1,2,3,\ldots\}$ และ N กับ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นอิสระต่อกัน กำหนดให้

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

โดยที่ $S_N = 0$ ถ้า $N = 0$ และ ตัวแปรสุ่ม S_N เรียกว่า ผลรวมของตัวแปรสุ่ม (random sum) อีกทั้ง จะเรียกการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่ม ว่า การแจกแจงเชิงประกอบ (compound distribution)

ทฤษฎีบท 2.66. คุณสมบัติของการแจกแจงเชิงประกอบ มีดังต่อไปนี้

1. $E(S_N) = E(N)E(X_1)$
2. $Var(S_N) = E(N)Var(X_1) + Var(N)(E(X_1))^2$
3. $M_{S_N}(t) = G_N(M_X(t))$
4. $K_{S_N}(t) = K_N(K_X(t)) = ln(M_{S_N}(t))$

บทนิยาม 2.67. ให้ผลรวมของตัวแปรสุ่ม

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

เราจะเรียก S_N ว่า มีการแจกแจงปัวซงเชิงประกอบ (Compound Poisson distribution) ถ้า ตัวแปรสุ่มการนับ N มีการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ

ทฤษฎีบท 2.68. คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซงเชิงประกอบที่มีพารามิเตอร์ λ โดยที่ $Var(X) = \sigma^2$ และ $E(X) = \mu$ มีดังนี้

1. $E(S_N) = \lambda\mu$
2. $Var(S_N) = \lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2$
3. $M_{S_N}(t) = G_N(M_X(t)) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$
4. $K_{S_N}(t) = ln(M_{S_N}(t)) = \lambda(M_X(t) - 1)$

บทนิยาม 2.69. ตัวแบบความเสี่ยงแบบพื้นฐาน (The classical risk model) คือ ตัวแบบของมูลค่าทุนรวม นิยามโดย

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

เมื่อ

$U(t)$ คือ มูลค่าทุนรวม ณ เวลา t

u คือ เงินเริ่มต้น

c คือ มูลค่ารวมเบี้ยประกัน ต่อ หนึ่งหน่วยเวลา

$S(t)$ คือ มูลค่าการเอาประกันสะสม ณ เวลา t

โดยที่

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

เมื่อ

$N(t)$ คือ จำนวนการเคลมรวมที่เกิดขึ้นจนถึงเวลา t ซึ่งเป็นกระบวนการนับ (Counting Process)

Y_i คือ มูลค่าการเคลมรวมของแต่ละบุคคลที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$

บทนิยาม 2.70. ถ้า $\mathcal{G}$ เป็น $\sigma - algebra$ บนปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ แล้ว จะเรียกตัวแปรสุ่ม $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ว่าเป็น $\mathcal{G} - measurable$ ถ้า

$$\{X^{-1}(B); B \in \mathscr{B}\} \subseteq \mathcal{G}$$

โดยที่ $\mathscr{B}$ เป็น $Borel\ \sigma - algebra$ บน $\mathbb{R}$

บทนิยาม 2.71. ให้ $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ปริภูมิความน่าจะเป็น และตัวแปรสุ่ม $X : \Omega \to \mathbb{R}$ โดยที่ $E(|X|) < \infty$. ถ้า $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$ เป็น $\sigma - algebra$ จะได้ว่า ค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อทราบ $\mathcal{G}$ จะใช้สัญลักษณ์ $E(X|\mathcal{G})$

ทฤษฎีบท 2.72. สำหรับปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ กำหนดให้ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ และ $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ $E(|X|) < \infty$, $E(|Y|) < \infty$ และ $\mathcal{G}$ เป็น $\sigma - algebra$ โดยที่ $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$

ดังนั้น คุณสมบัติของค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไข มีดังต่อไปนี้

1. $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{R}$
2. ถ้า $X \geq 0$ แล้ว $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$
3. ถ้า $X \leq Y$ แล้ว $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$
4. ถ้า $\mathscr{F}_1$ เป็น $\sigma - algebra$ ที่ $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_2$ เป็น $\sigma - algebra$ ที่ $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}$ และ $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ แล้ว $E(E(X|\mathscr{F}_2)|\mathscr{F}_1) = E(X|\mathscr{F}_1)$
5. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$
6. ถ้า X และ $\mathcal{G}$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$
7. ถ้า Y เป็น $\mathcal{G} - measurable$ แล้ว $E(XY|\mathcal{G}) = Y(X|\mathcal{G})$

บทนิยาม 2.73. ให้ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ เป็นตัวแปรสุ่ม เราจะเรียก $Var(X|\mathcal{G})$ ว่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (conditional variance) ของ X เมื่อกำหนด $\sigma - algebra$ $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$ ซึ่งจะนิยามดังนี้

$$Var(X|\mathcal{G}) \coloneqq E\big((X - E(X|\mathcal{G}))^2 \mid \mathcal{G}\big) = E(X^2|\mathcal{G}) - (E(X|\mathcal{G}))^2$$

ทฤษฎีบท 2.74. กำหนดให้ $X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$ โดยที่ $\mathcal{G}$ เป็น $\sigma - algebra$ และ $E(|X|) < \infty, Var(|X|) < \infty$ จะได้ว่า

$$Var(X) = E(Var(X|\mathcal{G})) + Var(E(X|\mathcal{G}))$$

บทนิยาม 2.75. เราจะเรียกเซตของตัวแปรสุ่ม $\underline{X} = \{X_t \mid t \in T\}$ ว่า กระบวนการสโตแคสติก (stochastic process) นั่นคือ X_t เป็นตัวแปรสุ่ม สำหรับทุก $t \in T$

ถ้า T เป็นเซตนับได้ เราจะเรียก $\underline{X}$ ว่า กระบวนการสโตแคสติกแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (discrete-time stochastic process)

ถ้า T เป็นเซตที่มีความต่อเนื่อง เราจะเรียก $\underline{X}$ ว่า กระบวนการสโตแคสติกแบบเวลาต่อเนื่อง (continuous- time stochastic process) และ เรียกเซต T ว่า ปริภูมิพารามิเตอร์ (parameter space) เรียกเซต S ซึ่งประกอบด้วยค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ X_t สำหรับ $t \in T$ ว่า ปริภูมิสถานะ (state space) และเรียกสมาชิกแต่ละตัวใน S ว่า สถานะ (state)

บทนิยาม 2.76. ให้ $X(t)$ เป็น กระบวนการสโตแคสติก เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม $X(t) - X(s)$ สำหรับ $s < t$ ว่า “ส่วนเพิ่ม (increment)” ของกระบวนการสโตแคสติก เราจะเรียกกระบวนการดังกล่าวว่ามี “ส่วนเพิ่มอิสระ (independent increment)” ถ้า ส่วนเพิ่มในช่วงเวลาที่ไม่คาบเกี่ยวกัน เป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 2.77. เราจะเรียกกระบวนการสโตแคสติกว่ามี “ส่วนเพิ่มนิ่ง (Stationary Increment)” ถ้าการแจกแจงของส่วนเพิ่ม ขึ้นอยู่กับความยาวของช่วงเวลา ไม่ได้ขึ้นกับจุดเริ่มต้นของส่วนเพิ่ม นั่นคือ สำหรับ $s, t, h > 0$ จะได้ว่า

$$X(s+h) - X(s) \text{ และ } X(t+h) - X(t) \text{ มีการแจงแจงเดียวกัน}$$

บทนิยาม 2.78. เราจะเรียกกระบวนการสโตแคสติก $\{N(t) : t \geq 0\}$ ว่า “กระบวนการนับ (Counting Process)” ถ้า $N(t)$ แสดงถึงจำนวนทั้งหมดของ “เหตุการณ์” ที่เกิดขึ้นจนถึงเวลา t

กระบวนการนับ $N(t)$ ต้องสอดคล้องกับ

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ มีค่าเป็นจำนวนเต็ม
3. ถ้า $s < t$ แล้ว $N(s) \leq N(t)$

สำหรับ กระบวนการเชิงการนับ $\{N(t) : t \geq 0\}$ และ $s < t$, $N(t) - N(s)$ เป็นจำนวนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา s ถึง เวลา t นั่นคือ $(s, t]$

บทนิยาม 2.79. เราจะเรียก กระบวนการเชิงการนับ $N(t)$ ว่า “กระบวนการปัวซง (Poisson Process)” ด้วยอัตรา λ ถ้า $N(t)$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $N(0) = 0$
2. กระบวนการสุ่มมีส่วนเพิ่มอิสระ
3. สำหรับแต่ละ $s, t \geq 0$, $N(s+t) - N(s)$ มีการแจกแจงปังซง ที่มีค่าเฉลี่ย λt

บทนิยาม 2.80. ให้ $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ และ ให้ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (independent identically distributed : i.i.d.) โดยที่แต่ละ X_i เป็นอิสระกับ $N(t)$ ทุก $t > 0$

นิยาม กระบวนการ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ โดย

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

ซึ่ง $S(t) = 0$ เมื่อ $N(t) = 0$ ดังนั้น $S(t)_{t\geq 0}$ จึงเรียกว่า กระบวนการปัวซงเชิงประกอบ (Compound Poisson Process) ที่มีปัวซงพารามิเตอร์ λ

ทฤษฎีบท 2.81. คุณสมบัติของกระบวนการปัวซงเชิงประกอบที่

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

โดยที่ $N(t)$ มีการแจกแจงกระบวนการปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ มีดังต่อไปนี้

1. ค่าคาดคะเน : $E(S(t)) = \lambda t E(X)$
2. ความแปรปรวน : $Var(S(t)) = \lambda t E(X^2)$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ : $M_{S(t)}(z) = e^{\lambda t(M_X(z)-1)}$
4. เมื่อ กำหนดค่า t ที่ $t > 0$, ตัวแปรสุ่ม $S(t)$ มีการแจกแจงปังซงเชิงประกอบ (Compound Poisson) ที่มีปัวซงพารามิเตอร์ λt
5. กระบวนการปัวซงเชิงประกอบ มีส่วนเพิ่มอิสระ และส่วนเพิ่มนิ่ง

บทนิยาม 2.82. เวลาที่เกิดการล้มละลาย (Ruin Time)

เวลาที่เกิดการล้มละลาย (time of ruin) T ซึ่งก็คือ เวลาแรกที่กระบวนการส่วนเกิน (surplus process) มีค่าติดลบ นิยามโดย

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid U(t) < 0\}$$

บทนิยาม 2.83. ความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย (Ruin Probability)

ให้ $\psi(u)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย (Ruin Probability) เมื่อมีเงินตั้งต้นเป็น $u > 0$ นิยามโดย

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u)$$

หมายเหตุ 2.84.

1. $\psi(u)$ มีความยากที่จะคำนวณโดยตรง
2. การประมาณจึงถูกนำไปใช้เพื่อหาความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย

บทนิยาม 2.85. ให้ $\psi(u,t)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย ก่อนเวลา t โดยที่มีเงินตั้งต้นเป็น $u > 0$ ซึ่งจะนิยามดังนี้

$$\psi(u,t) = P(T < t \mid U(0) = u)$$

ทฤษฎีบท 2.86. คุณสมบัติของ $\psi(u,t)$ มีดังต่อไปนี้

1. $\psi(u,t)$ มีค่าเพิ่มขึ้น ตาม t
2. $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u)$

บทนิยาม 2.87. การรับผิดชอบส่วนแรก (Deductible) คือ ความรับผิดชอบเพื่อความเสียหายที่กรมธรรม์ประกันภัยกำหนดไว้ให้ผู้เอาประกันภัยต้องรับผิดชอบเอง ก่อนที่ผู้รับประกันภัยจะชดใช้ค่าสินไหมทดแทนในส่วนที่เกินจากนั้น

กำหนดให้

D คือ มูลค่าการรับผิดชอบส่วนแรก

X คือ มูลค่าความเสียหายทั้งหมด

Y คือ มูลค่าที่จ่ายโดยผู้เอาประกัน (ผู้ซื้อประกัน)

Z คือ มูลค่าที่จ่ายโดยบริษัทประกันภัย

ดังนั้น จะได้ว่า

$$Y = \min(X, D) = \begin{cases} X & \text{เมื่อ } X \le D \\ D & \text{เมื่อ } X > D \end{cases}$$

$$Z = \max(0, X - D) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } X \le D \\ X - D & \text{เมื่อ } X > D \end{cases}$$

$$X = Y + Z$$

ซึ่งสัญญาการรับผิดชอบส่วนแรกมักพบในสัญญาประกันภัยรถยนต์

บทนิยาม 2.88. กระบวนการสโตแคสติกแบบเวลาต่อเนื่อง $X(t)$ จะถูกเรียกว่า มาติงเกล (martingale) ถ้า

1. $E(|X(t)|) < \infty$ ทุก $t > 0$
2. $E(X(t)|X(u),\ 0 \le u \le s) = X(s)$ ทุก $t \ge s$

บทนิยาม 2.89.

ตัวแปรสุ่ม T เป็น $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-*stopping time* ก็ต่อเมื่อ $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ ทุก $t \ge 0$

ทฤษฎีบท 2.90. The Martingale Stopping Time Theorem

ถ้า $\{Z_t\}$ และ T เป็น stopping time ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้

1. T มีขอบเขต
2. $E[T] < \infty$ และ มี $M < \infty$ โดยที่

$$E[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] < M$$

แล้ว

$$E[Z_T] = E[Z_0]$$

บทนิยาม 2.91. การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)

ให้ $\{W_t\}_{t\ge 0}$ เป็นกระบวนการสโตแคสติก ซึ่งนิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ เราจะเรียก $\{W_t\}_{t\ge 0}$ ว่า การเคลื่อนที่แบบบราวน์มาตรฐาน (Standard Brownian Motion) หรือ กระบวนการวีเนอร์ (Wiener Process) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. เริ่มต้นที่ศูนย์ ด้วยความน่าจะเป็น 1 กล่าวคือ $P(W_0 = 0) = 1$

หรือ $W_0 = 0$ เกือบแน่นอน (almost surely)

2. $\{W_t\}_{t\ge 0}$ มีส่วนเพิ่มอิสระ และ ส่วนเพิ่มนิ่ง

3. สำหรับทุก $0 \le s < t \le T$ ส่วนเพิ่ม $W_t - W_s$ มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ 0 และ $t - s$ ตามลำดับ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathscr{N}(0, t-s)$

4. เมื่อกำหนดค่า $\omega \in \Omega$ เป็นค่าหนึ่ง วิถีตัวอย่าง (Sample Path) ของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ต่อเนื่องไม่มีการกระโดด $a.s.$

บทนิยาม 2.92. สำหรับ เซตย่อย A ใดๆ ของเซตของจำนวนจริง

เราจะเรียกจำนวนจริง u ว่า ขอบเขตบน (upper bound) ของเซต A ถ้า $u \geq a$ ทุก $a \in A$ และ จะกล่าวว่า A มีขอบเขตบน (bounded above) ถ้ามีจำนวนจริง u ที่เป็นขอบเขตบนของ A

เราจะเรียกจำนวนจริง l ว่า ขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต A ถ้า $l \leq a$ ทุก $a \in A$ และ จะกล่าวว่า A มีขอบเขตล่าง (bounded below) ถ้ามีจำนวนจริง l ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

ถ้า A มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง จะกล่าวว่า A เป็นเซตมีขอบเขต (bounded set)

บทนิยาม 2.93. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ เราจะเรียกจำนวนจริง x ว่าเป็นขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound) หรือ ซูพรีมัม (supremum) ของ A ก็ต่อเมื่อ

1. x เป็นขอบเขตบนของ A
2. ถ้า y เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $x \leq y$

บทนิยาม 2.94. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ เราจะเรียกจำนวนจริง x ว่าเป็นขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bound) หรือ อินฟิมัม (infimum) ของ A ก็ต่อเมื่อ

1. x เป็นขอบเขตล่างของ A
2. ถ้า y เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $x \geq y$

ทฤษฎีบท 2.95. สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Completeness Axiom)

1. ทุกสับเซตของ $\mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่างและมีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนน้อยสุด
2. ทุกสับเซตของ $\mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่างและมีขอบเขตล่าง จะมีขอบเขตล่างมากสุด

ทฤษฎีบท 2.96. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ s เป็นขอบเขตบนของ A จะได้ว่า $s = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ทุก } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } b \in A \text{ ที่ } s - \varepsilon < b$$

ทฤษฎีบท 2.97. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ f เป็นขอบเขตล่างของ A จะได้ว่า $f = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ทุก } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } b \in A \text{ ที่ } b < f + \varepsilon$$

ทฤษฎีบท 2.98. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}^+$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ

$$\frac{1}{A} := \left\{ z = \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in A \right\}$$

จะได้ว่า

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)} \qquad \text{เมื่อ} \quad \inf(A) \neq 0$$

บทพิสูจน์: ให้ $A \subseteq \mathbb{R}^+$
สมมติ $\text{inf}(A) \neq 0$
นิยาม
$$\frac{1}{A} \coloneqq \left\{ z = \frac{1}{x} \middle| x \in A \right\}$$

จากบทนิยาม 2.93 จะได้ว่า $\text{sup}(A) \geq a$ ทุก $a \in A$ และ
จากทฤษฎีบท 2.97 จะได้ว่า ทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $b \in A$ ที่ $b < \text{inf}(A) + \varepsilon$
ดังนั้น
ให้ $\varepsilon > 0$
เลือก $b \in A$ ซึ่งสอดคล้องกับ $b < \text{inf}(A) + \varepsilon$
เนื่องจาก เลือก $b \in A$ จะได้ว่า $\frac{1}{b} \in \frac{1}{A}$
ดังนั้น
$$\frac{1}{\text{inf}(A) + \varepsilon} < \frac{1}{b}$$

จาก $\frac{1}{b} \in \frac{1}{A}$ โดย จากบทนิยาม 2.92 จะได้ว่า $\frac{1}{b} \leq \text{sup}\left(\frac{1}{A}\right)$
ดังนั้น
$$\frac{1}{\text{inf}(A) + \varepsilon} < \frac{1}{b} \leq \text{sup}\left(\frac{1}{A}\right)$$

ให้ ε มีค่าเข้าใกล้ 0^+
ดังนั้น
$$\frac{1}{\text{inf}(A)} \leq \text{sup}\left(\frac{1}{A}\right)$$

ต่อมาจะแสดงว่า $\text{sup}\left(\frac{1}{A}\right) \leq \frac{1}{\text{inf}(A)}$
จากบทนิยาม 2.94 จะได้ว่า $\text{inf}(A) \leq k$ ทุก $k \in A$
ดังนั้น
$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\text{inf}(A)} \qquad \text{ทุก } \frac{1}{k} \in \frac{1}{A}$$

ดังนั้น $\frac{1}{\text{inf}(A)}$ เป็นขอบเขตบนของเซต $\frac{1}{A}$

ดังนั้น

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) \leq \frac{1}{\inf(A)}$$

ดังนั้น

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)}$$

$\square$

บทที่ 3
งานหลัก (Main work)

ในบทที่ 3 นี้ เราจะแนะนำเกี่ยวกับตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ ก่อนอื่นจะแนะนำนิยามความหมายของตัวแบบความเสี่ยงพื้นฐาน และกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ แล้วทำการปรับเปลี่ยนตัวแบบความเสี่ยงพื้นฐานให้สอดคล้องกับความเป็นจริงของค่าใช้จ่าย สร้างเป็นตัวแบบความเสี่ยงแบบใหม่ขึ้นมา เป็นตัวแบบความเสี่ยงแบบต่อเนื่องบนการแจกแจงแบบกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ และเพิ่มตัวแปรการรบกวน (white noise) แล้วจึงศึกษาคุณสมบัติและการประยุกต์ใช้ต่อไป

บทนิยาม 3.1. ตัวแบบความเสี่ยงแบบพื้นฐาน (The classical risk model) คือ ตัวแบบของมูลค่าทุนรวม นิยามโดย

$$U(t) \;=\; u \;+\; ct \;-\; S(t)$$

เมื่อ

$U(t)$	คือ	มูลค่าทุนรวม ณ เวลา t
u	คือ	เงินเริ่มต้น ซึ่งมีค่ามากกว่า 0
c	คือ	มูลค่ารวมเบี้ยประกัน ต่อ หนึ่งหน่วยเวลา ซึ่งมีค่ามากกว่า 0
$S(t)$	คือ	มูลค่าการเอาประกันสะสม ณ เวลา t ซึ่งมีการแจกแจงแบบ กระบวนการปัวซงเชิงประกอบ (Compound Poisson Process)

โดยที่

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

เมื่อ

$N(t)$ คือ จำนวนการเคลมรวมที่เกิดขึ้นจนถึงเวลา t ซึ่งเป็นกระบวนการปัวซง (Poisson Process)

Y_i คือ มูลค่าการเคลมรวมของแต่ละบุคคลที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$

3.1 ตัวแบบความเสี่ยง (The Risk Model)

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาถึงตัวแบบความเสี่ยงพื้นฐาน ในบทนิยาม 3.1

$$U(t) \ = \ u \ + \ ct \ - \ \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

ที่ มูลค่ารวมเบี้ยประกันต่อหนึ่งหน่วยเวลา c มีค่าเพิ่มขึ้นตามเวลา แต่ในความเป็นจริงนั้น ค่า c ไม่ได้เพิ่มขึ้นตามเวลา แต่จะขึ้นอยู่กับจำนวนการจ่ายเบี้ยประกันที่เกิดขึ้น และ มีตัวแปรการรบกวน (white noise) จากภายนอกแทรกเข้ามา โดยเราจะเปลี่ยน t เป็น $N(t)$ และ ให้ $N(t)$ เป็นกระบวนการนับ $PZIP(\lambda, p, \alpha)$ ซึ่งเราจะแนะนำนิยามความหมายของตัวแปรสุ่ม $PZIP(\lambda, p, \alpha)$ และ สมบัติความน่าจะเป็นของกระบวนการ $PZIP$ ซึ่งนำเสนอใน บทนิยาม 3.2 และ ทฤษฎีบท 3.4 ตามลำดับ

บทนิยาม 3.2. ให้ $S_N = X_1 + X_2 + \ \cdots \ + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ โดยที่ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) และ N กับ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นอิสระต่อกัน

เราจะเรียก ตัวแปรสุ่ม S_N ว่า ตัวแปรสุ่มปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ (Poisson-Zero Inflated Poisson random variable) โดยใช้สัญลักษณ์ $PZIP(\lambda, p, \alpha)$ ที่ $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ และ $\alpha > 0$ ถ้า

1. X_i มีการแจกแจงปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อ (Zero Inflated Poisson distribution) ที่มีพารามิเตอร์ p และ α

2. N มีการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ

บทนิยาม 3.3. ให้ $\{M(t)\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ และ ให้ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นลำดับตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อที่มีพารามิเตอร์ p, α โดยที่แต่ละ X_i เป็นอิสระกับ $M(t)$ ทุก $i \in \mathbb{N}$ และ ทุก $t > 0$

นิยาม กระบวนการ $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ โดยที่

$$N(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$$

ซึ่ง $N(t) = 0$ เมื่อ $M(t) = 0$ ดังนั้น $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ จึงเรียกว่า กระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ (Poisson-Zero Inflated Poisson Process) ที่มีปัวซงพารามิเตอร์ λ, p, α

ทฤษฎีบท 3.4. คุณสมบัติของ $N(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ ที่เป็นกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ ที่มีปัวซงพารามิเตอร์ λ, p, α มีดังต่อไปนี้

1. $N(t)$ มีส่วนเพิ่มอิสระและมีส่วนเพิ่มนิ่ง
2. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของส่วนเพิ่ม $N(t) - N(v)$ เมื่อ $v < t$ คือ

$$\exp\{(t-v)\lambda[(p + (1-p)e^{-\alpha(1-e^u)}) - 1]\}$$

3. ค่าคาดคะเนของ $N(t)$ คือ $\lambda t \alpha (1-p)$
4. ความแปรปรวนของ $N(t)$ คือ $\lambda t \alpha (1-p)(1+\alpha)$

บทพิสูจน์:

1.

ลำดับแรกเราจะแสดงว่า $N(t)$ มีส่วนเพิ่มนิ่ง

จากการที่ $M(t)$ เป็นกระบวนการปัวซง ทำให้ได้ว่า $M(t)$ มีส่วนเพิ่มนิ่ง และ X_i มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$

จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{M(t+h)} X_i - \sum_{i=1}^{M(t)} X_i \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{i=1}^{M(t+h)-M(t)} X_i$$

และ

$$\sum_{i=1}^{M(t+h)-M(t)} X_i \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{i=1}^{M(s+h)-M(s)} X_i$$

ดังนั้น $N(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ มีส่วนเพิ่มนิ่ง

ในส่วนนี้เราจะแสดงว่า $N(t)$ มีส่วนเพิ่มอิสระ

สมมติ $s_1 < s_2 \leq s_3 < s_4$

พิจารณา ความเป็นอิสระต่อกันของ $\sum_{i=1}^{M(s_2)} X_i - \sum_{i=1}^{M(s_1)} X_i$ กับ $\sum_{i=1}^{M(s_4)} X_i - \sum_{i=1}^{M(s_3)} X_i$

ซึ่ง

$$\sum_{i=1}^{M(s_2)} X_i - \sum_{i=1}^{M(s_1)} X_i \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{i=M(s_1)+1}^{M(s_2)} X_i$$

และ

$$\sum_{i=1}^{M(s_4)} X_i - \sum_{i=1}^{M(s_3)} X_i \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{i=M(s_3)+1}^{M(s_4)} X_i$$

จากการที่ $M(t)$ เป็นกระบวนการปัวซง ทำให้ได้ว่า $M(t)$ มีส่วนเพิ่มอิสระ และ X_i มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$

ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=M(s_1)+1}^{M(s_2)} X_i \text{ เป็นอิสระกับ } \sum_{i=M(s_3)+1}^{M(s_4)} X_i$$

ดังนั้น $N(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ มีส่วนเพิ่มอิสระ

2.

จาก $N(t) = N(t) - N(v) + N(v)$ ที่ $v \leq t$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_{N(t)}(u) &= E[e^{u(N(t))}] \\ &= E[e^{u(N(t)-N(v)+N(v))}] \\ &= E[e^{u(N(t)-N(v)} \cdot e^{uN(v)}] \end{aligned}$$

จาก $N(t) - N(v)$ เป็นอิสระต่อกันกับ $N(v)$ และ

จาก ทฤษฎีบท 2.30 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_{N(t)}(u) &= E[e^{u(N(t)-N(v)}] \cdot E[e^{uN(v)}] \\ &= M_{N(t)-N(v)}(u) \cdot M_{N(v)}(u) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_{N(t)-N(v)}(u) &= \frac{M_{N(t)}(u)}{M_{N(v)}(u)} \\ &= \frac{e^{\lambda t[(p+(1-p)e^{-\alpha(1-e^u)})-1]}}{e^{\lambda v[(p+(1-p)e^{-\alpha(1-e^u)})-1]}} \\ &= e^{(t-v)\lambda[(p+(1-p)e^{-\alpha(1-e^u)})-1]} \end{aligned}$$

3. และ 4. จาก

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= \lambda t E(X) \\ &= \lambda t \alpha(1-p) \qquad (3.1) \\ Var(N(t)) &= \lambda t E(X^2) \\ &= \lambda t\ [Var(X) - (E[X])^2] \\ &= \lambda t\ [\alpha(1-p)(1+\alpha p) + \alpha^2(1-p)^2] \\ &= \lambda t \alpha(1-p)(1+\alpha) \qquad (3.2) \end{aligned}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 3.5. คุณสมบัติของการแจกแจงตัวแปรสุ่มปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ (Poisson-Zero Inflated Poisson distribution) ที่มีพารามิเตอร์ λ, p และ α มีดังนี้

1. $E(S_N) = \lambda\alpha(1-p)$
2. $Var(S_N) = \lambda\alpha(1-p)(1+\alpha)$
3. $M_{S_N}(t) = e^{\lambda\ (\ p+(1-p)e^{-\alpha(1-e^t)} - 1\ )}$
4. $G_{S_N}(t) = e^{\lambda\ (\ p+(1-p)e^{-\alpha(1-t)} - 1\ )}$

บทพิสูจน์:
ให้ $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ มีการแจกแจงตัวแปรสุ่มปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อที่มีพารามิเตอร์ λ, p และ α
จาก ทฤษฎีบท 2.63 และ ทฤษฎีบท 2.68 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1.\ E(S_N) &= \lambda E(x) \\ &= \lambda\alpha(1-p) \\ 2.\ Var(S_N) &= \lambda Var(x) + \lambda[E(x)]^2 \\ &= \lambda\alpha(1-p)(1+\alpha p) + \lambda\alpha^2(1-p)^2 \\ &= \lambda\alpha(1-p)(1+\alpha) \\ 3.\ M_{S_N}(t) &= e^{\lambda(M_X(t)-1)} \\ &= e^{\lambda\left(p+(1-p)e^{-\alpha(1-e^t)}-1\right)} \\ 4.\ G_{S_N}(t) &= M_{S_N}(ln(t)) \\ &= e^{\lambda(M_X(ln(t))-1)} \\ &= e^{\lambda\left(p+(1-p)e^{-\alpha(1-t)}-1\right)} \end{aligned}$$

□

ดังนั้น เราจะนิยามตัวแบบความเสี่ยงปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อที่มีการรบกวน (the double Poisson-Zero Inflated Poisson risk model with interference) ได้ดังนี้

$$U\left(t\right)=u+cN_2\left(t\right)-\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k+\sigma W\left(t\right) \tag{3.3}$$

โดยที่ $N_2(t)$ เป็นจำนวนการจ่ายเบี้ยประกันทั้งหมดที่เกิดขึ้นจนถึงเวลา t ที่มีการแจกแจง $PZIP(\lambda_2, p_2, \alpha_2)$; $N_3(t)$ เป็นจำนวนการเคลมทั้งหมดที่เกิดขึ้นจนถึงเวลา t ที่มีการแจกแจง $PZIP(\lambda_3, p_3, \alpha_3)$; $W(t)$ เป็นกระบวนการสโตแคสติกที่มีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ (standard Brownian Motion) และ σ เป็นพารามิเตอร์ค่าความผันผวนของการแพร่กระจาย นอกจากนี้ ในโครงงานนี้เราจะสมมติว่า $N_2(t), N_3(t), W(t)$ และ Y_k เป็นอิสระต่อกัน และ Y_k เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นลบ ที่มีฟังก์ชันการแจกทั่วไป $F(y)$, ค่าคาดคะเน μ_Y, ความแปรปรวน σ_Y^2 และ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ $M_Y(\cdot)$ ตามลำดับ

บทแทรก 3.6. กระบวนการสุ่ม $\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระ และ ส่วนเพิ่มนิ่ง

บทพิสูจน์:
ลำดับแรกเราจะแสดง $\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มนิ่ง

จากทฤษฎีบท 3.4 $N_3(t)$ มีสมบัติส่วนเพิ่มนิ่ง และ บทนิยาม 3.1 Y_i มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$ ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{N_3(t+h)} Y_k - \sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k \ \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{k=1}^{N_3(t+h)-N_3(t)} Y_k$$

และ

$$\sum_{k=1}^{N_3(t+h)-N_3(t)} Y_k \ \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{k=1}^{N_3(s+h)-N_3(s)} Y_k$$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มนิ่ง

ในส่วนนี้เราจะแสดง $\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระ

ให้ $s_1 < s_2 \leq s_3 < s_4$

พิจารณา ความเป็นอิสระต่อกันของ $\sum\limits_{k=1}^{N_3(s_2)} Y_k - \sum\limits_{k=1}^{N_3(s_1)} Y_k$ กับ $\sum\limits_{k=1}^{N_3(s_4)} Y_k - \sum\limits_{k=1}^{N_3(s_3)} Y_k$

ซึ่ง

$$\sum_{k=1}^{N_3(s_2)} Y_k - \sum_{k=1}^{N_3(s_1)} Y_k \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{k=N_3(s_1)+1}^{N_3(s_2)} Y_k$$

และ

$$\sum_{k=1}^{N_3(s_4)} Y_k - \sum_{k=1}^{N_3(s_3)} Y_k \text{ มีการแจกแจงเหมือนกับ } \sum_{k=N_3(s_3)+1}^{N_3(s_4)} Y_k$$

จากทฤษฎีบท 3.4 $N_3(t)$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระ และ บทนิยาม 3.1 Y_i มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.) ในแต่ละ $i \geq 1$

ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{k=N_3(s_1)+1}^{N_3(s_2)} Y_k \text{ เป็นอิสระกับ } \sum_{k=N_3(s_3)+1}^{N_3(s_4)} Y_k$$

ดังนั้น $\sum\limits_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระ

ดังนั้น $\sum\limits_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระ และ ส่วนเพิ่มนิ่ง $\square$

เพื่อที่จะมั่นใจว่าบริษัทประกันสามารถดำเนินกิจการได้อย่างมั่นคง เราจึงสมมติว่า

$$E\left[cN_2(t) - \sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k + \sigma W(t)\right] > 0 \tag{3.4}$$

เนื่องจาก

$$E\left[\ cN_2(t) - \sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k + \sigma W(t)\right] = E\left[\ cN_2(t)\right] - E\left[\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k\right] + E\left[\sigma W(t)\right]$$

ดังนั้น

$$c\lambda_2 t\alpha_2 (1-p_2) - \ \lambda_3 t\alpha_3 (1-p_3) \mu_Y - \ \sigma(0) \quad > \quad 0$$

$$c\lambda_2 t\alpha_2 (1-p_2) - \ \lambda_3 t\alpha_3 (1-p_3) \mu_Y \quad > \quad 0 \tag{3.5}$$

ต้องการให้อสมการ $c\lambda_2 t\alpha_2 (1-p_2) - \ \lambda_3 t\alpha_3 (1-p_3) \mu_Y \ > \ 0$ เป็นจริง

จึงให้

$$c\lambda_2\alpha_2\left(1-p_2\right)=\lambda_3\alpha_3\left(1-p_3\right)\mu_Y\left(1+\theta\right) \tag{3.6}$$

โดยที่ $\theta > 0$ คือ อัตราเบี้ยประกันภัยเพิ่มขึ้นตามความเสี่ยง หรือ ปัจจัยความปลอดภัย (the relative security loading factor)

สำหรับตัวแบบความเสี่ยงในสมการ (3.3) เวลาที่เกิดการล้มละลาย จะใช้สัญลักษณ์ T ซึ่งนิยามดังนี้

$$T=\text{inf}\{t\geq 0 \mid U\left(t\right)<0\} \tag{3.7}$$

และ นิยามความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลายที่มีเงินเริ่มต้น $u > 0$ โดยใช้สัญลักษณ์ $\psi\left(u\right)$ กล่าวคือ

$$\psi\left(u\right)=Pr\ \left(T<\infty \mid U\left(0\right)=u\right) \tag{3.8}$$

3.2 ความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย (Ruin Probability)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการเป็น martingale and stopping time ซึ่งจะทำให้เราสามารถหาสมการสัมประสิทธิ์การปรับ (adjustment coefficient equation) อสมการลันด์เบริก (Lundberg's inequality) และ สมการสำหรับความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย (Ruin Probability) นำมาสร้างเป็น บทตั้ง ทฤษฎีบท และ บทแทรก ได้

กำหนดให้ กระบวนการเกิดกำไร (profit process) ใช้สัญลักษณ์ $\{S(t);t\geq 0\}$ โดยที่

$$S(t)=cN_2(t)-\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k+\sigma W(t) \tag{3.9}$$

จากสมการ (3.9) จะได้ว่า

$$E\left[S(t)\right]=c\ E\left[N_2(t)\right]-E\left[\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k\right]+\sigma\ E\left[W(t)\right]$$

และ จากทฤษฎีบท 2.66 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$E[S(t)]=[\ c\lambda_2\alpha_2(1-p_2)-\mu_Y\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\ ]t \tag{3.10}$$

และ จากข้อสังเกต 2.37 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Var[S(t)] &= c^2Var[N_2(t)] + E[N_3(t)]\cdot Var[Y_k] + Var[N_3(t)]\cdot E^2[Y_k] \\ &\quad +\sigma^2 Var[W(t)] \\ &= [\ c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)(1+\alpha_2) + \lambda_3\alpha_3(1-p_3)\sigma_Y^2 \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)(1+\alpha_3)\mu_Y^2 + \sigma^2\ ]t \end{aligned} \tag{3.11}$$

ให้

$$\begin{aligned} \gamma = &\ c\lambda_2\alpha_2\left(1-p_2\right) - \mu_Y\lambda_3\alpha_3\left(1-p_3\right) \\ \beta = &\ c^2\lambda_2\alpha_2\left(1-p_2\right)\left(1+\alpha_2\right) + \lambda_3\alpha_3\left(1-p_3\right)\sigma_Y^2 \\ &+\lambda_3\alpha_3\left(1-p_3\right)\left(1+\alpha_3\right)\mu_Y^2 + \sigma^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= \gamma t \\ Var[S(t)] &= \beta t \end{aligned} \tag{3.13}$$

บทตั้ง 3.7. กระบวนการเกิดกำไร $\{S(t); t \geq 0\}$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $S(0) = 0$
2. $\{S(t); t \geq 0\}$ มีสมบัติ ส่วนเพิ่มอิสระ และ ส่วนเพิ่มนิ่ง

บทพิสูจน์: ให้ $t, h, s \geq 0$

(1) จาก

$$S(t) = cN_2(t) - \sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k + \sigma W(t)$$

จะได้

$$S(0) = cN_2(0) - \sum_{k=1}^{N_3(0)} Y_k + \sigma W(0)$$

จากบทนิยาม 2.91 จะได้ว่า $W(0) = 0$ และ จากบทนิยาม 3.3 จะได้ว่า $M_2(t)$ เป็นกระบวนการปัวซง ทำให้ได้ว่า $M_2(0) = 0$ ดังนั้น $N_2(0) = 0$ ในทำนองเดียวกันกับ $M_3(t)$ จะได้ $N_3(0) = 0$

ดังนั้น

$$S(0) = c(0) - \sum_{k=1}^{0} Y_k + \sigma(0) = 0$$

(2) จากทฤษฎีบท 3.4 $N_2(t)$ เป็นกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ จะได้ว่า $N_2(t)$ มีสมบัติ ส่วนเพิ่มอิสระและส่วนเพิ่มนิ่ง และ จากบทนิยาม 2.91 จะได้ว่า $W(t)$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระและส่วนเพิ่มนิ่ง

จากบทแทรก 3.6 จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระและส่วนเพิ่มนิ่ง ดังนั้น $\{S(t);t\geq 0\}$ มีสมบัติส่วนเพิ่มอิสระและส่วนเพิ่มนิ่ง $\square$

ทฤษฎีบท 3.8. สำหรับกระบวนการเกิดกำไร $\{S(t);t\geq 0\}$ จะมีฟังก์ชัน $g(r)$ โดยที่

$$E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)} \tag{3.14}$$

เมื่อ

$$g(r) = \lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1]+\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]+\frac{\sigma^2r^2}{2}$$

บทพิสูจน์:

สมมติว่า $N_2(t), N_3(t), W(t)$ และ Y_k เป็นอิสระต่อกัน

จากสมการ (3.9) จะได้ว่า

$$E[e^{-rS(t)}] = E[\exp\{-rcN_2(t)\}\cdot\exp\{r\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k\}\cdot\exp\{-r\sigma W(t)\}]$$

เนื่องจาก $N_2(t), N_3(t), W(t)$ และ Y_k เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[e^{-rS(t)}] &= E[\exp\{-rcN_2(t)\}]\cdot E[\exp\{r\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k\}]\cdot E[\exp\{-r\sigma W(t)\}] \\ &= M_{N_2(t)}(-rc)\cdot M_{\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k}(r)\cdot M_{W(t)}(-r\sigma) \end{aligned} \tag{3.15}$$

จากทฤษฎีบท 3.4, ทฤษฎีบท 2.68 ข้อ3 และ ทฤษฎีบท 2.61 ข้อ3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_{N_2(t)}(-rc) &= \exp\{\lambda_2t[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1]\} \\ M_{\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k}(r) &= G_{N_3(t)}[M_{Y_k}(r)] \\ &= \exp\{\lambda_3t[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]\} \\ M_{W(t)}(-r\sigma) &= \exp\left\{\frac{t\sigma^2r^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[e^{-rS(t)}] &= \exp\{\lambda_2t[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1]\} \\ &\quad\cdot\exp\{\lambda_3t[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]\}\cdot\exp\left\{\frac{t\sigma^2r^2}{2}\right\} \\ &= \exp\{\ \lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1] \\ &\quad+\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]+\frac{\sigma^2r^2}{2}\ \}t \end{aligned}$$

ดังนั้น ให้

$$\begin{aligned} g(r) &= \lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1] \\ &\quad+\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]+\frac{\sigma^2r^2}{2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

จะได้ว่า

$$E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 3.9. ให้ $g(r)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามในทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่าสมการ

$$g(r) = 0 \tag{3.17}$$

มีค่า $r = R > 0$ เป็นคำตอบที่เป็นบวกเพียงคำตอบเดียว และ เรียกสมการ (3.17) ว่า สมการสัมประสิทธิ์การปรับ (adjustment coefficient equation) ของตัวแบบความเสี่ยง (3.3) และ $R > 0$ จะเรียกว่า สัมประสิทธิ์การปรับ (adjustment coefficient)

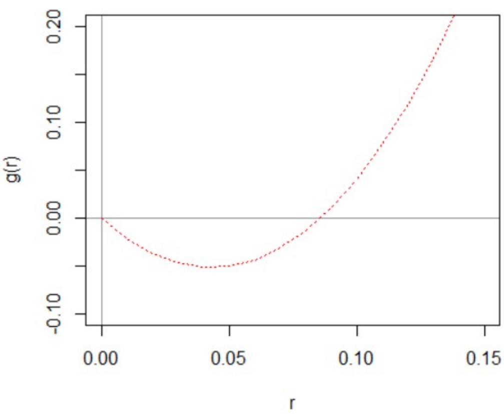
บทพิสูจน์: ในการพิสูจน์ เราจะแสดงว่า $g(\cdot)$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $g(0) = 0,$

(2) $g'(0) < 0$

(3) $g''(r) > 0$ ทุก $r > 0$

(4) $\lim_{r\to+\infty} g(r) = \infty$



(1) จากสมการ (3.16) จะได้ว่า $g(0) = 0$

(2) จากสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g'(r) &= -c\lambda_2\alpha_2(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})-rc} \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)E[Ye^{rY}]e^{-\alpha_3(1-E[e^{rY}])} + r\sigma^2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$g'(0) = -c\lambda_2\alpha_2(1-p_2) + \lambda_3\alpha_3(1-p_3)\mu_Y \tag{3.18}$$

จากสมการ (3.6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g'(0) &= -(1+\theta)\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\mu_Y + \lambda_3\alpha_3(1-p_3)\mu_Y \\ &= -\theta\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\mu_Y < 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g'(0) < 0$

(3) ให้ $r > 0$

จากสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g''(r) &= c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})-rc}\cdot(\alpha_2 e^{-rc}+1) \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-E[e^{rY}])}\cdot\{\alpha_3 E^2[Ye^{rY}]+E[Y^2e^{rY}]\} \\ &\quad +\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

จาก Y_k เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นลบ และ $r > 0$ จะได้ว่า $E[Y^2e^{rY}] > 0, E[Ye^{rY}] > 0$ และ $\sigma^2 \geq 0$

สำหรับทุก $r > 0$

$$0 < e^{-rc} < 1$$

ทำให้ได้ว่า

$$0 < 1 - e^{-rc} < 1$$
$$0 < \alpha_2(1 - e^{-rc}) < \alpha_2$$
$$rc < \alpha_2(1 - e^{-rc}) + rc < \alpha_2 + rc$$

ทำให้ได้ว่า

$$0 < rc < \alpha_2(1 - e^{-rc}) + rc$$

จะได้ว่า

$$e^{\alpha_2(1-e^{-rc})+rc} > e^0 = 1$$

ดังนั้น

$$0 < e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})-rc} < 1 \tag{3.20}$$

พิจารณา

$$0 < e^{-rc} < 1$$
$$0 < \alpha_2 e^{-rc} < \alpha_2$$

ดังนั้น

$$1 < \alpha_2 e^{-rc} + 1 < \alpha_2 + 1 \tag{3.21}$$

จาก $M_Y(r) = E[e^{rY}]$ จะได้ว่า

$$M_Y(r) > 1$$
$$-M_Y(r) < -1$$
$$1 - M_Y(r) < 0$$
$$\alpha_3(1 - M_Y(r)) < 0$$

ดังนั้น

$$e^{-\alpha_3(1-M_Y(r))} > 1 \tag{3.22}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.20), (3.21), (3.22) จะได้ว่า

$$g''(r) > 0 \quad \text{ทุก } r > 0$$

(4) จากสมการ (3.16) จะได้ว่า

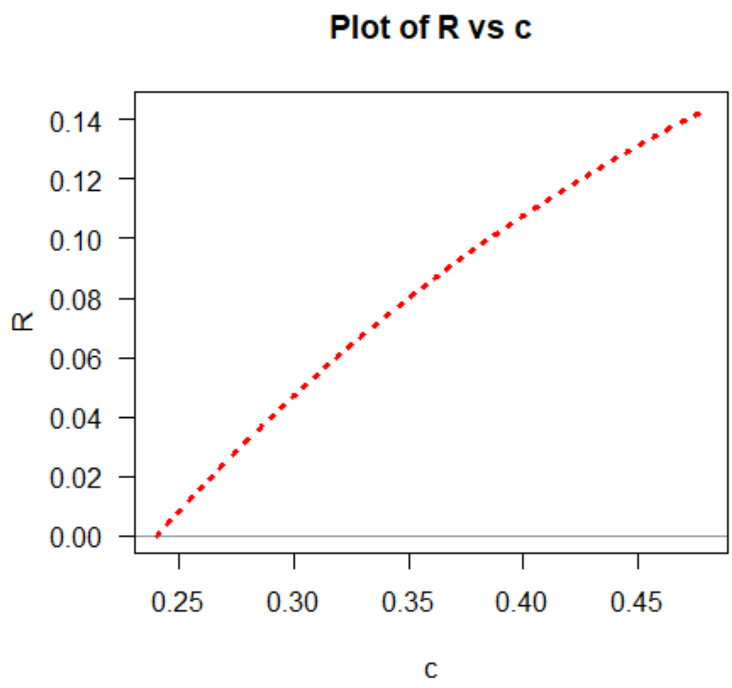
$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty} g(r) = &\lim_{r\to+\infty} \lambda_2[\ (p_2 + (1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^r)}) - 1\ ] \\
&+ \lim_{r\to+\infty} \lambda_3[\ (p_3 + (1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))}) - 1\ ] \\
&+ \lim_{r\to+\infty} \frac{t\sigma^2 r^2}{2} \\
= &\ \lambda_2[(p_2 + (1-p_2)e^{-\alpha_2}) - 1] + \infty + \infty
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.23) จะได้ว่า

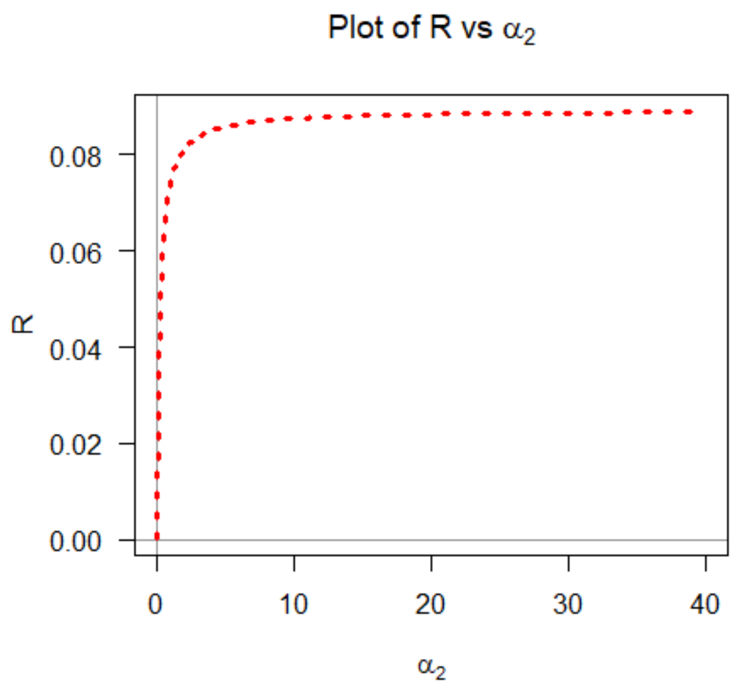
$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \infty$$

$\square$

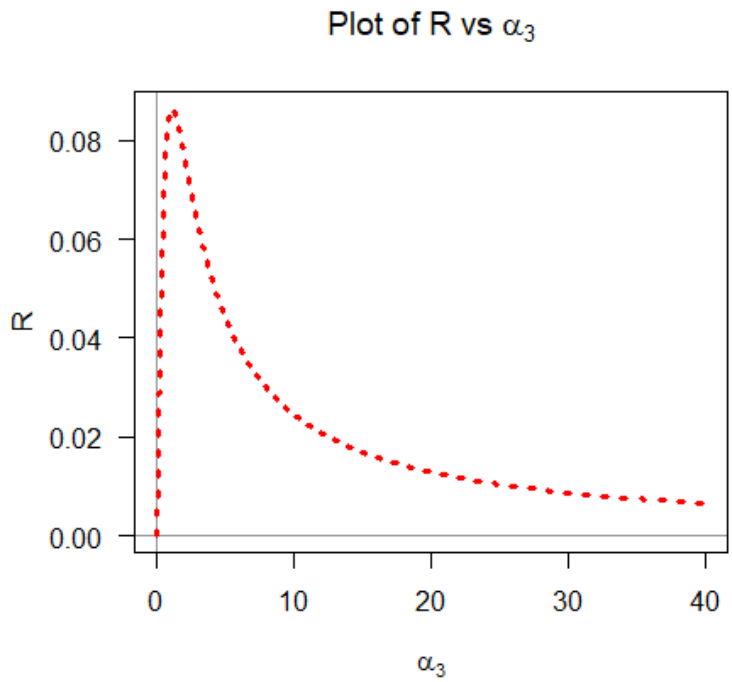
ตัวอย่าง 3.10. สมมติ $c = 0.36,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 8,\ p_2 = 0.6,\ p_3 = 0.4,\ \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = 1,\ \sigma = 5$ และ $Y \sim Exp(\eta)$ โดยที่ $\eta = 1$ โดยสมการ (3.17) จะได้สัมประสิทธิ์การปรับ $R = 0.0858$ ซึ่งเราจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร $c,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ p_2,\ p_3,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \sigma$ และ η กับ สัมประสิทธิ์การปรับ R ดังแสดงในรูป 3.1 - 3.9 ตามลำดับ



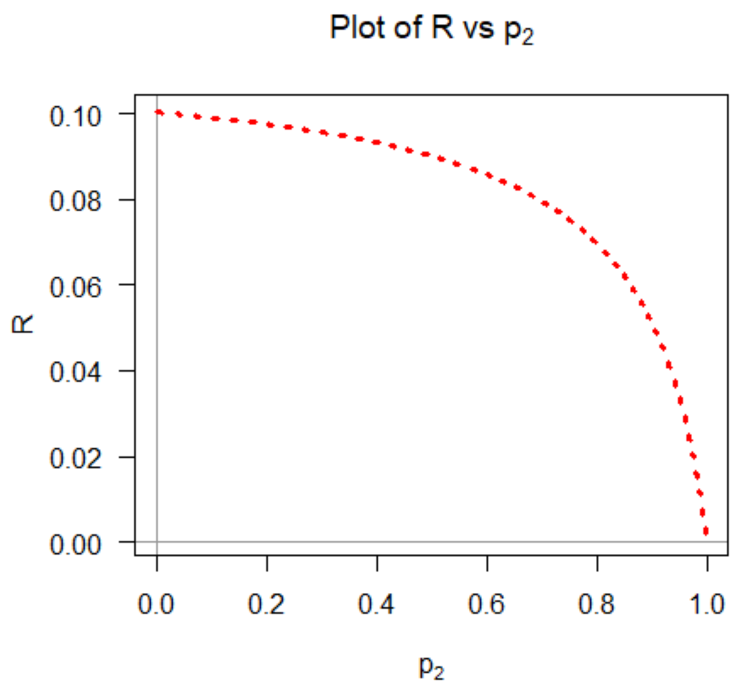
รูปที่ 3.1: ผลกระทบของ c ต่อ R



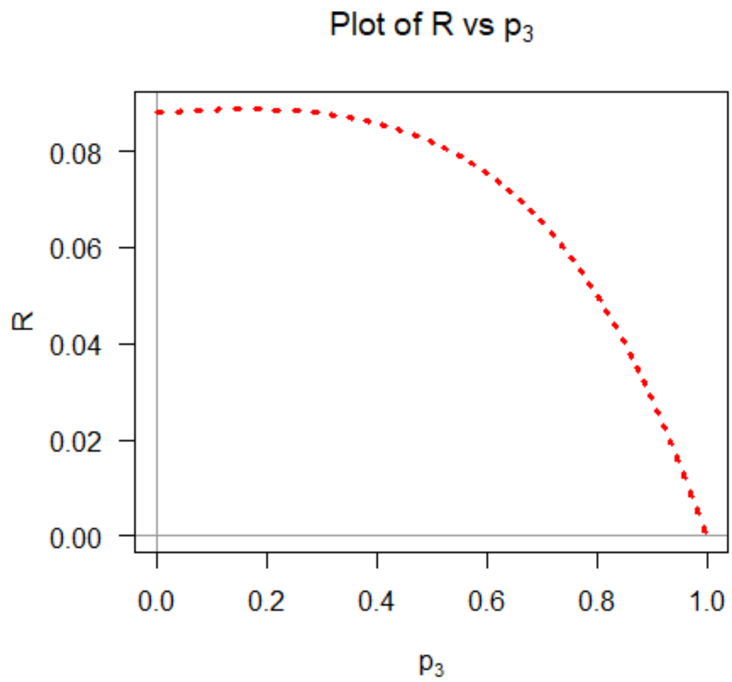
รูปที่ 3.2: ผลกระทบของ α_2 ต่อ R



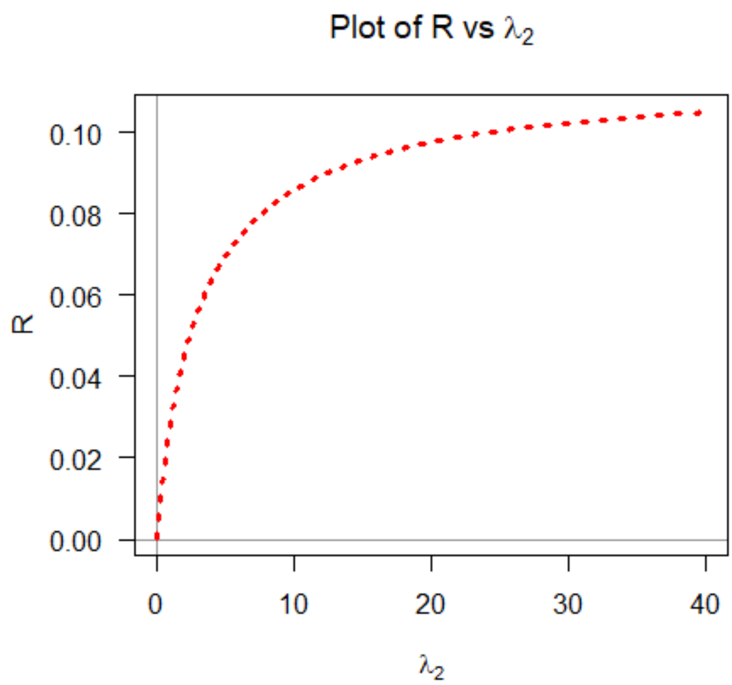
รูปที่ 3.3: ผลกระทบของ α_3 ต่อ R



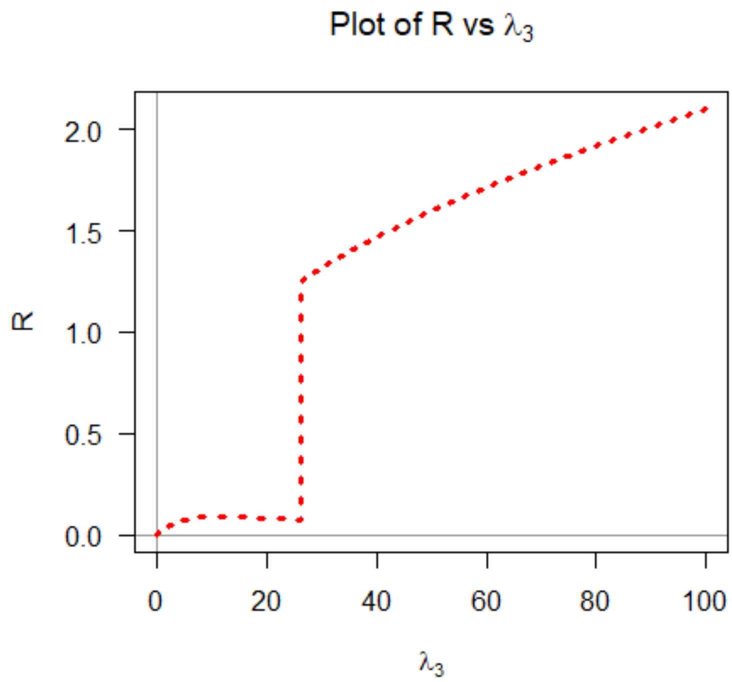
รูปที่ 3.4: ผลกระทบของ p_2 ต่อ R



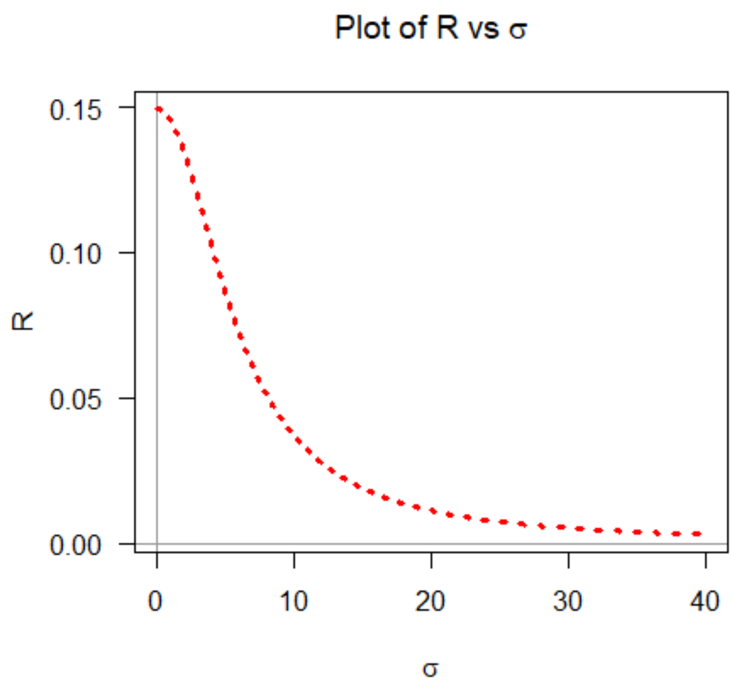
รูปที่ 3.5: ผลกระทบของ p_3 ต่อ R



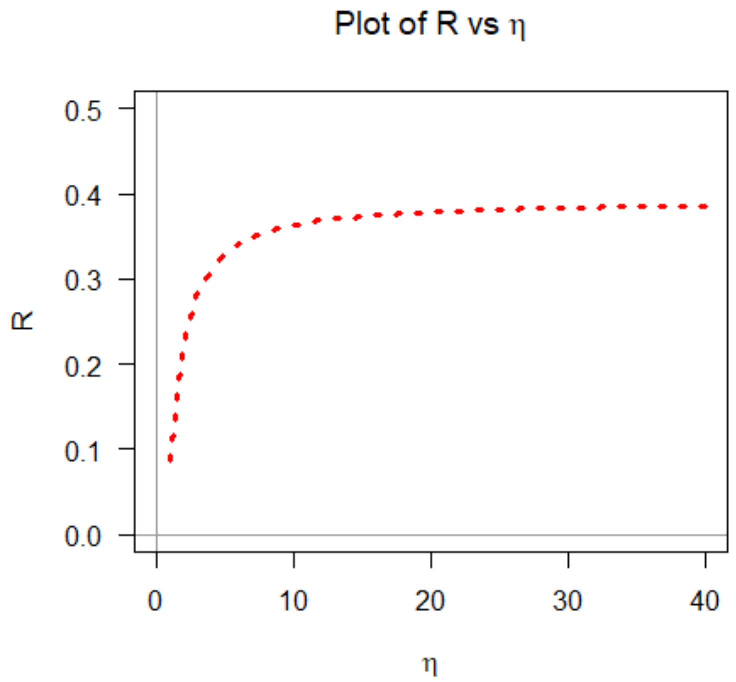
รูปที่ 3.6: ผลกระทบของ λ_2 ต่อ R



รูปที่ 3.7: ผลกระทบของ λ_3 ต่อ R



รูปที่ 3.8: ผลกระทบของ σ ต่อ R



รูปที่ 3.9: ผลกระทบของ η ต่อ R

จากรูป 3.1 - 3.9 จะเห็นว่า พารามิเตอร์ $c, \alpha_2, \lambda_2, \lambda_3$ และ η ทำให้สัมประสิทธิ์การปรับ R มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ซึ่งส่งผลให้ ค่าขอบเขตบนของความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย $\psi(u)$ มีค่าน้อยลง

ในทางตรงกันข้าม พารามิเตอร์ α_3, p_2, p_3 และ σ ทำให้สัมประสิทธิ์การปรับ R มีแนวโน้มลดลง ซึ่งส่งผลให้ ค่าขอบเขตบนของความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย $\psi(u)$ มีค่ามากขึ้น

สำหรับ กระบวนการเกิดกำไร $\{S(t); t \geq 0\}$, ให้ $F_t^s = \sigma\{S(v); v \leq t\}$

ทฤษฎีบท 3.11. กระบวนการสุ่ม $\{H_u(t); F_t^s; t \geq 0\}$ ที่นิยามโดย $H_u(t) = \dfrac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}$ เป็นมาร์ติงเกล

บทพิสูจน์: ให้ $t > v$

ต้องการพิสูจน์ว่า $E[H_u(t)|F_v^s] = H_u(v)$

พิจารณา

$$E[H_u(t)|F_v^s] = E\left[\frac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}\middle| F_v^s\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\frac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}\cdot\frac{e^{-rS(v)+rS(v)}}{e^{vg(r)-vg(r)}}\middle|F_v^s\right]\\
&= E\left[\frac{e^{-r(u+S(v))}}{e^{vg(r)}}\cdot\frac{e^{-r(S(t)-S(v))}}{e^{(t-v)g(r)}}\middle|F_v^s\right] \qquad (3.24)\\
&= \frac{1}{e^{vg(r)}e^{(t-v)g(r)}}\cdot E[e^{-r(u+S(v))}\cdot e^{-r(S(t)-S(v))}|F_v^s]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $S(v)$ กระบวนการส่วนเกิน ตั้งแต่เวลา 0 ถึง v และ เราทราบว่า F_v^s หรือ พีชคณิตซิกม่า ($\sigma-algebra$) ที่ก่อกำเนิดโดย กระบวนการส่วนเกิน $S(v)$ ตั้งแต่เวลา 0 ถึง v เกิดขึ้นแล้ว ทำให้ทราบข้อมูลตั้งแต่เวลา 0 ถึง v จึงทำให้ $S(v)$ ไม่ใช่ตัวแปรสุ่ม แต่เป็นค่าคงที่

ดังนั้น

$$
E[H_u(t)|F_v^s] = \frac{e^{-r(u+S(v))}}{e^{vg(r)}}\cdot\frac{1}{e^{(t-v)g(r)}}E[e^{-r(S(t)-S(v))}|F_v^s]
$$

สังเกตว่า $S(t)-S(v)$ เป็นอิสระกับ F_v^s ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 2.72 ข้อ 6 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E[H_u(t)|F_v^s] &= \frac{e^{-r(u+S(v))}}{e^{vg(r)}}\cdot\frac{1}{e^{(t-v)g(r)}}E[e^{-r(S(t)-S(v))}]\\
&= H_u(v)\cdot\frac{1}{e^{(t-v)g(r)}}E[e^{-r(S(t)-S(v))}]
\end{aligned}
$$

ต่อมาจะหาค่า $E[e^{-r(S(t)-S(v))}]$

จากบทนิยามของ $S(t)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E[e^{-r(S(t)-S(v))}] &= E[e^{-r\{(cN_2(t)-\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k+\sigma W(t))-(cN_2(v)-\sum_{k=1}^{N_3(v)}Y_k+\sigma W(v))\}}]\\
&= E[e^{-rc(N_2(t)-N_2(v))}\cdot e^{r(\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_3(v)}Y_k)}\cdot e^{-r\sigma(W(t)-W(v))}]\\
&= E[e^{-rc(N_2(t)-N_2(v))}]\cdot E[e^{r(\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_3(v)}Y_k)}]\cdot E[e^{-r\sigma(W(t)-W(v))}]\\
&= M_{N_2(t)-N_2(v)}(-rc)\cdot M_{\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_3(v)}Y_k}(r)\cdot M_{W(t)-W(v)}(-r\sigma)
\end{aligned}
$$

จาก ทฤษฎีบท 3.4 ข้อ2, ทฤษฎีบท 2.68 ข้อ3 และ ทฤษฎีบท 2.61 ข้อ3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
M_{N_2(t)-N_2(v)}(-rc) &= \exp\{(t-v)\lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^u)})-1]\}\\
M_{\sum_{k=1}^{N_3(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_3(v)}Y_k}(r) &= G_{N_3(t)-N_3(v)}[M_{Y_k}(r)]\\
&= \exp\{(t-v)\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]\}\\
M_{W(t)-W(v)}(-r\sigma) &= \exp\{\tfrac{(t-v)\sigma^2r^2}{2}\}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
E[e^{-r(S(t)-S(v))}] &= exp\{(t-v)\lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1]\} \\
&\quad \cdot exp\{(t-v)\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]\} \cdot exp\{\tfrac{(t-v)\sigma^2 r^2}{2}\} \\
&= exp\{(t-v)\Big[\lambda_2[(p_2+(1-p_2)e^{-\alpha_2(1-e^{-rc})})-1] \\
&\quad +\lambda_3[(p_3+(1-p_3)e^{-\alpha_3(1-M_{Y_k}(r))})-1]+\tfrac{\sigma^2 r^2}{2}\Big]\}
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$E[e^{-r(S(t)-S(v))}] = e^{(t-v)g(r)}$$

ดังนั้น

$$E[H_u(t)|F_v^s] = H_u(v) \cdot \frac{1}{e^{(t-v)g(r)}} e^{(t-v)g(r)}$$

ดังนั้น

$$E[H_u(t)|F_v^s] = H_u(v)$$

นั่นคือ กระบวนการสุ่ม $H_u(t)$ เป็นมาร์ติงเกล □

ทฤษฎีบท 3.12. ถ้า r และ s สอดคล้องกับ สมการ $g(r) = s$ แล้ว $\{e^{-rS(t)-ts}; t \geq 0\}$ เป็นมาร์ติงเกล

บทพิสูจน์: ให้ $t > v$ และ $g(r) = s$
ต้องการพิสูจน์ว่า $E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] = e^{-rS(v)-vs}$
จากทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] = e^{-rS(v)-vs}$
จาก $g(r) = s$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] &= E[e^{-rS(t)-tg(r)}|F_v^s] \\
&= E[e^{-rS(t)-tg(r)} \cdot e^{-rS(v)+rS(v)-vg(r)+vg(r)}|F_v^s] \\
&= E[e^{-rS(v)-vg(r)} \cdot e^{-rS(t)-tg(r)+rS(v)+vg(r)}|F_v^s]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก เราทราบว่า F_v^s หรือ พีชคณิตซิกม่า ที่ก่อกำเนิดโดย กระบวนการส่วนเกิน $S(v)$ ตั้งแต่เวลา 0 ถึง v เกิดขึ้นแล้ว ทำให้ทราบข้อมูลตั้งแต่เวลา 0 ถึง v จึงทำให้ $S(v)$ ไม่ใช่ตัวแปรสุ่ม แต่เป็นค่าคงที่(ข้อมูลที่เราทราบ)
ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] &= e^{-rS(v)-vg(r)} E[e^{-rS(t)-tg(r)+rS(v)+vg(r)}|F_v^s] \\
&= e^{-rS(v)-vg(r)} E[e^{-r[S(t)+S(v)]} \cdot e^{-[t-v]g(r)}|F_v^s] \\
&= \frac{e^{-rS(v)-vg(r)}}{e^{[t-v]g(r)}} E[e^{-r[S(t)+S(v)]}|F_v^s]
\end{aligned}
$$

สังเกตว่า $S(t)-S(v)$ เป็นอิสระกับ F_v^s ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 2.72 ข้อ 6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] &= \frac{e^{-rS(v)-vg(r)}}{e^{[t-v]g(r)}}E[e^{-r[S(t)+S(v)]}] \\ &= \frac{e^{-rS(v)-vg(r)}}{e^{[t-v]g(r)}}\cdot e^{(t-v)g(r)} \\ &= e^{-rS(v)-vg(r)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E[e^{-rS(t)-ts}|F_v^s] = e^{-rS(v)-vs} \tag{3.25}$$

$\square$

บทตั้ง 3.13. เวลาที่เกิดการล้มละลาย T เป็น stopping time ของ F_t^s

บทพิสูจน์: ให้ T เป็นเวลาแรกที่เกิดเหตุการณ์การล้มละลายที่ $U(T) < 0$ และ $F_t^s = \sigma\{S(v); v \leq t\}$ จากสมการ (3.3) และ (3.9) จะได้ว่า

$$U(t) = u + S(t)$$

ดังนั้น เหตุการณ์ $\{T \leq t\}$ เป็นสมาชิกของ F_t^s
ดังนั้น F_t^s หรือ $\sigma - algebra$ ที่ก่อกำเนิดโดย กระบวนการส่วนเกิน $S(v)$ ตั้งแต่เวลา 0 ถึง t เกิดขึ้น ทำให้ทราบข้อมูลตั้งแต่เวลา 0 ถึง t $\square$

ทฤษฎีบท 3.14. สำหรับทุก r จะมีความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลายขั้นพื้นฐาน (the ultimate ruin probability) สอดคล้องกับ

$$\psi(u) \leq e^{-ru}B(r) \tag{3.26}$$

โดยที่ $B(r) = E[\sup_{t\geq 0}\{exp[tg(r)]\}]$

บทพิสูจน์: ให้ t_0 เป็นเวลาใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0 และ T เป็น stopping time
จะได้ว่า $t_0 \wedge T = \min(t_0, T)$ เป็น stopping time
ดังนั้น $t_0 \wedge T$ เป็น stopping time ที่มีขอบเขต

พิจารณา e^{-ru}
จาก $H_u(t) = \dfrac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}$ และ บทตั้ง 3.7. จะได้ว่า

$$e^{-ru} = E[H_u(0)]$$

โดยทฤษฎีบท 2.90 The Martingale Stopping Time Theorem จะได้ว่า

$$E[H_u(0)] = E[H_u(T \wedge t_0)]$$

ดังนั้น

$$e^{-ru} = E[H_u(T \wedge t_0)] \tag{3.27}$$

จาก

$$T \wedge t_0 = \min(T, t_0) = \begin{cases} T & \text{เมื่อ } T \leq t_0 \\ t_0 & \text{เมื่อ } T > t_0 \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[H_u(T \wedge t_0)] &= E[H_u(T \wedge t_0) \cdot [\mathbb{1}_{T \leq t_0} + \mathbb{1}_{T > t_0}]] \\ &= E[H_u(T \wedge t_0) \cdot \mathbb{1}_{T \leq t_0}] + E[H_u(T \wedge t_0) \cdot \mathbb{1}_{T > t_0}] \\ &= E[H_u(T)|T \leq t_0] \cdot P(T \leq t_0) + E[H_u(t_0)|T > t_0] \cdot P(T > t_0) \end{aligned}$$

จาก $H_u(t) = \dfrac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}} > 0$ ทุก $t > 0$ และ $1 \geq P(T > t_0) \geq 0$ จะได้ว่า

$$E[H_u(T \wedge t_0)] \geq E[H_u(T)|T \leq t_0] \cdot P(T \leq t_0) + 0$$

ดังนั้น จากสมการ (3.27) จะได้ว่า

$$e^{-ru} \geq E[H_u(T)|T \leq t_0] \cdot P(T \leq t_0)$$

ดังนั้น

$$P(T \leq t_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E[H_u(T)|T \leq t_0]} \tag{3.28}$$

ต่อมาจะแสดงว่า $E[H_u(T)|T \leq t_0] \geq \inf_{0 \leq t \leq t_0}\{exp[tg(r)]\}$

พิจารณา $E[H_u(T)|T \leq t_0]$

จาก $H_u(t) = \dfrac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}$ จะได้ว่า

$$E[H_u(T)|T \leq t_0] = E\Big[\frac{e^{-r(u+S(T))}}{e^{Tg(r)}}\Big| T \leq t_0\Big] \tag{3.29}$$

จาก $U(t) = u + S(t)$ และ $T = \inf\{t \geq 0 \mid U(t) < 0\ \}$

ทำให้ได้ว่า $u + S(T) = U(T) < 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} u + S(T) &< 0 \\ -r(u + S(T)) &> 0 \\ e^{-r(u+S(T))} &> 1 \end{aligned}$$

จาก ข้อสังเกต 2.28 ข้อ3 ถ้า $X \geq Y$ แล้ว $E(X) \geq E(Y)$
จะได้ว่า

$$E[e^{-r(u+S(T))}] > 1 \tag{3.30}$$

จากสมการ (3.29) และ (3.30)

$$E[H_u(T)|T \leq t_0] \geq E[e^{-Tg(r)}|T \leq t_0]$$

จากสมบัติ $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x) \leq g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$ จะได้ว่า

$$E[e^{-Tg(r)}|T \leq t_0] \geq E[\inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}] = \inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}$$

ดังนั้น

$$E[H_u(T)|T \leq t_0] \geq \inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{E[H_u(T)|T \leq t_0]} \leq \frac{1}{\inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}}$$

จาก สมการ (3.28) และ ทฤษฎีบท 2.98 ที่ว่า $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)}$ จะได้ว่า

$$P(T \leq t_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E[H_u(T)|T \leq t_0]} \leq \frac{e^{-ru}}{\inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}} = e^{-ru} \cdot \sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)}$$

ดังนั้น

$$P(T \leq t_0) \leq e^{-ru} \cdot \sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)} \tag{3.31}$$

จากบทนิยาม 2.85 นิยาม $\psi(u, t_0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \psi(u, t_0) &\leq e^{-ru} \cdot \sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)} \\ \lim_{t_0\to\infty} \psi(u, t_0) &\leq e^{-ru} \cdot \lim_{t_0\to\infty} sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)} \end{aligned}$$

โดย ทฤษฎีบท 2.86 ข้อ 2 $\lim_{t\to\infty} \psi(u, t) = \psi(u)$ จะได้ว่า

$$\psi(u) \leq e^{-ru} \cdot \sup_{t\geq 0} e^{tg(r)}$$

ดังนั้น ให้ $B(r) = E[\sup_{t\geq 0} e^{tg(r)}] = \sup_{t\geq 0} e^{tg(r)}]$
ดังนั้น

$$\psi(u) \leq e^{-ru} B(r)$$

$\square$

ทฤษฎีบท 3.15. [Huang, Y., & Yu, W. (2013).]
ความน่าจะเป็นของแบบจำลองความเสี่ยง

$$U(t) = u + cN_2(t) - \sum_{k=1}^{N_3(t)} Y_k + \sigma W(t)$$

คือ

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}$$

บทพิสูจน์: ให้ T เป็นเวลาแรกที่เกิดการล้มละลาย และ t_0 เป็นเวลาใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0
จะได้ว่า $t_0 \wedge T = min(t_0, T)$ เป็น stopping time
ดังนั้น $t_0 \wedge T$ เป็น stopping time ที่มีขอบเขต

พิจารณา e^{-ru}
จาก $H_u(t) = \dfrac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}$ และ บทตั้ง 3.7. จะได้ว่า

$$e^{-ru} = E[H_u(0)]$$

โดยทฤษฎีบท 2.90 The Martingale Stopping Time Theorem จะได้ว่า

$$E[H_u(0)] = E[H_u(T \wedge t_0)]$$

ดังนั้น

$$e^{-ru} = E[H_u(T \wedge t_0)] \tag{3.32}$$

จาก

$$T \wedge t_0 = \quad min(T, t_0) \quad = \begin{cases} T & \text{เมื่อ } T \leq t_0 \\ t_0 & \text{เมื่อ } T > t_0 \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[H_u(T \wedge t_0)] &= E[H_u(T \wedge t_0) \cdot [\mathbb{1}_{T \leq t_0} + \mathbb{1}_{T > t_0}]] \\ &= E[H_u(T \wedge t_0) \cdot \mathbb{1}_{T \leq t_0}] + E[H_u(T \wedge t_0) \cdot \mathbb{1}_{T > t_0}] \\ &= E[H_u(T) | T \leq t_0] \cdot P(T \leq t_0) + E[H_u(t_0) | T > t_0] \cdot P(T > t_0) \end{aligned}$$

ให้ $r = R$ ดังนั้น

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)} | T \leq t_0] \cdot P(T \leq t_0) + E[e^{-RU(t_0)}) | T > t_0] \cdot P(T > t_0) \tag{3.33}$$

สังเกตว่า $0 \leq E[e^{-RU(t_0)})|T > t_0] \leq 1$ และ ทฤษฎีบท 2.64 อสมการมาร์คอฟ จะได้ว่า

$$\lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(t_0)})|T > t_0]\cdot P(T > t_0)\right] = 0 \quad \text{เกือบแน่นอน}$$

หรือก็คือ $$P\left(\lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(t_0)}|T > t_0]\cdot P(T > t_0)\right] = 0\right) = 1$$

จากสมการ (3.33) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{t_0\to\infty} e^{-Ru} &= \lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(T)}|T \leq t_0]\cdot P(T \leq t_0) + E[e^{-RU(t_0)})|T > t_0]\cdot P(T > t_0)\right] \\
&= \lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(T)}|T \leq t_0]\cdot P(T \leq t_0)\right] + \lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(t_0)})|T > t_0]\cdot P(T > t_0)\right] \\
&= \lim_{t_0\to\infty}\left[E[e^{-RU(T)}|T \leq t_0]\cdot P(T \leq t_0)\right]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= E[e^{-RU(T)}|T \leq \infty]\cdot P(T \leq \infty) \\
&= E[e^{-RU(T)}|T \leq \infty]\cdot \psi(u)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T \leq \infty]}$$

$\square$

บทแทรก 3.16. พิจารณา

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \tag{3.34}$$

บทพิสูจน์: จาก $T = \inf\{t \geq 0 \mid U(t) < 0\}$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
U(T) &< 0 \\
-RU(T) &> 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$e^{-RU(T)} > 1$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{e^{-RU(T)}} < 1$$

จากทฤษฎีบท 3.15 จะได้ว่า $\psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}$

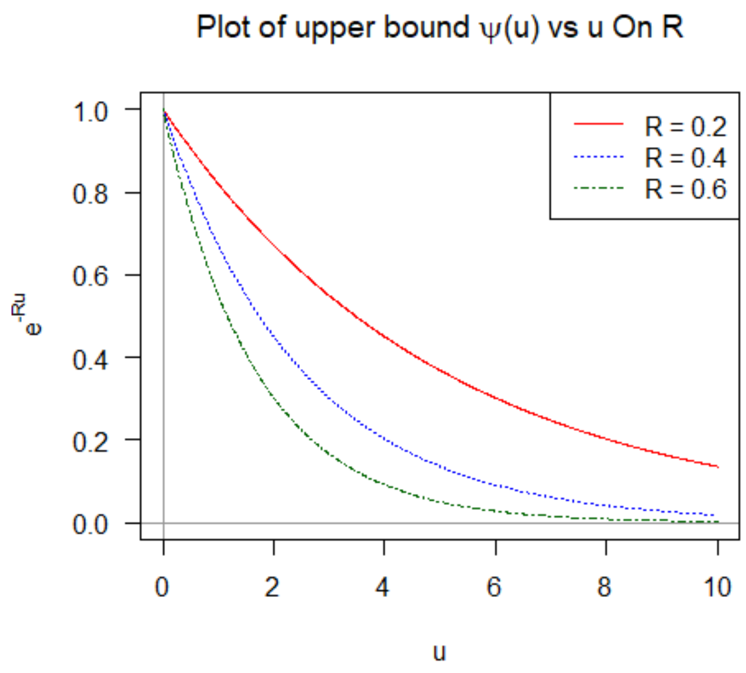
$$\begin{aligned}
\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]} &< \frac{e^{-Ru}}{E[\ 1\ |T < \infty]} \\
\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]} &< e^{-Ru}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\psi(u) < e^{-Ru}$$

$\square$

ตัวอย่าง 3.17. สมมติ $R = 0.2, R = 0.4$ และ $R = 0.6$ โดยสมการที่ (3.34) เราจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ตัวแปร u และ ความน่าจะเป็นที่เกิดการล้มละลาย บนสัมประสิทธิ์การปรับ R ดังแสดงในรูป 3.10



รูปที่ 3.10: ผลกระทบของ R ต่อ ความน่าจะเป็นการล้มละลาย $\psi(u)$

3.3 เวลาที่ใช้ที่ทำให้ถึงระดับที่ต้องการ (The Time to Reach a Given Level)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาเวลาที่ใช้ที่ทำให้มูลค่าทุนถึงระดับที่เราต้องการ แล้วจึงศึกษาคุณสมบัติต่างๆทั้ง ค่าคาดคะเน ความแปรปรวน และ การประยุกต์ใช้ต่อไป

สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ให้

$$\tau = \text{inf}\{\ t \geq 0 \mid U(t) = x\ \} \tag{3.35}$$

แล้ว τ จะเป็นเวลาแรกที่มูลค่าทุนถึงระดับที่กำหนด

ทฤษฎีบท 3.18. การแปลงลาปลาซของ τ คือ

$$E[e^{-s\tau}] = e^{r(x-u)} \tag{3.36}$$

โดยที่ r และ s สอดคล้องกับ

$$g(r) = s \tag{3.37}$$

บทพิสูจน์: สำหรับ กระบวนการส่วนเกิน $\{U(t); t > 0\}$
โดยใช้ ทฤษฎีบท 2.90 The Martingale Stopping Time Theorem
เราจะเห็นว่า τ เป็น stopping time ของ F_t^s ดังนั้น
ให้

$$Q(t) = e^{-rU(t)-ts}$$

โดยทฤษฎีบท 3.11 ทำให้ได้ว่า
กระบวนการส่วนเกิน $\{Q(t); t > 0\}$ เป็น มาติงเกล
ทฤษฎีบท 2.90 The Martingale Stopping Time Theorem จะได้ว่า

$$E[Q(\tau)] = E[Q(0)] \tag{3.38}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(\tau)-\tau s}] &= E[e^{-rU(0)-0s}] \\ &= E[e^{-ru}] \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E[e^{-rU(\tau)-\tau s}] = e^{-ru} \tag{3.39}$$

จากสมการ (3.35) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^{-rx} \cdot E[e^{-\tau s}] &= e^{-ru} \\ E[e^{-\tau s}] &= e^{-ru+rx} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E[e^{-\tau s}] = e^{r(x-u)} \tag{3.40}$$

□

ทฤษฎีบท 3.19. ค่าคาดคะเน และ ความแปรปรวน ของ τ สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} E[\tau] &= \frac{x-u}{\gamma} \\ Var[\tau] &= \frac{(x-u)\beta}{\gamma^3} \end{aligned} \tag{3.41}$$

บทพิสูจน์: ให้ $\varphi(s) = lnE[e^{-\tau s}]$
โดยทฤษฎีบท 3.18 จะได้ว่า

$$\varphi(s) = ln\ e^{r(x-u)} = r(x-u)$$

โดยที่ $g(r) = s$
จะได้ว่า

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{dr} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{d[r(x-u)]}{dr} \cdot \frac{1}{\frac{dg(r)}{dr}} = \frac{(x-u)}{g'(r)}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2} &= \frac{d\varphi'(s)}{ds} = \frac{d\varphi'(s)}{dr} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{d\varphi'(s)}{dr} \cdot \frac{1}{\frac{dg(r)}{dr}} \\ &= \frac{d\left[\frac{(x-u)}{g'(r)}\right]}{dr} \cdot \frac{1}{g'(r)} = \frac{-(x-u)g''(r)}{[g'(r)]^2} \cdot \frac{1}{g'(r)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(s)}{ds} &= \frac{(x-u)}{g'(r)} \\ \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2} &= \frac{-(x-u)g''(r)}{[g'(r)]^3}\end{aligned} \quad (3.42)$$

จาก $\varphi(s) = lnE[e^{-\tau s}] = K_{-\tau}(s)$

ให้ $s = r = 0$

โดย ทฤษฎีบท 2.55 สมบัติฟังก์ชันแจกแจงคิวมูแลนต์ ข้อ 2 และ ข้อ 3

จะได้ว่า

$$E[-\tau] = \frac{d\varphi(s)}{ds}\Big|_{s=r=0} = \frac{(x-u)}{g'(0)}$$

จากสมการ (3.12) และ (3.18) จะได้ว่า

$$E[-\tau] = \frac{(x-u)}{-\gamma}$$

ดังนั้น

$$E[\tau] = \frac{(x-u)}{\gamma}$$

และ

$$Var[-\tau] = \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}\Big|_{s=r=0} = \frac{-(x-u)g''(0)}{[g'(0)]^3}$$

จากสมการ (3.19) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}g''(0) &= c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)\cdot(\alpha+1)+\sigma^2 \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\cdot\{\alpha_3 E^2[Y]+E[Y^2]\}\end{aligned}$$

จาก $Var[Y] = E[Y^2] - E^2[Y]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}g''(0) &= c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)\cdot(\alpha+1)+\sigma^2 \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\cdot\{\alpha_3\mu_Y^2+\sigma_Y^2+\mu_Y^2\} \\ &= c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)\cdot(\alpha+1)+\sigma^2 \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\cdot\{(\alpha_3+1)\mu_Y^2+\sigma_Y^2\} \\ &= c^2\lambda_2\alpha_2(1-p_2)\cdot(\alpha+1)+\sigma^2 \\ &\quad +\lambda_3\alpha_3(1-p_3)(\alpha_3+1)\ \mu_Y^2+\lambda_3\alpha_3(1-p_3)\sigma_Y^2\end{aligned}$$

จากสมการ (3.12) จะได้ว่า $g''(0) = \beta$

ดังนั้น

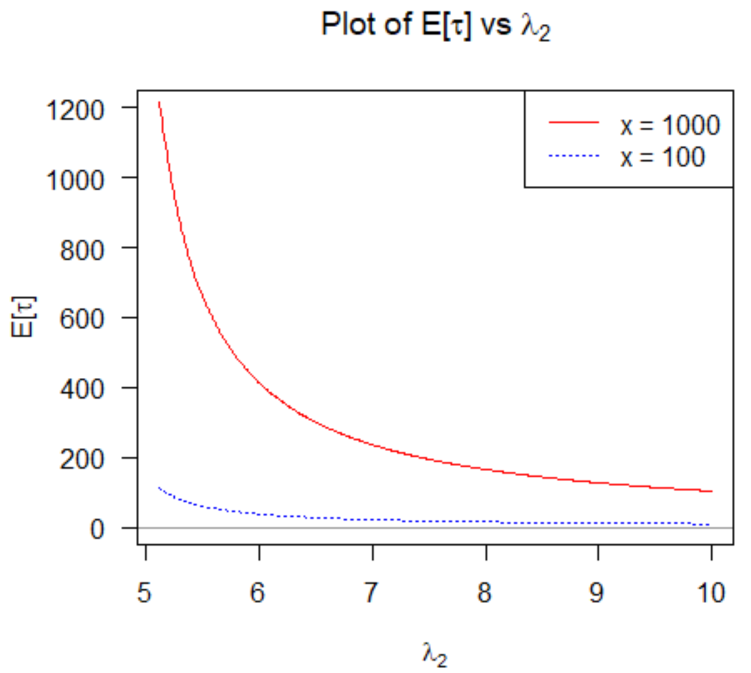
$$Var[\tau] = Var[-\tau] = \frac{-(x-u)g''(0)}{[g'(0)]^3} = \frac{(x-u)\beta}{\gamma^3}$$

ดังนั้น

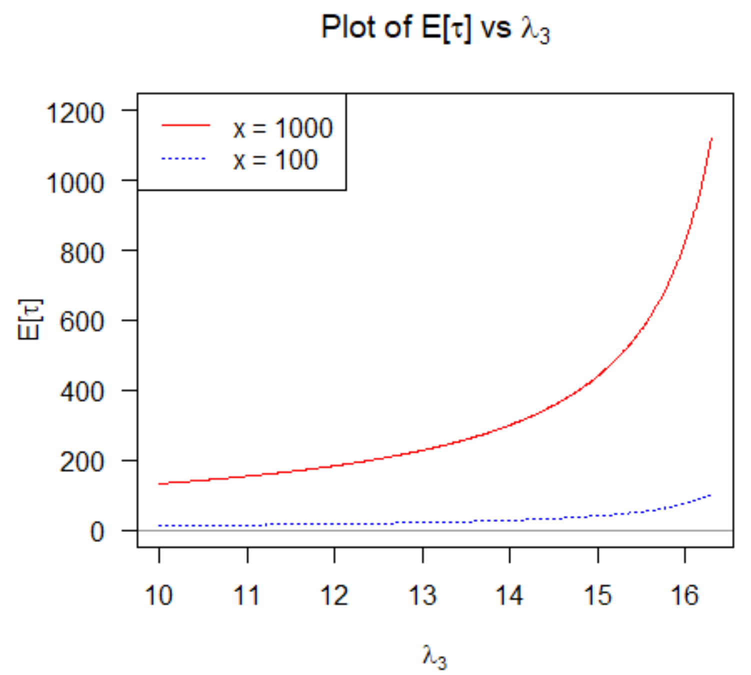
$$\begin{aligned} E[\tau] &= -\frac{d\varphi(s)}{ds}\Big|_{s=r=0} = \frac{(x-u)}{\gamma} \\ Var[\tau] &= \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}\Big|_{s=r=0} = \frac{(x-u)\beta}{\gamma^3} \end{aligned} \tag{3.43}$$

$\square$

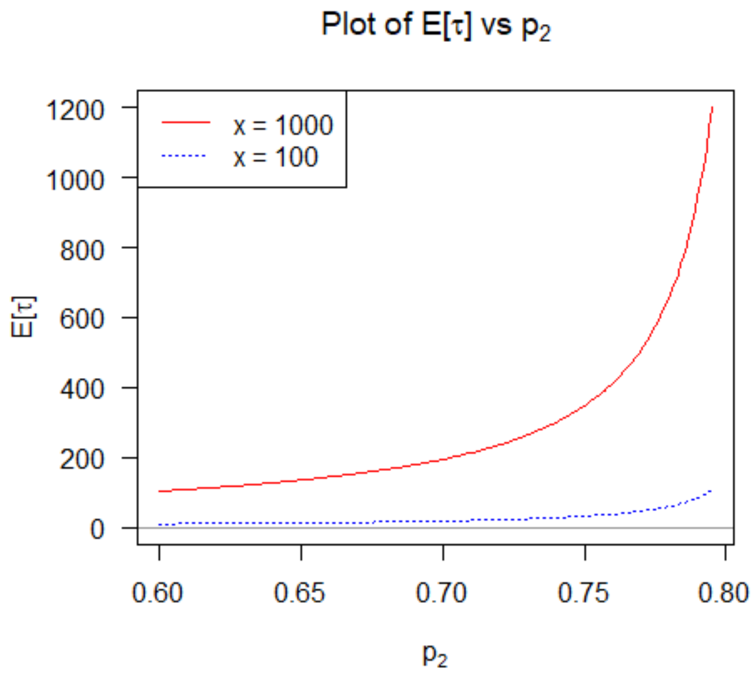
ตัวอย่าง 3.20. สมมติ $c = 0.9,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 8,\ p_2 = 0.6,\ p_3 = 0.3,\ \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = 3,\ \sigma = 5$ และ $Y \sim Exp(\eta)$ โดยที่ $\mu_Y = 0.5$ และ $\sigma_Y = 0.5$ โดยสมการ (3.41) เราจะแสดงความสัมพันธ์ของ พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง บน $E[\tau]$ และ $Var[\tau]$ ดังรูป 3.11 - 3.28



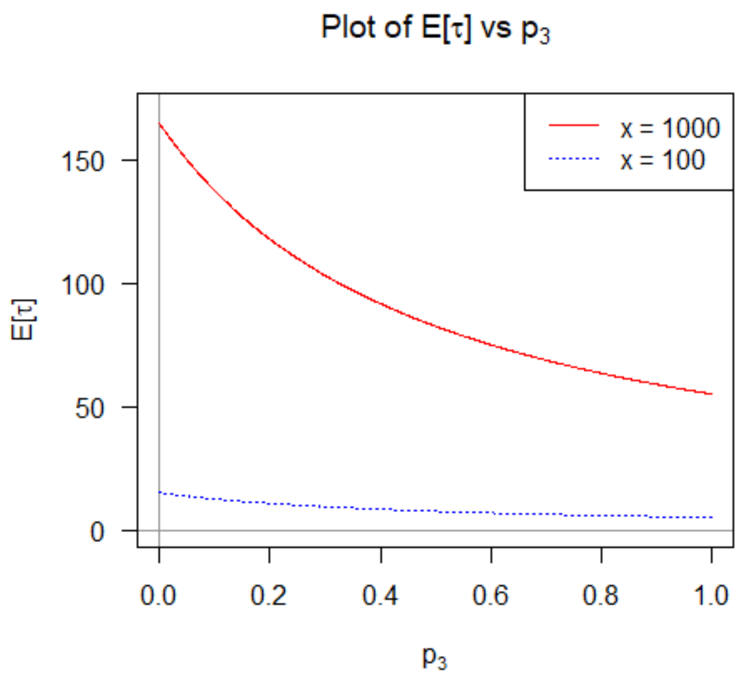
รูปที่ 3.11: ผลกระทบของ λ_2 ต่อ $E[\tau]$



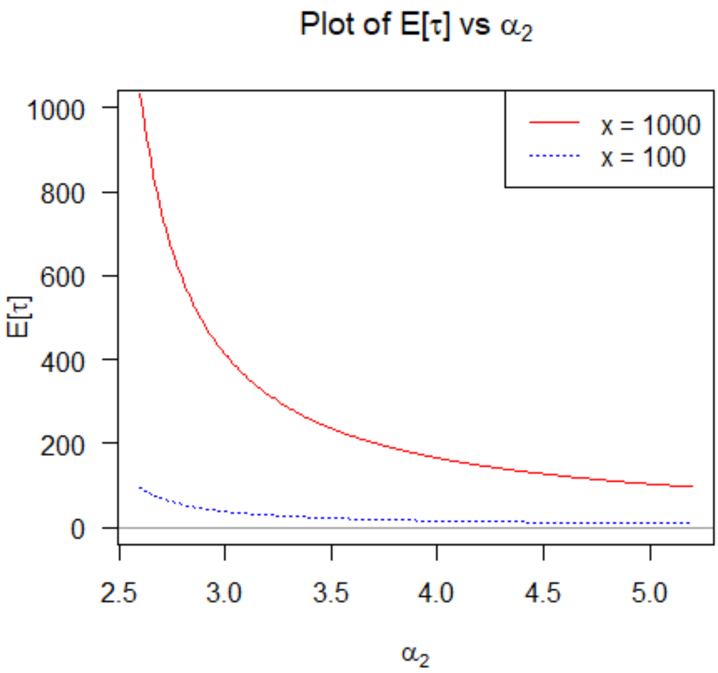
รูปที่ 3.12: ผลกระทบของ λ_3 ต่อ $E[\tau]$



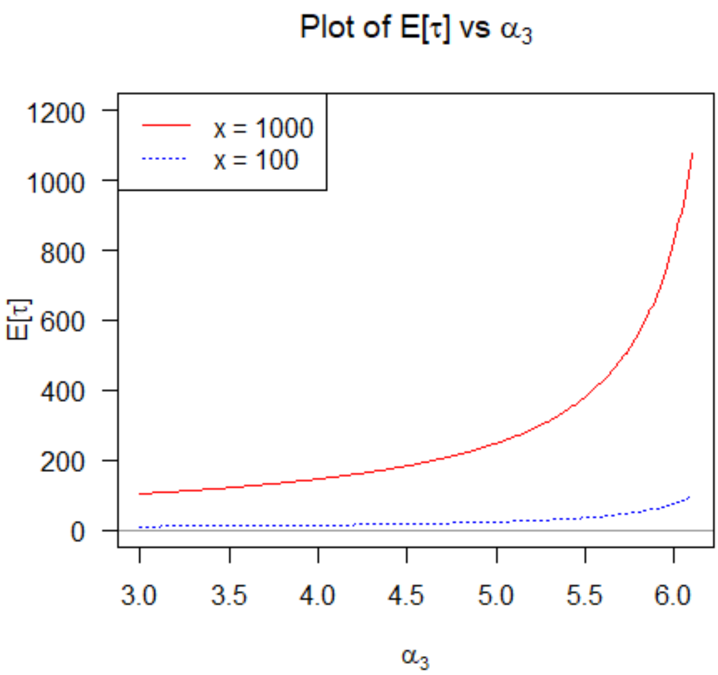
รูปที่ 3.13: ผลกระทบของ p_2 ต่อ $E[\tau]$



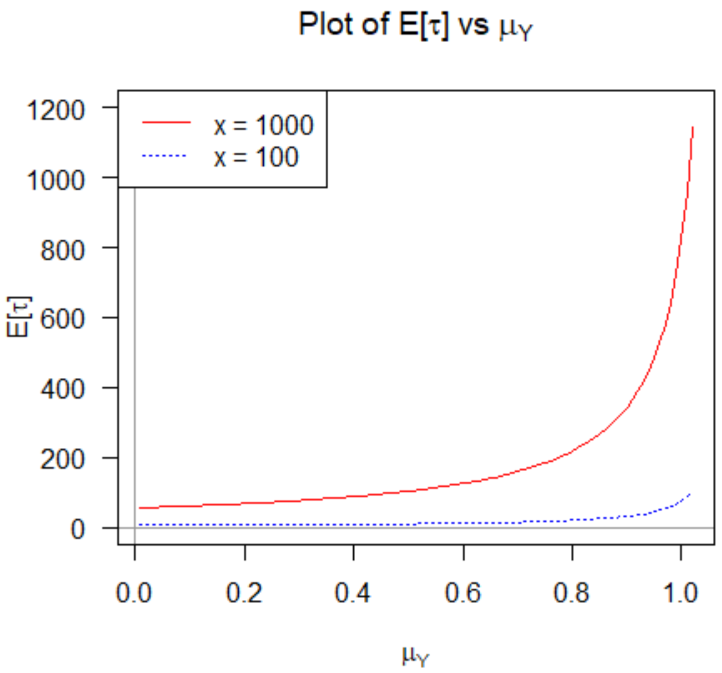
รูปที่ 3.14: ผลกระทบของ p_3 ต่อ $E[\tau]$



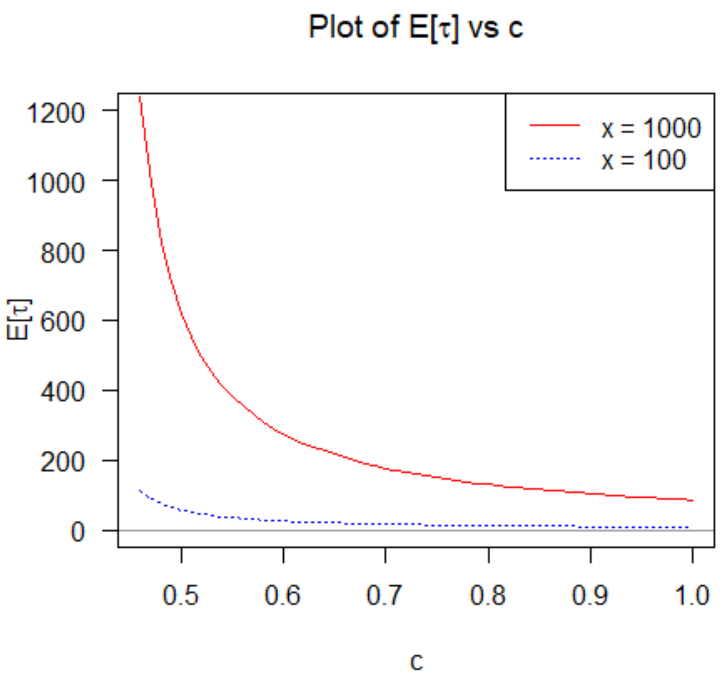
รูปที่ 3.15: ผลกระทบของ α_2 ต่อ $E[\tau]$



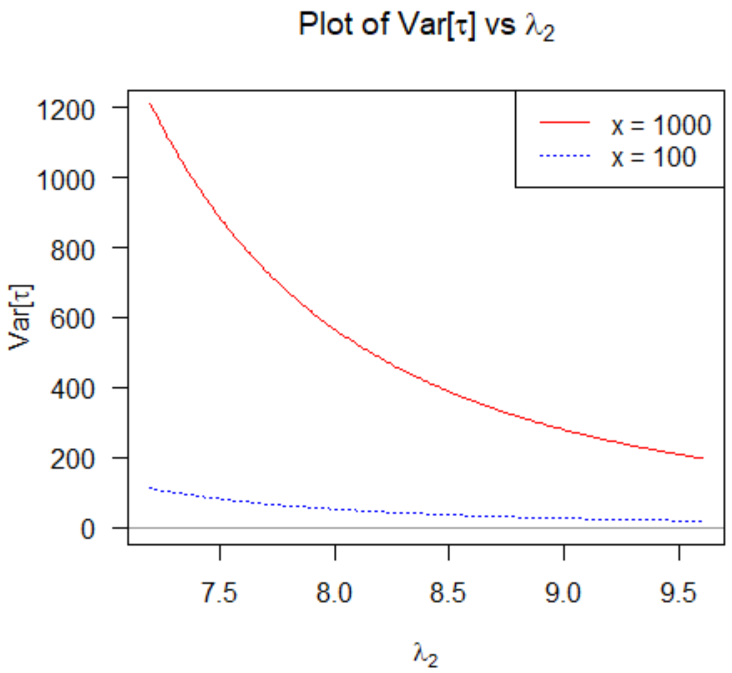
รูปที่ 3.16: ผลกระทบของ α_3 ต่อ $E[\tau]$



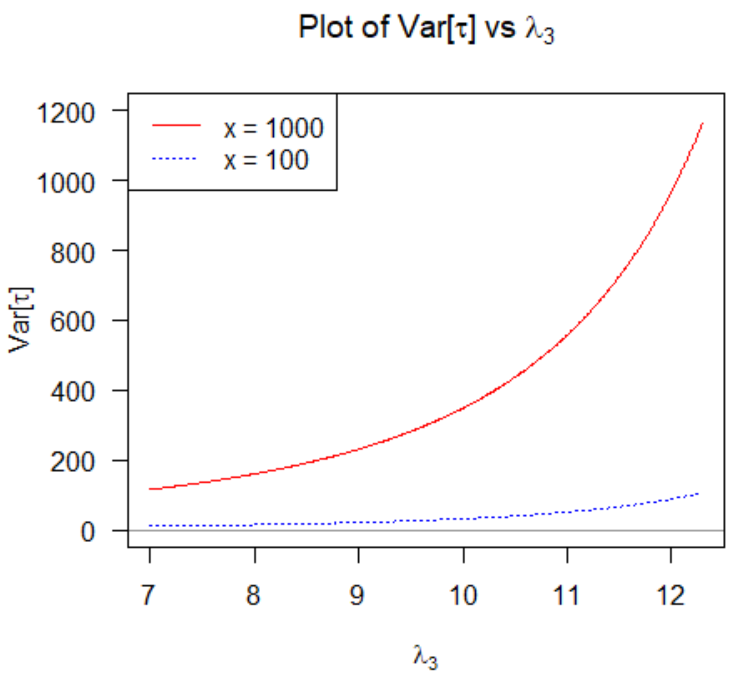
รูปที่ 3.17: ผลกระทบของ μ_Y ต่อ $E[\tau]$



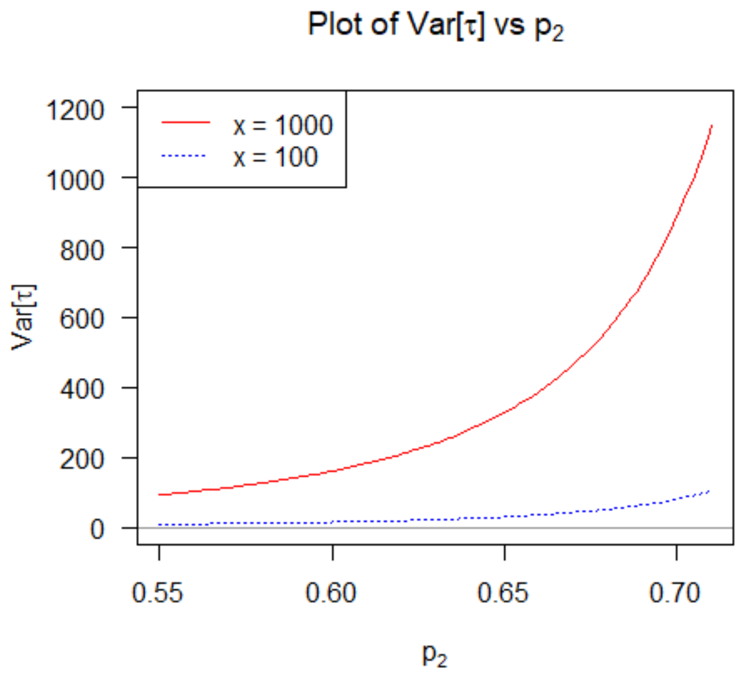
รูปที่ 3.18: ผลกระทบของ c ต่อ $E[\tau]$



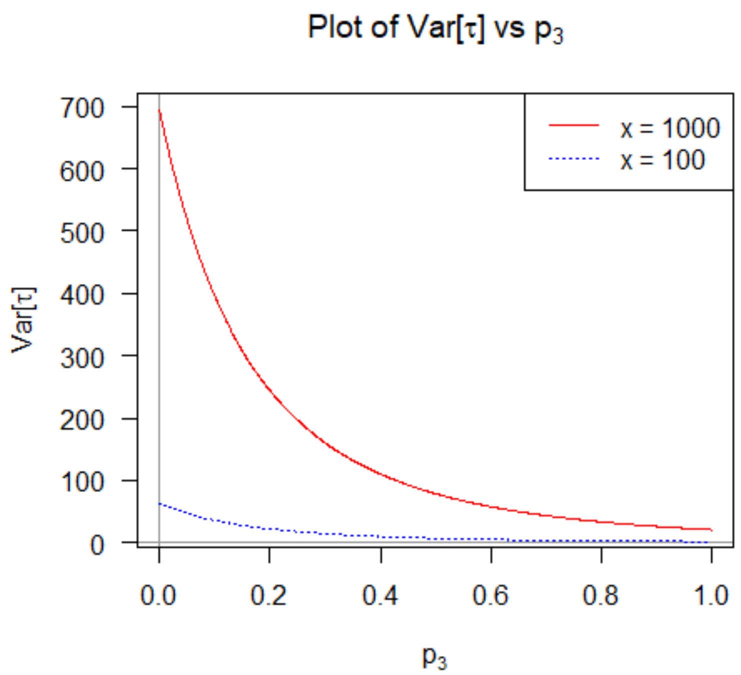
รูปที่ 3.19: ผลกระทบของ λ_2 ต่อ $Var[\tau]$



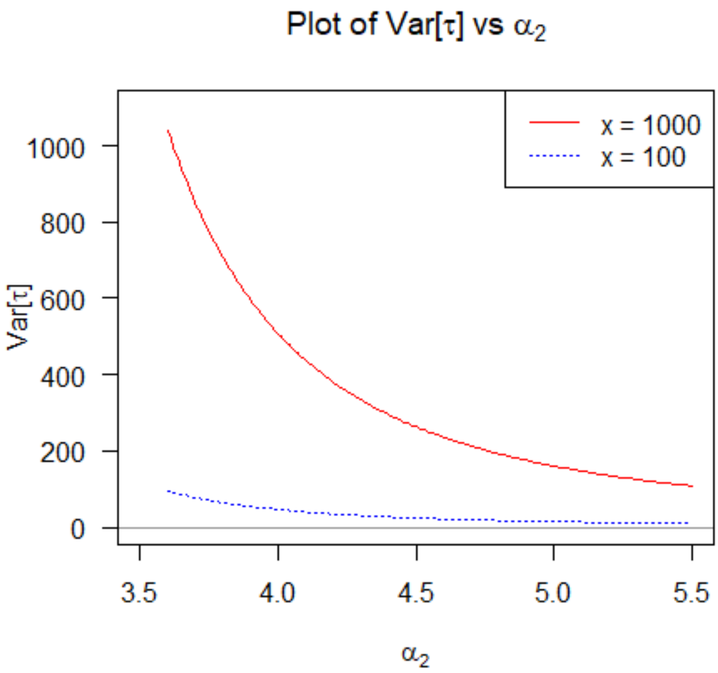
รูปที่ 3.20: ผลกระทบของ λ_3 ต่อ $Var[\tau]$



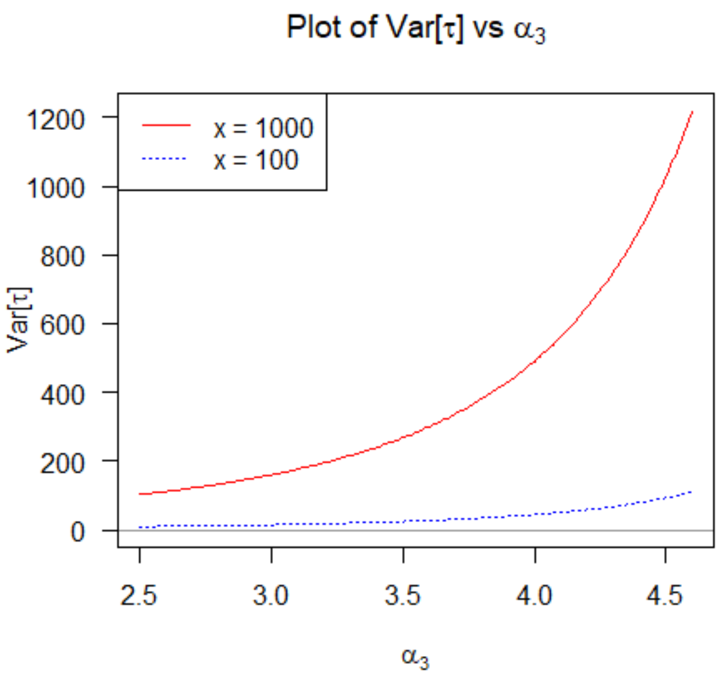
รูปที่ 3.21: ผลกระทบของ p_2 ต่อ $Var[\tau]$



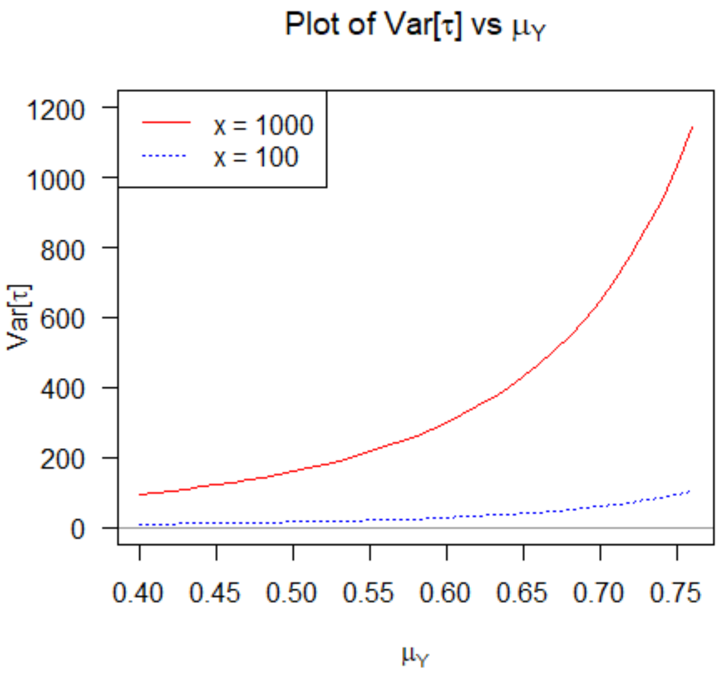
รูปที่ 3.22: ผลกระทบของ p_3 ต่อ $Var[\tau]$



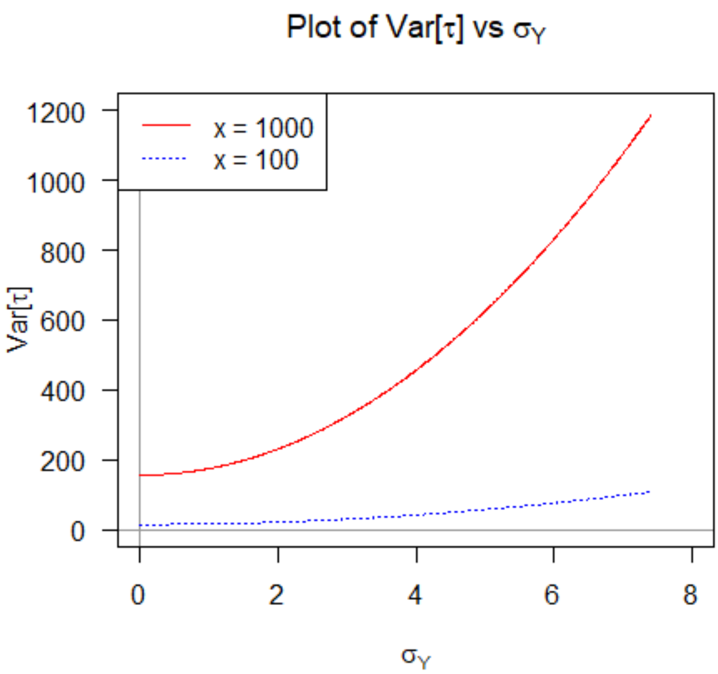
รูปที่ 3.23: ผลกระทบของ α_2 ต่อ $Var[\tau]$



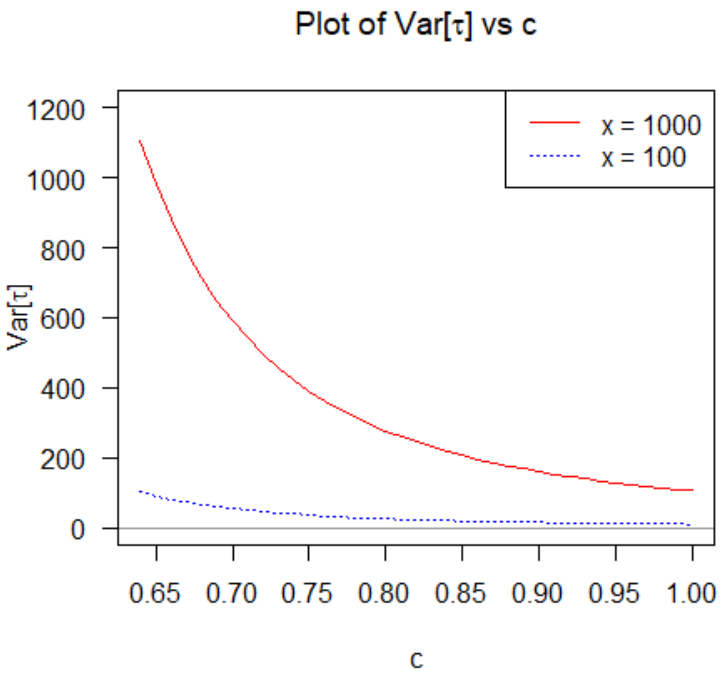
รูปที่ 3.24: ผลกระทบของ α_3 ต่อ $Var[\tau]$



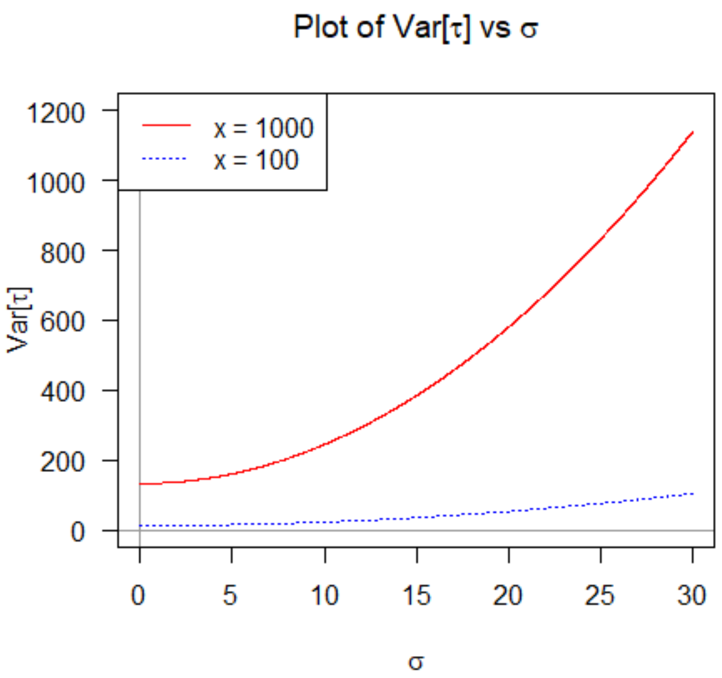
รูปที่ 3.25: ผลกระทบของ μ_Y ต่อ $Var[\tau]$



รูปที่ 3.26: ผลกระทบของ σ_Y ต่อ $Var[\tau]$



รูปที่ 3.27: ผลกระทบของ c ต่อ $Var[\tau]$



รูปที่ 3.28: ผลกระทบของ σ ต่อ $Var[\tau]$

จากรูป 3.11 - 3.28 จะเห็นว่า พารามิเตอร์ λ_2, p_3, α_2 และ c ทำให้ $E[\tau]$ มีแนวโน้มลดลง ในทางตรงกันข้าม λ_3, p_2, α_3 และ μ_Y ทำให้ $E[\tau]$ มีแนวโน้มมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับที่คาดการณ์ไว้ และ พารามิเตอร์ λ_2, p_3, α_2 และ c ทำให้ $Var[\tau]$ มีแนวโน้มลดลง ในทางตรงกันข้าม $\lambda_3, p_2, \alpha_3, \mu_Y, \sigma_Y$ และ σ ทำให้ $Var[\tau]$ มีแนวโน้มมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับที่คาดการณ์ไว้

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัย (Conclusion)

ในโครงงานนี้เราได้สร้างและศึกษาคุณสมบัติทางทฤษฎีความน่าจะเป็นของตัวแบบความเสี่ยงแบบต่อเนื่องบนการแจกแจงแบบกระบวนการปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อและเพิ่มตัวแปรการรบกวน (white noise) ตัวแบบรูปแบบใหม่นี้ สามารถจัดการกับข้อมูลที่มีความถี่ของจำนวนการเคลมเป็นศูนย์สูงได้มีประสิทธิภาพ ซึ่งมีที่มาจากค่าการรับผิดชอบส่วนแรก (Deductible) ในการศึกษาเราได้สร้างตัวแบบความเสี่ยงบนตัวแปรสุ่ม $PZIP(\lambda, p, \alpha)$ ในหัวข้อที่ 3.1

ต่อมาเราได้ศึกษา และทราบสมการสัมประสิทธิ์การปรับ (adjustment coefficient equation) ของตัวแบบความเสี่ยงบนตัวแปรสุ่ม $PZIP(\lambda, p, \alpha)$ และ ยังพิสูจน์ให้เห็นว่าสมการสัมประสิทธิ์การปรับมีคำตอบที่เป็นบวกเพียงคำตอบเดียว ในหัวข้อที่ 3.2 และสุดท้ายเราได้ศึกษาการแปลงลาปลาซของเวลา เมื่อมูลค่าทุนถึงระดับที่กำหนดเป็นครั้งแรก และแสดงตัวอย่างเชิงตัวเลข ในหัวข้อที่ 3.3

บรรณานุกรม

[1] Huang, Y., & Yu, W. (2013). **Studies on a double poisson-geometric insurance risk model with interference.** Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013.

[2] Kijima, M. (2003). **Stochastic processes with applications to finance.** Chapman and Hall/CRC.

[3] Lambert, D. (1992). **Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing.** Technometrics, 34(1), 1-14.

[4] Oksendal, B. (2013). **Stochastic differential equations: an introduction with applications.** Springer Science & Business Media.

[5] Sarul, L. S., & Sahin, S. (2015). **An application of claim frequency data using zero inflated and hurdle models in general insurance.** Journal of Business, Economics and Finance, 4(4), 732-743.

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	ตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Stochastic Risk Models based on Zero Inflated Distribution
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิราพรรณ สุนทรโชติ
ผู้ดำเนินการ	นาย กิตติวัฒน์ วรเกตุ เลขประจำตัวนิสิต 6033503523 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

แบบจำลองความเสี่ยง คือ แบบจำลองของมูลค่าทุนรวมของการทำประกัน มักใช้สำหรับการจัดการความเสี่ยงของการทำประกัน แบบจำลองความเสี่ยงที่เหมาะสมสามารถช่วยบริษัทประกันในการวางแผน แผนธุรกิจได้ เพราะฉะนั้น เราจึงสนใจในการค้นคว้าโมเดลความเสี่ยงใหม่ แบบจำลองความเสี่ยงที่หลากหลายถูกนำมาใช้ในการวิจัย หนึ่งในแบบจำลองความเสี่ยงที่รู้จักกันดี คือ แบบจำลองความเสี่ยงพื้นฐานที่ต่อเนื่อง โดยการแจกแจงทั่วไปสำหรับมูลค่าการเคลมนั้นมีได้หลากหลาย และ การแจกแจงทั่วไปที่พบได้มากที่สุดสำหรับจำนวนการเคลม คือ การแจกแจงปัวซง ดังนั้น เราจึงสนใจการแจกแจงของจำนวนการเคลมที่เกิดขึ้นในเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง ซึ่งก็คือการแจกแจงปัวซง แต่อย่างไรก็ตาม คุณสมบัติการมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากันของการแจกแจงปัวซงอาจจะไม่เหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการกระจายมากๆ ดังนั้นการแจกแจงแบบกระบวนการเชิงประกอบจึงถูกนำเสนอขึ้นอาทิเช่น การแจกแจงแบบกระบวนการปัวซงเชิงประกอบ

ในการเกิดมูลค่าความเสียหายทั้งหมด ถ้าค่าความเสียหายน้อยกว่ามูลค่าการรับผิดชอบส่วนแรกผู้เอาประกันต้องจ่าย ผู้เอาประกันจะไม่แจ้งบริษัทประกัน เพราะ จะทำให้เบี้ยประกันเพิ่มขึ้น ดังนั้น ข้อมูลของบริษัทประกันจึงมีความถี่ของจำนวนการเคลมเป็นศูนย์สูง ซึ่งการแจกแจงปัวซงเดิมมีน้ำหนักในการเกิดศูนย์น้อย ดังนั้น จึงมีการใช้แนวคิดศูนย์เฟ้อ(zero-inflation) ซึ่งแนะนำโดย Lambert(3) เพื่อรองรับข้อมูลที่มีความถี่ที่เป็นศูนย์มาก ทำให้เราสนใจที่จะใช้การแจกแจงปัวซงที่มีศูนย์เฟ้อ ในการสร้างแบบจำลองความเสี่ยงใหม่ สำหรับข้อมูลที่มีความถี่ที่เป็นศูนย์มาก

ในโครงงานนี้เราจะขยายแบบจำลองความเสี่ยงแบบต่อเนื่องบนการแจกแจงแบบกระบวนการปัวซงเชิงประกอบ(Compound Poisson Process) ไปยัง การแจกแจงแบบกระบวนปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ(Poisson-Zero Inflated Poisson Process) และ เพิ่มตัวแปรการรบกวน(white noise) ที่เป็นกระบวนการสโตแคสติก(Standard Brownian Motion)

วัตถุประสงค์

เพื่อขยายการแจกแจงแบบกระบวนปัวซงเชิงประกอบ(Compound Poisson Process) ไปยัง การแจกแจงแบบกระบวนปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ(Poisson-Zero Inflated Poisson Process) และ ศึกษาคุณสมบัติและการประยุกต์ใช้

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้เราจะสร้างและศึกษาคุณสมบัติแบบจำลองความเสี่ยงของปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็น และ แบบจำลองความเสี่ยง
2. ศึกษาบทความและงานวิจัยที่เกี่ยวของกับแบบจำลองประกันความเสี่ยงเชิงสโตแคสติก
3. สร้างกระบวนการแจกแจงปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ(Poisson-Zero Inflated Poisson Process)
4. ศึกษาสมบัติความน่าจะเป็นชอง กระบวนการแจกแจงปัวซง-ปัวซงที่มีผลการทบจากศูนย์เฟ้อ
5. ศึกษาการใช้โปรแกรม R
6. สรุปโครงการและเขียนรายงาน

ระยะเวลาการทำงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	เดือน									
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค	เม.ย
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็น และ แบบจำลองความเสี่ยง										
2. ศึกษาบทความและงานวิจัยที่เกี่ยวของกับ แบบจำลองประกันความเสี่ยงเชิงสโตแคสติก										
3. สร้างกระบวนการแจกแจงปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ (Poisson-Zero Inflated Poisson Process)										
4. ศึกษาสมบัติความน่าจะเป็นของกระบวนการแจกแจงปัวซง-ปัวซงที่มีผลกระทบจากศูนย์เฟ้อ										
5. ศึกษาการใช้โปรแกรม R										
6. สรุปโครงการและเขียนรายงาน										

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับต่อผู้ดำเนินงาน

1. ทำให้มีความรู้เกี่ยวกับคุณสมบัติและการประยุกต์ใช้แบบจำลองความเสี่ยงในสาขาคณิตศาสตร์ประกันภัย
2. ทำให้ได้รับความรู้ด้านทฤษฎีความน่าจะเป็นและนำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้งานให้เหมาะสม
3. มีความรู้ในการใช้โปรแกรม R

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับต่อสังคม

1. ทำให้มีตัวแบบความเสี่ยงเชิงสโตแคสติกบนฐานของการแจกแจงที่มีศูนย์เฟ้อ สำหรับการใช้งานที่กว้างขึ้น

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

ซอฟต์แวร์

1. โปรแกรม Latex
2. โปรแกรม R
3. โปรแกรม Adobe PDF
4. โปรแกรม Beamer
5. โปรแกรมงานเอกสาร Microsolf Word
6. โปรแกรมงานเอกสาร Microsolf PointPoint

ฮาร์ดแวร์

1. คอมพิวเตอร์
2. เครื่องพิมพ์

เอกสารอ้างอิง

1. Huang, Y., & Yu, W. (2013). **Studies on a double poisson-geometric insurance risk model with interference.** Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013.
2. Lambert, D. (1992). **Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing.** Technometrics, 34(1), 1-14.
3. Sarul, L. S., & Sahin, S. (2015). **An application of claim frequency data using zero inflated and hurdle models in general insurance.** Journal of Business, Economics and Finance, 4(4), 732-743.

ประวัติผู้เขียน

นาย กิตติวัฒน์ วรเกตุ เลขประจำตัวนิสิต 6033503523
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย