การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามลากรานจ์ร่วมกับตัวประกอบถ่วงน้ำหนักนอกช่วงแบบใหม่เพื่อแก้ปัญหาการไหลภายในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้า

นายอุทัย ประสพชิงชนะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

A NEW LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL SCHEME WITH EXTRAPOLATION WEIGHTING FACTORS FOR SOLVING FLUID FLOW IN RECTANGULAR CAVITY

Mr. Uthai Prasopchingchana

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy (Mechanical Engineering) in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามลากรานจ์ร่วมกับตัวประกอบถ่วงน้ำหนักนอกช่วงแบบใหม่เพื่อแก้ปัญหาการไหลภายในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้า
โดย	นายอุทัย ประสพชิงชนะ
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

-- คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

-- ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

-- อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)

-- กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

-- กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

-- กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ศาสตราภิชานทวี เวชพฤติ)

อุทัย ประสพชิงชนะ : การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามลากรานจ์ร่วมกับตัวประกอบถ่วงน้ำหนักนอกช่วงแบบใหม่เพื่อแก้ปัญหาการไหลภายในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้า. (A NEW LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL SCHEME WITH EXTRAPOLATION WEIGHTING FACTORS FOR SOLVING FLUID FLOW IN RECTANGULAR CAVITY) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแผนแบบใหม่ที่มีชื่อว่าแผนแบบ LIP (Lagrange Interpolating Polynomial scheme) และการประมาณค่านอกช่วงแบบใหม่ที่มีชื่อว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (Weighting Factors with Lagrange Interpolating Polynomial extrapolation) โดยแผนแบบ LIP ถูกใช้สำหรับการประมาณค่าของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรทั้งเทียบกับระยะและเวลาในระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ข้อดีของแผนแบบ LIP คือเป็นแผนที่มีความแม่นยำลำดับสี่ เป็นแผนที่ง่ายต่อการพัฒนาโปรแกรมที่ใช้การแก้ปัญหาด้วยเม็สซ์ที่ไม่สม่ำเสมอ และเป็นทั้งแผนทางระยะและแผนทางเวลา สำหรับการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ถูกนำมาใช้ในการหาค่าคาดเดาเริ่มต้นของตัวแปรในแต่ละช่วงเวลาย่อยของปัญหาที่สภาวะไม่คงตัว ซึ่งใช้วิธีการหาคำตอบของแต่ละช่วงเวลาย่อยด้วยวิธีการทำซ้ำ

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่คำนวณจากแผนแบบ LIP และการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP พบว่า คำตอบที่คำนวณจากแผนแบบ LIP มีความถูกต้องและมีความสอดคล้องกับคำตอบที่นำมาใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง ขณะที่การประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP สามารถช่วยลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาคำตอบของปัญหาได้สูงสุดถึงร้อยละ 49.69 เมื่อเทียบกับกรณีที่การคำนวณหาคำตอบ โดยไม่ได้ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนิสิต ....
ปีการศึกษา	2561	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก ....

5771431521 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORD: LIP scheme, WF-LIP extrapolation, finite volume method, initial guess value, iterative method

Uthai Prasopchingchana :
A NEW LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL SCHEME WITH EXTRAPOL ATION WEIGHTING FACTORS FOR SOLVING FLUID FLOW IN RECTANGULAR C AVITY. Advisor: Asst. Prof. Tul Manewattana, Ph.D.

The objectives of this research are to propose a new scheme called the Lagrange Interpolating Polynomial (LIP) and a new extrapolation called the Weighting Factors with Lagrange Interpolating Polynomial (WF-LIP). The LIP scheme is used for approximation values and derivative values of variables with respect to space and time in the finite volume method. The advantages of the LIP scheme are: to be the fourth order scheme, to ease for code developing with the problems using the non-uniform meshes for solving and to be both the spatial and temporal schemes. The WF-LIP extrapolation is employed to determine initial guess values of variables in each time step of transient problems which determine solutions in each time step by using iterative methods.

From the results of the LIP scheme verification and the performance test of the WF-LIP extrapolation, it was found that the solutions computed from the LIP scheme were correct and consistent with the analytical solutions, the benchmark numerical solutions, the published numerical solutions and the experimental solutions, and then the computational time of the problem solving by using the WF-LIP extrapolation could be reduced in the maximum value to be 49.69% compared with the problem solving without using the WF-LIP extrapolation.

Field of Study:	Mechanical Engineering	Student's Signature ....
Academic Year:	2018	Advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา เป็นอย่างสูงที่กรุณาให้คำแนะนำและช่วยเหลือในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้อย่างดียิ่ง ขอขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่านที่ให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่อการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ดียิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ให้การสนับสนุนด้านทุนการศึกษาระดับปริญญาเอกในครั้งนี้ และสุดท้ายด้วยกำลังใจที่สำคัญจาก บุพการี พี่น้อง และภรรยาที่คอยสนับสนุน และผลักดันให้การจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

อุทัย ประสพชิงชนะ

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

ตารางสัญลักษณ์

อักษรย่อ (Abbreviation)	
AR	อัตราส่วนของสูงต่อความกว้างของช่องว่าง (cavity aspect ratio)
b	ความกว้างของช่องว่าง (width of the cavity) (m)
c_p	ความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ (specific heat at constant pressure) (J/(kg·K))
g	ค่าความเร่งโน้มถ่วง (gravitational acceleration) (= 9.81 m/s^2)
h	ความสูงของช่องว่าง (height of the cavity) (m)
k	ค่าสภาพการนำความร้อน (thermal conductivity) (W/(m·K))
Nu	เลขนัสเซลต์ที่ตำแหน่งต่างๆ (local Nusselt number)
$\overline{Nu}$	เลขนัสเซลต์เฉลี่ย (average Nusselt number)
p	ความดัน (pressure) (Pa)
q''	อัตราการถ่ายเทความร้อนต่อพื้นที่ (heat flux) (W/m^2)
Ra	เลขเรย์ลี (Rayleigh number)
Re	เลขเรย์โนลดส์ (Reynolds Number)
T	อุณหภูมิ (temperature) (K)
u	ความเร็วย่อยในแนวราบ (velocity component in the horizontal direction) (m/s)
v	ความเร็วย่อยในแนวดิ่ง (velocity component in the vertical direction) (m/s)
V	ความเร็วลัพธ์ (total velocity) (m/s)
x	ตำแหน่งในแนวราบในคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตของช่องว่าง (Cartesian coordinate in the horizontal direction of the cavity) (m)
y	ตำแหน่งในแนวดิ่งในคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตของช่องว่าง (Cartesian coordinate in the vertical direction of the cavity) (m)

สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical symbol)	
∇	เดลโอเปอร์เรเตอร์ (Del operator)

อักษรกรีก (Greek alphabet)	
β	ค่าสมประสิทธิ์ของการขยายตัวทางความร้อนของปริมาตร (volumetric thermal expansion coefficient) (K^{-1})
μ	ค่าความหนืด (viscosity) (kg/(s•m))
ρ	ค่าความหนาแน่น (density) (kg/m^3)
ϕ	ค่าตัวแปร (variable)
ψ	ค่าสตรีมฟังก์ชั่น (stream-function)
ω	ค่าวอร์ทิซิที่ (Vorticity)

ตัวห้อย (Subscript)	
C	เซลล์ศูนย์กลาง (Central cell)
e	ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันออก (Eastern surface of cell)
E	เซลล์ด้านตะวันออก (Eastern cell)
n	ผิวหน้าเซลล์ด้านเหนือ (Northern surface of cell)
N	เซลล์ด้านเหนือ (Northern cell)
ref	ค่าอ้างอิง (reference)
s	ผิวหน้าเซลล์ด้านใต้ (Southern surface of cell)
S	เซลล์ด้านใต้ (Southern cell)
w	ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันตก (Western surface of cell)
W	เซลล์ด้านตะวันตก (Western cell)

ตัวยก (Superscript)	
$'$	ค่าแก้ไข (Correction value)
*	ค่าคาดเดา (Guess value)
**	ค่าไร้มิติ (Dimensionless value)

บทที่ 1
บทนำ
(Introduction)

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการหาคำตอบในปัญหาทางวิศวกรรมโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นที่นิยมมาก เนื่องจากประหยัดค่าใช้จ่าย ประหยัดเวลาและปลอดภัย สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหามีอยู่หลายระเบียบวิธี เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite volume method) ระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ (Finite element method) ระเบียบวิธีอิเลเมนต์ขอบเขต (Boundary element method) ระเบียบวิธีแลตติกโบลตซ์มานน์ (Lattice Boltzmann method) เป็นต้น ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูมเป็นหนึ่งระเบียบวิธีที่มักถูกนำมาใช้ในโปรแกรมสำเร็จรูปทางการค้า (Commercial code) เนื่องจากขั้นตอนในการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบไม่ซับซ้อน สามารถแก้ปัญหาที่มีลักษณะที่อยู่ในโดเมนที่รูปทรงซับซ้อนได้ดี โดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูมมีแผน (Scheme) หลายแบบสำหรับประมาณค่าของตัวแปรและค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะที่บริเวณผิวเซลล์ (Cell face) และประมาณค่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลาง (Central Cell) เช่น แผนแบบผลต่างสืบเนื่องจากจุดศูนย์กลาง (Central differencing scheme) แผนแบบผลต่างสืบเนื่องจากด้านเหนือลม (Upwind differencing scheme) แผนแบบผลต่างสืบเนื่องแบบผสม (Hybrid differencing scheme) แผนแบบเลขยกกำลัง (Power-law scheme) แผนแบบควิก (QUICK scheme: quadratic upstream interpolation for convective kinetics scheme) แผนแบบทีวีดี (TVD scheme: total variation diminishing scheme) เป็นต้น สำหรับแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสอง (2^{nd} order scheme) ขึ้นไป หากใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่เป็นแบบระบบเม็สช์ที่ไม่สม่ำเสมอ (Non-uniform mesh) การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบของปัญหาก็จะมีความซับซ้อนมาก

วิธีการหาคำตอบของปัญหาทางกลศาสตร์ของของไหลที่เป็นแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น จะต้องมีขั้นตอนในการหาคำตอบของระบบสมการที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีหลายวิธีการเช่น วิธีเมตริกผกผันของเครมเมอร์ (Cramer’s rule matrix inversion method) วิธีกำจัดของเกาส์ (Gaussian elimination method) วิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iterative method) เป็นต้น โดยวิธีที่ได้รับความนิยมใช้มากคือ วิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล เนื่องจากไม่ซับซ้อนในการพัฒนาโปรแกรม ให้คำตอบได้เร็วในการแก้ปัญหาที่มีระบบ

สมการขนาดใหญ่ และใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์น้อยเมื่อเทียบกับวิธีการอื่น แต่ข้อด้อยของวิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดลคือ ต้องมีการสมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปรในการทำซ้ำทุกช่วงเวลาย่อยเพื่อหาคำตอบของช่วงเวลาปัจจุบันทุกครั้ง โดยทั่วไปมักใช้คำตอบของช่วงเวลาก่อนหน้าเป็นค่าเริ่มต้นในการทำซ้ำของการหาคำตอบในเวลาปัจจุบัน แต่หากกำหนดช่วงเวลาย่อย (Time step) ให้มีค่ามาก ผลการหาคำตอบอาจลู่ออกได้ง่าย ดังนั้นการหาคำตอบด้วยวิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล จึงมีข้อจำกัดในการกำหนดช่วงเวลาย่อย ซึ่งหากต้องการหาคำตอบของปัญหาทางกลศาสตร์ของของไหลที่เป็นแบบสภาวะคงตัว (Steady state flow) แต่ต้องใช้วิธีการทางอ้อมโดยการหาคำตอบแบบการไหลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจนกว่าคำตอบจะมีค่าคงที่นั้น วิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดลอาจต้องใช้เวลาในการหาคำตอบมากกว่าวิธีการอื่น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

จากที่กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อ 1.1 นั้น งานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์ 2 ประการ คือ ประการที่ 1 เพื่อนำเสนอแผนแบบ Lagrange Interpolating Polynomial (LIP) scheme สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่มีความสะดวกในการประมาณค่าของตัวแปรและค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะที่บริเวณผิวเซลล์ และประมาณค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลาง โดยมีค่าความแม่นยำสูง (High order scheme) และไม่ซับซ้อนเมื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่เป็นแบบระบบเม็สช์ที่ไม่สม่ำเสมอ ประการที่ 2 เพื่อนำเสนอเทคนิคในการประมาณค่านอกช่วงแบบ Weighting Factors with Lagrange Interpolating Polynomial (WF-LIP) extrapolation เพื่อใช้ในการสมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปรเพื่อใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดลเพื่อหาคำตอบของช่วงเวลาปัจจุบัน ซึ่งการสมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปรในแต่ละช่วงเวลาย่อยจะใช้วิธีการประมาณค่านอกช่วงจากคำตอบของช่วงเวลาย่อยที่ได้จากการคำนวณมาแล้วก่อนหน้านี้ แล้วประยุกต์ใช้วิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์และการกำหนดค่าของเวลาที่ต้องการหาคำตอบให้มีค่าเป็นศูนย์พร้อมกับการหาค่าถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor) เพื่อหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรสำหรับใช้ในการทำซ้ำเพื่อหาคำตอบในเวลาปัจจุบัน

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

การตรวจสอบความถูกต้อง (Verification) ของแผนแบบ LIP ที่นำเสนอ กระทำโดยใช้วิธีเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผน กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical solution) คำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง (Benchmark numerical solution) คำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution) และ

คำตอบที่ได้จากการทดลอง (Experimental solution) จากปัญหา 4 ปัญหาที่เป็นที่รู้จักกันดีทางด้านการถ่ายเทความร้อนและการไหลของของไหล ได้แก่ 1. ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Conduction in rectangular plates with boundary temperature specified) 2. ปัญหาการไหลของของไหลที่อัดตัวไม่ได้ในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน (Lid-driven cavity flow) 3. ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Natural convection in a square cavity problem) ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผนังในแนวดิ่ง 4. ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก (Natural convection in a tall cavity problem) ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผนังในแนวดิ่ง

สำหรับการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP สำหรับการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำนั้น ใช้วิธีเปรียบเทียบเวลา (Computational time) ในการทำงานของโปรแกรม ระหว่างโปรแกรมที่ใช้เทคนิคในการประมาณค่านอกช่วงที่นำเสนอกับโปรแกรมที่ไม่ใช้การประมาณค่านอกช่วงที่นำเสนอ โดยปัญหาที่ใช้ทดสอบเป็นปัญหาเดียวกันกับปัญหาที่ใช้ในการทดสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP

ซึ่งปัญหาที่ใช้ทดสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP และใช้ทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ที่นำเสนอนั้น หากมีการไหลของของไหลเกิดขึ้น ขอบเขตของการทดสอบให้อยู่ในช่วงของการไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow)

1.4 ขั้นตอนและการดำเนินงานการวิจัย

- ศึกษาบทความวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาประมาณ 6 เดือน
- วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาประมาณ 6 เดือน
- พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาที่ต้องการ ระยะเวลาประมาณ 12 เดือน
- ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมา ระยะเวลาประมาณ 2 เดือน
- รันโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ทำวิจัย ระยะเวลาประมาณ 12 เดือน
- วิเคราะห์ผลของคำตอบที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมา ระยะเวลาประมาณ 2 เดือน
- จัดทำบทความวิจัยเพื่อตีพิมพ์เผยแพร่งานวิจัยในวารสารวิชาการ ระยะเวลาประมาณ 6 เดือน

- จัดทำวิทยานิพนธ์ ระยะเวลาประมาณ 4 เดือน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- ได้แผนแบบใหม่สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลู่มที่มีลำดับความแม่นยำสูงทั้งแผนทางระยะและแผนทางเวลา และสะดวกในการพัฒนาโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาด้วยวิธีการเชิงตัวเลข แบบที่ระบบเม็สช์ที่ไม่สม่ำเสมอ
- ได้การประมาณค่านอกช่วงแบบใหม่สำหรับการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำ โดยสามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาคำตอบ เมื่อเทียบกับการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบที่ไม่มีการประมาณค่านอกช่วง สำหรับปัญหาที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรม
(Literature review)

ผู้วิจัยได้ทำการทบทวนผลงานวิจัยอื่นๆ ที่มีความเกี่ยวข้องและได้รับการเผยแพร่แล้ว เพื่อให้แน่ใจว่าวิทยานิพนธ์นี้เป็นงานวิจัยใหม่และมีคุณค่าทางวิชาการ โดยผลงานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ แผนแบบต่างๆ ซึ่งแบ่งเป็น แผนทางระยะและแผนทางเวลา และงานวิจัยที่นำเสนอวิธีการประมาณค่านอกช่วงที่ถูกนำมาใช้กับการหาค่าเริ่มต้นของการหาคำตอบในช่วงเวลาปัจจุบันในปัญหาที่สภาวะไม่คงตัว นอกจากนั้นผู้วิจัยยังได้นำเสนอรายละเอียดของผลงานวิจัยอื่นๆ ที่นำมาใช้ในการตรวจสอบว่าผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสามารถนำไปใช้งานได้จริง

2.1 แผนแบบต่างๆ (Existing schemes)

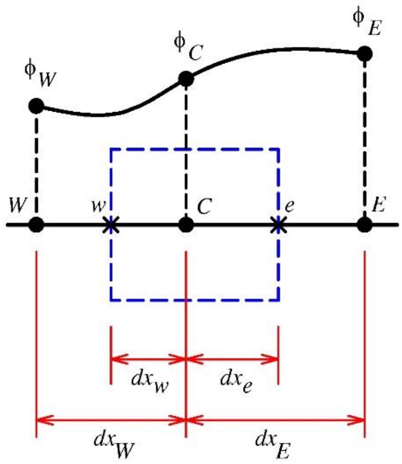
แผนแบบต่างๆ ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุ่ม คือวิธีการประมาณค่าตัวแปรหรืออนุพันธ์ของตัวแปรทั้งที่เทียบกับระยะหรือเวลา โดยแบ่งออกเป็นแผนทางระยะกับแผนทางเวลา ซึ่งแผนทางระยะเป็นการประมาณค่าตัวแปรในพจน์การพา (Convective term) และอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะในพจน์การแพร่ (Diffusive term) ที่บริเวณผิวหน้าเซลล์ สำหรับแผนทางเวลาเป็นการประมาณอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลาง (Central cell) ซึ่งรายละเอียดของแผนแบบต่างๆ ที่นิยมใช้กันในปัจจุบันมีดังนี้

2.1.1 แผนทางระยะ (Spatial scheme)

แผนทางระยะเป็นการประมาณค่าของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะที่ผิวของเซลล์ โดยรายละเอียดของแผนทางระยะมีดังนี้

2.1.1.1 Central differencing scheme

เป็นแผนแบบที่ประมาณค่าของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์จากการเฉลี่ยค่าของตัวแปรและค่าความชันเชิงเส้นของตัวแปรที่ติดกับผิวหน้าเซลล์นั้น จากรูปที่ 0.1 จะได้ว่า



รูปที่ 0.1 แผนผังของ Central differencing scheme

$$\phi_e = \frac{1}{2}\left(\phi_E + \phi_C\right),\ \phi_w = \frac{1}{2}\left(\phi_C + \phi_W\right)$$

และ

$$\frac{d\phi_e}{dx} = \frac{\phi_E - \phi_C}{dx_E},\ \frac{d\phi_w}{dx} = \frac{\phi_C - \phi_W}{dx_W}$$

2.1.1.2 Upwind differencing scheme

แผนแบบนี้ประมาณค่าของตัวแปรของความเร็วในพจน์การพา โดยให้ค่าความเร็วที่ผิวเซลล์เท่ากับความเร็วด้านเหนือลม (Upwind) ของเซลล์ที่อยู่ติดกับผิวเซลล์นั้น จากรูปที่ 0.1 จะได้ว่า

$\phi_e = \phi_C, \phi_w = \phi_W$ เมื่อ $u_e > 0, u_w > 0$

หรือ

$\phi_e = \phi_E, \phi_w = \phi_C$ เมื่อ $u_e < 0, u_w < 0$

เมื่อ u คือความเร็วของของไหลในทิศแนวนอน

2.1.1.3 Hybrid differencing scheme

เป็นแผนแบบที่พิจารณาถึงอิทธิพลของการพาและการแพร่ หากการพามีผลต่อการไหลน้อยกว่าหรือเท่ากับการแพร่ การประมาณค่าตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรคิดเป็นแบบ Central differencing scheme แต่หากการพามีผลต่อการไหลมากกว่าการแพร่ การประมาณค่าตัวแปรคิดเป็นแบบ Upwind differencing scheme และอนุพันธ์ของตัวแปรที่ผิวเซลล์ให้มีค่าเป็นศูนย์ โดยผลของการพาและการแพร่พิจารณาจากค่า Peclet number (Pe) จากรูปที่ 0.1 จะได้ว่า

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_C),\ \frac{d\phi_e}{dx} = \frac{\phi_E - \phi_C}{dx_E} \text{ เมื่อ } -2 < Pe_e = \frac{(\rho u)_e}{\left(\frac{\Gamma}{dx_e}\right)_e} < 2$$

$$\phi_e = \phi_C,\ \frac{d\phi_e}{dx} = 0 \text{ เมื่อ } Pe_e = \frac{(\rho u)_e}{\left(\frac{\Gamma}{dx_e}\right)_e} \geq 2$$

$$\phi_e = \phi_E,\ \frac{d\phi_e}{dx} = 0 \text{ เมื่อ } Pe_e = \frac{(\rho u)_e}{\left(\frac{\Gamma}{dx_e}\right)_e} \leq -2$$

และ

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_C + \phi_W),\ \frac{d\phi_w}{dx} = \frac{\phi_C - \phi_W}{dx_W} \text{ เมื่อ } -2 < Pe_w = \frac{(\rho u)_w}{\left(\frac{\Gamma}{dx_w}\right)_w} < 2$$

$$\phi_w = \phi_W,\ \frac{d\phi_w}{dx} = 0 \text{ เมื่อ } Pe_w = \frac{(\rho u)_w}{\left(\frac{\Gamma}{dx_w}\right)_w} \geq 2$$

$$\phi_w = \phi_C,\ \frac{d\phi_w}{dx} = 0 \text{ เมื่อ } Pe_w = \frac{(\rho u)_w}{\left(\frac{\Gamma}{dx_e}\right)_w} \leq -2$$

โดยที่ $\Gamma = k$ สำหรับสมการพลังงาน และ $\Gamma = \mu$ สำหรับสมการโมเมนตัม

2.1.1.4 Second-order upwind differencing scheme

เป็นการปรับความแม่นยำของ Upwind differencing scheme ให้มีความแม่นยำลำดับสอง โดยการหาค่าตัวแปรในพจน์การพาให้พิจารณาว่าอนุพันธ์ของตัวแปรที่ผิวด้านตะวันออกเท่ากับอนุพันธ์ของตัวแปรที่ผิวด้านตะวันตก จากรูปที่ 0.1 จะได้ว่า

$$\frac{\phi_e - \phi_C}{dx_e} = \frac{\phi_C - \phi_W}{dx_W} \rightarrow \phi_e = \phi_C + \frac{dx_e}{dx_W}(\phi_C - \phi_W)$$

และ

$$\frac{\phi_C - \phi_w}{dx_w} = \frac{\phi_E - \phi_C}{dx_E} \rightarrow \phi_w = \phi_C - \frac{dx_w}{dx_E}(\phi_E - \phi_C)$$

2.1.1.5 The power law scheme

เป็นแผนแบบที่ประมาณค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ด้วยฟังก์ชั่นเอ็กโปเนนเชียล [1] จากรูปที่ 2.1 จะได้ว่า

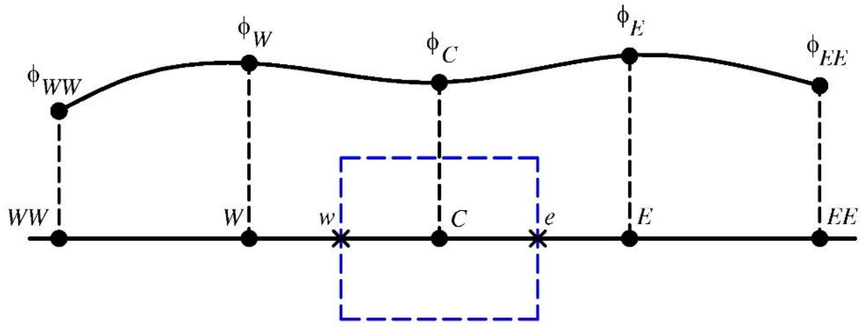
$$\phi_e = \phi_C + \left(\phi_E - \phi_C\right)\frac{\exp\left(\dfrac{\rho u\, dx_e}{\Gamma}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{\rho u\, dx_E}{\Gamma}\right)-1}$$

และ

$$\phi_w = \phi_C - \left(\phi_C - \phi_W\right)\frac{\exp\left(\dfrac{\rho u\, dx_w}{\Gamma}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{\rho u\, dx_W}{\Gamma}\right)-1}$$

2.1.1.6 The quadratic upstream interpolation for convective kinetics scheme (QUICK scheme)

เป็นแผนแบบที่ประมาณค่าตัวแปรที่ผิวเซลล์ด้วยการประมาณค่าในช่วงจากสามตัวแปร โดยให้สองตัวแปรมาจากด้านเหนือลมและอีกหนึ่งตัวแปรมาจากด้านท้ายลม [1] จาก รูปที่ 0.2 หาก ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางเซลล์มีค่าคงที่จะได้ว่า



รูปที่ 0.2 แผนผังของ QUICK scheme

$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_C + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W$ เมื่อ $\phi_e > 0$, $\phi_e = \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_C - \frac{1}{8}\phi_{EE}$ เมื่อ $\phi_e < 0$

และ

$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_C - \frac{1}{8}\phi_{WW}$ เมื่อ $\phi_w > 0$, $\phi_w = \frac{6}{8}\phi_C + \frac{3}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_E$ เมื่อ $\phi_w < 0$

2.1.1.7 Total variation diminishing scheme (TVD scheme)

เป็นแผนแบบที่ประมาณค่าตัวแปรที่ผิวเซลล์ โดยมีค่า Flux limiter function มาเกี่ยวข้อง [2] จากรูปที่ 0.1 จะได้ว่า

$\phi_e = \phi_C + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_C)$ เมื่อ $\phi_e > 0$, $\phi_e = \phi_E + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_C)$ เมื่อ $\phi_e < 0$

$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_C - \phi_W)$ เมื่อ $\phi_w > 0$, $\phi_w = \phi_C + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_C - \phi_W)$ เมื่อ $\phi_w < 0$

โดยที่ค่า $\psi(r)$ เป็นค่า Flux limiter function ซึ่งมีค่าดังตารางที่ 0.1 [2]

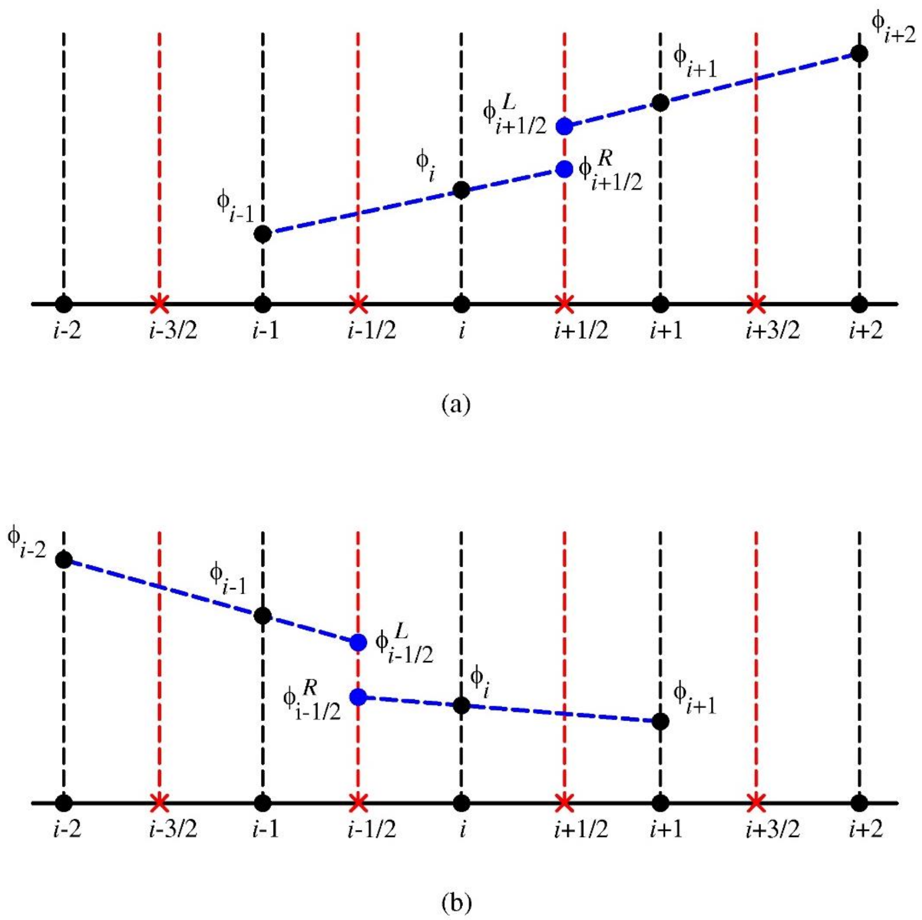
ตารางที่ 0.1 ค่า Flux limiter function

Name	Flux limiter function	Source
Van Leer	$\psi(r) = \frac{r+\lvert r\rvert}{1+r}$	Van Leer (1974)
Van Albada	$\psi(r) = \frac{r+r^2}{1+r^2}$	Van Albada et al. (1982)
Min-Mod	$\psi(r) = \begin{cases} \min(r,1) & \text{if } r > 0 \\ 0 & \text{if } r \le 0 \end{cases}$	Roe (1985)
SUPERBEE	$\psi(r) = \max\left[0, \min(2r,1), \min(r,2)\right]$	Roe (1985)
Sweby	$\psi(r) = \max\left[0, \min(\beta r,1), \min(r,\beta)\right]$	Sweby (1984)
QUICK	$\psi(r) = \max\left[0, \min\left(2r, (3+r)/4, 2\right)\right]$	Leonard (1988)
UMIST	$\psi(r) = \max\left[0, \min\left(2r, (1+3r)/4, (3+r)/4, 2\right)\right]$	Lien and Leschziner (1993)

เมื่อค่า r และ β เป็นค่าคงที่

2.1.1.8 Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws scheme (MUSCL Scheme)

MUSCL scheme ได้รับการพัฒนาขึ้นโดย Leer [3] ในปี ค.ศ.1978 เป็นแผนแบบที่ประมาณค่าตัวแปรที่ผิวเซลล์ โดยใช้การประมาณค่านอกช่วงจากตัวแปรของเซลล์ที่กำหนด [4] จากรูปที่ 0.3 ซึ่งเป็นเม็สช์แบบสม่ำเสมอจะได้ว่า



รูปที่ 0.3 แผนผังแสดงค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ของ MUSCL (a) ค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันออก (b) ค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันตก

$$\phi^{L}_{i+1/2} = \phi_i + \frac{1}{4}(1-\kappa)(\phi_i - \phi_{i-1}) + (1+\kappa)(\phi_{i+1} - \phi_i)$$

$$\phi^{R}_{i+1/2} = \phi_{i+1} - \frac{1}{4}(1+\kappa)(\phi_{i+1} - \phi_i) + (1-\kappa)(\phi_{i+2} - \phi_{i+1})$$

และ

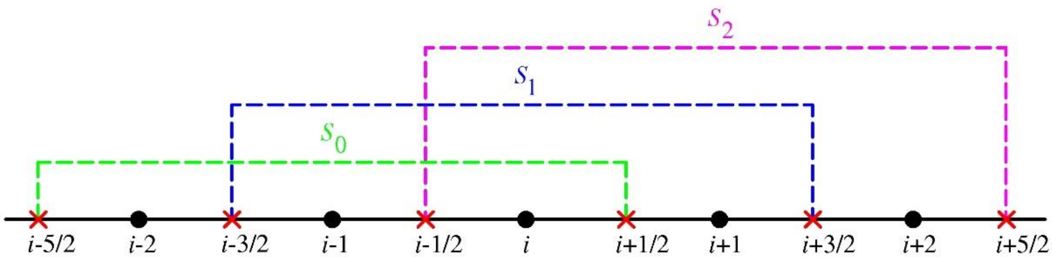
$$\phi_{i-1/2}^{L} = \phi_{i-1} + \frac{1}{4}(1-\kappa)(\phi_{i-1} - \phi_{i-2}) + (1+\kappa)(\phi_{i} - \phi_{i-1})$$

$$\phi_{i-1/2}^{R} = \phi_{i} - \frac{1}{4}(1+\kappa)(\phi_{i} - \phi_{i-1}) + (1-\kappa)(\phi_{i+1} - \phi_{i})$$

เมื่อ $\kappa = -1, 0, 1$

2.1.1.9 Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme (WENO scheme)

WENO scheme ถูกพัฒนาขึ้นโดย Liu [5] ในปี ค.ศ. 1994 นิยมใช้กับกรณีการไหลแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous flow) จากรูปที่ 0.4 ซึ่งเป็นเม็สช์แบบสม่ำเสมอจะได้ว่า



รูปที่ 0.4 แผนผังแสดงค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันออกของ WENO scheme

$$\phi_{i+1/2}^{-} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\alpha_k^i}{\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l^i} p_k'(x_{i+1/2})$$

เมื่อ

$$\alpha_k^i = \frac{C_k^i}{(\varepsilon + IS_k)^r}, \quad k = 0, \ldots, r-1$$

โดยที่ ε เป็นค่าคงที่ มีค่าประมาณ $\varepsilon \approx 10^{-5}$ หากกำหนดให้ $r = 3$ จะได้ว่า การประมาณค่าในช่วงที่จุด $x_{i+1/2}$ ของสามเสต็นซิล (Stencil) คือ S_0, S_1, S_2 มีค่าเป็น

$$p_0'(x_{i+1/2}) = \frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{2(\Delta x)^2}(x_{i+1/2} - x_{i-1})^2 + \frac{\phi_i - \phi_{i-2}}{2(\Delta x)}(x_{i+1/2} - x_{i-1}) + \phi_{i-1} - \frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{24}$$

$$p_1'(x_{i+1/2}) = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{2(\Delta x)^2}(x_{i+1/2} - x_i)^2 + \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2(\Delta x)}(x_{i+1/2} - x_i) + \phi_i - \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{24}$$

$$p_2'(x_{i+1/2}) = \frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{2(\Delta x)^2}(x_{i+1/2} - x_{i+1})^2 + \frac{\phi_{i+2} - \phi_i}{2(\Delta x)}(x_{i+1/2} - x_{i+1}) + \phi_{i+1} - \frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{24}$$

และ

$$IS_0 = \frac{(\phi_{i-1} - \phi_{i-2})^2 + (\phi_i - \phi_{i-1})^2}{2} + (\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2})^2$$

$$IS_1 = \frac{\left(\phi_i - \phi_{i-1}\right)^2 + \left(\phi_{i+1} - \phi_i\right)^2}{2} + \left(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}\right)^2$$

$$IS_2 = \frac{\left(\phi_{i+1} - \phi_i\right)^2 + \left(\phi_{i+2} - \phi_{i+1}\right)^2}{2} + \left(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i\right)^2$$

และถ้า $\phi_i > 0$ จะได้ว่า $\alpha_0^i = \frac{1}{12\left(\varepsilon + IS_0\right)^3}$, $\alpha_1^i = \frac{1}{2\left(\varepsilon + IS_1\right)^3}$ และ $\alpha_2^i = \frac{1}{4\left(\varepsilon + IS_2\right)^3}$

และถ้า $\phi_i \le 0$ จะได้ว่า $\alpha_0^i = \frac{1}{4\left(\varepsilon + IS_0\right)^3}$, $\alpha_1^i = \frac{1}{2\left(\varepsilon + IS_1\right)^3}$ และ $\alpha_2^i = \frac{1}{12\left(\varepsilon + IS_2\right)^3}$

2.1.1.10 Moving Least Square scheme (MLS scheme)

MLS scheme เป็นแผนแบบที่มีระดับความแม่นยำสูง (>2) ได้รับการพัฒนาขึ้นโดย Ramirez et al. [6] เป็นแผนแบบที่ใช้ประมาณค่าตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรที่ผิวเซลล์ โดยใช้ระเบียบวิธี Moving Least Square method ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากค่าของตัวแปรของเซลล์ที่อยู่โดยรอบจำนวนมากค่า ซึ่งแผนแบบนี้เหมาะกับกริดแบบไม่เป็นรูปแบบ (Unstructured grid)

2.1.1.11 Local Oscillation-Damping Algorithm scheme (LODA scheme)

LODA scheme เป็นแผนแบบที่พัฒนาจาก QUICK scheme โดยเพิ่มค่า Blending factor เข้าไปในพจน์ของการแพร่ (Diffusive term) เพื่อปรับค่าระดับความแม่นยำเป็นลำดับสอง (Second-order scheme) แผนแบบนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นโดย Zhu [7]

2.1.1.12 Weighted-Average Coefficient Ensuring Boundedness scheme (WACEB scheme)

WACEB scheme เป็นแผนแบบที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ประมาณค่าตัวแปรในพจน์การพา (Convective term) โดยใช้หลักการประมาณค่าในช่วงร่วมกับค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการถ่วงน้ำหนัก (Weighted-average coefficient) แผนแบบนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นโดย Song et al. [8]

2.1.2 แผนทางเวลา (Temporal scheme)

แผนทางเวลาเป็นการประมาณค่าของอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลาง ซึ่งแผนแบบหลักๆ ที่ใช้กันในปัจจุบันมีดังนี้

2.1.2.1 Euler scheme

Euler scheme เป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับหนึ่ง (First order scheme) และเป็น Explicit scheme หากกำหนดให้

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = F\left(t,\phi\right) \tag{2.1}$$

จะได้ว่า

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F\left(t,\phi_t\right)\Delta t$$

2.1.2.2 Crank-Nicolson scheme

Crank-Nicolson scheme เป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสอง (Second order accuracy) จากสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \frac{1}{2}\left(F\left(t,\phi_t\right) + F\left(t+\Delta t,\phi_{t+\Delta t}\right)\right)\Delta t$$

2.1.2.3 Fully implicit scheme

Fully implicit scheme เป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับหนึ่ง (First order scheme) จากสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F\left(t+\Delta t,\phi_{t+\Delta t}\right)\Delta t$$

2.1.2.4 Adams-Bashforth scheme

Adams-Bashforth scheme เป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสอง (Second order scheme) จากสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \left(\frac{3}{2}F\left(t+\Delta t,\phi_{t+\Delta t}\right) - \frac{1}{2}F\left(t,\phi_t\right)\right)\Delta t$$

Quang [9] ใช้ Adams-Bashforth scheme กับ Convective term และ Crank-Nicolson scheme กับ Diffusive term ในการแก้ปัญหา Navier-Stokes equation

2.1.2.5 Runge-Kutta scheme

สำหรับ Runge-Kutta scheme ที่ได้รับความนิยมได้แก่ Fourth-order Runge-Kutta scheme ซึ่งเป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสี่ (Fourth order scheme) จากสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\Delta t$$

เมื่อ

$$k_1 = F\left(t, \phi_t\right)$$

$$k_2 = F\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \phi_t + \frac{1}{2}\Delta t\, k_1\right)$$

$$k_3 = F\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \phi_t + \frac{1}{2}\Delta t\, k_2\right)$$

$$k_4 = F\left(t + \Delta t, \phi_t + \Delta t\, k_3\right)$$

Kamyab et al. [10] ได้วิเคราะห์และประยุกต์ใช้ Runge-Kutta scheme ในการแก้ปัญหา Navier-Stokes equation

2.2 การประมาณค่านอกช่วงเพื่อหาค่าของตัวแปรสำหรับเป็นค่าเริ่มต้นในการหาคำตอบของช่วงเวลาถัดไป (Extrapolation of variables for initial guess values for solving in the next time step)

ในการหาคำตอบของระบบสมการของปัญหาที่สภาวะไม่คงตัว (Transient condition) ด้วยการใช้วิธีทำซ้ำ (Iterative method) นั้น ต้องมีการหาคำตอบเป็นช่วงเวลา (Time step) โดยทุกช่วงเวลาของการหาคำตอบจะต้องมีการสมมุติค่าคาดเดาเริ่มต้น (Initial guess value) ให้กับตัวแปรเพื่อใช้ในการทำซ้ำแต่ละช่วงเวลา โดยทั่วไปมักใช้คำตอบของช่วงเวลาก่อนหน้าเป็นค่าคาดเดาเริ่มต้นในช่วงเวลาปัจจุบันเนื่องจากสะดวกและง่ายต่อการพัฒนาโปรแกรม แต่หากค่าของช่วงเวลาย่อยมีค่ามาก การหาคำตอบอาจเกิดการลู่ออก (Divergence) หรือจำนวนครั้งของการทำซ้ำมีค่ามากทำให้ใช้เวลาในการหาคำตอบนาน จึงมีนักวิจัยบางส่วนได้ประยุกต์การประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation) ของคำตอบในช่วงเวลาที่ผ่านมาแล้ว มาใช้ในการกำหนดค่าคาดเดาเริ่มต้นเพื่อใช้ในการหาคำตอบด้วยวิธีการทำซ้ำในช่วงเวลาปัจจุบัน ซึ่งเทคนิคของการประมาณค่านอกช่วงมีด้วยกันหลายวิธี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.1 Polynomial extrapolation function

การประมาณค่านอกช่วงด้วย Polynomial extrapolation function เป็นการประยุกต์จากวิธีการพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ (Lagrange interpolating polynomial)

Sachs et al. [11] ได้ใช้เทคนิคดังกล่าวในการประมาณค่าเริ่มต้นของแรงที่กระทำกับโครงสร้างในแต่ละช่วงเวลาในการหาคำตอบด้วยวิธีการทำซ้ำของปัญหาที่ไม่คงตัวแบบ Fluid-structure interaction ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า การใช้เทคนิคการประมาณค่านอกช่วงช่วยลด

เวลาการคำนวณเพื่อหาคำตอบในแต่ละช่วงเวลา และยังสามารถกำหนดค่าของช่วงเวลาให้มีค่ามากขึ้นกว่าการไม่ใช้เทคนิคการประมาณค่านอกช่วง

สำหรับการประมาณค่านอกช่วงด้วย Polynomial extrapolation function โดยใช้คำตอบในช่วงเวลาที่ผ่านมาแล้วสามระดับช่วงเวลา อาจเรียกว่าเป็นการประมาณค่านอกช่วงแบบ Parabolic extrapolation หรือ Quadratic extrapolation โดย Malevsky and Yuen [12] ได้ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ Parabolic extrapolation เพื่อประมาณค่าเริ่มต้นของค่า Stream function ในแต่ละช่วงเวลาในปัญหาการพาความร้อนแบบปั่นป่วนและของไหลเป็นแบบ Non-Newtonian

Leemput et al. [13] ได้ศึกษาถึงการลู่เข้าของคำตอบ ความเสถียร และความแม่นยำของคำตอบ จากการใช้การประมาณค่านอกช่วง แบบ Polynomial backward extrapolation กับปัญหา One-dimensional advection โดยใช้ระเบียบวิธี Lattice Boltzmann method ซึ่งจากผลการศึกษายังสรุปไม่ได้อย่างแน่ชัดถึงข้อดีของการใช้การประมาณค่านอกช่วงกับปัญหาดังกล่าว

Hu et al. [14] ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ Time-extrapolation Algorithm กับปัญหา Nonlinear parabolic พบว่ามีประสิทธิผลดี

Merrill et al. [15] ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ Temporal interface extrapolation กับปัญหา Incompressible Navier-Stokes equations พบว่าการใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบดังกล่าว ให้ความแม่นยำของคำตอบและความเสถียรใกล้เคียงกับการไม่ใช้การประมาณค่านอกช่วง

2.2.2 Time-adaptive single diagonally implicit Runge-Kutta method (SDIRK)

Birken et al. [16] .ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ SDIRK ในการประมาณค่าของอุณหภูมิกับปัญหาที่ไม่คงตัวแบบ Thermal fluid structure interaction โดยมีรายละเอียดของเทคนิคดังนี้

จากรูปที่ 0.5 กำหนดให้ในค่าของช่วงเวลาก่อนหน้านี้เป็น Δt_{n-1} ที่เวลาเป็น t_{n-1} และมีค่าอุณหภูมิเป็น T_{n-1} ขณะที่ค่าของช่วงเวลาปัจจุบันเป็น Δt_n ที่เวลาเป็น t_n และมีค่าอุณหภูมิเป็น T_n โดยต้องการประมาณค่าอุณหภูมิ T_{n+1} ที่เวลาอนาคต $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ หากกำหนดให้อุณหภูมิระหว่างช่วงเวลาเป็น T_{n-1}^1 ที่เวลาเป็น $t_{n-1}^1 = t_{n-1} + c_1 \Delta t_{n-1}$ และ T_n^1 ที่เวลาเป็น $t_n^1 = t_n + c_1 \Delta t_n$ โดยคำนวณค่า T_{n-1}^1 จากการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น (Linear interpolation)

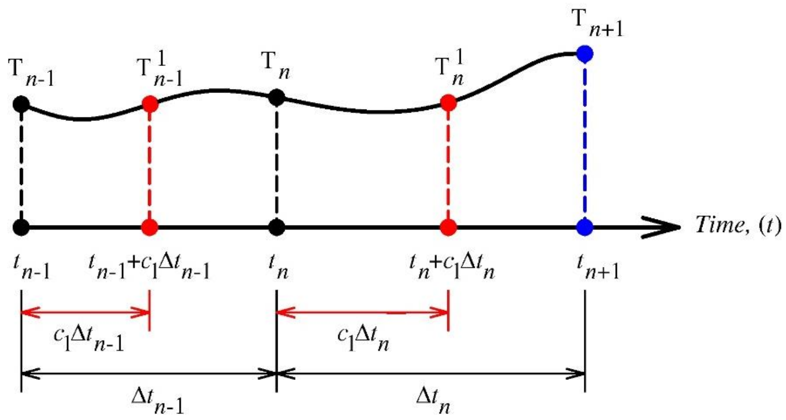
$$T_{n-1}^1 \approx T_{n-1} + c_1 \Delta t_{n-1} \frac{\left(T_n - T_{n-1}\right)}{\Delta t_{n-1}} = \frac{c_1 \Delta t_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} T_n + \left(1 - \frac{c_1 \Delta t_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}\right) T_{n-1}$$

หากประมาณค่านอกช่วงของอุณหภูมิ T_n^1 จากค่า T_{n-1}, T_{n-1}^1 และ T_n โดยคำนวณจากการประมาณค่านอกช่วงแบบควอดราติก (Quadratic extrapolation)

$$T_n^1 \approx T_{n-1}\frac{\left(c_1\Delta t_n+\left(1-c_1\right)\Delta t_{n-1}\right)c_1\Delta t_n}{c_1\Delta t_{n-1}^2}-T_{n-1}^1\frac{\left(c_1\Delta t_n+\Delta t_{n-1}\right)c_1\Delta t_n}{c_1\Delta t_{n-1}^2\left(1-c_1\right)}$$
$$+T_n\frac{\left(c_1\Delta t_n+\Delta t_{n-1}\right)\left(c_1\Delta t_n+\left(1-c_1\right)\Delta t_{n-1}\right)}{\left(1-c_1\right)\Delta t_{n-1}^2}$$

ดังนั้นการประมาณค่านอกช่วงของอุณหภูมิ T_{n+1} จากค่า T_{n-1}, T_n และ T_n^1 โดยคำนวณจากการประมาณค่านอกช่วงแบบควอดราติก (Quadratic extrapolation)

$$T_{n+1} \approx T_{n-1}\frac{\Delta t_n^2\left(1-c_1\right)}{\Delta t_{n-1}\left(\Delta t_{n-1}+c_1\Delta t_n\right)}-T_n\frac{\left(\Delta t_{n-1}+\Delta t_n\right)\left(1-c_1\right)\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}\,c_1\Delta t_n}$$
$$+T_n^1\frac{\left(\Delta t_{n-1}+\Delta t_n\right)\Delta t_n}{\left(c_1\Delta t_n+\Delta t_{n-1}\right)c_1\Delta t_n}$$



รูปที่ 0.5 แผนผังการประมาณค่านอกช่วงแบบ Time-adaptive singly diagonally implicit Runge-Kutta method

2.2.3 Deformation gradient extrapolation method

Rashid [17] ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ Deformation gradient extrapolation method เพื่อประมาณค่าอัตราการเสียรูปของวัตถุในปัญหาสภาวะไม่คงตัว ซึ่งการประมาณค่านอกช่วงนี้ใช้หลักการของ Taylor series expansion ในการประมาณค่า

2.2.4 Reduced-order models

Reduced-order models เป็นวิธีการประมาณค่าเริ่มต้นสำหรับการคำนวณหาคำตอบในแต่ละช่วงเวลา โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูปของฟังชั่นแบบง่ายๆ จากคำตอบของช่วงเวลาที่ผ่านมาแล้วแล้วใช้สมการดังกล่าวในการประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรในช่วงเวลาปัจจุบัน โดย Markovinovic [18] ได้ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ Reduced-order models ในการแก้ปัญหา Two-phase flow through heterogeneous porous media และพบว่าวิธีการดังกล่าวช่วยลดเวลาในการคำนวณถึง 67%

Grinberg and Karniadakis [19] ศึกษาถึงประสิทธิผลของการประมาณค่าแบบ Reduced-order models และ Polynomial extrapolation function กับปัญหาการไหลในสามมิติ พบว่าการประมาณค่าแบบ Reduced-order models มีประสิทธิผลดีกว่า ในกรณีที่ค่าของช่วงเวลามีค่าน้อยๆ

2.3 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP (Verification of the LIP scheme)

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอแผนแบบใหม่ ซึ่งนำมาใช้ประมาณค่าตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรทั้งที่เทียบกับระยะและเวลาในสมการเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปรซึ่งใช้นิยามการถ่ายเทความร้อนและการไหลของของไหล เพื่อให้แน่ใจว่าแผนแบบใหม่ที่นำเสนอมีความถูกต้องและให้คำตอบที่ถูกต้อง จึงต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบใหม่

การตรวจสอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical verification) สำหรับ ระเบียบวิธีการใหม่ ออกอริทึมใหม่ หรือแผนแบบใหม่ ทำได้หลายวิธีดังนี้ [20]

- Analytical solutions for simplified physics
- Method of manufactured solutions
- ODE benchmark solutions
- PDE benchmark solutions
- Conservation tests
- Alternate coordinate system tests
- Symmetry tests
- Iterative convergence tests

โดยงานวิจัยนี้เลือกใช้การเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากแผนแบบ LIP เปรียบเทียบค่ากับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์สำหรับปัญหาอย่างง่ายทางฟิสิกส์ (Analytical solutions for simplified physics) และการเปรียบเทียบค่ากับคำตอบที่ใช้สำหรับเปรียบเทียบ (PDE benchmark solutions) อีกทั้งยังเพิ่มเติมด้วยการเปรียบเทียบค่าที่ได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้รับการเผยแพร่แล้วทั้งที่เป็นคำตอบเชิงตัวเลข (Numerical solutions) และผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง (Experimental solutions) ซึ่งการเปรียบเทียบกระทำกับคำตอบของปัญหาที่ได้รับการยอมรับในแวดวงวิชาการทางการคำนวณ (Computational Sciences) ได้แก่

- ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Conduction in rectangular plates with boundary temperature specified)
- ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน (Lid-driven cavity flow)
- ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (Natural convection in a square cavity)
- ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก (Natural convection in a tall cavity)

โดยทั้งสี่ปัญหาได้ครอบคลุมการตรวจสอบความถูกต้องทั้งทางการถ่ายเทความร้อน (Heat transfer) และกลศาสตร์ของไหล (Fluid mechanics)

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องเชิงตัวเลขต้องอาศัยระบบกริด (Grid system) เข้ามาเกี่ยวของกับการคำนวณ ซึ่งความละเอียดของกริดมีผลต่อความถูกต้องของคำตอบขณะเดียวกันก็มีผลต่อทรัพยากรที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้นเพื่อลดปัญหาดังกล่าวงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการ Richardson extrapolation [21-23] ในการหาคำตอบจากระบบกริดที่มีความละเอียดแตกต่างกันเป็นสองเท่าโดยคำนวณจากสูตร

$$f\left(\text{exact}\right) \approx \frac{4}{3} f_1 - \frac{1}{3} f_2 \qquad (2.2)$$

เมื่อ $f\left(\text{exact}\right)$ เป็นคำตอบที่ไม่มีผลของความละเอียดของระบบกริดมาเกี่ยวข้อง และ f_1 เป็นคำตอบที่ได้จากการคำนวณที่ระบบกริดมีความละเอียดเป็นสองเท่าของ f_2

2.3.1 คำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Solutions of conduction in rectangular plates with boundary temperature specified)

คำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขตที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ถือว่าเป็นคำตอบแม่นตรง (Exact solution) ซึ่งได้มีนักวิจัย Beck et al. [24] ได้นำเสนอคำตอบของปัญหานี้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาและหาคำตอบด้วย

การวิเคราะห์แบบฟังก์ชั่นของกรีน (Green's function) คำตอบที่ได้แสดงในลักษณะค่าไร้มิติ (Dimensionless value) ของค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิ (Temperature distribution) และค่าฟลักซ์ของการนำความร้อน (Heat flux) ที่จุดต่างๆ ในแผ่นวัสดุ

2.3.2 คำตอบของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน (Solutions of a lid-driven cavity flow)

การไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบนเป็นปัญหาที่ใช้ในการทดสอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับการยอมรับ (Classical problem) อย่างกว้างขวางในแวดวงของ พลศาสตร์ของของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD) โดยมีนักวิจัย [25-32] จำนวนมากศึกษาถึงแนวทางในการแก้ปัญหา และมีนักวิจัยบางท่าน [27, 28] ได้แสดงคำตอบของปัญหาเพื่อใช้เป็นคำตอบเปรียบเทียบ (Benchmark solution) ถึงความถูกต้องของระเบียบวิธีใหม่เชิงตัวเลขต่างๆ ทางด้านกลศาสตร์ของของไหล หลังจากนั้นคำตอบเปรียบเทียบดังกล่าวได้ถูกนำมาใช้ในการประเมินความถูกต้องของระเบียบวิธีใหม่เชิงตัวเลขจากนักวิจัย [33-40] จำนวนมาก

Botella and Peyret [27] ได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ Spectral method ในการแก้ปัญหาและแสดงคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบเชิงตัวเลข ที่ค่า Re = 1,000 ในขณะที่ Bruneau and Saad [28] ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องและ Euler scheme *และ* Gear scheme ในการกระจายพจน์อนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลา และใช้ Murman scheme ในการกระจายพจน์การพา (Convective term) โดยคำตอบที่ได้ก็ได้รับการยอมรับว่าเป็นคำตอบสำหรับการเปรียบเทียบความถูกต้องเชิงตัวเลขเช่นกัน รายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 0.2

ตารางที่ 0.2 รายละเอียดของงานวิจัยที่คำตอบถูกใช้สำหรับการเปรียบเทียบเชิงตัวเลขของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน

Detail	**Authors**	
	Botella and Peyret [27]	**Bruneau and Saad [28]**
Method	Spectral method	Finite difference method
Scheme	-	- Euler scheme and Gear scheme for temporal discretization - Murman scheme for convective term discretization
Grid size	N = 160	512×512
Range	Re = 100, 1,000	Re = 1,000, 5,000, 10,000

2.3.3 คำตอบของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (Solutions of natural convection in a square cavity)

ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นอีกปัญหาหนึ่งที่ผู้วิจัยจำนวนมากนิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของ ระเบียบวิธีใหม่ หรือแผนแบบใหม่ ได้มีนักวิจัย Davis [41] และ Saitoh and Hirose [42] ได้นำเสนอคำตอบเชิงตัวเลขเพื่อใช้เป็นคำตอบเปรียบเทียบ โดยคำนวณจากการใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ต่อมาได้มีนักวิจัยอีกจำนวนหนึ่ง ได้แก่ Markatos and Pericleous [43], Barakos et al. [44], Dixit and Babu [45] และ Baïri [46] ได้นำเสนอคำตอบของปัญหาดังกล่าวในวารสารทางวิชาการ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่แตกต่างกัน รายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 0.3

ตารางที่ 0.3 รายละเอียดของงานวิจัยที่คำตอบถูกใช้สำหรับการเปรียบเทียบของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

Author	Implementation	Method	Scheme	Range
Davis [41]	Numerical	Finite difference method	Second-order central difference	$Ra = 10^3 – 10^6$
Saitoh and Hirose [42]	Numerical	Finite difference method	Four multi-point	$Ra = 10^4$, 10^6
Markatos and Pericleous [43]	Numerical	Finite volume method	Upwind	$Ra = 10^3 – 10^{16}$
Barakos et al. [44]	Numerical	Finite volume method	Upwind	$Ra = 10^3 – 10^{11}$
Dixit and Babu [45]	Numerical	Lattice Boltzmann method	-	$Ra = 10^3 - 10^{10}$
Baïri [46]	Numerical	Finite volume method	-	$Ra = 10^3 - 10^{10}$

2.3.4 คำตอบของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก (Solutions of natural convection in a tall cavity)

การไหลของอากาศในช่องว่างที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าสูงเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นการไหลที่มีรูปแบบเฉพาะคือที่ค่าเลขเรย์ลีประมาณ 10^4 และค่าสัดส่วนของความสูงต่อความกว้าง (Aspect ratio) มากกว่า 15 ขึ้นไป ซึ่งจะเกิดปรากฎการณ์การไหลวนในช่องว่าง (Multi-cellular) โดยการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบด้วยวิธีการแบบเชิงตัวเลขต้องใช้แผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสาม (Third order scheme) ขึ้นไป ซึ่งคำตอบของปัญหานี้ที่ได้จากการแก้ปัญหาโดยวิธีการเชิงตัวเลขและได้รับการเผยแพร่ทางวารสารวิชาการแล้ว และได้รับการยอมรับโดยคำตอบจากผลงานวิจัยถูกนำไปใช้เปรียบเทียบเพื่อยืนยันความถูกต้องของคำตอบของนักวิจัยท่านอื่นๆ ในภายหลัง ได้แก่ผลงานวิจัยของ Quere [47] Zhu and Yang [48] และ Báez and Nicolás [49] นอกจากคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามากแล้ว ElSherbiny et al. [50] ได้เผยแพร่คำตอบที่ได้จากการทดลองของปัญหาดังกล่าวในรูปของสหสัมพันธ์ (Correlation) ระหว่างค่าเลขนัสเซลต์ (Nusselt number) กับค่าเลขเรย์ลี (Rayleigh number) ซึ่งรายละเอียดของงานวิจัยของแต่ละท่านได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 0.4

ตารางที่ 0.4 รายละเอียดของงานวิจัยที่คำตอบถูกใช้สำหรับการเปรียบเทียบของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามากเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

Author	Implementation	Method	Scheme	Range
Quere [47]	Numerical	Finite difference method	- Chebyshev polynomial scheme for spatial discretization - Adams-Bashforth/Crank-Nicolson schemes for temporal discretization	Ra = 8×10^3 – 3.6×10^4 AR = 16
Zhu and Yang [48]	Numerical	Accurate project method	Second-order central difference	Ra = 10^3 - 6×10^5 AR = 16
Báez and Nicolás [49]	Numerical	Finite difference method	Second order	Ra = 1.1×10^4 AR = 12 - 20
Eisherbiny et al. [50]	Experimental	-	-	Ra = 10^2 - 2×10^7 AR = 5 - 110

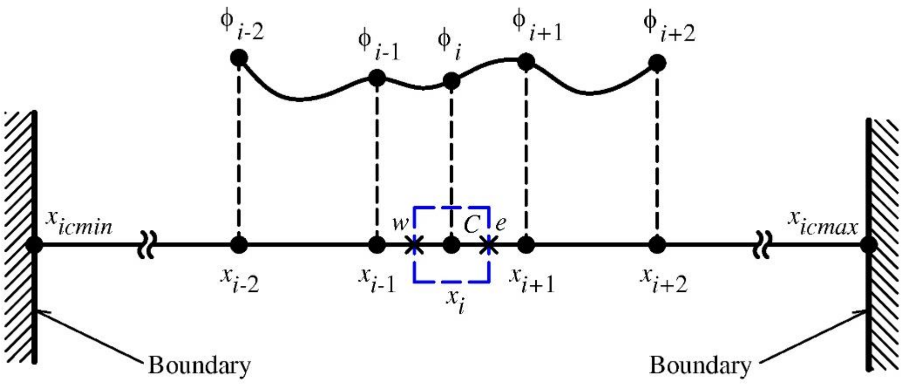
บทที่ 3
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
(Mathematical model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของงานวิทยานิพนธ์นี้เป็นการแสดงรายละเอียดให้เห็นถึงที่มาและการประยุกต์ใช้งานของแผนแบบ LIP และเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP กับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ และปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก นอกจากนี้ยังแสดงถึงวิธีการหาตำแหน่งของแนวเม็สช์ (Mesh system) ที่มีลักษณะเป็นแบบขนาดของเม็สช์ไม่สม่ำเสมอ (Non-uniform mesh) โดยระบบเม็สช์นี้ถูกใช้ในการจำลองปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น

3.1 แผนแบบ LIP (LIP scheme)

แผนแบบ LIP เป็นการประยุกต์พหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ (Lagrange interpolating polynomial) และการกำหนดให้ค่าของระยะ (Spatial domain) และเวลา (Temporal domain) ที่บริเวณที่พิจารณามีค่าเป็นศูนย์ เพื่อใช้ในการประมาณค่าของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะที่ผิวหน้าเซลล์ และการประมาณค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลาง

3.1.1 แผนแบบ LIP ทางระยะ (Spatial LIP scheme)



รูปที่ 0.1 ค่าของตัวแปรตามระยะโดยจุดที่พิจารณาอยู่ที่ผิวของเซลล์ด้านตะวันตก

จากรูปที่ 0.1 ค่าของตัวแปรที่ตำแหน่งผิวเซลล์ด้านตะวันตก (ϕ_w) สามารถประมาณค่าได้ โดยใช้พหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ ซึ่งมีค่าเป็น

$$\phi_w = \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx}\ \phi_{i-nxwi+nx}\right) \tag{3.1}$$

$$LXW_{nx} = \prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4}\frac{\left(X_w - X_{ii}\right)}{\left(X_{nx} - X_{ii}\right)} \tag{3.2}$$

โดยที่กำหนดให้ $X_w = 0$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจะได้ว่า $X_w = x_w - x_w = 0$, $X_{ii} = x_{i-nxwi+ii} - x_w$ และ $X_{nx} = x_{i-nxwi+nx} - x_w$ โดยที่ค่า *nxwi* เป็นค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่ผิวเซลล์ด้านตะวันตก และค่า *icmin* และ *icmax* เป็นค่าโคออร์ดิเนตในแนวแกน *x* ที่ตำแหน่งขอบเขต (Boundary) ของโดเมน

สำหรับค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับค่าระยะในแนวแกน *x* ที่ตำแหน่งผิวเซลล์ด้านตะวันตก ($\frac{d\phi_w}{dx}$) สามารถคำนวณได้จาก

$$\frac{d\phi_w}{dx} = \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx}\ \phi_{i-nxwi+nx}\right) \tag{3.3}$$

$$DLXW_{nx} = \frac{d}{dX_w}\left(\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4}\frac{\left(X_w - X_{ii}\right)}{\left(X_{nx} - X_{ii}\right)}\right) \tag{3.4}$$

เมื่อ $nx = 1$ จะได้ว่า

$$DLXW_1 = \frac{d}{dX_w}\left(\frac{\left(X_w - X_2\right)\left(X_w - X_3\right)\left(X_w - X_4\right)}{\left(X_1 - X_2\right)\left(X_1 - X_3\right)\left(X_1 - X_4\right)}\right)$$

$$DLXW_1 = \frac{d}{dX_w}\left(\frac{X_w^3 - X_w^2\left(X_2 + X_3 + X_4\right) + X_w\left(X_3X_4 + X_2X_4 + X_2X_3\right) - X_2X_3X_4}{\left(X_1 - X_2\right)\left(X_1 - X_3\right)\left(X_1 - X_4\right)}\right)$$

$$DLXW_1 = \frac{3X_w^2 - 2X_w\left(X_2 + X_3 + X_4\right) + \left(X_3X_4 + X_2X_4 + X_2X_3\right)}{\left(X_1 - X_2\right)\left(X_1 - X_3\right)\left(X_1 - X_4\right)}$$

เนื่องจาก $X_w = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$DLXW_1 = \frac{\left(\left(-X_3\right)\left(-X_4\right) + \left(-X_2\right)\left(-X_4\right) + \left(-X_2\right)\left(-X_3\right)\right)}{\left(X_1 - X_2\right)\left(X_1 - X_3\right)\left(X_1 - X_4\right)}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$DLXW_1 = \frac{\sum\limits_{\substack{ii=2 \\ ii\neq 1}}^{4}\left(\prod\limits_{\substack{iii=2 \\ iii\neq ii \\ iii\neq 1}}^{4}\left(-X_{iii}\right)\right)}{\prod\limits_{\substack{ii=2 \\ ii\neq 1}}^{4}\left(X_1 - X_{ii}\right)}$$

จากหลักการเดียวกันจะได้ว่า

เมื่อ $nx = 2$

$$DLXW_2 = \frac{\sum\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 2}}^{4}\left(\prod\limits_{\substack{iii=1 \\ iii\neq ii \\ iii\neq 2}}^{4}\left(-X_{iii}\right)\right)}{\prod\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 2}}^{4}\left(X_1 - X_{ii}\right)}$$

เมื่อ $nx = 3$

$$DLXW_3 = \frac{\sum\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 3}}^{4}\left(\prod\limits_{\substack{iii=1 \\ iii\neq ii \\ iii\neq 3}}^{4}\left(-X_{iii}\right)\right)}{\prod\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 3}}^{4}\left(X_1 - X_{ii}\right)}$$

เมื่อ $nx = 4$

$$DLXW_4 = \frac{\sum\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 4}}^{4}\left(\prod\limits_{\substack{iii=1 \\ iii\neq ii \\ iii\neq 4}}^{4}\left(-X_{iii}\right)\right)}{\prod\limits_{\substack{ii=1 \\ ii\neq 4}}^{4}\left(X_1 - X_{ii}\right)}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าสมการ (3.4) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตได้เป็น

$$DLXW_{nx} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4}\left(\prod_{\substack{iii=1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx}}^{4}\left(-X_{iii}\right)\right)}{\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4}\left(X_{nx}-X_{ii}\right)} \tag{3.5}$$

เมื่อ $X_{iii} = x_{i-nxwi+iii} - x_w$

สำหรับค่าตัวแปรและค่าอนุพันธ์เทียบกับค่าระยะในแนวแกน x ที่ตำแหน่งผิวเซลล์ด้านตะวันออก และค่าตัวแปรและค่าอนุพันธ์เทียบกับค่าระยะในแนวแกน y ที่ตำแหน่งผิวเซลล์ด้านใต้และด้านเหนือ ก็สามารถประมาณค่าโดยใช้หลักการเดียวกัน

สำหรับค่าของตัวแปรที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางเซลล์ ก็สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\phi_C = \begin{cases} \displaystyle\sum_{nx=1}^{4}\left(LXC_{nx}\,\phi_{i-nxci+nx}\right) \Big| \text{if} \quad i = icmin \quad \text{or} \quad i = icmax \\[2ex] \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{nx=1}^{nxci-1}\left(LXC_{nx}\,\phi_{i-nxci+nx}\right) \\ \displaystyle+\sum_{nx=nxci}^{4}\left(LXC_{nx}\,\phi_{i-nxci+nx+1}\right)\end{array}\right) \Bigg| \text{if} \quad icmin+1 \le i \le icmax-1 \end{cases} \tag{3.6}$$

โดยที่ *nxci* เป็นค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่จุดศูนย์กลางเซลล์ และค่า LXC_{nx} คำนวณได้จาก

$$
LXC_{nx} = \begin{cases}
\left(\prod_{\substack{ii=1 \\ ii \neq nx}}^{4} \dfrac{(X_C - X_{ii})}{(X_{nx} - X_{ii})} \right) \Bigg| \text{if} \quad i = icmin \quad \text{or} \quad i = icmax \\[2ex]
\left(\left(\prod_{\substack{ii=1 \\ ii \neq nx}}^{nxci-1} \dfrac{(X_C - X_{ii})}{(X_{nx} - X_{ii})} \right) + \left(\prod_{\substack{ii=nxci+1 \\ ii \neq nx}}^{5} \dfrac{(X_C - X_{ii})}{(X_{nx} - X_{ii})} \right) \right) \Bigg| \begin{array}{l} \text{if} \quad icmin + 1 \leq i \leq icmax - 1 \\ \text{and} \quad nx < nxci \end{array} \\[2ex]
\left(\left(\prod_{\substack{ii=1 \\ ii \neq nx+1}}^{nxci-1} \dfrac{(X_C - X_{ii})}{(X_{nx+1} - X_{ii})} \right) + \left(\prod_{\substack{ii=nxci+1 \\ ii \neq nx+1}}^{5} \dfrac{(X_C - X_{ii})}{(X_{nx+1} - X_{ii})} \right) \right) \Bigg| \begin{array}{l} \text{if} \quad icmin + 1 \leq i \leq icmax - 1 \\ \text{and} \quad nx \geq nxci \end{array}
\end{cases} \tag{3.7}
$$

สำหรับอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับระยะในแนวแกน x ที่จุดศูนย์กลางเซลล์คำนวณได้จาก

$$
\frac{d\phi_C}{dx} = \begin{cases}
\sum_{nx=1}^{4} \left(DLXC_{nx} \ \phi_{i-nxci+nx} \right) \Big| \text{if} \quad i = icmin \quad \text{or} \quad i = icmax \\[2ex]
\left(\sum_{nx=1}^{nxci-1} \left(DLXC_{nx} \ \phi_{i-nxci+nx} \right) + \sum_{nx=nxci}^{4} \left(DLXC_{nx} \ \phi_{i-nxci+nx+1} \right) \right) \Bigg| \text{if} \quad icmin + 1 \leq i \leq icmax - 1
\end{cases} \tag{3.8}
$$

โดยที่ค่า $DLXC_{nx}$ มีค่าเป็น

$$DLXC_{nx}=\begin{cases}\dfrac{d}{dX_C}\left(\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4}\dfrac{(X_C-X_{ii})}{(X_{nx}-X_{ii})}\right)\Bigg| & \text{if}\quad i=icmin\quad\text{or}\quad i=icmax\\[2ex] \dfrac{d}{dX_C}\left(\begin{array}{l}\left(\prod\limits_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{nxci-1}\dfrac{(X_C-X_{ii})}{(X_{nx}-X_{ii})}\right)\\ +\left(\prod\limits_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx}}^{5}\dfrac{(X_C-X_{ii})}{(X_{nx}-X_{ii})}\right)\end{array}\right)\Bigg| & \begin{array}{l}\text{if}\quad icmin+1\leq i\leq icmax-1\\ \text{and}\quad nx<nxci\end{array}\\[2ex] \dfrac{d}{dX_C}\left(\begin{array}{l}\left(\prod\limits_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx+1}}^{nxci-1}\dfrac{(X_C-X_{ii})}{(X_{nx+1}-X_{ii})}\right)\\ +\left(\prod\limits_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx+1}}^{5}\dfrac{(X_C-X_{ii})}{(X_{nx+1}-X_{ii})}\right)\end{array}\right)\Bigg| & \begin{array}{l}\text{if}\quad icmin+1\leq i\leq icmax-1\\ \text{and}\quad nx\geq nxci\end{array}\end{cases}\tag{3.9}$$

โดยที่กำหนดให้ $X_C=0$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจะได้ว่า $X_C=x_C-x_C=0$, $X_{ii}=x_{i-nxci+ii}-x_C$, $X_{nx}=x_{i-nxci+nx}-x_C$ และ $X_{nx+1}=x_{i-nxci+nx+1}-x_C$ ซึ่งสมการ (3.9) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตได้เป็น

$$
DLXC_{nx} = \begin{cases}
\left(\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4} \left(\prod_{\substack{iii=1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx}}^{4} \left(-X_{iii}\right) \right)}{\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{4} \left(X_{nx}-X_{ii}\right)} \right) & \text{if} \quad i = icmin \quad \text{or} \quad i = icmax \\[3em]
\left(\left(\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{nxci-1} \left(\prod_{\substack{iii=1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx}}^{nxci-1} \left(-X_{iii}\right) \right)}{\left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{nxci-1} \left(X_{nx}-X_{ii}\right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx}}^{5} \left(X_{nx}-X_{ii}\right) \right)} \right) + \left(\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx}}^{5} \left(\prod_{\substack{iii=nxci+1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx}}^{5} \left(-X_{iii}\right) \right)}{\left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx}}^{nxci-1} \left(X_{nx}-X_{ii}\right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx}}^{5} \left(X_{nx}-X_{ii}\right) \right)} \right) \right) & \begin{array}{l} \text{if} \quad icmin+1 \le i \le icmax-1 \\ \text{and} \quad nx < nxci \end{array} \\[3em]
\left(\left(\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx+1}}^{nxci-1} \left(\prod_{\substack{iii=1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx+1}}^{nxci-1} \left(-X_{iii}\right) \right)}{\left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx+1}}^{nxci-1} \left(X_{nx+1}-X_{ii}\right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx+1}}^{5} \left(X_{nx+1}-X_{ii}\right) \right)} \right) + \left(\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx}}^{5} \left(\prod_{\substack{iii=nxci+1\\ iii\neq ii\\ iii\neq nx}}^{5} \left(-X_{iii}\right) \right)}{\left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=1\\ ii\neq nx+1}}^{nxci-1} \left(X_{nx+1}-X_{ii}\right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{\substack{ii=nxci+1\\ ii\neq nx+1}}^{5} \left(X_{nx+1}-X_{ii}\right) \right)} \right) \right) & \begin{array}{l} \text{if} \quad icmin+1 \le i \le icmax-1 \\ \text{and} \quad nx \ge nxci \end{array}
\end{cases} \tag{3.10}
$$

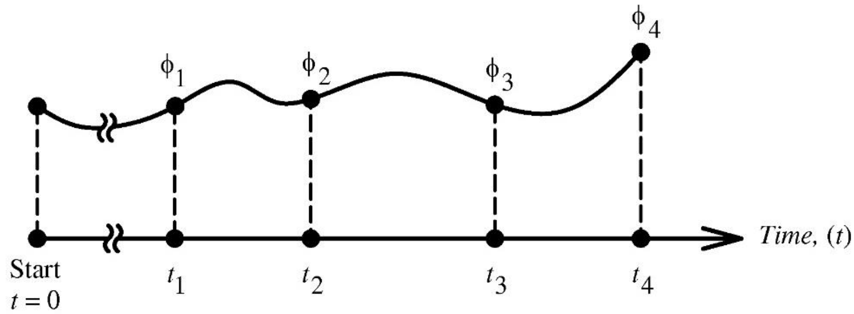
เมื่อ $X_{iii} = x_{i-nxci+iii} - x_C$

โดยค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่ผิวเซลล์ด้านตะวันตก (*nxwi*) ค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่ผิวเซลล์ด้านตะวันออก (*nxei*)) ค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่จุดศูนย์กลางเซลล์ในแนวนอน (*nxci*) ค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่ผิวเซลล์ด้านใต้ (*nysj*) ค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่ผิวเซลล์ด้านเหนือ (*nynj*) และค่าปรับตำแหน่งเซลล์ที่จุดศูนย์กลางเซลล์ในแนวดิ่ง (*nycj*) มีค่าแสดงในตารางที่ 0.1

ตารางที่ 0.1 ค่า *nxwi, nxei, nxci, nysj, nynj, nycj*

Coordinate	Values
$i = icmin$ $j = jcmin$	$nxwi = 1, \quad nxei = 1, \quad nxci = 1$ $nysj = 1, \quad nynj = 1, \quad nycj = 1$
$i = icmin + 1$ $j = jcmin + 1$	$nxwi = 2, \quad nxei = 2, \quad nxci = 2$ $nysj = 2, \quad nynj = 2, \quad nycj = 2$
$icmin + 2 \le i \le icmax - 2$ $jcmin + 2 \le j \le jcmax - 2$	$nxwi = 3, \quad nxei = 2, \quad nxci = 3$ $nysj = 3, \quad nynj = 2, \quad nycj = 3$
$i = icmax - 1$ $j = jcmax - 1$	$nxwi = 3, \quad nxei = 3, \quad nxci = 4$ $nysj = 3, \quad nynj = 3, \quad nycj = 4$
$i = icmax$ $j = jcmax$	$nxwi = 4, \quad nxei = 4, \quad nxci = 4$ $nysj = 4, \quad nynj = 4, \quad nycj = 4$

3.1.2 แผนแบบ LIP ทางเวลา (Temporal LIP scheme)



รูปที่ 0.2 ค่าของตัวแปรตามเวลาโดยจุดที่พิจารณาอยู่ที่เวลาปัจจุบัน (Present time, $\boldsymbol{time} = \boldsymbol{t}_4$)

จากรูปที่ 0.2 ค่าอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลาสามารถประมาณได้จากพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ ซึ่งมีค่าเป็น

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_{nt=1}^{4} \left(DLT_{nt} \ \phi_{nt} \right) \tag{3.11}$$

โดยที่ค่า DLT_{nt} คำนวณได้จาก

$$DLT_{nt} = \frac{d}{dTT_4}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq nt}}^{4}\frac{\left(TT_4 - TT_m\right)}{\left(TT_{nt} - TT_m\right)}\right) \tag{3.12}$$

สมการ (3.12) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตได้เป็น

$$DLT_{nt} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=1\\m\neq nt}}^{4}\left(\prod_{\substack{mm=1\\mm\neq m\\mm\neq nt}}^{4}\left(-TT_{mm}\right)\right)}{\displaystyle\prod_{\substack{m=1\\m\neq nt}}^{4}\left(TT_{nt} - TT_m\right)} \tag{3.13}$$

โดยที่กำหนดให้ $TT_4 = 0$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจะได้ว่า $TT_4 = t_4 - t_4 = 0$, $TT_m = t_m - t_4$, $TT_{nt} = t_{nt} - t_4$ และ $TT_{mm} = t_{mm} - t_4$

3.2 การประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (WF-LIP extrapolation)

เทคนิคการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP เป็นการประมาณค่าของตัวแปรของช่วงเวลาปัจจุบัน จากคำตอบของช่วงเวลาที่ผ่านไปแล้ว เพื่อกำหนดเป็นค่าคาดเดาเริ่มต้นสำหรับใช้คำนวณหาคำตอบในช่วงเวลาปัจจุบันด้วยวิธีการทำซ้ำ โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงใช้การประยุกต์วิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์และการกำหนดค่าของเวลาที่ต้องการหาคำตอบให้มีค่าเป็นศูนย์พร้อมกับการคำนวณหาค่าถ่วงน้ำหนัก (Extrapolation weighting factor) โดยการประมาณค่านอกช่วงคำนวณได้จาก

$$\phi EV = \sum_{n=1}^{3}\left(EWF_n\ \phi DEV_n\right) \tag{3.14}$$

ค่า EWF_n เป็นค่าถ่วงน้ำหนัก (Weighting factor) และ ϕDEV_n เป็นค่าจากการประมาณค่านอกช่วงโดยตรง (Direct extrapolation value) จากคำตอบของช่วงเวลาที่ผ่านมาแล้วจำนวน *n* ค่า จากรูปที่ 0.3 ค่าถ่วงน้ำหนักคำนวณได้จาก

$$EWF_n = \frac{EWF_n}{SUMEWFN} \tag{3.15}$$

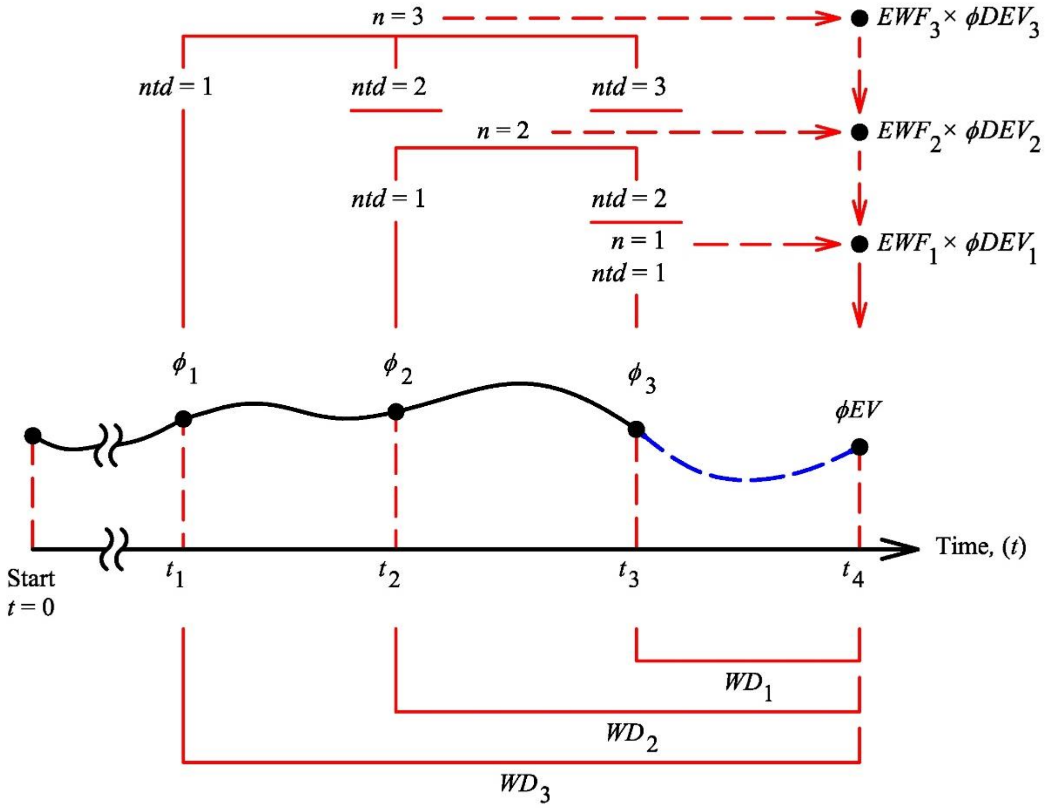
$$SUMEWFN = \sum_{n=1}^{3}\left(EWFN_n\right) \tag{3.16}$$

$$EWFN_n = \frac{WDN_n}{SUMWD} \tag{3.17}$$

$$SUMWD = \sum_{n=1}^{3}\left(\sum_{ntd=1}^{n}\left(WD_{n-ntd+1}\right)\right) \tag{3.18}$$

$$WDN_n = \sum_{ntd=1}^{n} \left(SUMWD - WD_{n-ntd+1} \right) \tag{3.19}$$

$$WD_{n-ntd+1} = t_4 - t_{4-(n-ntd+1)} \tag{3.20}$$



รูปที่ 0.3 แผนผังการประมาณค่านอกช่วงจากคำตอบของช่วงเวลาที่ผ่านไปแล้ว เพื่อกำหนดเป็นค่าเริ่มต้นสำหรับใช้คำนวณหาคำตอบในช่วงเวลาถัดไปด้วยวิธีการทำซ้ำ

สำหรับการประมาณค่านอกช่วงโดยตรง คำนวณได้จาก

$$\phi DEV_n = \sum_{ntd=1}^{n} LTP_{n,ntd}\ \phi_{3-n+ntd} \tag{3.21}$$

เมื่อ

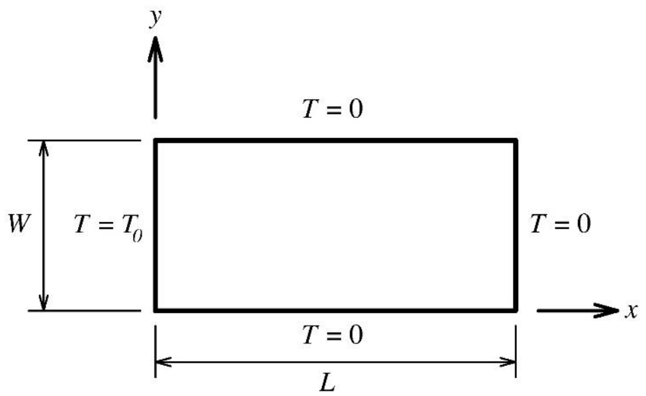
$$LTP_{1,1} = 1 \text{ สำหรับ } n = 1 \tag{3.22}$$

$$LTP_{n,ntd} = \prod_{\substack{ntt=1 \\ ntt \neq ntd}}^{n} \frac{\left(-TT_{n,ntt}\right)}{\left(TT_{n,ntd} - TT_{n,ntt}\right)} \text{ สำหรับ } 2 \le n \le 3 \tag{3.23}$$

โดยที่ $TT_{n,ntt} = t_{3-n+ntt} - t_4$, $TT_{n,ntd} = t_{3-n+ntd} - t_4$

3.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Mathematical model for conduction in rectangular plates with boundary temperature specified problem)

ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขตเป็นปัญหา 2 มิติ ที่แผ่นวัสดุมีขนาดในแนวแกน *x* เป็น *L* และขนาดในแนวแกน *y* เป็น *W* โดยกำหนดให้อุณหภูมิที่ขอบที่ $x=0$ มีค่าอุณหภูมิเป็น T_0 และที่ขอบด้านอื่นๆ มีค่าอุณหภูมิเป็น 0 รายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.4



รูปที่ 0.4 ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

สำหรับสมการที่ใช้ในการหาค่าอุณหภูมิที่จุดต่างในแผ่นวัสดุเป็นดังนี้

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-k\left(\nabla\cdot\nabla\right)T=0 \tag{3.24}$$

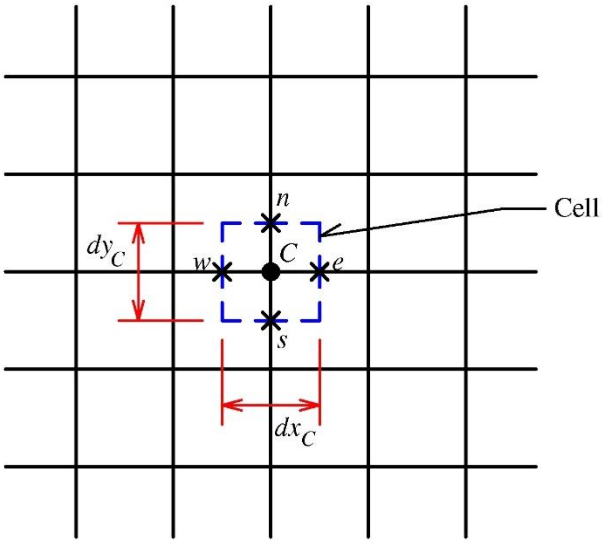
เมื่อ ρ , c *และ* k เป็นค่าความหนาแน่น (Density) ค่าควมจุความร้อนจำเพาะ (Specific heat) และค่าสภาพนำความร้อน (Thermal conductivity)ของแผ่นวัสดุตามลำดับ ซึ่ง $\nabla=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ เป็นสัญลักษณ์ของเดลโอเปอร์เรเตอร์ (Del operator) แล้วทำการอินทิเกรตสมการ (3.24) จะได้ว่า

$$\rho c\int_{CV}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)d\forall-k\int_{CV}\left(\left(\nabla\cdot\nabla\right)T\right)d\forall=0 \tag{3.25}$$

ประยุกต์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ (Gauss’s divergence theorem) กับสมการ (3.25)

$$\rho c\int_{CV}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)d\forall-k\int_{CS}\left(\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)T\right)dA=0 \tag{3.26}$$

เมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) มีทิศตั้งฉากและพุ่งออกจากผิวเซลล์ สำหรับปริมาตรควบคุม (Control volume, CV) และผิวควบคุม (Control surface, CS) ของเซลล์ของวัสดุที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบแกนคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนต (Cartesian coordinate axis) ดังรูปที่ 0.5 สามารถกระจายสมการ (3.26) ได้เป็น



รูปที่ 0.5 เซลล์ของของไหลที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบแกนคาร์ทีเซียนโคร์ออดิเนต

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx_C\, dy_C - k\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} dy_C \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} dy_C \right)_w + \left(\frac{\partial T}{\partial y} dx_C \right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial y} dx_C \right)_s \right) = 0 \qquad (3.27)$$

ใช้แผนแบบ LIP ประมาณค่าของอนุพันธ์ของตัวแปรที่เทียบกับระยะที่บริเวณผิวเซลล์ และอนุพันธ์ของตัวแปรที่เทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลางกับสมการ (3.27) จะได้ว่า

$$\rho c \sum_{nt=1}^{4} \left(DLT_{nt}\, T_{nt,i,j} \right) dx_C\, dy_C - k \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{nx=1}^{4} \left(DLXE_{nx,i}\, T_{4,i-nxei(i)+nx,j} \right) dy_C \right)_e \\ & - \left(\sum_{nx=1}^{4} \left(DLXW_{nx,i}\, T_{4,i-nxwi(i)+nx,j} \right) dy_C \right)_w \\ & + \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(DLYN_{ny,j}\, T_{4,i,j-nynj(j)+ny} \right) dx_C \right)_n \\ & - \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(DLYS_{ny,j}\, T_{4,i,j-nysj(j)+ny} \right) dx_C \right)_s \end{aligned} \right) = 0 \qquad (3.28)$$

จัดรูปสมการ (3.28) จะได้ว่า

$$T_{4,i,j}=\frac{\begin{pmatrix}-\rho c\sum_{nt=1}^{3}\left(DLT_{nt}\,T_{nt,i,j}\right)dx_C\,dy_C\\ +k\begin{pmatrix}\left.\left(\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\,T_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C\right)\right|_{\substack{when\\ nx\neq nxei(i)}}\\ -\left.\left(\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\,T_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C\right)\right|_{\substack{when\\ nx\neq nxwi(i)}}\\ +\left.\left(\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\,T_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)\right|_{\substack{when\\ ny\neq nynj(j)}}\\ -\left.\left(\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\,T_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C\right)\right|_{\substack{when\\ ny\neq nysj(j)}}\end{pmatrix}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\rho c\,DLT_4\,dx_C\,dy_C\\ -k\begin{pmatrix}\left.\left(DLXE_{nx,i}\,dy_C\right)\right|_{\substack{when\\ nx=nxei(i)}}\\ -\left.\left(DLXW_{nx,i}\,dy_C\right)\right|_{\substack{when\\ nx=nxwi(i)}}\\ +\left.\left(DLYN_{ny,j}\,dx_C\right)\right|_{\substack{when\\ ny=nynj(j)}}\\ -\left.\left(DLYS_{ny,j}\,dx_C\right)\right|_{\substack{when\\ ny=nysj(j)}}\end{pmatrix}\end{pmatrix}} \tag{3.29}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

- ที่ $x=0$ จะได้ว่า

$$T=T_0 \tag{3.30a}$$

- ที่ $x=L$ จะได้ว่า

$$T=0 \tag{3.30b}$$

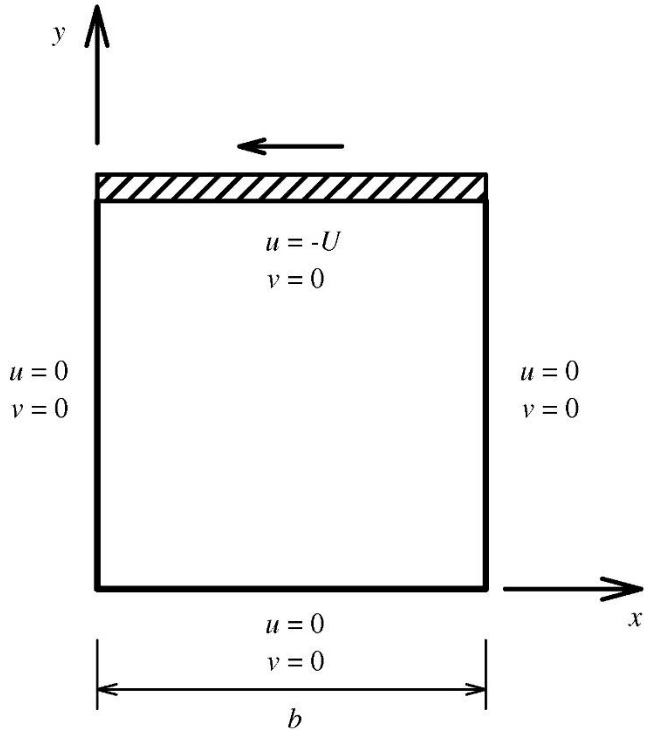
- ที่ $0<x<L$ และ $y=0$ จะได้ว่า

$$T=0 \tag{3.30c}$$

- ที่ $0<x<L$ และ $y=W$ จะได้ว่า

$$T=0 \tag{3.30d}$$

3.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน (Mathematical model for a lid-driven cavity flow problem)



รูปที่ 0.6 ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน

ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบนเป็นปัญหา 2 มิติ ซึ่งมีลักษณะการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible flow) และมีความหนืด (Viscous flow) โดยไม่คิดค่าความเร่งโน้มถ่วงของโลก ($g = \mathbf{0}$) มีความเร็วของผนังด้านบนเป็น $-U$ และมีขนาดของแต่ละด้านของช่องว่างเป็น b ดังแสดงในรูปที่ 0.6

สมการที่ใช้ในการหาคำตอบของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) และ สมการโมเมนตัม (Momentum equation) ในแนวแกน x และแกน y

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{3.31}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla\right)\mathbf{V}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{3.32}$$

เมื่อ t, ρ, p และ μ เป็น เวลา (Time) ค่าความหนาแน่น (Density) ค่าควมดัน (Pressure) และค่าความหนืด (Viscosity) ตามลำดับ ขณะที่ $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ คือเวคเตอร์ของความเร็ว (Velocity vector) อินทิเกรตสมการ (3.32)

$$\rho \int_{CV} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} d\forall + \rho \int_{CV} \left(\left(\mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} \right) d\forall = - \int_{CV} \left(\nabla p \right) d\forall + \mu \int_{CV} \left(\nabla^2 \mathbf{V} \right) d\forall \tag{3.33}$$

ประยุกต์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ กับสมการ (3.33) เฉพาะพจน์ของการพา (Convective term) และ พจน์ของการแพร่ (Diffusive term) จะได้ว่า

$$\rho \int_{CV} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} d\forall + \rho \int_{CS} \left(\left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{V} \right) dA = - \int_{CV} \left(\nabla p \right) d\forall + \mu \int_{CS} \left(\left(\nabla \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{V} \right) dA \tag{3.34}$$

กระจายสมการ (3.34) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_C \, dy_C + \left(\left(\left(\rho u \phi \right)_e - \left(\rho u \phi \right)_w \right) dy_C + \left(\left(\rho v \phi \right)_n - \left(\rho v \phi \right)_s \right) dx_C \right) \\ &= -S_\phi + \left(\left(\left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right)_w \right) dy_C + \left(\left(\mu \frac{d\phi}{dy} \right)_n - \left(\mu \frac{d\phi}{dy} \right)_s \right) dx_C \right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

เมื่อ $\phi = u$, $S_\phi = \dfrac{\partial p}{\partial x} dx_C \, dy_C$, และ $\phi = v$, $S_\phi = \dfrac{\partial p}{\partial y} dx_C \, dy_C$ สำหรับสมการโมเมนตัมในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ ใช้แผนแบบ LIP ประมาณค่าของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรที่เทียบกับระยะที่บริเวณผิวเซลล์ และอนุพันธ์ของตัวแปรที่เทียบกับเวลาของเซลล์ศูนย์กลางกับสมการ (3.35) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho\sum_{nt=1}^{4}DLT_{nt}\,\phi_{nt,i,j}\right)dx_C\,dy_C \\
&+\left(\begin{aligned}
&\left(\rho u\sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_e \\
&-\left(\rho u\sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_w \\
&+\left(\rho v\sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)_n \\
&-\left(\rho v\sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C\right)_s
\end{aligned}\right) \\
&-\left(\begin{aligned}
&\left(\mu\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_e \\
&-\left(\mu\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_w \\
&+\left(\mu\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)_n \\
&-\left(\mu\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)_s
\end{aligned}\right) \\
&=-S_\phi
\end{aligned}
\qquad (3.36)
$$

จัดรูปสมการ (3.36) ได้เป็น

$$
\phi_{4,i,j}=\frac{\left(\begin{aligned}
&-S_\phi-\left(\rho\sum_{nt=1}^{3}DLT_{nt}\,\phi_{nt,i,j}\right)dx_C\,dy_C \\
&-\left(\begin{aligned}
&\left(\rho u\sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C-\mu\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_e\Big|_{nx\neq nxei(i)}^{\text{when}} \\
&-\left(\rho u\sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C-\mu\sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\,\phi_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_w\Big|_{nx\neq nxwi(i)}^{\text{when}} \\
&+\left(\rho v\sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C-\mu\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)_n\Big|_{ny\neq nynj(j)}^{\text{when}} \\
&-\left(\rho v\sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C-\mu\sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\,\phi_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C\right)_s\Big|_{ny\neq nysj(j)}^{\text{when}}
\end{aligned}\right)
\end{aligned}\right)}{\left(\begin{aligned}
&\rho\,DLT_4\,dx_C\,dy_C \\
&+\left(\rho u\,LXE_{nx,i}\,dy_C-\mu\,DLXE_{nx,i}\,dy_C\right)_e\Big|_{nx=nxei(i)}^{\text{when}} \\
&-\left(\rho u\,LXW_{nx,i}\,dy_C-\mu\,DLXW_{nx,i}\,dy_C\right)_w\Big|_{nx=nxwi(i)}^{\text{when}} \\
&+\left(\rho v\,LYN_{ny,j}\,dx_C-\mu\,DLYN_{ny,j}\,dx_C\right)_n\Big|_{ny=nynj(j)}^{\text{when}} \\
&-\left(\rho v\,LYS_{ny,j}\,dx_C-\mu\,DLYS_{ny,j}\,dx_C\right)_s\Big|_{ny=nysj(j)}^{\text{when}}
\end{aligned}\right)}
\qquad (3.37)
$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของความเร็วของปัญหานี้ ซึ่งใช้ในการคำนวณนั้นได้แก่ ค่าของความเร็วของของไหลที่บริเวณผิวของผนังช่องว่างมีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นของไหลที่บริเวณผิวของผนังช่องว่างด้านบนมีความเร็วเท่ากับความเร็วของผนังที่เคลื่อนที่ในแนวราบส่วนความเร็วในทิศตั้งฉากกับผนังช่องว่างด้านบนก็มีค่าความเร็วเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

- ที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.38a}$$

- ที่ $x = b$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.38b}$$

- ที่ $y = 0$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.38c}$$

- ที่ $0 < x < b$ และ $y = b$ จะได้ว่า

$$u = -U\ ,\ v = 0 \tag{3.38d}$$

สำหรับการหาค่าความดันของของไหลเลือกใช้ซิมเปิลอัลกอริทึม (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations algorithm, SIMPLE algorithm) สมการ (3.37) สามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้เป็น

$$a_u u_{4,i,j} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx_C\, dy_C - S_{uP}\, dx_C dy_C - S_{uNB} \tag{3.39a}$$

$$a_v v_{4,i,j} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx_C\, dy_C - S_{vP}\, dx_C dy_C - S_{vNB} \tag{3.39b}$$

เมื่อ

$$a_u = a_v = \begin{bmatrix} \rho\, DLT_{ntmax}\, dx_c\, dy_c \\ +\left(\rho u\, LXE_{nx,i}\, dy - \mu\, DLXE_{nx,i}\, dy\right)_e \Big|_{nx=nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho u\, LXW_{nx,i}\, dy - \mu\, DLXW_{nx,i}\, dy\right)_w \Big|_{nx=nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho v\, LYN_{ny,j}\, dx - \mu\, DLYN_{ny,j}\, dx\right)_n \Big|_{ny=nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho v\, LYS_{ny,j}\, dx - \mu\, DLYS_{ny,j}\, dx\right)_s \Big|_{ny=nysj(j)}^{\text{when}} \end{bmatrix}$$

$$S_{uP} = \left(\rho \sum_{nt=1}^{3} DLT_{nt}\, u_{nt,i,j}\right)$$

$$S_{vP} = \left(\rho \sum_{nt=1}^{3} DLT_{nt}\, v_{nt,i,j}\right)$$

$$S_{uNB} = \left[\begin{array}{l} \left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\, u_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\, u_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy\right)_e \Big|_{nx \neq nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\, u_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\, u_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy\right)_w \Big|_{nx \neq nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\, u_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\, u_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx\right)_n \Big|_{ny \neq nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\, u_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\, u_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx\right)_s \Big|_{ny \neq nysj(j)}^{\text{when}} \end{array}\right]$$

$$S_{vNB} = \left[\begin{array}{l} \left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\, v_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\, v_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)dy\right)_e \Big|_{nx \neq nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\, v_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\, v_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy\right)_w \Big|_{nx \neq nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\, v_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\, v_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)dx\right)_n \Big|_{ny \neq nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\, v_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\, v_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)dx\right)_s \Big|_{ny \neq nysj(j)}^{\text{when}} \end{array}\right]$$

โดยกำหนดให้ค่าคาดเดา (Guess value) ของความเร็วมีค่าเป็น

$$a_u^* \, u_{i,j}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x} dx_C \, dy_C - S_{uP} \, dx_C dy_C - S_{u^* NB} \tag{3.40a}$$

$$a_v^* \, v_{i,j}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial y} dx_C \, dy_C - S_{vP} \, dx_C dy_C - S_{v^* NB} \tag{3.40b}$$

และกำหนดให้ค่าของคำตอบ (Correct value: u , v , p) เท่ากับผลบวกของค่าคาดเดา (Guess value: u^* , v^* , p^*) กับ ค่าแก้ไข (Correction value: u' , v' , p')

$$u_{4,i,j} = u_{i,j}^* + u'_{i,j} \tag{3.41a}$$

$$v_{4,i,j} = v_{i,j}^* + v'_{i,j} \tag{3.41b}$$

$$p_{i,j} = p_{i,j}^* + p'_{i,j} \tag{3.41c}$$

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial x} = \frac{\partial p_{i,j}^*}{\partial x} + \frac{\partial p'_{i,j}}{\partial x} \tag{3.41d}$$

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial y} = \frac{\partial p_{i,j}^*}{\partial y} + \frac{\partial p'_{i,j}}{\partial y} \tag{3.41e}$$

ลบสมการ (3.39) ด้วยสมการ (3.40) จะได้ว่า

$$a_u \, u_{4,i,j} - a_u^* \, u_{i,j}^* = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p^*}{\partial x}\right) dx_C \, dy_C - \left(S_{uNB} - S_{u^* NB}\right) \tag{3.42a}$$

$$a_v \, v_{4,i,j} - a_v^* \, v_{i,j}^* = -\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p^*}{\partial y}\right) dx_C \, dy_C - \left(S_{vNB} - S_{v^* NB}\right) \tag{3.42b}$$

แทนค่าจากสมการ (3.41d) และ (3.41e) ลงในสมการ (3.42) จะได้ว่า

$$a_u\, u_{4,i,j} - a_u^*\, u_{i,j}^* = -\frac{\partial p'}{\partial x} dx_C\, dy_C - \left(S_{uNB} - S_{u^*NB}\right) \quad (3.43a)$$

$$a_v\, v_{4,i,j} - a_v^*\, v_{i,j}^* = -\frac{\partial p'}{\partial y} dx_C\, dy_C - \left(S_{vNB} - S_{v^*NB}\right) \quad (3.43b)$$

เนื่องจาก $a_u \approx a_u^*$ และ $a_v \approx a_v^*$ และหากไม่คิดค่า $\left(S_{uNB} - S_{u^*NB}\right)$ และ $\left(S_{vNB} - S_{v^*NB}\right)$ สมการ (3.43) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$u_{4,i,j} = u_{i,j}^* - \frac{\partial p'}{\partial x}\frac{dx_C\, dy_C}{a_u} \quad (3.44a)$$

$$v_{4,i,j} = v_{i,j}^* - \frac{\partial p'}{\partial y}\frac{dx_C\, dy_C}{a_v} \quad (3.44b)$$

อินทิเกรตสมการ (3.24)

$$\int_{CV} \left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right) d\forall = 0 \quad (3.45)$$

ประยุกต์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ กับสมการ (3.45) จะได้ว่า

$$\int_{CS} \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}\right) dA = 0 \quad (3.46)$$

กระจายสมการ (3.46) ได้เป็น

$$u_e\, dy_C - u_w\, dy_C + v_n\, dx_C - v_s\, dx_C = 0 \quad (3.47)$$

ใช้แผนแบบ LIP ประมาณค่าของความเร็วที่บริเวณผิวเซลล์ของสมการ (3.47) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\, u_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right)\right)dy_C - \left(\sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\, u_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right)\right)dy_C \\ &+\left(\sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\, v_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right)\right)dx_C - \left(\sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\, v_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right)\right)dx_C \quad (3.48) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่าความเร็ว u และ v จากสมการ (3.44a) และ (3.44b) ลงในสมการ (3.48) ดังนั้นจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{nx=1}^{4} \left(LXE_{nx,i} \left(u^{*} - \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{dx_C \, dy_C}{a_u} \right)_{i-nxei(i)+nx,\, j} \right) \right) dy_C \\
&- \left(\sum_{nx=1}^{4} \left(LXW_{nx,i} \left(u^{*} - \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{dx_C \, dy_C}{a_u} \right)_{i-nxwi(i)+nx,\, j} \right) \right) dy_C \\
&+ \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(LYN_{ny,j} \left(v^{*} - \frac{\partial p'}{\partial y} \frac{dx_C \, dy_C}{a_v} \right)_{i,\, j-nynj(j)+ny} \right) \right) dx_C \\
&- \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(LYS_{ny,j} \left(v^{*} - \frac{\partial p'}{\partial y} \frac{dx_C \, dy_C}{a_v} \right)_{i,\, j-nysj(j)+ny} \right) \right) dx_C \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

กำหนดให้

$ipe = i - nxei(i) + nx$, $ipw = i - nxwi(i) + nx$,

$jpn = j - nynj(j) + ny$, $jps = j - nysj(j) + ny$

ใช้แผนแบบ LIP ประมาณค่าของอนุพันธ์ของความดันของสมการ (3.41) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{nx=1}^{4} \left(LXE_{nx,i} \left(u^{*}_{ipe,j} - \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{nxp=1}^{nxci(ipe)-1} \left(DLXC_{nxp,ipe} \; p'_{ipe-nxci(ipe)+nxp,\, j} \right) \\ \displaystyle + \sum_{nxp=nxci(ipe)}^{4} \left(DLXC_{nxp,ipe} \; p'_{ipe-nxci(ipe)+nxp+1,\, j} \right) \end{array} \right) \frac{dx\, dy}{a_u} \right)_{ipe,\, j} \right) \right) dy_C \\
&- \left(\sum_{nx=1}^{4} \left(LXW_{nx,i} \left(u^{*}_{ipw,j} - \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{nxp=1}^{nxci(ipw)-1} \left(DLXC_{nxp,ipw} \; p'_{ipw-nxci(ipw)+nxp,\, j} \right) \\ \displaystyle + \sum_{nxp=nxci(ipw)}^{4} \left(DLXC_{nxp,ipw,j} \; p'_{ipw-nxci(ipw)+nxp+1,\, j} \right) \end{array} \right) \frac{dx\, dy}{a_u} \right)_{ipw,\, j} \right) \right) dy_C \\
&+ \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(LYN_{ny,j} \left(v^{*}_{i,jpn} - \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{nyp=1}^{nycj(jpn)-1} \left(DLYC_{nyp,\, jpn} \; p'_{i,\, jpn-nycj(jpn)+nyp} \right) \\ \displaystyle + \sum_{nyp=nycj(jpn)}^{4} \left(DLYC_{nyp,i,\, jpn} \; p'_{i,\, jpn-nycj(i,\, jpn)+nyp+1} \right) \end{array} \right) \frac{dx\, dy}{a_v} \right)_{i,\, jpn} \right) \right) dx_C \\
&- \left(\sum_{ny=1}^{4} \left(LYS_{ny,j} \left(v^{*}_{i,jps} - \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{nyp=1}^{nycj(jps)-1} \left(DLYC_{nyp,i,\, jps} \; p'_{i,\, jps-nycj(i,\, jps)+nyp} \right) \\ \displaystyle + \sum_{nyp=nycj(jps)}^{4} \left(DLYC_{nyp,\, jps} \; p'_{i,\, jps-nycj(jps)+nyp+1} \right) \end{array} \right) \frac{dx\, dy}{a_v} \right)_{i,\, jps} \right) \right) dx_C \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

จัดรูปแบบสมการ (3.50) ใหม่ จะได้ว่า

$$
p'_{i,j}=\frac{\left(\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\left(u^{*}_{ipe,j}-\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{nxp=1}^{nxci(ipe)-1}\left(DLXC_{nxp,ipe}\;p'_{ipe-nxci(ipe)+nxp,\,j}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipe-nxci(ipe)+nxp\neq i}}\right)\\ \displaystyle+\sum_{nxp=nxci(ipe)}^{4}\left(DLXC_{nxp,ipe}\;p'_{ipe-nxci(ipe)+nxp+1,\,j}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipe-nxci(ipe)+nxp+1\neq i}}\right)\end{array}\right)\frac{dx\,dy}{a_u}\right)_{ipe,j}\right)dy_C\\
\displaystyle-\sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\left(u^{*}_{ipw,j}-\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{nxp=1}^{nxci(ipw)-1}\left(DLXC_{nxp,ipw}\;p'_{ipw-nxci(ipw)+nxp,\,j}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipw-nxci(ipw)+nxp\neq i}}\right)\\ \displaystyle+\sum_{nxp=nxci(ipw)}^{4}\left(DLXC_{nxp,ipw}\;p'_{ipw-nxci(ipw)+nxp+1,\,j}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipw-nxci(ipw)+nxp+1\neq i}}\right)\end{array}\right)\frac{dx\,dy}{a_u}\right)_{ipw,j}\right)dy_C\\
\displaystyle+\sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\left(v^{*}_{i,jpn}-\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{nyp=1}^{nycj(jpn)-1}\left(DLYC_{nyp,jpn}\;p'_{i,\,jpn-nycj(jpn)+nyp}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jpn-nycj(jpn)+nyp\neq j}}\right)\\ \displaystyle+\sum_{nyp=nycj(jpn)}^{4}\left(DLYC_{nyp,jpn}\;p'_{i,\,jpn-nycj(jpn)+nyp+1}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jpn-nycj(jpn)+nyp+1\neq j}}\right)\end{array}\right)\frac{dx\,dy}{a_v}\right)_{i,jpn}\right)dx_C\\
\displaystyle-\sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\left(v^{*}_{i,jps}-\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{nyp=1}^{nycj(jps)-1}\left(DLYC_{nyp,jps}\;p'_{i,\,jps-nycj(jps)+nyp}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jps-nycj(jps)+nyp\neq j}}\right)\\ \displaystyle+\sum_{nyp=nycj(jps)}^{4}\left(DLYC_{nyp,jps}\;p'_{i,\,jps-nycj(jps)+nyp+1}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jps-nycj(jps)+nyp+1\neq j}}\right)\end{array}\right)\frac{dx\,dy}{a_v}\right)_{i,jps}\right)dx_C
\end{array}\right)}{\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\left(\left(DLXC_{nxp,ipe}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipe-nxci(ipe)+nxp=i,\;\; nxp<nxci(ipe)\\ \text{or}\\ ipe-nxci(ipe)+nxp+1=i,\;\; nxp\geq nxci(ipe)}}\right)\frac{dx\,dy}{a_u}\right)_{ipe,j}\right)dy_C\\
\displaystyle-\sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\left(\left(DLXC_{nxp,ipw}\Big|_{\substack{\text{when}\\ ipw-nxci(ipw)+nxp=i,\;\; nxp<nxci(ipw)\\ \text{or}\\ ipw-nxci(ipw)+nxp+1=i,\;\; nxp\geq nxci(ipw)}}\right)\frac{dx\,dy}{a_u}\right)_{ipw,j}\right)dy_C\\
\displaystyle+\sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\left(\left(DLYC_{nyp,jpn}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jpn-nycj(jpn)+nyp=j,\;\; nyp<nycj(jpn)\\ \text{or}\\ jpn-nycj(jpn)+nyp+1=j,\;\; nyp\geq nycj(jpn)}}\right)\frac{dx\,dy}{a_v}\right)_{i,jpn}\right)dx_C\\
\displaystyle-\sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\left(\left(DLYC_{nyp,jps}\Big|_{\substack{\text{when}\\ jps-nycj(jps)+nyp=j,\;\; nyp<nycj(jps)\\ \text{or}\\ jps-nycj(jps)+nyp+1=j,\;\; nyp\geq nycj(jps)}}\right)\frac{dx\,dy}{a_v}\right)_{i,jps}\right)dx_C
\end{array}\right]} \tag{3.51}
$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของค่าแก้ไขความดัน (Correction pressure) ของปัญหา คำนวณได้จากสมการ (3.44) โดยแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศตั้งฉากกับผิวของผนังช่องว่าง ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ $\left(u_{4,i,j}=u^{*}_{i,j}=0,\quad v_{4,i,j}=v^{*}_{i,j}=0\right)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$0=0-\frac{\partial p'}{\partial x}\frac{dx_C\,dy_C}{a_u} \tag{3.52a}$$

$$0=0-\frac{\partial p'}{\partial y}\frac{dx_C\,dy_C}{a_v} \tag{3.52b}$$

เนื่องจาก $\dfrac{dx_C\,dy_C}{a_u}\neq 0$ และ $\dfrac{dx_C\,dy_C}{a_v}\neq 0$ ดังนั้นจากสมการ (3.52a) และ (3.52b) จะได้ว่าค่าอนุพันธ์ของค่าแก้ไขความดันในทิศตั้งฉากกับผิวของผนังช่องว่างมีค่าเป็นศูนย์

$$\frac{\partial p'}{\partial x}=0 \tag{3.53a}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y}=0 \tag{3.53b}$$

นำแผนแบบ LIP มาประมาณค่าอนุพันธ์ของค่าแก้ไขความดันในสมการ (3.53a) และ (3.53b) จะได้ว่าค่าแก้ไขความดันในทิศตั้งฉากกับผิวของผนังช่องว่างมีค่าเป็น

- ที่ $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$p'_{icmin,\,jcmin} = \frac{p'_x + p'_y}{2} \tag{3.54a}$$

$$p'_x = \frac{-\sum_{nx=2}^{4}\left(DLXC_{(nx,icmin)}\; p'_{(icmin-nxci(icmin)+nx,\,jcmin)}\right)}{DLXC_{(1,icmin)}}$$

$$p'_y = \frac{-\sum_{ny=2}^{4}\left(DLYC_{ny,\,jcmin}\; p'_{icmin,\,jcmin-nycj(jcmin)+ny}\right)}{DLYC_{1,\,jcmin}}$$

- ที่ $x = b$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$p'_{icmax,\,jcmin} = \frac{p'_x + p'_y}{2} \tag{3.54b}$$

$$p'_x = \frac{-\sum_{nx=1}^{3}\left(DLXC_{nx,icmax}\; p'_{icmax-nxci(icmax)+nx,\,jcmin}\right)}{DLXC_{4,icmax}}$$

$$p'_y = \frac{-\sum_{ny=2}^{4}\left(DLYC_{ny,\,jcmin}\; p'_{icmin,\,jcmin-nycj(jcmin)+ny}\right)}{DLYC_{1,\,jcnim}}$$

- ที่ $x = 0$ และ $y = b$ จะได้ว่า

$$p'_{icmin,\,jcmin} = \frac{p'_x + p'_y}{2} \tag{3.54c}$$

$$p'_x = \frac{-\sum_{nx=2}^{4}\left(DLXC_{nx,icmin}\; p'_{icmin-nxci(icmin)+nx,\,jcmin}\right)}{DLXC_{1,icmin}}$$

$$p'_y = \frac{-\sum_{ny=1}^{3}\left(DLYC_{ny,\,jcmax}\; p'_{icmin,\,jcmax-nycj(jcmax)+ny}\right)}{DLYC_{4,\,jcmax}}$$

- ที่ $x = b$ และ $y = b$ จะได้ว่า

$$p'_{icmax,\,jcmin} = \frac{p'_x + p'_y}{2} \tag{3.54d}$$

$$p'_x = \frac{-\sum_{nx=1}^{3}\left(DLXC_{nx,icmax}\; p'_{icmax-nxci(icmax)+nx,\,jcmax}\right)}{DLXC_{4,icmax}}$$

$$p'_y = \frac{-\sum_{ny=1}^{3}\left(DLYC_{ny,\,jcmax}\; p'_{icmax,\,jcmax-nycj(\,jcmax)+ny}\right)}{DLYC_{4,\,jcmax}}$$

- ที่ $x=0$ และ $0<y<b$ จะได้ว่า

$$p'_{icmin,\,j} = \frac{-\sum_{nx=2}^{4}\left(DLXC_{nx,icmin}\; p'_{icmin-nxci(icmin)+nx,\,j}\right)}{DLXC_{1,icmin}} \tag{3.54e}$$

- ที่ $x=b$ และ $0<y<b$ จะได้ว่า

$$p'_{icmax,\,j} = \frac{-\sum_{nx=1}^{3}\left(DLXC_{nx,icmax}\; p'_{icmax-nxci(icmax)+nx,\,j}\right)}{DLXC_{4,icmax}} \tag{3.54f}$$

- ที่ $0<x<b$ และ $y=0$ จะได้ว่า

$$p'_{i,\,jcmin} = \frac{-\sum_{ny=2}^{4}\left(DLYC_{ny,\,jcmin}\; p'_{i,\,jcmin-nycj(\,jcmin)+ny}\right)}{DLYC_{1,\,jcmin}} \tag{3.54g}$$

- ที่ $0<x<b$ และ $y=b$ จะได้ว่า

$$p'_{i,\,jcmin} = \frac{-\sum_{ny=1}^{3}\left(DLYC_{ny,\,jcmax}\; p'_{i,\,jcmax-nycj(\,jcmax)+ny}\right)}{DLYC_{4,\,jcmax}} \tag{3.54h}$$

ขณะที่ค่าคาดเดาของความเร็ว (Guess velocity) ในแนวแกน x $\left(u^*_{i,j}\right)$ และ y $\left(v^*_{i,j}\right)$ ถูกคำนวณได้โดยประยุกต์สมการ (3.37) ซึ่งจะได้ว่า

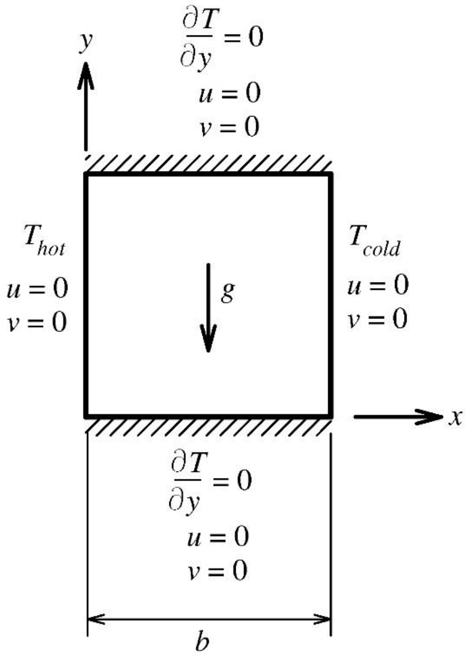
$$\phi^*_{i,j} = \frac{\left(\begin{array}{l} -S_\phi - \left(\rho \sum_{nt=1}^{3} DLT_{nt}\, \phi_{nt,i,j}\right) dx_C\, dy_C \\ -\left(\begin{array}{l} \left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\, \phi^*_{i-nxei(i)+nx,\,j}\right) dy_C - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\, \phi^*_{i-nxei(i)+nx,\,j}\right) dy_C\right)_e \Big|_{\substack{\text{when} \\ nx\neq nxei(i)}} \\ -\left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\, \phi^*_{i-nxwi(i)+nx,\,j}\right) dy_C - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\, \phi^*_{i-nxwi(i)+nx,\,j}\right) dy_C\right)_w \Big|_{\substack{\text{when} \\ nx\neq nxwi(i)}} \\ +\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,\,j}\, \phi^*_{i,j-nynj(\,j)+ny}\right) dx_C - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,\,j}\, \phi^*_{i,j-nynj(\,j)+ny}\right) dx_C\right)_n \Big|_{\substack{\text{when} \\ ny\neq nynj(\,j)}} \\ -\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,\,j}\, \phi^*_{i,j-nysj(\,j)+ny}\right) dx_C - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,\,j}\, \phi^*_{i,j-nysj(\,j)+ny}\right) dx_C\right)_s \Big|_{\substack{\text{when} \\ ny\neq nysj(\,j)}} \end{array}\right) \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l} \rho\, DLT_4\, dx_C\, dy_C \\ +\left(\rho u\, LXE_{nx,i}\, dy_C - \mu\, DLXE_{nx,i}\, dy_C\right)_e \Big|_{\substack{\text{when} \\ nx=nxei(i)}} \\ -\left(\rho u\, LXW_{nx,i}\, dy_C - \mu\, DLXW_{nx,i}\, dy_C\right)_w \Big|_{\substack{\text{when} \\ nx=nxwi(i)}} \\ +\left(\rho v\, LYN_{ny,\,j}\, dx_C - \mu\, DLYN_{ny,\,j}\, dx_C\right)_n \Big|_{\substack{\text{when} \\ ny=nynj(\,j)}} \\ -\left(\rho v\, LYS_{ny,\,j}\, dx_C - \mu\, DLYS_{ny,\,j}\, dx_C\right)_s \Big|_{\substack{\text{when} \\ ny=nysj(\,j)}} \end{array}\right)} \tag{3.55}$$

เมื่อ $\phi_{i,j}^{*} = u_{i,j}^{*}$ และ $\phi_{i,j}^{*} = v_{i,j}^{*}$ เป็นค่าคาดเดาของความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับเงื่อนไขของขอบเขตของค่าคาดเดาของความเร็วมีค่าตามสมการ (3.38)

3.5 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (Mathematical model of natural convection in a square cavity problem)

ปัญหาการไหลของของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นปัญหา 2 มิติ เนื่องจากการไหลของอากาศในช่องว่างมีควาเร็วต่ำมาก ดังนั้นจึงสามารถสมมุติให้การไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible flow) และมีความหนืด (Viscous flow) โดยกำหนดให้ของไหลในช่องว่างเป็นอากาศ ซึ่งค่าของความหนาแน่นของอากาศถูกสมมติให้มีค่าคงที่ยกเว้นค่าของความหนาแน่นของอากาศในพจน์ของแรงเนื่องจากความโน้มถ่วง (Body force) ซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดแรงลอยตัว (Buoyancy force) ของอากาศ แล้วทำให้เกิดการไหลวนของอากาศในช่องว่าง โดยค่าความหนาแน่นของอากาศในพจน์ของแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงเป็นฟังก์ชั่นของอุณหภูมิของอากาศที่จุดต่างๆ โดยที่ช่องว่างมีความกว้างเป็น b ดังแสดงในรูปที่ 0.7

สมการที่ใช้ในการหาคำตอบของปัญหาการไหลของของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ได้แก่ สมการพลังงาน (Energy equation) สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) และ สมการโมเมนตัม (Momentum equation) ในแนวแกน x และแกน y



รูปที่ 0.7 ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

$$\rho\, c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla \right) T \right) = k\, \nabla^2 T \tag{3.56}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{3.57}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + S_{\phi BF} \tag{3.58}$$

เมื่อ c_p เป็นค่าความจุความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ (Specific heat at constant pressure) ขณะที่ $S_{\phi BF} = 0$ และ $S_{\phi BF} = -\rho_{i,j}\, g$ คือพจน์ของแรงเนื่องจากความเร่งโน้มถ่วง (Body force term) ในสมการโมเมนตัมในแนวแกน *x* และ *y* ตามลำดับ โดยที่ค่าความหนาแน่นของอากาศในพจน์ของแรงเนื่องจากความเร่งโน้มถ่วงในแนวแกน *y* คำนวณได้จากสมการการประมาณค่าของบัวส์สิเน็ส์ค (Boussinesq approximation) ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$\rho_{i,j} = \rho_0 \left(1 - \beta \left(T - T_0 \right) \right) \tag{3.59}$$

โดยที่ค่า ρ_0, และ T_0 เป็นค่าความหนาแน่นและอุณหภูมิของอากาศที่จุดอ้างอิง และ β เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวทางความร้อนของปริมาตร (Volumetric thermal expansion coefficient) สำหรับอุณหภูมิของอากาศที่จุดอ้างอิงมีค่าเป็น

$$T_0 = \frac{T_{hot} + T_{cold}}{2} \tag{3.60}$$

ขณะที่ค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวทางความร้อนของปริมาตรคำนวณได้จาก

$$\beta = \frac{1}{T_0} \tag{3.61}$$

สำหรับค่า ρ_0 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ T_0 คำนวณจากวิธีการถดถอย (Regression) จากข้อมูลของ The National Institute of Standards and Technology (NIST) Standard Reference Database 23, Version 9.0

$$\rho_0 = \sum_{n=1}^{6}\left(a_n T_0^{n-1}\right) \tag{3.62}$$

เมื่อ a_n เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจ (Determination coefficient, R^2) ของสมการ (3.62) มีค่ามากกว่า 0.99

สำหรับการคำนวณหาค่าอุณหภูมิ ค่าคาดเดาของความเร็ว และค่าแก้ไขความดัน ทำได้โดยใช้หลักการเดียวกันกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างจัตุรัส เนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน หัวข้อ 3.3 ซึ่งจะได้ว่า ค่าอุณหภูมิของอากาศถูกคำนวณได้จาก

$$T_{4,i,j} = \frac{\begin{pmatrix} -\left(\rho\, c_p \sum_{nt=1}^{3} DLT_{nt}\, T_{nt,i,j}\right) dx_C\, dy_C \\ -\begin{pmatrix} \left(\rho\, c_p\, u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\, T_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right) dy_C - k \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\, T_{4,i-nxei(i)+nx,j}\right) dy_C\right)_e \Big|_{nx \neq nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho\, c_p\, u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\, T_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right) dy_C - k \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\, T_{4,i-nxwi(i)+nx,j}\right) dy_C\right)_w \Big|_{nx \neq nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho\, c_p\, v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\, T_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right) dx_C - k \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,i}\, T_{4,i,j-nynj(j)+ny}\right) dx_C\right)_n \Big|_{ny \neq nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho\, c_p\, v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\, T_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right) dx_C - k \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,i}\, T_{4,i,j-nysj(j)+ny}\right) dx_C\right)_s \Big|_{ny \neq nysj(j)}^{\text{when}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \rho\, c_p\, DLT_4\, dx_C\, dy_C \\ +\left(\rho\, c_p\, u\, LXE_{nx,i}\, dy_C - k\, DLXE_{nx,i}\, dy_C\right)_e \Big|_{nx = nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho\, c_p\, u\, LXW_{nx,i}\, dy_C - k\, DLXW_{nx,i}\, dy_C\right)_w \Big|_{nx = nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho\, c_p\, v\, LYN_{ny,j}\, dx_C - k\, DLYN_{ny,j}\, dx_C\right)_n \Big|_{ny = nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho\, c_p\, v\, LYS_{ny,j}\, dx_C - k\, DLYS_{ny,j}\, dx_C\right)_s \Big|_{ny = nysj(j)}^{\text{when}} \end{pmatrix}} \tag{3.63}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิ ได้แก่ อุณหภูมิที่ผนังด้านข้างเป็นค่าคงที่เป็น T_{hot} และ T_{cold} โดยผนังด้านล่างและด้านบนเป็นฉนวน ($\frac{\partial T}{\partial y} = 0$) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

- ที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$T = T_{hot} \tag{3.64a}$$

- ที่ $x = b$ จะได้ว่า

$$T = T_{cold} \tag{3.64b}$$

- ที่ $0 < x < b$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$T_{i,jcmin} = \frac{-\sum_{ny=2}^{4}\left(DLYC_{ny,jcmin}\,T_{i,jcmin-nycj(jcmin)+ny}\right)}{DLYC_{1,jcmin}} \tag{3.64c}$$

- ที่ $0 < x < b$ และ $y = b$ จะได้ว่า

$$T_{i,jcmin} = \frac{-\sum_{ny=1}^{3}\left(DLYC_{ny,jcmax}\,T_{i,jcmax-nycj(jcmax)+ny}\right)}{DLYC_{4,jcmax}} \tag{3.64d}$$

ขณะที่ค่าคาดเดาของความเร็วในแนวแกน x และ y ถูกคำนวณได้จาก

$$\phi^*_{i,j} = \frac{\left(\begin{array}{l} -S_\phi - \left(\rho \sum_{nt=1}^{3} DLT_{nt}\,\phi_{nt,i,j}\right) dx_C\,dy_C \\ -\left(\begin{array}{l} \left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXE_{nx,i}\,\phi^*_{i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXE_{nx,i}\,\phi^*_{i-nxei(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_e \Big|_{nx\neq nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho u \sum_{nx=1}^{4}\left(LXW_{nx,i}\,\phi^*_{i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C - \mu \sum_{nx=1}^{4}\left(DLXW_{nx,i}\,\phi^*_{i-nxwi(i)+nx,j}\right)dy_C\right)_w \Big|_{nx\neq nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYN_{ny,j}\,\phi^*_{i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYN_{ny,j}\,\phi^*_{i,j-nynj(j)+ny}\right)dx_C\right)_n \Big|_{ny\neq nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho v \sum_{ny=1}^{4}\left(LYS_{ny,j}\,\phi^*_{i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C - \mu \sum_{ny=1}^{4}\left(DLYS_{ny,j}\,\phi^*_{i,j-nysj(j)+ny}\right)dx_C\right)_s \Big|_{ny\neq nysj(j)}^{\text{when}} \end{array}\right) \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l} \rho\,DLT_4\,dx_C\,dy_C \\ +\left(\rho u\,LXE_{nx,i}\,dy_C - \mu\,DLXE_{nx,i}\,dy_C\right)_e \Big|_{nx=nxei(i)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho u\,LXW_{nx,i}\,dy_C - \mu\,DLXW_{nx,i}\,dy_C\right)_w \Big|_{nx=nxwi(i)}^{\text{when}} \\ +\left(\rho v\,LYN_{ny,j}\,dx_C - \mu\,DLYN_{ny,j}\,dx_C\right)_n \Big|_{ny=nynj(j)}^{\text{when}} \\ -\left(\rho v\,LYS_{ny,j}\,dx_C - \mu\,DLYS_{ny,j}\,dx_C\right)_s \Big|_{ny=nysj(j)}^{\text{when}} \end{array}\right)} \tag{3.65}$$

เมื่อ $S_\phi = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)dx_C\,dy_C$ และ $S_\phi = \left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_{i,j}\,g\right)dx_C\,dy_C$ เป็นค่าในแนวแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับเงื่อนไขของขอบเขตของค่าคาดเดาของความเร็วมีค่าดังนี้

- ที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.66a}$$

- ที่ $x = b$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.66b}$$

- ที่ $y = 0$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.66c}$$

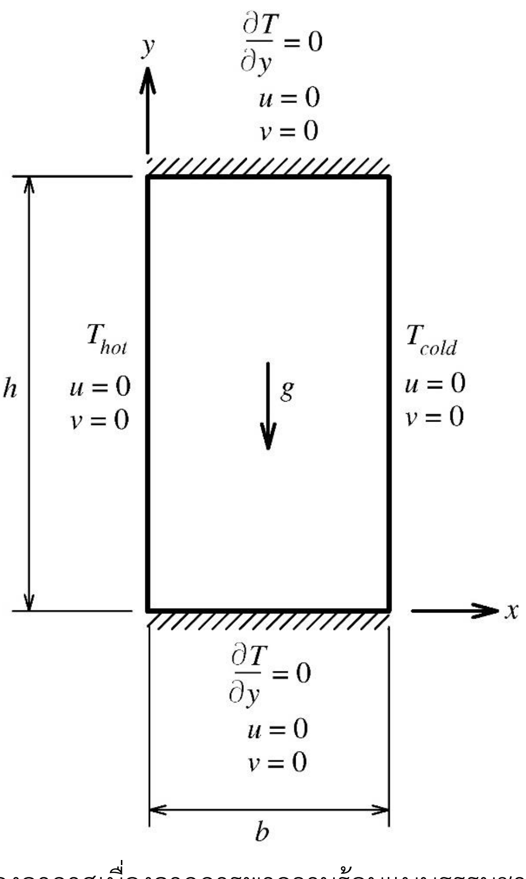
- ที่ $y = b$ จะได้ว่า

$$u = v = 0 \tag{3.66d}$$

สำหรับค่าแก้ไขความดันสามารถคำนวณได้จากสมการ (3.51) และค่าเงื่อนไขขอบเขตของค่าแก้ไขความดันสามารถคำนวณได้จากสมการ (3.54)

3.6 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก (Mathematical model of natural convection in a tall cavity problem)

ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามากเป็นปัญหาที่มีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เหมือนกับปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ แต่ต่างกันที่โดเมนของปัญหา โดยกำหนดให้ b เป็นความกว้างและ h เป็นความสูงของช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 0.8 สำหรับค่าอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่าเป็น AR (Aspect Ratio), $AR = \frac{h}{b}$ โดยการคำนวณต้องใช้แผนแบบที่มีความแม่นยำลำดับสามขึ้นไป



รูปที่ 0.8 ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

3.7 การหาตำแหน่งของเม็สช์แบบไม่สม่ำเสมอบนแกนคาร์ทีเซียนโคร์ออดิเนต (Location determination of non-uniform mesh on Cartesian coordinate axis)

งานวิจัยนี้ใช้ระบบแกนแบบคาร์ทีเซียนโคร์ออดิเนต และเป็นเม็สช์แบบไม่สม่ำเสมอ คือ ระยะห่างของเม็สช์บริเวณใกล้ผนังของช่องว่างมีค่าน้อย ซึ่งเรียกว่าเม็สช์ละเอียด (Fine mesh) ขณะที่ระยะห่างของเม็สช์บริเวณพื้นที่ส่วนกลางของช่องว่างมีค่ามาก ซึ่งเรียกว่าเม็สช์หยาบ (Coarse mesh) เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ (Temperature gradient) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (Velocity gradient) ที่บริเวณใกล้ผนังของช่องว่างมีค่าสูงกว่าบริเวณพื้นที่ส่วนกลางของช่องว่าง ซึ่งการคำนวณหาตำแหน่งของเม็สช์กระทำได้ โดยกำหนดให้เม็สช์เริ่มต้นด้านซ้ายมือในแนวแกน x มีค่าเป็น *IGMIN* และเม็สช์สุดท้ายด้านขวามือเป็น *IGMAX* ระยะความยาวทั้งหมดในแนวแกน x เป็น *XX* และอัตราส่วนของระยะระหว่างเม็สช์หยาบต่อระยะระหว่างเม็สช์ละเอียดเป็น *RX* ดังนั้นจำนวนเม็สช์ทั้งหมดในแนวแกน x มีค่าเป็น

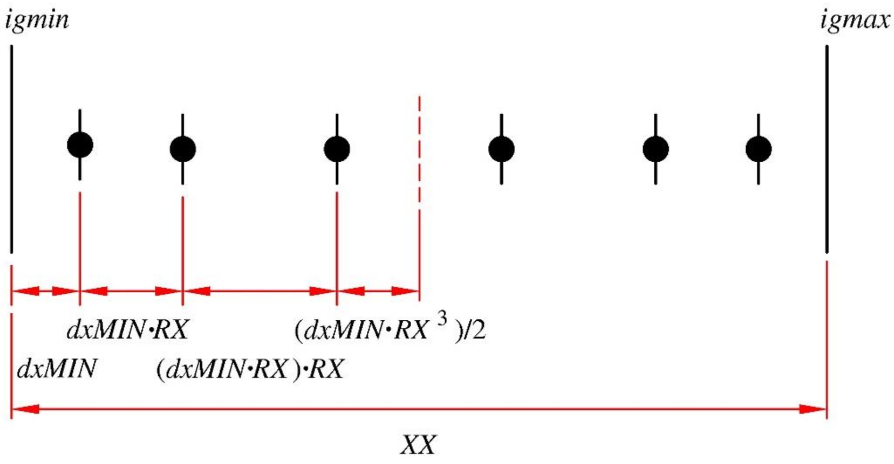
$$NN = IGMAX - IGMIN + 1 \tag{3.67}$$

โดยการคำนวณหาตำแหน่งของเม็สช์ทำได้ 2 กรณีดังนี้

3.6.1 กรณีค่า *NN* เป็นเลขคู่

กำหนดให้ N เป็นจำนวนเม็สช์ทั้งหมดในระยะ $\frac{XX}{2}$ ดังแสดงในรูปที่ 0.9 ซึ่งจะได้ว่า

$$N = \frac{NN}{2} \tag{3.68}$$



รูปที่ 0.9 การหาตำแหน่งเม็สช์ กรณี NN เป็นเลขคู่

ระยะ $\frac{XX}{2}$ คำนวณได้จาก

$$\frac{XX}{2} = dxMIN + dxMIN \cdot RX + \ldots + dxMIN \cdot RX^{N-2} + \frac{dxMIN \cdot RX^{N-1}}{2} \tag{3.69}$$

คูณสมการ (3.69) ด้วย *RX*

$$\frac{XX}{2} \cdot RX = dxMIN \cdot RX + dxMIN \cdot RX^{2} + \ldots + dxMIN \cdot RX^{N-1} + \frac{dxMIN \cdot RX^{N}}{2} \tag{3.70}$$

ลบสมการ (3.70) ด้วยสมการ (3.69) จะได้ว่า

$$\frac{XX}{2} \cdot RX - \frac{XX}{2} = \frac{dxMIN \cdot RX^{N}}{2} + \frac{dxMIN \cdot RX^{N-1}}{2} - dxMIN \tag{3.71}$$

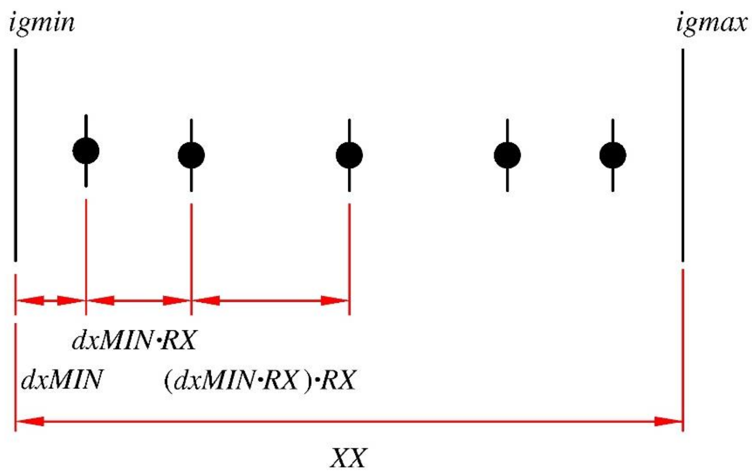
จัดสมการ (3.71) ใหม่ได้เป็น

$$dxMIN = \left(\frac{XX}{2}\right)\frac{(RX-1)}{\left(\frac{RX^{N}}{2} + \frac{RX^{N-1}}{2} - 1\right)} \tag{3.72}$$

3.6.2 กรณีค่า *NN* เป็นเลขคี่

กำหนดให้ *N* เป็นจำนวนเม็สช์ทั้งหมดในระยะ $\frac{XX}{2}$ ดังแสดงในรูปที่ 0.10 ซึ่งจะได้ว่า

$$N = \frac{NN}{2} + 1 \tag{3.73}$$



รูปที่ 0.10 การหาตำแหน่งเม็สช์ กรณี NN เป็นเลขคี่

ระยะ $\frac{XX}{2}$ คำนวณได้จาก

$$\frac{XX}{2} = dxMIN + dxMIN \cdot RX + \ldots + dxMIN \cdot RX^{N-2} \tag{3.74}$$

คูณสมการ (3.74) ด้วย RX

$$\frac{XX}{2} \cdot RX = dxMIN \cdot RX + dxMIN \cdot RX^{2} + \ldots + dxMIN \cdot RX^{N-1} \tag{3.75}$$

ลบสมการ (3.75) ด้วยสมการ (3.74) จะได้ว่า

$$\frac{XX}{2} \cdot RX - \frac{XX}{2} = dxMIN \cdot RX^{N-1} - dxMIN \tag{3.76}$$

จัดสมการ (3.76) ใหม่ได้เป็น

$$dxMIN = \left(\frac{XX}{2}\right)\frac{(RX-1)}{(RX^{N-1}-1)} \tag{3.77}$$

ดังนั้นตำแหน่งของเม็สช์จาก $x = 0$ ถึง $x = \frac{XX}{2}$ มีค่าดังนี้

$$xg_{igmin} = 0 \tag{3.78a}$$

$$xg_{igmin+1} = 0 + dxMIN \tag{3.78b}$$

$$xg_{i} = xg_{i-1} + (xg_{i-1} - xg_{i-2}) \cdot RX \tag{3.78c}$$

และตำแหน่งของเม็สช์จาก $x = \frac{XX}{2}$ ถึง $x = XX$ มีค่าดังนี้

$$xg_{igmax} = XX \tag{3.78d}$$

$$xg_{igmax-1} = XX - dxMIN \tag{3.78e}$$

$$xg_{i} = xg_{i+1} - (xg_{i+2} - xg_{i+1}) \cdot RX \tag{3.78f}$$

สำหรับตำแหน่งเม็สช์ในแนวแกน y ใช้หลักการคำนวณเดียวกัน ซึ่งมีค่าดังนี้

ตำแหน่งของเม็สช์จาก $y=0$ ถึง $y=\frac{YY}{2}$ มีค่าดังนี้

$$yg_{jgmin}=0 \quad (3.79a)$$

$$yg_{jgmin+1}=0+dyMIN \quad (3.79b)$$

$$yg_{j}=yg_{j-1}+\left(yg_{j-1}-yg_{j-2}\right)\cdot RY \quad (3.79c)$$

และตำแหน่งของเม็สช์จาก $y=\frac{YY}{2}$ ถึง $y=YY$ มีค่าดังนี้

$$yg_{jgmax}=YY \quad (3.79d)$$

$$yg_{jgmax-1}=YY-dyMIN \quad (3.79e)$$

$$yg_{j}=yg_{j+1}-\left(yg_{j+2}-yg_{j+1}\right)\cdot RY \quad (3.79f)$$

สำหรับตำแหน่งของจุดศูนย์กลางเซลล์ในแนวแกน x มีค่าดังนี้

$$xc_{icmin}=xg_{igmin} \quad (3.80a)$$

$$xc_{icmax}=xg_{igmax} \quad (3.80b)$$

$$xc_{i}=\frac{\left(xg_{i}+xg_{i-1}\right)}{2} \quad (3.80c)$$

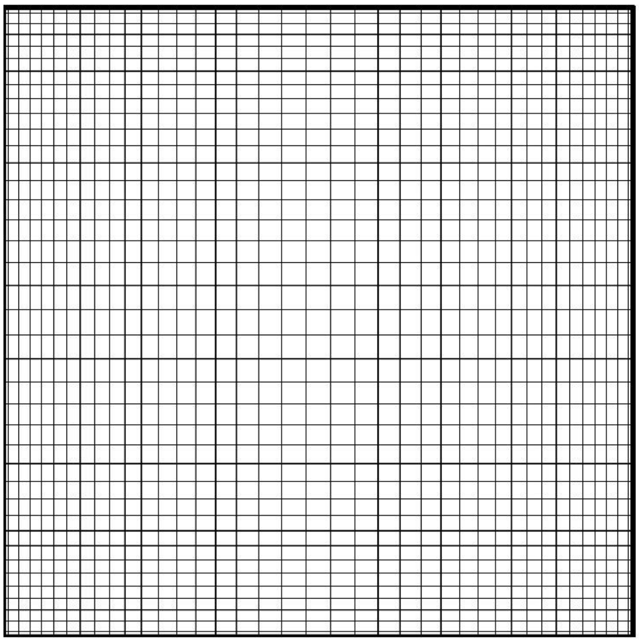
และตำแหน่งของจุดศูนย์กลางเซลล์ในแนวแกน y มีค่าดังนี้

$$yc_{jcmin}=yg_{jgmin} \quad (3.81a)$$

$$yc_{jcmax}=yg_{jgmax} \quad (3.81b)$$

$$yc_{j}=\frac{\left(yg_{j}+yg_{j-1}\right)}{2} \quad (3.81c)$$

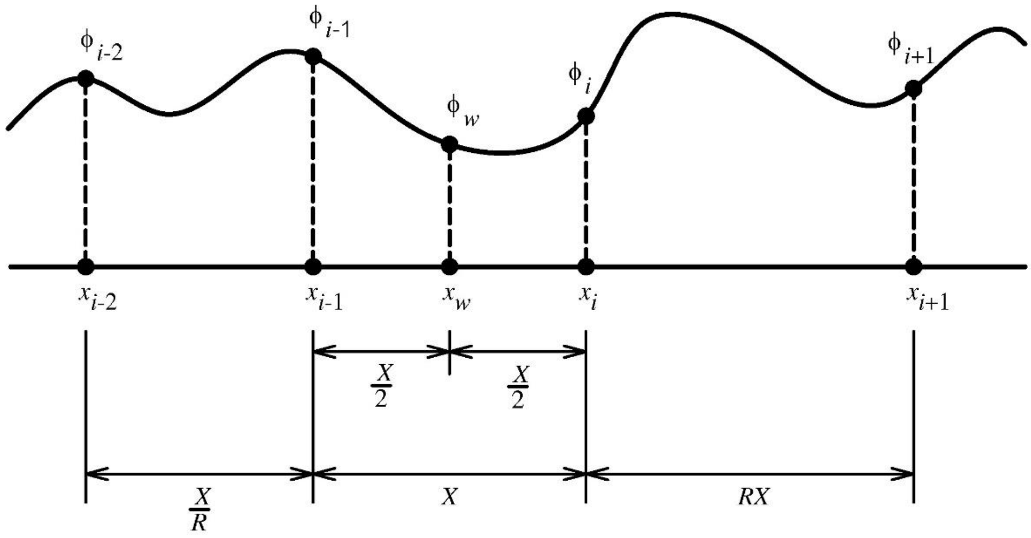
รูปที่ 3.11 แสดงตัวอย่างการตีเม็สช์บนโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีค่า $NN=40\times40$ และค่า $RX=RY=1.05$



รูปที่ 0.11 ตัวอย่างการตีเม็สช์บนโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัส

3.8 ค่าระดับความแม่นยำทางระยะและทางเวลาของแผนแบบ LIP (Spatial and temporal order accuracy of the LIP scheme)

การหาค่าระดับความแม่นยำทางระยะของแผนแบบ LIP สามารถหาได้โดยการใช้อนุกรมของเทเลอร์ (Taylor series expansion) จากรูปที่ 3.12 ค่า ϕ_{i-2}, ϕ_{i-1}, ϕ_i *และ* ϕ_{i+1} เป็นค่าตัวแปรที่ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งสามารถหาค่าโดยประมาณได้จากการใช้อนุกรมของเทเลอร์ประมาณค่าจากค่าของ ϕ_w ซึ่งเป็นค่าตัวแปรที่ผิวหน้าเซลล์ด้านตะวันตก (Western cell face) ค่า X เป็นค่าระยะห่างระหว่างกริด x_{i-1} และ x_i และค่า R เป็นค่าอัตราส่วนของระยะห่างระหว่างกริดหยาบต่อระยะห่างระหว่างกริดละเอียด



รูปที่ 0.12 ระยะห่างระหว่างกริด

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_{i-2} มีค่าเป็น

$$\phi_{i-2} = \phi_w - \left(\frac{X}{R}+\frac{X}{2}\right)\frac{\partial\phi_w}{\partial x} + \frac{\left(\frac{X}{R}+\frac{X}{2}\right)^2}{2!}\frac{\partial^2\phi_w}{\partial x^2} - \frac{\left(\frac{X}{R}+\frac{X}{2}\right)^3}{3!}\frac{\partial^3\phi_w}{\partial x^3} + \frac{\left(\frac{X}{R}+\frac{X}{2}\right)^4}{4!}\frac{\partial^4\phi_w}{\partial x^4} + \dots \tag{3.82}$$

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_{i-1} มีค่าเป็น

$$\phi_{i-1} = \phi_w - \left(\frac{X}{2}\right)\frac{\partial\phi_w}{\partial x} + \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^2}{2!}\frac{\partial^2\phi_w}{\partial x^2} - \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^3}{3!}\frac{\partial^3\phi_w}{\partial x^3} + \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^4}{4!}\frac{\partial^4\phi_w}{\partial x^4} + \dots \tag{3.83}$$

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_i มีค่าเป็น

$$\phi_i = \phi_w + \left(\frac{X}{2}\right)\frac{\partial\phi_w}{\partial x} + \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^2}{2!}\frac{\partial^2\phi_w}{\partial x^2} + \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^3}{3!}\frac{\partial^3\phi_w}{\partial x^3} + \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^4}{4!}\frac{\partial^4\phi_w}{\partial x^4} + \dots \tag{3.84}$$

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_{i+1} มีค่าเป็น

$$\phi_{i+1} = \phi_w + \left(\frac{X}{2}+RX\right)\frac{\partial\phi_w}{\partial x} + \frac{\left(\frac{X}{2}+RX\right)^2}{2!}\frac{\partial^2\phi_w}{\partial x^2} + \frac{\left(\frac{X}{2}+RX\right)^3}{3!}\frac{\partial^3\phi_w}{\partial x^3} + \frac{\left(\frac{X}{2}+RX\right)^4}{4!}\frac{\partial^4\phi_w}{\partial x^4} + \dots \tag{3.85}$$

คูณสมการ (3.82), (3.83), (3.84) และ (3.85) ด้วย $\dfrac{-R^3\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}$, $\dfrac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)}$, $\dfrac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8R\left(1+R\right)}$ และ $\dfrac{-\left(2+R\right)}{8R\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}$ ตามลำดับ แล้วบวกทั้งสี่สมการเข้าด้วยกันและจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\phi_w &= \frac{-R^3\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}\phi_{i-2}+\frac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)}\phi_{i-1}+\frac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8R\left(1+R\right)}\phi_i \\ &\quad +\frac{-\left(2+R\right)}{8R\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}\phi_{i+1}+E\left(x^5\right)+\ldots\end{aligned} \tag{3.86}$$

เมื่อ $E\left(x^5\right)$ คือค่าความคาดเคลื่อนจากเศษเหลือ (Truncation error) ที่ระดับความแม่นยำระดับ 5 สำหรับค่า ϕ_w หากใช้การประมาณค่าด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ (Lagrange interpolation polynomial) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi_w &= \frac{\left(x_w-x_{i-1}\right)\left(x_w-x_i\right)\left(x_w-x_{i+1}\right)}{\left(x_{i-2}-x_{i-1}\right)\left(x_{i-2}-x_i\right)\left(x_{i-2}-x_{i+1}\right)}\phi_{i-2} \\ &\quad +\frac{\left(x_w-x_{i-2}\right)\left(x_w-x_i\right)\left(x_w-x_{i+1}\right)}{\left(x_{i-1}-x_{i-2}\right)\left(x_{i-1}-x_i\right)\left(x_{i-1}-x_{i+1}\right)}\phi_{i-1} \\ &\quad +\frac{\left(x_w-x_{i-2}\right)\left(x_w-x_{i-1}\right)\left(x_w-x_{i+1}\right)}{\left(x_i-x_{i-2}\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(x_i-x_{i+1}\right)}\phi_i \\ &\quad +\frac{\left(x_w-x_{i-2}\right)\left(x_w-x_{i-1}\right)\left(x_w-x_i\right)}{\left(x_{i+1}-x_{i-2}\right)\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)}\phi_{i+1}\end{aligned} \tag{3.87}$$

หากกำหนดให้ที่ตำแหน่ง x_w มีค่าเป็นศูนย์ $\left(x_w=0\right)$ ดังนั้นที่ตำแหน่ง x_{i-2}, x_{i-1}, x_i และ x_{i+1} มีค่าเป็น $-\left(\dfrac{X}{R}+\dfrac{X}{2}\right),-\dfrac{X}{2},\dfrac{X}{2}$ และ $\left(\dfrac{X}{2}+RX\right)$ ตามลำดับ แทนค่า x_{i-2}, x_{i-1}, x_i และ x_{i+1} ลงในสมการ (3.87) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi_w &= \frac{-R^3\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}\phi_{i-2}+\frac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8\left(1+R\right)}\phi_{i-1}+\frac{\left(2+R\right)\left(1+2R\right)}{8R\left(1+R\right)}\phi_i \\ &\quad +\frac{-\left(2+R\right)}{8R\left(1+R\right)\left(1+R+R^2\right)}\phi_{i+1}\end{aligned} \tag{3.88}$$

ค่าความคาดเคลื่อนของการประมาณค่าทางระยะด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์สามารถคำนวณได้จาก

$$ERROR_{LIP}=\left(\phi_w\right)_{Taylor}-\left(\phi_w\right)_{LIP} \tag{3.89}$$

แทนค่า $\left(\phi_w\right)_{Taylor}$ และ $\left(\phi_w\right)_{LIP}$ จากสมการ (3.86) และ (3.88) ตามลำดับ ลงในสมการ (3.89) จะได้ว่า

$$ERROR_{LIP} = E\left(x^5\right) + \ldots \tag{3.90}$$

จากสมการ (3.90) จะได้ว่าค่าความคาดเคลื่อนของการประมาณค่าด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์มีค่าเป็นค่าความคาดเคลื่อนจากเศษเหลือของอนุกรมของเทเลอร์ ที่ระดับความแม่นยำระดับ 5 ขึ้นไป ดังนั้นจึงได้ว่าค่าระดับความแม่นยำทางระยะของแผนแบบ LIP ซึ่งใช้วิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ในการประมาณค่าของตัวแปรมีค่าเป็นระดับ 4 (4th order scheme) ซึ่งนับว่าเป็นแผนที่มีความแม่นยำสูง (Order > 2)

การหาค่าระดับความแม่นยำทางทางเวลาของแผนแบบ LIP สามารถหาได้โดยการใช้อนุกรมของเทเลอร์เช่นกัน จากรูปที่ 3.13 ค่า, ϕ_1, ϕ_2 *และ* ϕ_3 เป็นค่าตัวแปรที่เวลาต่างๆ ซึ่งสามารถหาค่าโดยประมาณได้จากการใช้อนุกรมของเทเลอร์ประมาณค่าจากค่าของ ϕ_4 ซึ่งเป็นค่าตัวแปรที่เวลาปัจจุบัน ค่า TT เป็นค่าระยะห่างระหว่างช่วงเวลาต่างๆ โดยที่ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_1 มีค่าเป็น

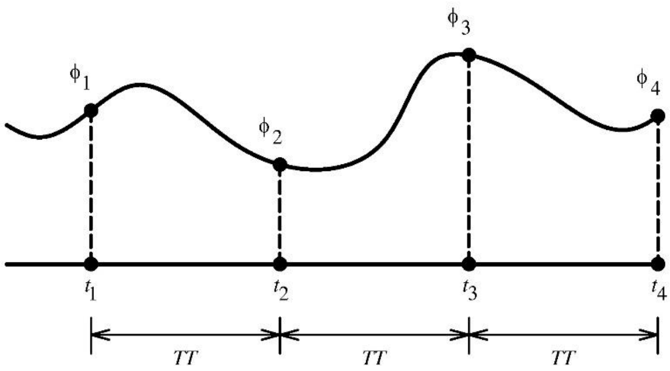
$$\phi_1 = \phi_4 - \left(3TT\right)\frac{\partial \phi_4}{\partial t} + \frac{\left(3TT\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial t^2} - \frac{\left(3TT\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi_4}{\partial t^3} + \ldots \tag{3.91}$$

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_2 มีค่าเป็น

$$\phi_2 = \phi_4 - \left(2TT\right)\frac{\partial \phi_4}{\partial t} + \frac{\left(2TT\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial t^2} - \frac{\left(2TT\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi_4}{\partial t^3} + \ldots \tag{3.92}$$

ค่าโดยประมาณของค่า ϕ_3 มีค่าเป็น

$$\phi_3 = \phi_4 - \left(TT\right)\frac{\partial \phi_4}{\partial t} + \frac{\left(TT\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial t^2} - \frac{\left(TT\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi_4}{\partial t^3} + \ldots \tag{3.93}$$



รูปที่ 0.13 ระยะห่างระหว่างช่วงเวลา

คูณสมการ (3.91), (3.91) และ (3.93) ด้วย $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ และ -3 ตามลำดับ แล้วบวกทั้งสามสมการเข้าด้วยกันและจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\phi_4}{dt} = -\frac{1}{3}\phi_1 + \frac{3}{2}\phi_2 - 3\phi_3 + \frac{11}{6}\phi_4 + E\left(t^4\right) + \ldots \tag{3.94}$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ของตัวแปรในช่วงเวลาย่อยปัจจุบันเทียบกับเวลา $\left(\frac{d\phi_4}{dt}\right)$ หากใช้การประมาณค่าด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ จะได้ว่า

$$\frac{d\phi_4}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\begin{array}{l} \frac{(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}\phi_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}\phi_2 \\ + \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_4)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}\phi_3 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}\phi_4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_4}{dt} = & \frac{t(3t-2t_2-2t_3-2t_4)+(t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}\phi_1 \\ & + \frac{t(3t-2t_1-2t_3-2t_4)+(t_1t_3+t_1t_4+t_3t_4)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}\phi_2 \\ & + \frac{t(3t-2t_1-2t_2-2t_4)+(t_1t_2+t_1t_4+t_2t_4)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}\phi_3 \\ & + \frac{t(3t-2t_1-2t_2-2t_3)+(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}\phi_4 \end{aligned} \tag{3.95}$$

หากกำหนดให้ที่เวลาปัจจุบัน $t = t_4$ มีค่าเป็นศูนย์ $(t_4 = 0)$ ดังนั้นที่เวลา t_1, t_2 *และ* t_3 มีค่าเป็น $-3TT, -2TT$ และ $-TT$ ตามลำดับ แทนค่า t_1, t_2 *และ* t_3 ลงในสมการ (3.95) จะได้ว่า

$$\frac{d\phi_4}{dt} = -\frac{1}{3}\phi_1 + \frac{3}{2}\phi_2 - 3\phi_3 + \frac{11}{6}\phi_4 \tag{3.96}$$

ค่าความคาดเคลื่อนของการประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์สามารถคำนวณได้จาก

$$ERROR_{LIP} = (\phi_4)_{Taylor} - (\phi_4)_{LIP} \tag{3.97}$$

แทนค่า $(\phi_4)_{Taylor}$ และ $(\phi_4)_{LIP}$ จากสมการ (3.86) และ (3.88) ตามลำดับ ลงในสมการ (3.97) จะได้ว่า

$$ERROR_{LIP} = E\left(t^4\right) + \ldots \tag{3.98}$$

จากสมการ (3.98*)* จะได้ว่าค่าความคาดเคลื่อนของการประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาด้วยวิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์มีค่าเป็นค่าความคาดเคลื่อนจากเศษเหลือของอนุกรมของเท

เลอร์ ที่ระดับความแม่นยำระดับ 4 ขึ้นไป ดังนั้นจึงได้ว่าค่าระดับความแม่นยำทางเวลาของแผนแบบ LIP ซึ่งใช้วิธีพหุนามของการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ในการประมาณค่าของอนุพันธ์ของตัวแปรมีค่าเป็นระดับ 3 (3rd order scheme) ซึ่งนับว่าเป็นแผนที่มีความแม่นยำสูง (Order > 2) เช่นกัน

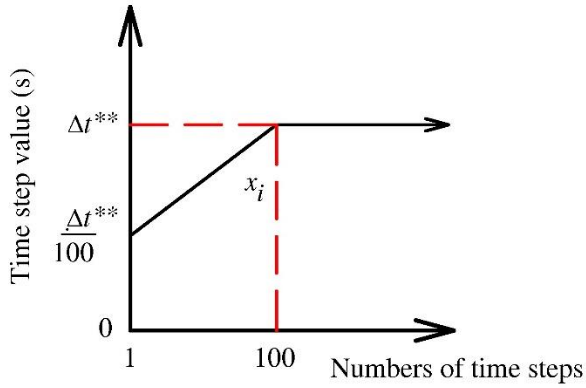
บทที่ 4
การดำเนินการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
(Numerical implementation)

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาโปรมแกรมขึ้นเองจากภาษาฟอร์แทรน (Fortran programming language) เพื่อใช้หาคำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน และปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยใช้แผนแบบ LIP ร่วมกับเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ในการคำนวณ

สำหรับคำตอบของปัญหาที่ต้องการเป็นคำตอบที่สภาวะคงตัว (Steady state) แต่ในทางปฏิบัติการหาคำตอบที่สภาวะคงตัวโดยตรงทำได้ยาก ดังนั้นโดยทั่วไปนักวิจัยมักใช้การหาคำตอบแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา (Transient condition) แล้วใช้คำตอบที่ลู่เข้าสู่สภาวะคงตัวเป็นคำตอบที่ต้องการ โดยงานวิจัยนี้ได้ใช้หลักการนี้ในการพัฒนาโปรแกรมเช่นกัน ซึ่งการหาคำตอบของระบบสมการจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในบทที่ 3 ด้วยวิธีการทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iterative method) สำหรับเงื่อนไขในการลู่เข้าของโปรแกรมในแต่ละช่วงเวลา และการลู่เข้าสู่สภาวะคงตัว ใช้ค่าความแตกต่างของคำตอบของตัวแปรรอบปัจจุบันกับรอบก่อนหรือในช่วงเวลาย่อยที่ผ่านมาแล้วหารด้วยผลบวกของค่าตัวแปรกับค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้ โดยค่าที่ได้ต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าความผิดผลาดที่ยอมรับได้ ซึ่งสามารถแสดงในรูปของอสมการได้ดังนี้

$$\max\left|\frac{\phi^k-\phi^{k-1}}{\left|\phi^k\right|+ERROR}\right|\le ERROR \tag{4.1}$$

สำหรับช่วงเวลาย่อยที่ใช้ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนั้นมีค่าไม่คงที่ โดยช่วงเริ่มต้นการทำงานของโปรแกรมค่าของช่วงเวลาย่อยมีค่าน้อย โดยกำหนดให้ค่าของช่วงเวลาย่อยเริ่มต้นมีค่าเป็น $\frac{1}{100}$ ของค่าช่วงเวลาย่อยที่คงที่ และเพิ่มขึ้นเป็นแบบเชิงเส้นเมื่อเทียบกับเวลาของโปรแกรม จนการทำงานของโปรแกรมครบ 100 ครั้งของช่วงเวลาย่อย ซึ่งรายละเอียดดังแสดงใน**Error! Reference source not found.** หลังจากนั้นค่าของช่วงเวลาย่อยก็จะกำหนดให้มีค่าคงที่เป็น Δt^{**}



รูปที่ 0.1 การเปลี่ยนแปลงของช่วงเวลาย่อยในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น

การทำงานของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีขั้นตอนดังรายละเอียดและแผนผังโปรแกรม (Flow chart) ที่แสดงต่อไปนี้

4.1 ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

การทำงานของโปรแกรมแบ่งเป็นโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อยดังนี้

- โปรแกรมหลัก A1 (Main program A1) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.2

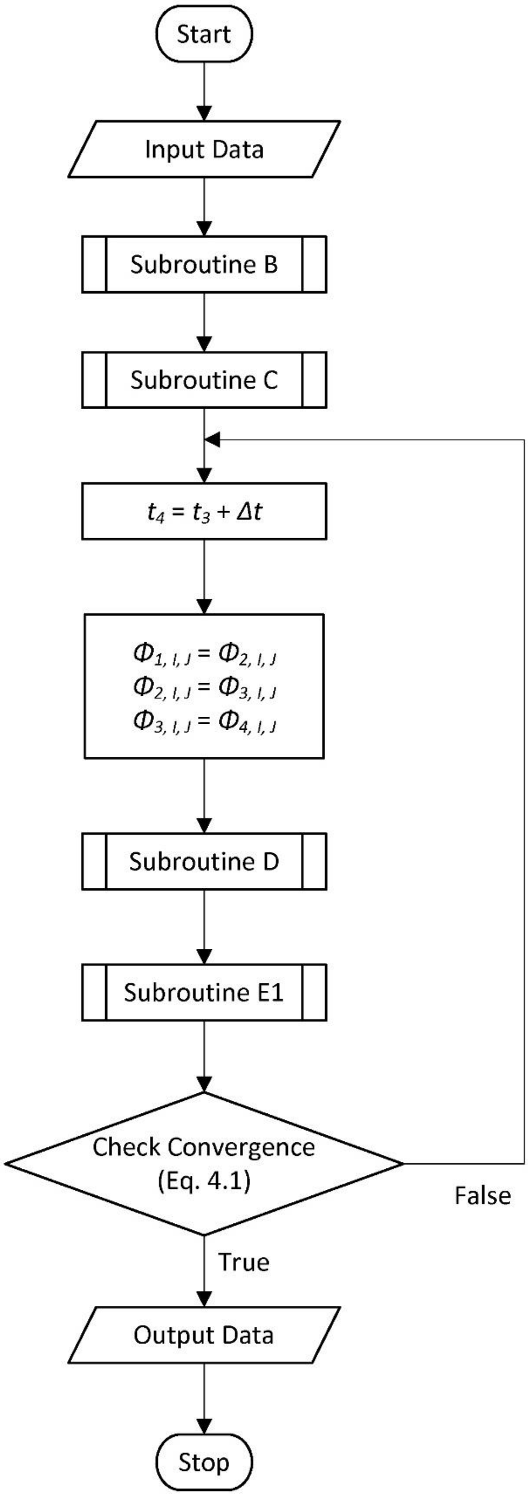
1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. ป้อนข้อมูลให้กับโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณ ได้แก่ อุณหภูมิที่ขอบเขต (T_0) ช่วงเวลาย่อยไร้มิติ(Δt^{**}) ค่าความผิดพลาดของโปรแกรม (*ERROR*) จำนวนเซลล์ (*ICMIN, ICMAX, JCMIN, JCMAX*) ค่าสัดส่วนของขนาดเม็สช์ของเม็สช์หยาบต่อเม็สช์ละเอียด (*RX, RY*) ค่าคุณสมบัติของแผ่นวัสดุ (ρ, c, k) ค่าเริ่มต้นของตัวแปร (T)
3. เรียกโปรแกรมย่อย B (Subroutine B) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาตำแหน่งของเม็สช์
4. เรียกโปรแกรมย่อย C (Subroutine C) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของแผนแบบ LIP
5. คำนวณเวลาของโปรแกรม
6. สลับค่าของตัวแปรเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเวลา
7. เรียกโปรแกรมย่อย D (Subroutine D) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการประมาณค่านอกช่วงเพื่อหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรสำหรับใช้ในการคำนวณในช่วงเวลาย่อยถัดไป

8. เรียกโปรแกรมย่อย E1 (Subroutine E1) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการคำนวณหาค่าของตัวแปรในช่วงเวลาย่อยปัจจุบัน

9. ตรวจสอบการลู่เข้าสู่สภาวะคงตัวของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 9. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 5.

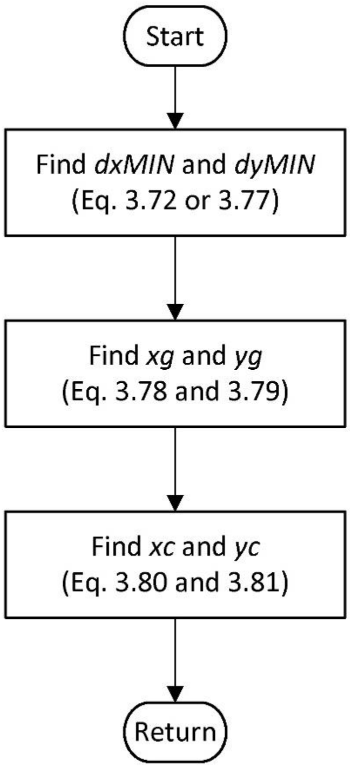
10. บันทึกค่าของคำตอบของโปรแกรม

11. หยุดการทำงานของโปรแกรม



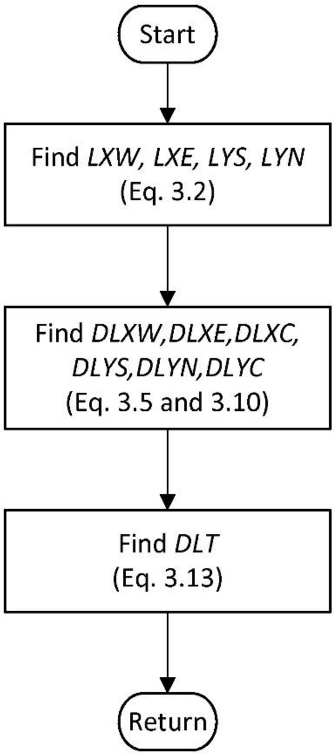
รูปที่ 0.2 โปรแกรมหลัก A1

- โปรแกรมย่อย B (Subroutine B) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.3
  1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
  2. หาค่า *dxMIN*, *dyMIN* จากสมการ (3.72) หรือ (3.77)
  3. หาค่า *xg*, *yg* จากสมการ (3.78) และ (3.79)
  4. หาค่า *xc*, *yc* จากสมการ (3.80) และ (3.81)
  5. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



รูปที่ 0.3 โปรแกรมย่อย B

- โปรแกรมย่อย C (Subroutine C) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.4
  1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
  2. หาค่า *LXW*, *LXE*, *LYS*, *LYN* จากสมการ (3.2)
  3. หาค่า *DLXW*, *DLXE*, *DLXC*, *DLYS*, *DLYN*, *DLYC* จากสมการ (3.5) และ (3.10)
  4. หาค่า *DLT* จากสมการ (3.13)
  5. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



รูปที่ 0.4 โปรแกรมย่อย C

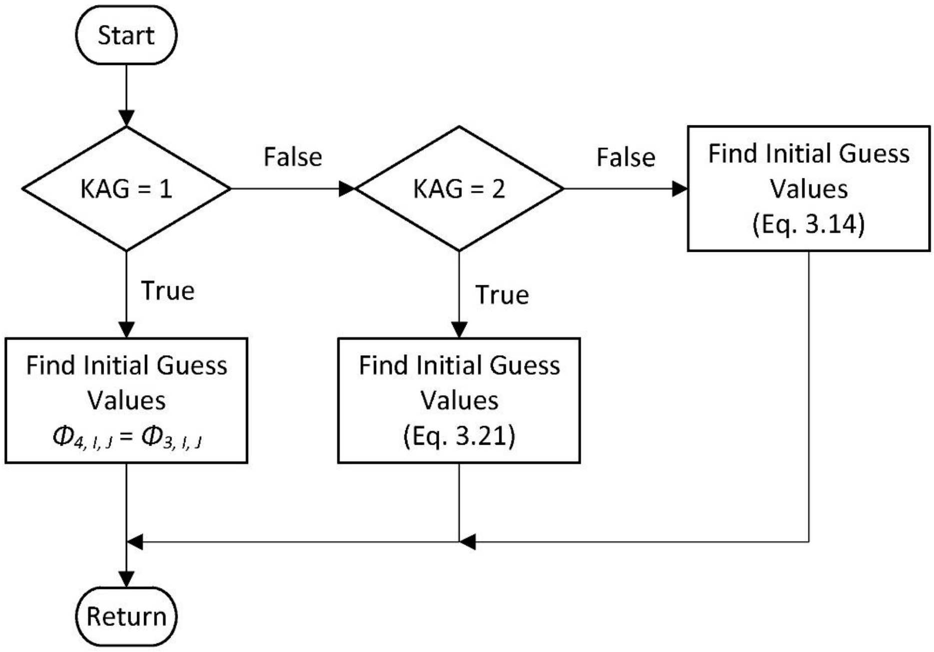
- โปรแกรมย่อย D (Subroutine D) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.5

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. ถ้า KAG = 1 ค่าเริ่มต้นของตัวแปรมีค่าเท่ากับคำตอบของช่วงเวลาก่อนหน้านั้น

ถ้า KAG = 2 ค่าเริ่มต้นของตัวแปรคำนวณจากสมการ (3.21)

ถ้า KAG = 3 ค่าเริ่มต้นของตัวแปรคำนวณจากสมการ (3.14)

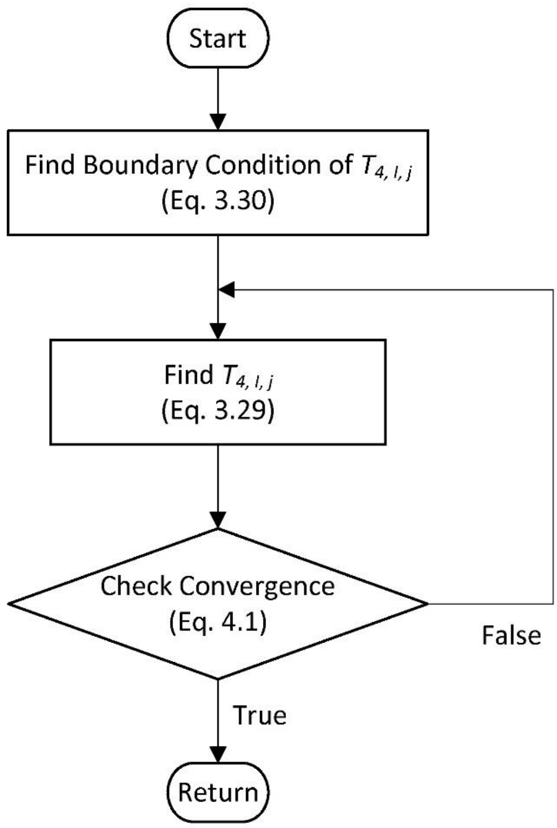
3. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



รูปที่ 0.5 โปรแกรมย่อย D

- โปรแกรมย่อย E1 (Subroutine E1) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.6

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. หาค่าสภาวะขอบเขตจากสมการ (3.30)
3. หาค่า *T* จากสมการ (3.29)
4. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 5. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 3.
5. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



รูปที่ 0.6 โปรแกรมย่อย E1

4.2 ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน การทำงานของโปรแกรมแบ่งเป็นโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อยดังนี้

- โปรแกรมหลัก A2 (Main program A2) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.7

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. ป้อนข้อมูลให้กับโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณ ได้แก่ เลขเรย์โนลดส์ (*Re*) ช่วงเวลาย่อยไร้มิติ(Δt^{**}) ค่าความผิดพลาดของโปรแกรม (*ERROR*) จำนวนเซลล์ (*ICMIN, ICMAX, JCMIN, JCMAX*) ค่าสัดส่วนของขนาดเม็สช์ของเม็สช์หยาบต่อเม็สช์ละเอียด (*RX, RY*) ค่าคุณสมบัติของของไหล (ρ, μ) ค่าความเร็วของผิวด้านบนของช่องว่าง (*U*) ค่าเริ่มต้นของตัวแปร (*u, v, P*)
3. หาค่าความกว้างของช่องว่าง (*b*) จาก

$$b = \frac{Re\,\mu}{\rho|U|} \tag{4.2}$$

4. เรียกโปรแกรมย่อย B (Subroutine B) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาตำแหน่งของเม็ดสช์

5. เรียกโปรแกรมย่อย C (Subroutine C) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของแผนแบบ LIP

6. คำนวณเวลาของโปรแกรม

7. สลับค่าของตัวแปรเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเวลา

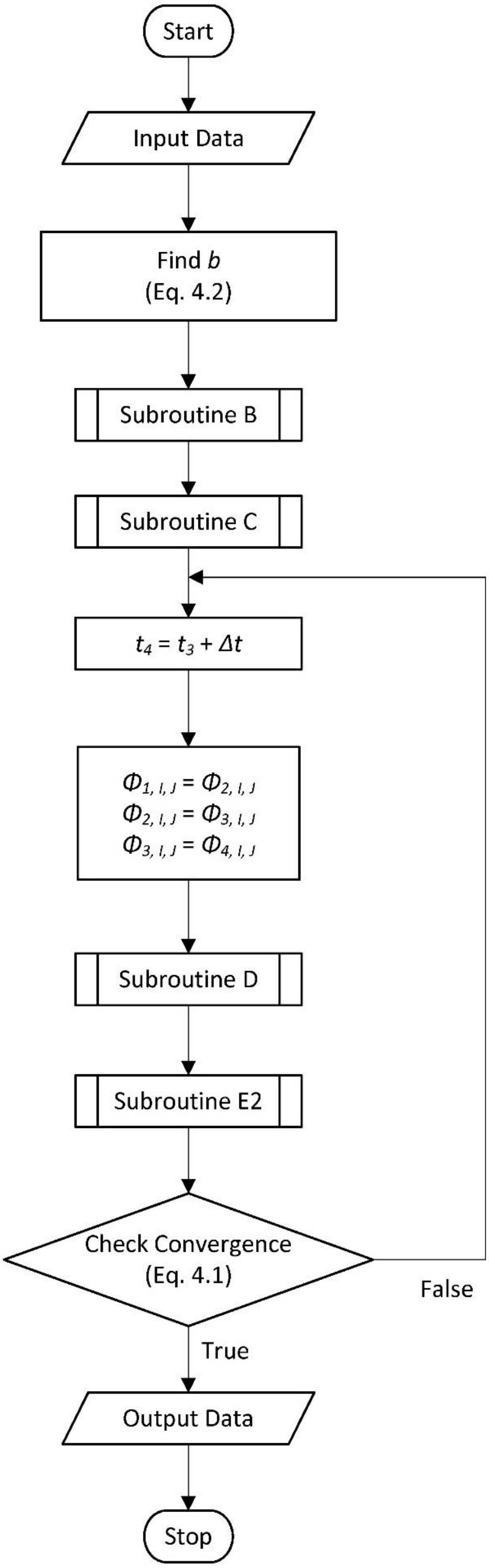
8. เรียกโปรแกรมย่อย D (Subroutine D) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการประมาณค่านอกช่วงเพื่อหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรสำหรับใช้ในการคำนวณในช่วงเวลาย่อยถัดไป

9. เรียกโปรแกรมย่อย E2 (Subroutine E2) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการคำนวณหาค่าของตัวแปรในช่วงเวลาย่อยปัจจุบัน

10. ตรวจสอบการลู่เข้าสู่สภาวะคงตัวของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 11. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 6.

11. บันทึกค่าของคำตอบของโปรแกรม

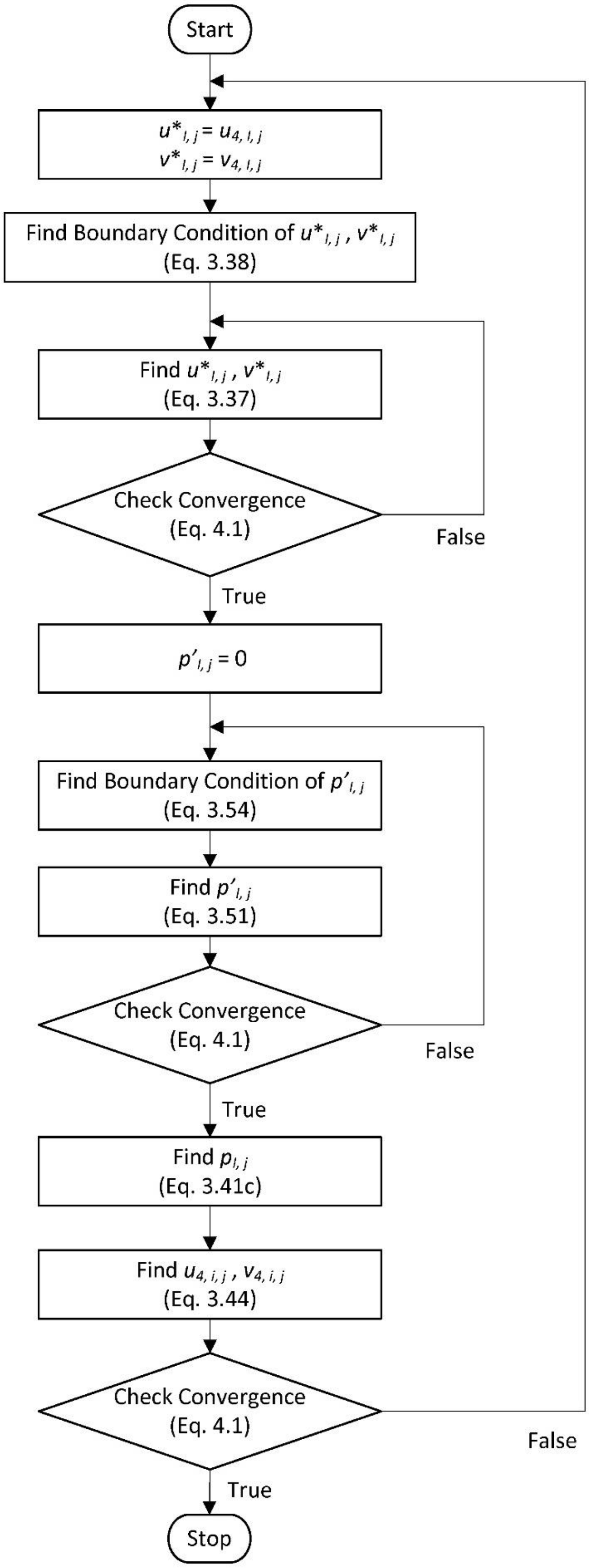
12. หยุดการทำงานของโปรแกรม



รูปที่ 0.7 โปรแกรมหลัก A2

- โปรแกรมย่อย E2 (Subroutine E2) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.8

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. กำหนดค่า $u^*_{i,j} = u_{4,i,j}$, $v^*_{i,j} = v_{4,i,j}$
3. หาค่าสภาวะขอบเขตของ $u^*_{i,j}$, $v^*_{i,j}$ จากสมการ (3.38)
4. หาค่า $u^*_{i,j}$, $v^*_{i,j}$ จากสมการ (3.37)
5. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 6. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 4.
6. กำหนดค่า $p'_{i,j} = 0$
7. หาค่าสภาวะขอบเขตของ $p'_{i,j}$ จากสมการ (3.54)
8. หาค่า $p'_{i,j}$ จากสมการ (3.51)
9. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 10. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 7.
10. หาค่า $p_{i,j}$ จากสมการ (3.41c)
11. หาค่า $u_{4,i,j}$, $v_{4,i,j}$ จากสมการ (3.44)
12. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 13. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 2.
13. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



รูปที่ 0.8 โปรแกรมย่อย E2

4.3 ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

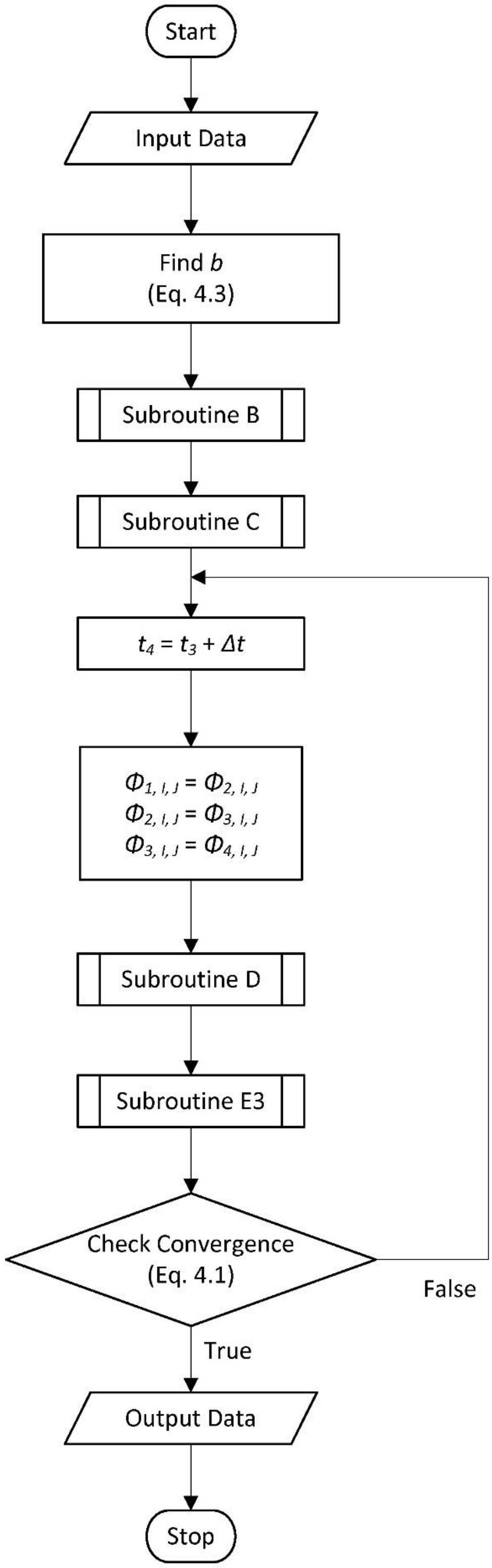
การทำงานของโปรแกรมแบ่งเป็นโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อยดังนี้

- โปรแกรมหลัก A3 (Main program A3) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.9

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. ป้อนข้อมูลให้กับโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณ ได้แก่ เลขเรย์ลี (*Ra*) ช่วงเวลาย่อยไร้มิติ(Δt^{**}) ค่าความผิดพลาดของโปรแกรม (*ERROR*) จำนวนเซลล์ (*ICMIN, ICMAX, JCMIN, JCMAX*) ค่าสัดส่วนของขนาดเม็สช์ของเม็สช์หยาบต่อเม็สช์ละเอียด (*RX, RY*) ค่าคุณสมบัติของของไหล (ρ, μ, c_p) ค่าอุณหภูมิที่ขอบเขต (T_{hot}, T_{cold}) ค่าเริ่มต้นของตัวแปร (u, v, P, T)
3. หาค่าความกว้างของช่องว่าง (b) จาก

$$b=\left(\frac{Ra\,\nu\,\alpha}{g\,\beta\left(T_{hot}-T_{cold}\right)}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.3}$$

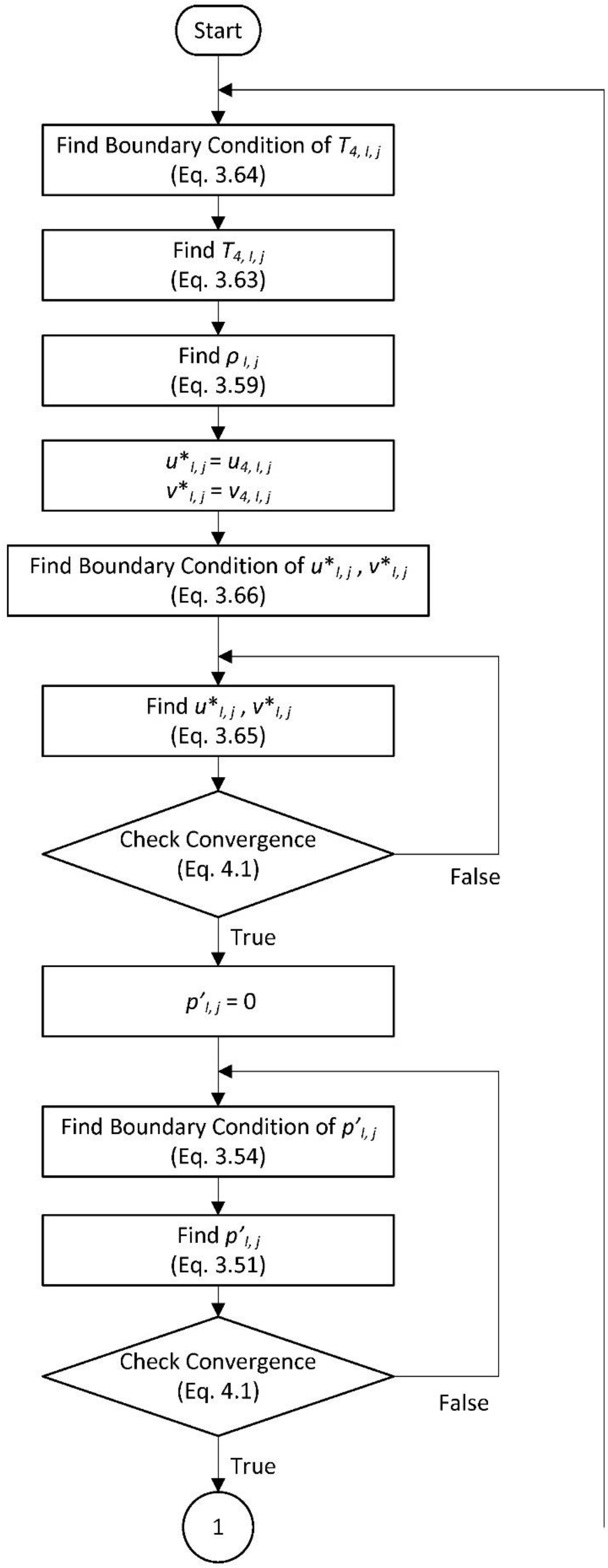
4. เรียกโปรแกรมย่อย B (Subroutine B) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาตำแหน่งของเม็สช์
5. เรียกโปรแกรมย่อย C (Subroutine C) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของแผนแบบ LIP
6. คำนวณเวลาของโปรแกรม
7. สลับค่าของตัวแปรเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเวลา
8. เรียกโปรแกรมย่อย D (Subroutine D) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการประมาณค่านอกช่วงเพื่อหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรสำหรับใช้ในการคำนวณในช่วงเวลาย่อยถัดไป
9. เรียกโปรแกรมย่อย E3 (Subroutine E3) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการคำนวณหาค่าของตัวแปรในช่วงเวลาย่อยปัจจุบัน
10. ตรวจสอบการลู่เข้าสู่สภาวะคงตัวของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 11. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 6.
11. บันทึกค่าของคำตอบของโปรแกรม
12. หยุดการทำงานของโปรแกรม



รูปที่ 0.9 โปรแกรมหลัก A3

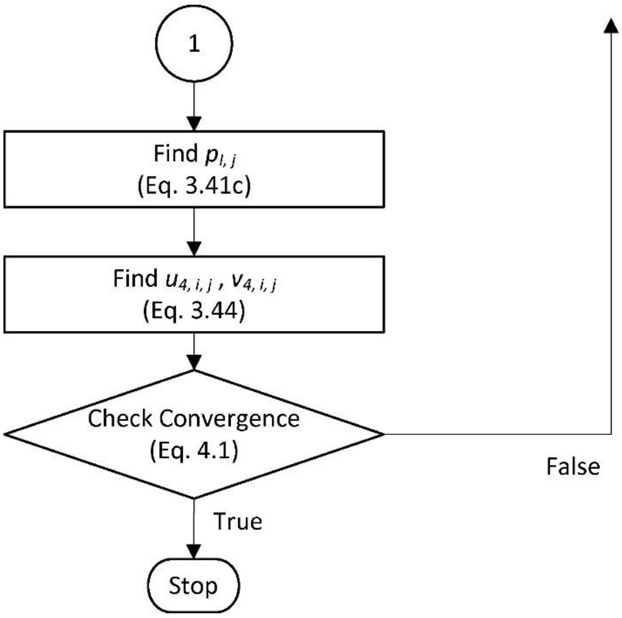
- โปรแกรมย่อย E3 (Subroutine E3) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.10

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. หาค่าสภาวะขอบเขตของ $T_{4,i,j}$ จากสมการ (3.64)
3. หาค่า $T_{4,i,j}$ จากสมการ (3.63)
4. หาค่า $\rho_{i,j}$ จากสมการ (3.59)
5. กำหนดค่า $u^*_{i,j} = u_{4,i,j}$, $v^*_{i,j} = v_{4,i,j}$
6. หาค่าสภาวะขอบเขตของ $u^*_{i,j}$, $v^*_{i,j}$ จากสมการ (3.38)
7. หาค่า $u^*_{i,j}$, $v^*_{i,j}$ จากสมการ (3.37)
8. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 9. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 7.
9. กำหนดค่า $p'_{i,j} = 0$
10. หาค่าสภาวะขอบเขตของ $p'_{i,j}$ จากสมการ (3.54)
11. หาค่า $p'_{i,j}$ จากสมการ (3.51)
12. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 13. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 11.
13. หาค่า $p_{i,j}$ จากสมการ (3.41c)
14. หาค่า $u_{4,i,j}$, $v_{4,i,j}$ จากสมการ (3.44)
15. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 16. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 2.
16. ส่งข้อมูลกลับไปที่โปรแกรมหลัก



Start
Find Boundary Condition of $T_{4, I, j}$
(Eq. 3.64)
Find $T_{4, I, j}$
(Eq. 3.63)
Find $\rho_{I, j}$
(Eq. 3.59)
$u^*_{I, j} = u_{4, I, j}$
$v^*_{I, j} = v_{4, I, j}$
Find Boundary Condition of $u^*_{I, j}$, $v^*_{I, j}$
(Eq. 3.66)
Find $u^*_{I, j}$, $v^*_{I, j}$
(Eq. 3.65)
Check Convergence
(Eq. 4.1)
False
True
$p'_{I, j} = 0$
Find Boundary Condition of $p'_{I, j}$
(Eq. 3.54)
Find $p'_{I, j}$
(Eq. 3.51)
Check Convergence
(Eq. 4.1)
False
True
1

(a)



(b)

รูปที่ 0.10 โปรแกรมย่อย E3 (a) ส่วนที่ 1 (b) ส่วนที่ 2

4.4 ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

การทำงานของโปรแกรมแบ่งเป็นโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อยดังนี้

- โปรแกรมหลัก A4 (Main program A4) มีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 0.11

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรม
2. ป้อนข้อมูลให้กับโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณ ได้แก่ เลขเรย์ลี (*Ra*) ช่วงเวลาย่อยไร้มิติ(Δt^{**}) ค่าความผิดพลาดของโปรแกรม (*ERROR*) จำนวนเซลล์ (*ICMIN, ICMAX, JCMIN, JCMAX*) ค่าสัดส่วนของขนาดเม็สช์ของเม็สช์หยาบต่อเม็สช์ละเอียด (*RX, RY*) ค่าคุณสมบัติของของไหล (ρ, μ, c_p) ค่าอุณหภูมิที่ขอบเขต (T_{hot}, T_{cold}) ค่าเริ่มต้นของตัวแปร (*u, v, P, T*) ค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว่างของช่องว่าง (*AR*)
3. หาค่าความกว้างของช่องว่าง (*b*) จากสมการ (4.3) และค่าความสูงของช่องว่าง (*h*) จาก

$$h = b\,AR \tag{4.4}$$

4. เรียกโปรแกรมย่อย B (Subroutine B) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาตำแหน่งของเม็สช์

5. เรียกโปรแกรมย่อย C (Subroutine C) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของแผนแบบ LIP

6. คำนวณเวลาของโปรแกรม

7. สลับค่าของตัวแปรเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเวลา

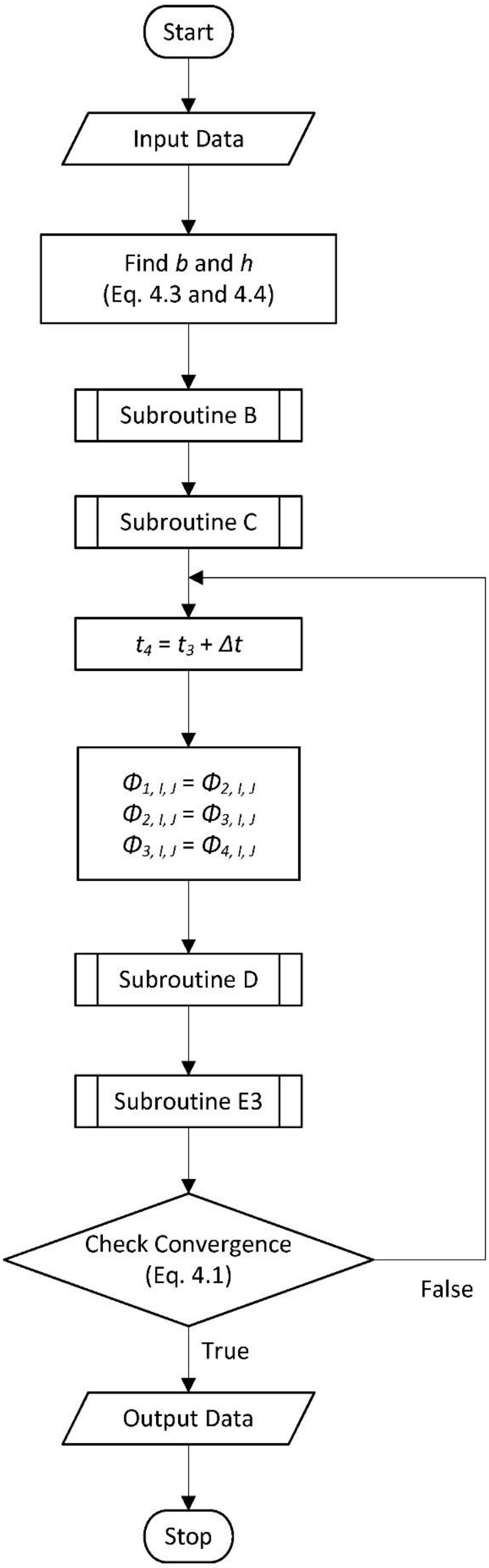
8. เรียกโปรแกรมย่อย D (Subroutine D) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการประมาณค่านอกช่วงเพื่อหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรสำหรับใช้ในการคำนวณในช่วงเวลาย่อยถัดไป

9. เรียกโปรแกรมย่อย E3 (Subroutine E3) ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยสำหรับการคำนวณหาค่าของตัวแปรในช่วงเวลาย่อยปัจจุบัน

10. ตรวจสอบการลู่เข้าสู่สภาวะคงตัวของคำตอบ โดยใช้สมการ (4.1) หากเป็นจริงให้ดำเนินการต่อตามข้อ 11. หากเป็นเท็จย้อนกลับไปดำเนินการที่ข้อ 6.

11. บันทึกค่าของคำตอบของโปรแกรม

12. หยุดการทำงานของโปรแกรม



รูปที่ 0.11 โปรแกรมหลัก A4

บทที่ 5
การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP และการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP
(Verification of the LIP scheme and the performance test of the WF-LIP extrapolation)

โดยทั่วไปเมื่อมีการนำเสนอแผนหรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใหม่ การตรวจสอบความถูกต้องของแผนหรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบนั้นเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพื่อให้แน่ใจว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนหรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใหม่นั้นมีความถูกต้อง ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จึงเป็นการแสดงการตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ซึ่งเป็นแผนแบบใหม่ที่งานวิจัยนี้มุ่งนำเสนอ ขณะเดียวกันการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ก็ได้ถูกดำเนินการเพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ซึ่งเป็นการประมาณค่านอกช่วงแบบใหม่เช่นกัน มีประสิทธิภาพในการช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณของปัญหาแบบไม่คงตัวที่ลู่เข้าสู่คำตอบแบบสภาวะคงตัวได้จริงตามวัตถุประสงค์ของการพัฒนาการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

5.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP

การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ได้ถูกกระทำโดยการเปรียบเทียบคำตอบที่คำนวณได้แผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากทั้งการวิเคราะห์ (Analytical solution) คำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง (Benchmark numerical solution) คำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution) และคำตอบที่ได้จากการทดลอง (Experimental solution) จากปัญหาการนำความร้อน(Conduction heat transfer) ปัญหาทางการคำนวณทางพลศาสตร์ของของไหล (Computational Fluid Dynamics) และปัญหาการพาความร้อน (Convection heat transfer) ซึ่งได้แก่

- ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต
- ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน
- ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

- ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

โดยปัญหาต่างๆ ที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ล้วนเป็นปัญหาที่เป็นที่รู้จักกันดีในแวดวงวิชาการในแขนงนี้

5.1.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขตนั้น ใช้วิธีการเปรียบเทียบคำตอบที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ของ Beck et al. [24] ซึ่งถือได้ว่าเป็นคำตอบแบบแม่นตรง (Exact solution) ซึ่งคำตอบมี 5 กรณี (Case) คือ

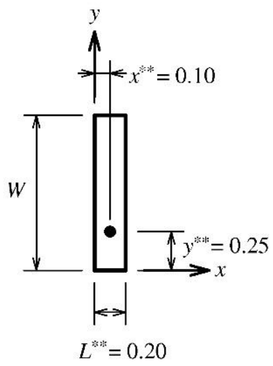
- กรณีที่ 1 $x^{**} = \dfrac{x}{W} = 0.10,\ y^{**} = \dfrac{y}{W} = 0.25,$ และ $L^{**} = \dfrac{L}{W} = 0.20$
- กรณีที่ 2 $x^{**} = 0.25,\ y^{**} = 0.25,$ และ $L^{**} = 0.50$
- กรณีที่ 3 $x^{**} = 0.50,\ y^{**} = 0.25,$ และ $L^{**} = 1.00$
- กรณีที่ 4 $x^{**} = 1.00,\ y^{**} = 0.25,$ และ $L^{**} = 2.00$
- กรณีที่ 5 $x^{**} = 2.50,\ y^{**} = 0.25,$ และ $L^{**} = 5.00$

โดยรูปที่ 5.1 แสดงตำแหน่งของการหาคำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขตทั้ง 5 กรณี

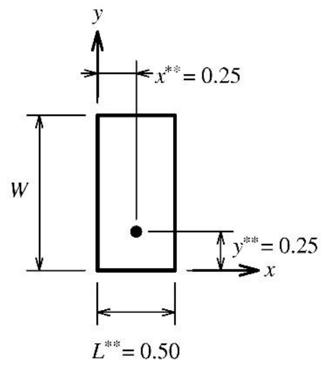
สำหรับการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP เพื่อหาคำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต โดยใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นซึ่งมีรายละเอียดตามที่แสดงในบทที่ 4 นั้น กำหนดให้ค่า $ERROR = 10^{-10}$ และค่าช่วงเวลาย่อยไร้มิติ $\Delta t^{**} = \dfrac{\Delta t\, k}{\rho c W^2} = 0.001$ ซึ่งการหาคำตอบของปัญหาได้กระทำที่ค่าของจำนวนเม็ดซ์ที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นการทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบเนื่องจากขนาดของจำนวนเม็สซ์ (Mesh independence test) โดยตารางที่ 5.1 เป็นการทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบเนื่องจากขนาดของจำนวนเม็สซ์ที่กรณีต่างๆ ซึ่งเปอร์เซ็นต์ของการเปลี่ยนแปลงของคำตอบ (Change (%))ที่เป็นค่าของอุณหภูมิไร้มิติ $\left(\dfrac{T\left(x^{**}, y^{**}\right)}{T_0}\right)$ คำนวณ

ได้จาก $\text{Change}(\%) = \left| \dfrac{\left(\left(\dfrac{T\left(x^{**}, y^{**}\right)}{T_0} \right)_{\text{Fine mesh}} - \left(\dfrac{T\left(x^{**f}, y^{**}\right)}{T_0} \right)_{\text{Coarse mesh}} \right) \times 100}{\left(\dfrac{T\left(x^{**}, y^{**}\right)}{T_0} \right)_{\text{Fine mesh}}} \right|$ โดยเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ขนาดของจำนวนเม็สซ์สูงสุดมีค่ามากที่สุดที่ 0.0126885915 ในกรณีที่ 5 ซึ่งถือว่ามีค่าน้อยเพียงพอที่จะใช้สำหรับคำนวณเพื่อหาคำตอบสำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

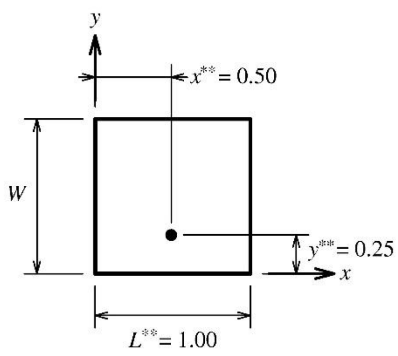
ตารางที่ 5.2, 5.3 และ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของค่าอุณหภูมิไร้มิติ ค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวราบ $\left(\dfrac{q_x\left(x^{**}, y^{**}\right)L}{kT_0} \right)$ และค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวดิ่ง $\left(\dfrac{q_y\left(x^{**}, y^{**}\right)L}{kT_0} \right)$ ที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ [24] ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต โดยที่ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่าง (Difference (%)) นั้น สามารถคำนวณได้จากสมการ $\text{Difference}(\%) = \left| \dfrac{\left(\text{Solution}_{[24]} - \text{Solution}_{\text{Present work}} \right) \times 100}{\text{Solution}_{[24]}} \right|$ ซึ่งค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างระหว่างคำตอบของค่าอุณหภูมิไร้มิติที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์มีค่าสูงสุดเป็น 2.783160689 โดยเกิดขึ้นในกรณีที่ 5 ขณะที่ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างระหว่างคำตอบของค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวราบและค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวดิ่งที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์มีค่าสูงสุดเป็น 0.700988048 และ 2.77073007 ตามลำดับ และเกิดขึ้นในกรณีที่ 5 เช่นกัน



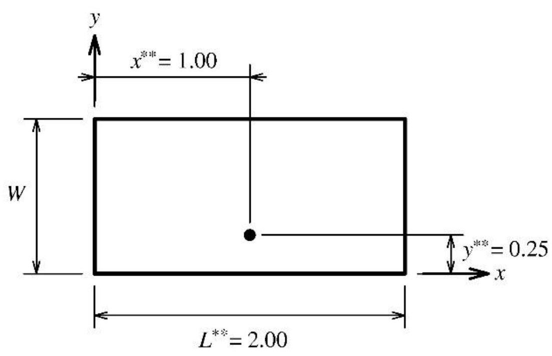
(a)



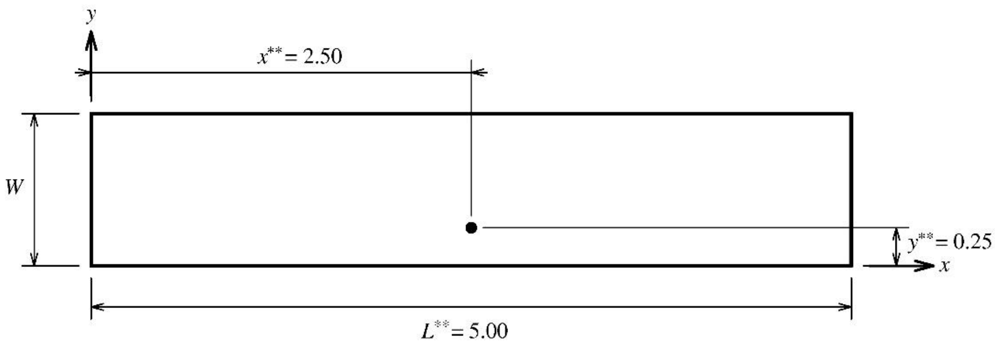
(b)



(c)



(d)



(e)

รูปที่ 0.1 ตำแหน่งของการหาคำตอบของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขตทั้ง 5 กรณี (a) กรณีที่ 1 (b) กรณีที่ 2 (c) กรณีที่ 3 (d) กรณีที่ 4 และ (e) กรณีที่ 5

ตารางที่ 5.1 การทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบเนื่องจากขนาดของจำนวนเม็สซ์ ของแผนแบบ LIP กับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

Case	Mesh size	$\dfrac{T\left(x^{**},y^{**}\right)}{T_0}$	Change (%)
1	20×100	0.4874510881	-
	22×110	0.4874059672	0.0092573478
	24×120	0.4873980937	0.0016154291
	26×130	0.4874263446	0.0057959308
	28×140	0.4874567861	0.0062449709
2	50×100	0.3641794148	-
	55×110	0.3639419464	0.0652489774
	60×120	0.3640810304	0.0382013768
	65×130	0.3639803404	0.0276635780
	70×140	0.3641639212	0.0504115814
3	100×100	0.1822001029	-
	110×110	0.1821680750	0.0175815057
	120×120	0.1821572031	0.0059684021
	130×130	0.1821722014	0.0082330381
	140×140	0.1821914603	0.0105706710
4	200×100	0.0389957320	-
	220×110	0.0389901064	0.0144282729
	240×120	0.0389884851	0.0041585827
	260×130	0.0389918524	0.0086360703
	280×140	0.0389960208	0.0106891383
5	500×100	0.0003591952	-
	550×110	0.0003591542	0.0113940423
	600×120	0.0003591484	0.0016297542
	650×130	0.0003591873	0.0108371355
	700×140	0.0003592329	0.0126885915

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าอุณหภูมิไร้มิติที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

Case	x^{**}	y^{**}	L^{**}	Author	$\frac{T\left(x^{**},y^{**}\right)}{T_0}$	Difference (%)
1	0.10	0.25	0.20	Beck et al. [24]	0.4874535168	-
				Present work	0.4874567861	0.000670687
2	0.25	0.25	0.50	Beck et al. [24]	0.3640566638	-
				Present work	0.3641639212	0.029461721
3	0.50	0.25	1.00	Beck et al. [24]	0.1820283319	-
				Present work	0.1821914603	0.089617033
4	1.00	0.25	2.00	Beck et al. [24]	0.0388578672	-
				Present work	0.0389960208	0.355535624
5	2.50	0.25	5.00	Beck et al. [24]	0.0003495056	-
				Present work	0.0003592329	2.783160689

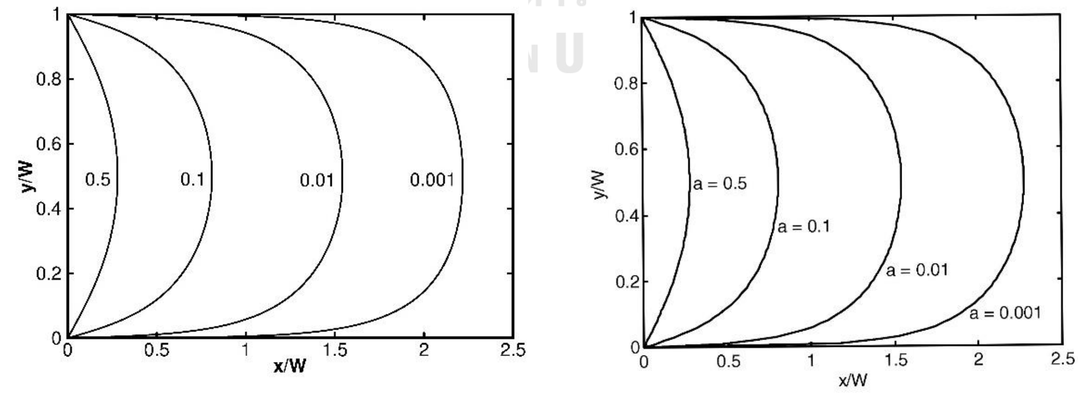
ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวราบที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

Case	x^{**}	y^{**}	L^{**}	Author	$\frac{q_x\left(x^{**},y^{**}\right)L}{kT_0}$	Difference (%)
1	0.10	0.25	0.20	Beck et al. [24]	0.9992238948	-
				Present work	0.9992073312	0.001657647
2	0.25	0.25	0.50	Beck et al. [24]	0.9169912516	-
				Present work	0.9168943630	0.01056592
3	0.50	0.25	1.00	Beck et al. [24]	0.6387957290	-
				Present work	0.6387880929	0.001195383
4	1.00	0.25	2.00	Beck et al. [24]	0.2453678480	-
				Present work	0.2454465296	0.032066795
5	2.50	0.25	5.00	Beck et al. [24]	0.0054900240	-
				Present work	0.0055285084	0.700988048

ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าปริมาณความร้อนไร้มิติที่ถ่ายเทในแนวดิ่งที่คำนวณได้จากแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

Case	x^{**}	y^{**}	L^{**}	Author	$\frac{q_y\left(x^{**},y^{**}\right)L}{kT_0}$	Difference (%)
1	0.10	0.25	0.20	Beck et al. [24]	-0.0393751511	-
				Present work	-0.0392607555	0.290527299
2	0.25	0.25	0.50	Beck et al. [24]	-0.3798302130	-
				Present work	-0.3794173529	0.108695954
3	0.50	0.25	1.00	Beck et al. [24]	-0.5371610386	-
				Present work	-0.5373411203	0.033524706
4	1.00	0.25	2.00	Beck et al. [24]	-0.2435418264	-
				Present work	-0.2443942353	0.350005146
5	2.50	0.25	5.00	Beck et al. [24]	-0.0054900207	-
				Present work	-0.0056421344	2.77073007

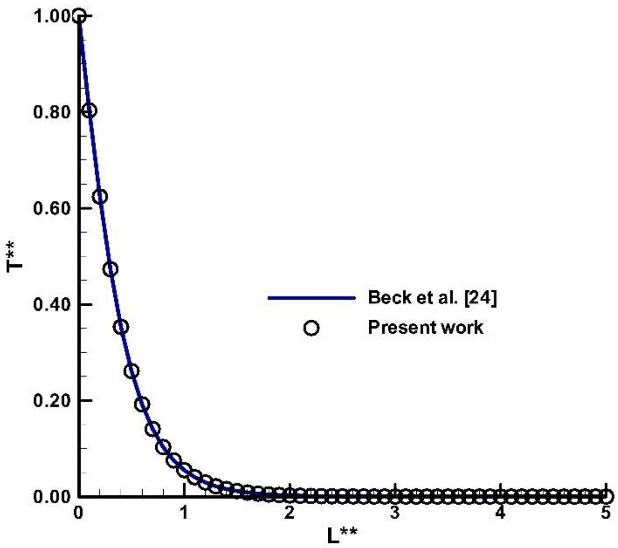
รูปที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ (Contour) ของการกระจายตัวของอุณหภูมิไร้มิติภายในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้า ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต ซึ่งเส้นคอนทัวร์มีความคล้ายคลึงกันอย่างยิ่ง



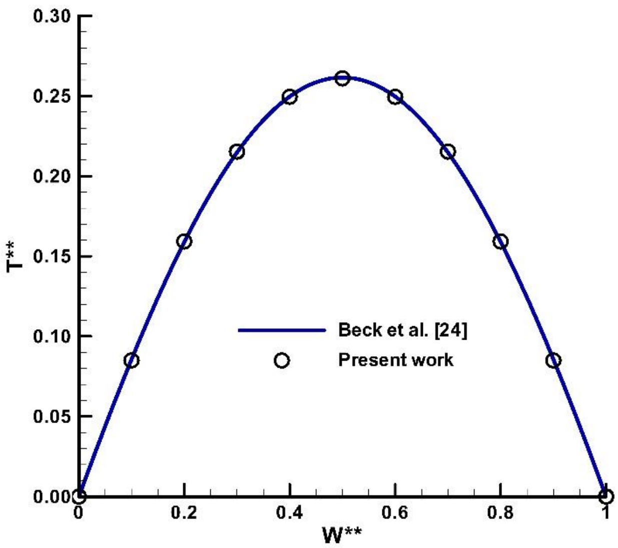
(a) (b)

รูปที่ 0.2 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของการกระจายตัวของอุณหภูมิไร้มิติภายในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้า ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (a) Present work และ (b) Beck et al. [24]

รูปที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิไร้มิติ $\left(T^{**} = \frac{T\left(x^{**}, y^{**}\right)}{T_0} \right)$ ที่เกิดขึ้นบนเส้นแนวนอนและแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีที่ 5 ระหว่างคำตอบของ Beck et al. [24] กับคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work)



(a)



(b)

รูปที่ 0.3 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิไร้มิติที่เกิดขึ้นบนเส้นแนวนอนและแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีที่ 5 (a) ค่าอุณหภูมิไร้มิติที่เกิดขึ้นบนเส้นแนวนอน (b) ค่าอุณหภูมิไร้มิติที่เกิดขึ้นบนเส้นแนวดิ่ง

5.1.2 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ใช้วิธีการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง (Benchmark numerical solution) ของ Botella and Peyret [27] ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ และคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution) ของ Bruneau and Saad [28] ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$

การหาคำตอบสำหรับปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบนด้วยแผนแบบ LIP นั้น รายละเอียดของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับหาคำตอบในปัญหานี้ได้แสดงไว้ในบทที่ 4 โดยค่า $ERROR = 10^{-4}$ และค่าช่วงเวลาย่อยไร้มิติ $\Delta t^{**} = \dfrac{\Delta t|U|}{b} = 0.001$ และใช้สมการ (2.2) ซึ่งเป็นวิธีการ Richardson extrapolation [21] ในการปรับแก้คำตอบให้เป็นอิสระจากจำนวนเม็สช์ (Mesh refinement) ซึ่งคำตอบที่ได้จากการปรับแก้ก็จะถูกนำไปใช้ในการเปรียบเทียบคำตอบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP สำหรับคำตอบที่ถูกปรับแก้ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ ได้แก่ ค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวดิ่ง $\left(u^{**} = \dfrac{u}{|U|}\right)$ และแนวราบ $\left(v^{**} = \dfrac{v}{|U|}\right)$ ค่าความดันไร้มิติ $\left(p^{**} = \dfrac{p}{\rho U^2}\right)$ และค่าวอร์ทิซิที่ (Vorticity) $\left(\omega = \dfrac{dv^{**}}{dx^{**}} - \dfrac{du^{**}}{dy^{**}}\right)$ ที่อยู่บนเส้นแนวนอน $\left(x^{**} = \dfrac{x}{b}\right)$ และแนวดิ่ง $\left(y^{**} = \dfrac{y}{b}\right)$ ที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่างดังแสดงในตารางที่ 5.5 ถึง 5.10 โดยที่จำนวนเม็สช์ละเอียด (Fine mesh) และเม็สช์หยาบ (Coarse mesh) มีค่าเป็น 120×120 และ 60×60 ตามลำดับ ขณะที่คำตอบที่ถูกปรับแก้ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$ ได้แก่ ค่าสูงสุดของสตรีมฟังก์ชั่น (Stream-function $(\psi_{\max})$) ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนหลัก (Primary vortex) ดังแสดงในตารางที่ 5.11 และ ค่าต่ำสุดของสตรีมฟังก์ชั่น $(\psi_{\min})$ ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนรองที่อยู่ด้านซ้ายล่าง (Lower left secondary vortex) ดังแสดงในตารางที่ 5.12 โดยมีจำนวนเม็สช์ละเอียดและเม็สช์หยาบมีค่าเป็น 120×120 และ 60×60 ตามลำดับ สำหรับค่าสตรีมฟังก์ชั่นสามารถคำนวณได้จากสมการ $(\nabla \cdot \nabla)\psi = -\omega$

ตารางที่ 5.5 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

x^{**}	v^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
0.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0312	-0.2222248	-0.2183621	-0.2235124
0.0391	-0.2870275	-0.2820009	-0.2887030
0.0469	-0.3481284	-0.3420307	-0.3501610
0.0547	-0.4027478	-0.3960935	-0.4049659
0.0937	-0.5186229	-0.5147733	-0.5199061
0.1406	-0.4212574	-0.4173759	-0.4225512
0.1953	-0.3147320	-0.3110215	-0.3159688
0.5000	0.0264451	0.0306936	0.0250289
0.7656	0.3214952	0.3233172	0.3208879
0.7734	0.3296611	0.3307770	0.3292891
0.8437	0.3685142	0.3582677	0.3719297
0.9062	0.3235506	0.3055327	0.3295566
0.9219	0.3009611	0.2826392	0.3070684
0.9297	0.2875031	0.2694755	0.2935123
0.9375	0.2724083	0.2546618	0.2783238
1.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ตารางที่ 5.6 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความดันไร้มิติที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความดันอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

x^{**}	p^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
0.0000	0.079687	0.075546	0.081067
0.0312	0.074807	0.076395	0.074278
0.0391	0.076893	0.075711	0.077287
0.0469	0.077204	0.075625	0.077730
0.0547	0.076183	0.074565	0.076722
0.0937	0.064429	0.063842	0.064625
0.1406	0.048521	0.047330	0.048918
0.1953	0.034656	0.033260	0.035121
0.5000	0.000000	0.000000	0.000000
0.7656	0.046401	0.043787	0.047272
0.7734	0.048808	0.046293	0.049646
0.8437	0.069951	0.067782	0.070674
0.9062	0.082868	0.082007	0.083155
0.9219	0.084549	0.083967	0.084743
0.9297	0.085403	0.085094	0.085506
0.9375	0.086273	0.085484	0.086536
1.0000	0.088764	0.088135	0.088974

ตารางที่ 5.7 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าวอร์ทิซิทีที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าวอร์ทิซิทีที่อยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

x^{**}	ω		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
0.0000	-5.25753	-5.20065	-5.27649
0.0312	-8.31054	-8.15209	-8.36336
0.0391	-8.15539	-8.01075	-8.20360
0.0469	-7.52426	-7.42708	-7.55665
0.0547	-6.47012	-6.43880	-6.48056
0.0937	0.86518	0.76524	0.89849
0.1406	3.39229	3.44586	3.37443
0.1953	2.21335	2.16698	2.22881
0.5000	2.04783	2.12703	2.02143
0.7656	2.00907	1.91309	2.04106
0.7734	1.94252	1.83201	1.97936
0.8437	0.67269	0.46604	0.74157
0.9062	-0.81914	-0.88690	-0.79655
0.9219	-1.21860	-1.23290	-1.21383
0.9297	-1.47611	-1.45965	-1.48160
0.9375	-1.79546	-1.74772	-1.81137
1.0000	-7.40630	-6.88593	-7.57976

ตารางที่ 5.8 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวนอนที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	u^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
1.0000	-1.0000000	-1.0000000	-1.0000000
0.9766	-0.6594463	-0.6541219	-0.6612211
0.9688	-0.5751134	-0.5680367	-0.5774723
0.9609	-0.5107311	-0.5019718	-0.5136509
0.9531	-0.4655694	-0.4556580	-0.4688732
0.8516	-0.3301472	-0.3265102	-0.3313595
0.7344	-0.1854616	-0.1876604	-0.1847287
0.6172	-0.0558307	-0.0564395	-0.0556278
0.5000	0.0621284	0.0665416	0.0606573
0.4531	0.1075885	0.1132873	0.1056889
0.2813	0.2769385	0.2802207	0.2758444
0.1719	0.3808553	0.3748220	0.3828664
0.1016	0.2916345	0.2747606	0.2972591
0.0703	0.2165971	0.1999512	0.2221457
0.0625	0.1967495	0.1806929	0.2021017
0.0547	0.1763524	0.1611898	0.1814066
0.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ตารางที่ 5.9 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความดันไร้มิติที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความดันอยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	p^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
1.0000	0.053649	0.058255	0.052114
0.9766	0.049668	0.052173	0.048833
0.9688	0.050645	0.048929	0.051217
0.9609	0.048306	0.051112	0.047371
0.9531	0.049110	0.051491	0.048316
0.8516	0.034295	0.033944	0.034412
0.7344	0.011766	0.012253	0.011604
0.6172	-0.000917	-0.000924	-0.000915
0.5000	0.000000	0.000000	0.000000
0.4531	0.004262	0.004757	0.004097
0.2813	0.039518	0.041281	0.038930
0.1719	0.079957	0.081532	0.079432
0.1016	0.101034	0.101491	0.100882
0.0703	0.104955	0.104965	0.104952
0.0625	0.105854	0.105297	0.106040
0.0547	0.106182	0.105595	0.106378
0.0000	0.106664	0.106094	0.106854

ตารางที่ 5.10 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าวอร์ทิซิตี้ที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าวอร์ทิซิตี้ที่อยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	ω		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
1.0000	15.08452	15.28528	15.01760
0.9766	12.16047	12.41083	12.07702
0.9688	9.56696	9.78799	9.49328
0.9609	7.03228	7.20118	6.97598
0.9531	4.93954	5.04296	4.90507
0.8516	1.71443	1.63199	1.74191
0.7344	2.06007	2.07052	2.05659
0.6172	2.04830	2.12917	2.02134
0.5000	2.04783	2.12703	2.02143
0.4531	2.03443	2.08710	2.01687
0.2813	2.25689	2.24866	2.25963
0.1719	0.94931	0.73778	1.01982
0.1016	-1.58450	-1.67758	-1.55347
0.0703	-2.12630	-2.09018	-2.13834
0.0625	-2.24203	-2.17312	-2.26500
0.0547	-2.37502	-2.26936	-2.41024
0.0000	-4.05606	-3.62510	-4.19971

ตารางที่ 5.11 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าสูงสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนหลักที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$

Solution	Fine mesh	Coarse mesh	Mesh refinement
$\psi_{\max}$	0.11929	0.11561	0.12052
ω	1.73975	1.69509	1.75463
x^{**}	0.48427	0.48739	0.48324
y^{**}	0.54643	0.53724	0.54949

ตารางที่ 5.12 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าต่ำสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนรองที่อยู่ด้านซ้ายล่างที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$

Solution	Fine mesh	Coarse mesh	Mesh refinement
$\psi_{\min}$	-0.0032971	-0.0029831	-0.0034018
ω	-2.69576	-2.48237	-2.76689
x^{**}	0.19855	0.18511	0.20304
y^{**}	0.07097	0.07876	0.06837

ตารางที่ 5.13 ถึง 5.18 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวดิ่งและแนวนอน ค่าความดันไร้มิติ และค่าวอร์ทิซิที่ที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความเร็ว ค่าความดัน และค่าวอร์ทิซิที่อยู่บนเส้นแนวนอนและแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ โดยค่าความแตกต่างระหว่างคำตอบที่คำนวณจากแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องนั้นสามารถคำนวณได้จาก $\mathrm{Difference}(\%) = \left| \dfrac{\left(\mathrm{Solution}_{[25]} - \mathrm{Solution}_{\text{Present work}}\right) \times 100}{\mathrm{Solution}_{[25]}} \right|$ ซึ่งจากการ

เปรียบเทียบพบว่าค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดของค่าความเร็วไร้มิติ ค่าความดันไร้มิติ และค่าวอร์ทิซิซิที่มีค่าเป็น 2.4378937, 10.6005643 และ 4.9491340 ตามลำดับ ทั้งนี้ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดมีค่าค่อนข้างสูงเนื่องมาจากค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง Botella and Peyret [27] มีค่าสูงถึง $\boldsymbol{ERROR} = 10^{-10}$

ตารางที่ 5.13 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

x^{**}	v^{**}		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
0.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0312	-0.2235124	-0.22792250	1.9349267
0.0391	-0.2887030	-0.29368690	1.6970000
0.0469	-0.3501610	-0.35532130	1.4523006
0.0547	-0.4049659	-0.41037540	1.3181833
0.0937	-0.5199061	-0.52643920	1.2409980
0.1406	-0.4225512	-0.42645450	0.9152833
0.1953	-0.3159688	-0.32021370	1.3256356
0.5000	0.0250289	0.0257995	2.9867504
0.7656	0.3208879	0.3253592	1.3742760
0.7734	0.3292891	0.3339924	1.4081957
0.8437	0.3719297	0.3769189	1.3236800
0.9062	0.3295566	0.3330442	1.0471983
0.9219	0.3070684	0.3099097	0.9168154
0.9297	0.2935123	0.2962703	0.9309067
0.9375	0.2783238	0.2807056	0.8485046
1.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ตารางที่ 5.14 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าความดันไร้มิติที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความดันอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

x^{**}	p^{**}		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
0.0000	0.079687	0.077455	2.8816732
0.0312	0.074807	0.078837	5.1118130
0.0391	0.076893	0.078685	2.2774353
0.0469	0.077204	0.077148	0.0725878
0.0547	0.076183	0.077154	1.2585219
0.0937	0.064429	0.065816	2.1073903
0.1406	0.048521	0.049029	1.0361215
0.1953	0.034656	0.034552	0.3009956
0.5000	0.000000	0.000000	0.0000000
0.7656	0.046401	0.044848	3.4628077
0.7734	0.048808	0.047260	3.2754972
0.8437	0.069951	0.069511	0.6329933
0.9062	0.082868	0.084386	1.7988766
0.9219	0.084549	0.086716	2.4989621
0.9297	0.085403	0.087653	2.5669401
0.9375	0.086273	0.088445	2.4557635
1.0000	0.088764	0.090477	1.8932988

ตารางที่ 5.15 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าวอร์ทิซิทีที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าวอร์ทิซิทีอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1{,}000$

x^{**}	ω		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
0.0000	-5.27649	-5.462170	3.3993816
0.0312	-8.36336	-8.443500	0.9491719
0.0391	-8.20360	-8.246160	0.5160786
0.0469	-7.55665	-7.585240	0.3768723
0.0547	-6.48056	-6.508670	0.4318855
0.0937	0.89849	0.92291	2.6456173
0.1406	3.37443	3.43016	1.6246084
0.1953	2.22881	2.21171	0.7730067
0.5000	2.02143	2.06722	2.2150521
0.7656	2.04106	2.06122	0.9778998
0.7734	1.97936	2.00174	1.1181938
0.8437	0.74157	0.74207	0.0669299
0.9062	-0.79655	-0.823980	3.3285598
0.9219	-1.21383	-1.239910	2.1031096
0.9297	-1.48160	-1.503060	1.4279758
0.9375	-1.81137	-1.833080	1.1841636
1.0000	-7.57976	-7.663690	1.0952078

ตารางที่ 5.16 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติในทิศแนวนอนที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	u^{**}		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
1.0000	-1.0000000	-1.0000000	0.0000000
0.9766	-0.6612211	-0.6644227	0.4818619
0.9688	-0.5774723	-0.5808359	0.5790964
0.9609	-0.5136509	-0.5169277	0.6339055
0.9531	-0.4688732	-0.4723329	0.7324707
0.8516	-0.3313595	-0.3372212	1.7382260
0.7344	-0.1847287	-0.1886747	2.0914480
0.6172	-0.0556278	-0.0570178	2.4378937
0.5000	0.0606573	0.0620561	2.2540357
0.4531	0.1056889	0.1081999	2.3207045
0.2813	0.2758444	0.2803696	1.6140005
0.1719	0.3828664	0.3885691	1.4676154
0.1016	0.2972591	0.3004561	1.0640379
0.0703	0.2221457	0.2228955	0.3363759
0.0625	0.2021017	0.2023300	0.1128355
0.0547	0.1814066	0.1812881	0.0653656
0.0000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ตารางที่ 5.17 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าความดันไร้มิติที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าความดันอยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	p^{**}		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
1.0000	0.052114	0.052987	1.6482030
0.9766	0.048833	0.052009	6.1066354
0.9688	0.051217	0.051514	0.5765423
0.9609	0.047371	0.050949	7.0233632
0.9531	0.048316	0.050329	3.9990198
0.8516	0.034412	0.034910	1.4265254
0.7344	0.011604	0.012122	4.2759721
0.6172	-0.000915	-0.0008270	10.6005643
0.5000	0.000000	0.000000	0.0000000
0.4531	0.004097	0.004434	7.6003608
0.2813	0.038930	0.040377	3.5828979
0.1719	0.079432	0.081925	3.0430272
0.1016	0.100882	0.104187	3.1725007
0.0703	0.104952	0.108566	3.3291577
0.0625	0.106040	0.109200	2.8940781
0.0547	0.106378	0.109689	3.0188381
0.0000	0.106854	0.110591	3.3791176

ตารางที่ 5.18 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าวอร์ทิซิที่ที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน โดยค่าวอร์ทิซิที่อยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$

y^{**}	ω		Difference (%)
	Present work	Botella and Peyret [27]	
1.0000	15.01760	14.753400	1.7907737
0.9766	12.07702	12.067000	0.0830088
0.9688	9.49328	9.49496	0.0176585
0.9609	6.97598	6.95968	0.2342062
0.9531	4.90507	4.85754	0.9784102
0.8516	1.74191	1.76200	1.1401816
0.7344	2.05659	2.09121	1.6556603
0.6172	2.02134	2.06539	2.1326077
0.5000	2.02143	2.06722	2.2150521
0.4531	2.01687	2.06215	2.1956049
0.2813	2.25963	2.26772	0.3565990
0.1719	1.01982	1.05467	3.3043511
0.1016	-1.55347	-1.634360	4.9491340
0.0703	-2.13834	-2.201750	2.8799818
0.0625	-2.26500	-2.317860	2.2805519
0.0547	-2.41024	-2.449600	1.6067929
0.0000	-4.19971	-4.166480	0.7976357

ตารางที่ 5.19 และ 5.20 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของค่าสูงสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าต่ำสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนหลักและส่วนรองที่อยู่ด้านซ้ายล่างตามลำดับ ที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$ โดยค่าความแตกต่างระหว่างคำตอบที่คำนวณจากแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องนั้น สามารถคำนวณได้จาก $\text{Difference}(\%) = \left| \dfrac{\left(\text{Solution}_{[28]} - \text{Solution}_{\text{Present work}}\right) \times 100}{\text{Solution}_{[28]}} \right|$ ซึ่งค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดมีค่าเป็น 10.82821652 ซึ่งเกิดขึ้นที่คำตอบของค่าต่ำสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ทั้งนี้ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดมีค่าค่อนข้างสูงเนื่องมาจากค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของ Bruneau and Saad [28] มีค่าสูงถึง $ERROR = 10^{-12}$

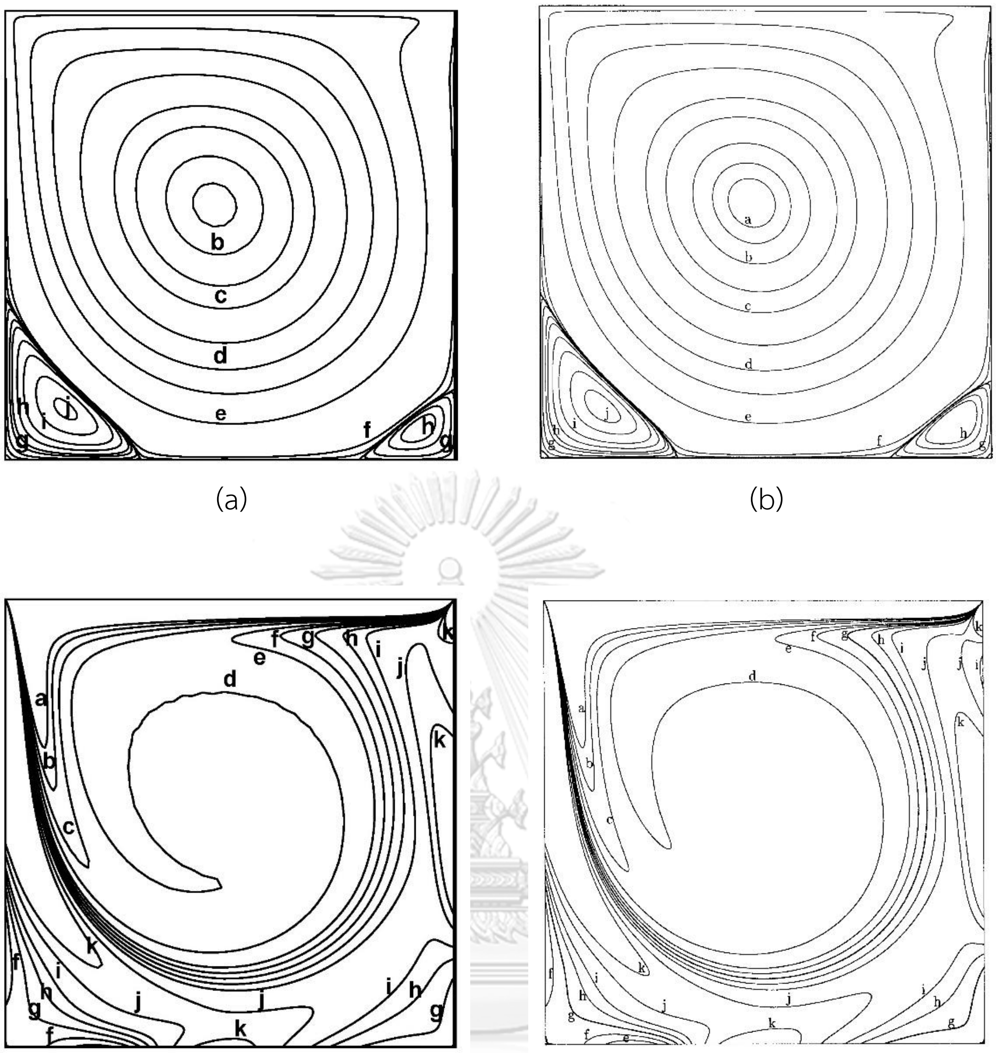
ตารางที่ 5.19 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าสูงสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนหลักที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$

Solution	Present work	Bruneau and Saad [28]	Difference (%)
$\psi_{\max}$	0.12052	0.12193	1.156503016
ω	1.75463	1.9322	9.189975927
x^{**}	0.48324	0.48535	0.435194937
y^{**}	0.54949	0.53516	2.677415299

ตารางที่ 5.20 การเปรียบเทียบคำตอบของค่าต่ำสุดของสตรีมฟังก์ชั่น ค่าวอร์ทิซิที่ และค่าแสดงตำแหน่งในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดขึ้นในการไหลวนส่วนรองที่อยู่ด้านซ้ายล่างที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$

Solution	Present work	Bruneau and Saad [28]	Difference (%)
$\psi_{\min}$	-0.0034018	-0.0030694	10.82821652
ω	-2.76689	-2.7245	1.555961196
x^{**}	0.20304	0.19434	4.47422977
y^{**}	0.06837	0.07324	6.653007161

รูปที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น และค่าวอร์ทิซิที่ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ ระหว่างคำตอบที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work) กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของ Botella and Peyret [27] ซึ่งค่า (Value) ของเส้นคอนทัวร์ สำหรับแต่ละสลาก (Label) ได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 5.21 โดยรูปแบบของเส้นคอนทัวร์มีความคล้ายคลึงกันอย่างมาก แต่มีข้อแตกต่างกันบ้าง โดยเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Present work ไม่ปรากฏสลาก (Label) a และเส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่ของ Present work กับของ Botella and Peyret [27] ที่สลาก d มีรูปร่างที่แตกต่างกันเล็กน้อย ทั้งเนื่องมาจากการรันโปรแกรมที่มีค่าความคลาดเคลื่อน $(ERROR)$ ที่แตกต่างกัน

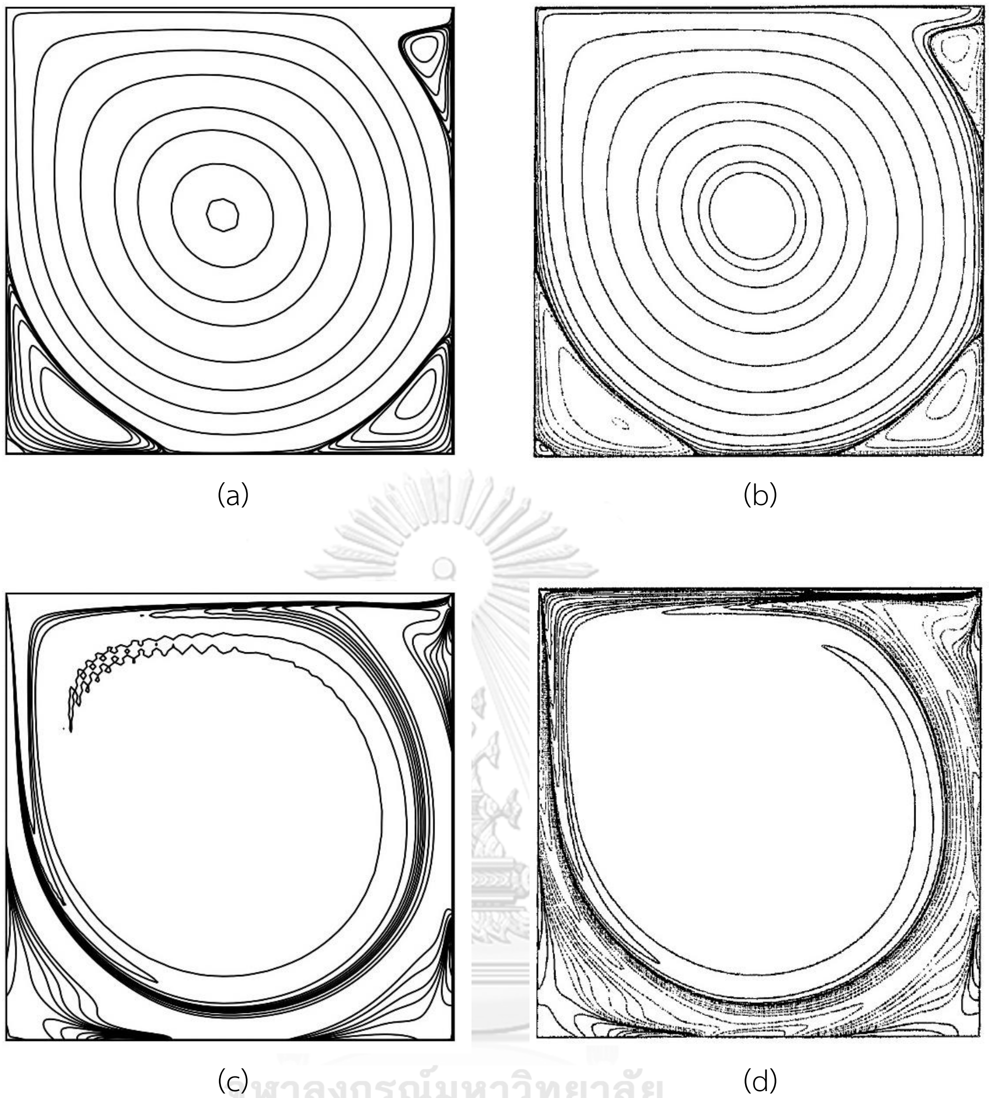


(a) (b) (c) (d)

รูปที่ 0.4 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น และค่าวอร์ทิซิที่ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ (a) เส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Present work (b) เส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Botella and Peyret [27] (c) เส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่ของ Present work และ (d) เส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่ของ Botella and Peyret [27]

ตารางที่ 5.21 ค่าสตรีมฟังก์ชั่น และค่าวอร์ทิซิที่ ของเส้นคอนทัวร์ที่แสดงในรูปที่ 5.2 และ 5.3

Label	Values	
	ψ	ω
a	0.1175	5.0
	0.115	
b	0.11	4.0
	0.1	
c	$9x10^{-2}$	3.0
	$7x10^{-2}$	
d	$5x10^{-2}$	2.0
	$3x10^{-2}$	
e	$1x10^{-2}$	1.0
f	$1x10^{-4}$	0.5
	$1x10^{-5}$	
	$1x10^{-10}$	
	0.0	
	$-1x10^{-6}$	
g	$-1x10^{-5}$	0.0
	$-5x10^{-5}$	
h	$-1x10^{-4}$	-0.5
	$-2.5x10^{-4}$	
i	$-5x10^{-4}$	-1.0
	$-1x10^{-3}$	
j	$-1.5x10^{-3}$	-2.0
k		-3.0



รูปที่ 0.5 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น และค่าวอร์ทิซิที่ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$ (a) เส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Present work (b) เส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Bruneau ans Saad [28] (c) เส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่ของ Present work และ (d) เส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่ของ Bruneau and Saad [28]

รูปที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น และค่าวอร์ทิซิที่ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน ที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 5,000$ ระหว่างคำตอบที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work) กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของ Bruneau and Saad [28] ซึ่งค่าของเส้นคอนทัวร์ได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 5.21 โดยลักษณะทั่วไปของเส้นคอนทัวร์มีความคล้ายคลึงกันอย่างมาก แต่มีข้อแตกต่างกันบ้าง โดยเส้นคอนทัวร์ของค่าวอร์ทิซิที่บริเวณใจกลางของช่องว่างของ Present work มีลักษณะเป็นเส้นหยักไปมาเนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อน $(ERROR)$ ในการรันของโปรแกรมมีค่าไม่น้อยพอ

5.1.3 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ใช้วิธีการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง (Benchmark numerical solution) ของ Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ ถึง $Ra = 10^6$ และคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution) ของ Saitoh and Hirose [42] Markatos and Pericleous [43] Barakos et al. [44] Dixit and Babu [45] Baïri [46] Le Quéré [51] และ Zhao and Tian [52] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ ถึง $Ra = 10^8$

การหาคำตอบด้วยแผนแบบ LIP สำหรับปัญหานี้ โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นได้กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็น $ERROR = 10^{-4}$ และค่าช่วงเวลาย่อยไร้มิติเป็น $\Delta t^{**} = \dfrac{t\sqrt{g\,\beta\,b\left(T_{hot} - T_{cold}\right)}}{b} = 0.001$ และปรับแก้คำตอบให้เป็นอิสระจากจำนวนเม็สซ์ (Mesh refinement) โดยใช้สมการ (2.2) แล้วจึงนำคำตอบที่ได้รับการปรับแก้แล้วไปใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP โดยคำตอบที่ถูกปรับแก้สำหรับปัญหานี้ ได้แก่ เลขนัสเซลต์เฉลี่ย (Average Nusselt number) $\left(\overline{Nu} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\int_0^b \left(q''|_{x=0} + q''|_{x=b} \right) dy}{k\left(T_{hot} - T_{cold}\right)} \right)$ ค่าความเร็วไร้มิติสูงสุด $\left(u^{**}_{max} = \dfrac{u_{max}\left(\rho c_p b\right)}{k} \right)$ ในทิศแนวนอน ค่าความเร็วไร้มิติสูงสุด $\left(v^{**}_{max} = \dfrac{v_{max}\left(\rho c_p b\right)}{k} \right)$ ในทิศแนวดิ่ง และค่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วสูงสุด $\left(x^{**}, 0.5\right)$ และ $\left(0.5, y^{**}\right)$ ตามลำดับ ซึ่งค่าระยะไร้

มิติมีค่าเป็น $x^{**} = \dfrac{x}{b}$ และ $y^{**} = \dfrac{y}{b}$ โดยค่าคำตอบที่แสดงในตารางที่ 5.22 ถึง 5.26 ถูกคำนวณที่จำนวนเม็สซ์ดังนี้

- ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ และ $Ra = 10^4$ จำนวนเม็สซ์ละเอียด (Fine mesh) เป็น 40×40 และจำนวนเม็สซ์หยาบ (Coarse mesh) เป็น 20×20
- ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^5$ และ $Ra = 10^6$ จำนวนเม็สซ์ละเอียด (Fine mesh) เป็น 60×60 และจำนวนเม็สซ์หยาบ (Coarse mesh) เป็น 30×30
- ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^7$ และ $Ra = 10^8$ จำนวนเม็สซ์ละเอียด (Fine mesh) เป็น 120×120 และจำนวนเม็สซ์หยาบ (Coarse mesh) เป็น 60×60

ตารางที่ 5.22 การปรับแก้ค่าคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ยที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

Ra	$\overline{Nu}$		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
10^3	1.1114	1.1091	1.1122
10^4	2.2348	2.2383	2.2336
10^5	4.5192	4.5304	4.5155
10^6	8.8281	8.9350	8.7925
10^7	16.5224	16.5739	16.5052
10^8	30.2369	30.6719	30.0919

ตารางที่ 5.23 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติสูงสุดในทิศแนวนอนที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวดิ่งที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง

Ra	u_{max}^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
10^3	3.6572	3.6065	3.6741
10^4	16.1812	15.9940	16.2436
10^5	34.8408	34.4893	34.9580
10^6	65.1916	63.9388	65.6092
10^7	148.1112	146.1776	148.7557
10^8	313.6128	311.5559	314.2984

ตารางที่ 5.24 การปรับแก้ค่าระยะไร้มิติในทิศแนวดิ่งที่แสดงตำแหน่งของค่าความเร็วสูงสุดในทิศแนวนอนที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

Ra	y^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
10^3	0.8067	0.8308	0.7987
10^4	0.8315	0.8308	0.8317
10^5	0.8503	0.8427	0.8528
10^6	0.8503	0.8427	0.8528
10^7	0.8843	0.8791	0.8860
10^8	0.9313	0.9290	0.9321

ตารางที่ 5.25 การปรับแก้ค่าคำตอบของค่าความเร็วไร้มิติสูงสุดในทิศแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยค่าความเร็วอยู่บนเส้นแนวนอนที่ผ่านจุดกึ่งกลางของช่องว่าง

Ra	v_{max}^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
10^3	3.6982	3.6743	3.7062
10^4	19.5772	19.3565	19.6508
10^5	68.3364	67.9268	68.4729
10^6	219.7230	215.3919	221.1667
10^7	697.8479	693.4655	699.3087
10^8	2211.7514	2182.1186	2221.6290

ตารางที่ 5.26 การปรับแก้ค่าระยะไร้มิติในทิศแนวนอนที่แสดงตำแหน่งของค่าความเร็วสูงสุดในทิศแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

Ra	x^{**}		
	(Fine mesh)	(Coarse mesh)	(Mesh refinement)
10^3	0.1684	0.1691	0.1682
10^4	0.1223	0.1179	0.1238
10^5	0.0709	0.0663	0.0724
10^6	0.0394	0.0389	0.0396
10^7	0.0224	0.0208	0.0229
10^8	0.0111	0.0122	0.0107

ตารางที่ 5.27 และ 5.28 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ย ค่าความเร็วไร้มิติสูงสุดในทิศแนวนอนและแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องและคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ ถึง $Ra = 10^8$ โดยคำตอบที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work) มีค่าใกล้เคียงกับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้อง (Benchmark numerical solution) และคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution)

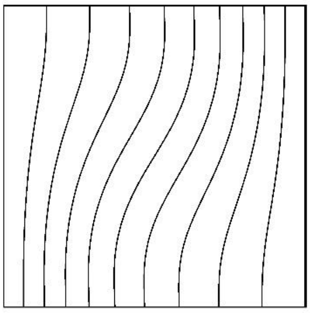
รูปที่ 5.6 และ 5.7 แสดงการเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติ และค่าสตรีมฟังก์ชั่นที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work) กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของ David [41] และคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วของ Le Quéré [51] ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ ถึง $Ra = 10^8$ โดยค่าของเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติในรูปที่ 5.4 มีค่าเป็น 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 ขณะที่ค่าของเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น (Values of stream-function) ในรูปที่ 5.5 ที่เลขเรย์ลีต่างๆ นั้น ถูกแสดงค่าอยู่ในตารางที่ 5.29 โดยเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติของ Present work กับเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติของ David [41] และ Le Quéré [51] มีรูปร่างเหมือนกันทุกประการ สำหรับเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ Present work กับเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่นของ David [41] และ Le Quéré [51] มีรูปร่างใกล้เคียงกันแต่มีความแตกต่างกันบ้างที่บริเวณใจกลางของช่องว่างที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3, 10^4, 10^6, 10^7$ ทั้งนี้เนื่องมาจากการใช้ค่าจำนวนกริดและค่าความคลาดเคลื่อนของโปรแกรมที่แตกต่างกันในการคำนวณ

ตารางที่ 5.27 การเปรียบเทียบคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ย ค่าความเร็วไร้มิติสูงสุดในทิศแนวนอนและแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องและคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ ถึง $Ra = 10^6$

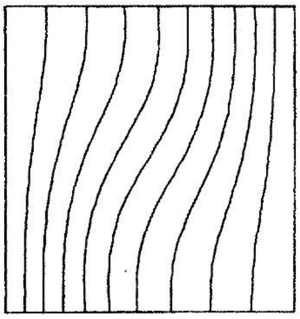
Ra	Author	$\overline{Nu}$	$u^{**}_{max}\left(0.5, y^{**}\right)$	$v^{**}_{max}\left(x^{**}, 0.5\right)$
10^3	Present work	1.1122	3.6741 (0.5, 0.7987)	3.7062 (0.1682, 0.5)
	Davis [41]	1.118	3.649 (0.5, 0.813)	3.697 (0.178, 0.5)
	Markatos and Pericleous [43]	1.108	3.544 (0.5, 0.832)	3.593 (0.168, 0.5)
	Barakos et al. [44]	1.114	-	-
	Dixit and Babu [45]	1.121	3.6529 (0.5, 0.8125)	3.682 (0.17183, 0.5)
	Baïri [46]	1.112	-	-
10^4	Present work	2.2336	16.2436 (0.5, 0.8317)	19.6508 (0.1238, 0.5)
	Davis [41]	2.243	16.178 (0.5, 0.823)	19.617 (0.119, 0.5)
	Saitoh and Hirose [42]	2.2415	16.1838 (0.5, 0.8232)	19.6165 (0.1191, 0.5)
	Markatos and Pericleous [43]	2.201	16.18 (0.5, 0.832)	19.44 (0.113, 0.5)
	Barakos et al. [44]	2.245	-	-
	Dixit and Babu [45]	2.286	16.163 (0.5, 0.828)	19.569 (0.125, 0.5)
	Baïri [46]	2.168	-	-
	Zhao and Tian [52]	2.2448	16.1799	19.6254
10^5	Present work	4.5155	34.9580 (0.5, 0.8528)	68.4729 (0.0724, 0.5)
	Davis [41]	4.519	34.73 (0.5, 0.855)	68.59 (0.066, 0.5)
	Markatos and Pericleous [43]	4.430	35.73 (0.5, 0.857)	69.08 (0.067, 0.5)
	Barakos et al. [44]	4.510	-	-
	Dixit and Babu [45]	4.546	35.521 (0.5, 0.8554)	68.655 (0.0664, 0.5)
	Baïri [46]	4.228	-	-
	Zhao and Tian [52]	4.5218	34.7223	68.5094
10^6	Present work	8.7925	65.6092 (0.5, 0.8525)	221.1667 (0.0396, 0.5)
	Davis [41]	8.800	64.63 (0.5, 0.850)	219.36 (0.0379, 0.5)
	Saitoh and Hirose [42]	8.7126	64.389 (0.5, 0.8512)	216.76 (0.03943, 0.5)
	Markatos and Pericleous [43]	8.754	68.81 (0.5, 0.872)	221.8 (0.0135, 0.5)
	Le Quéré [51]	8.825	-	-
	Barakos et al. [44]	8.806	-	-
	Dixit and Babu [45]	8.652	64.186 (0.5, 0.8496)	219.866 (0.0371, 0.5)
	Baïri [46]	8.243	-	-
	Zhao and Tian [52]	8.8267	64.7889	220.3715

ตารางที่ 5.28 การเปรียบเทียบคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ย ค่าความเร็วไร้มิติสูงสุดในทิศแนวนอนและแนวดิ่งที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^7$ และ $Ra = 10^8$

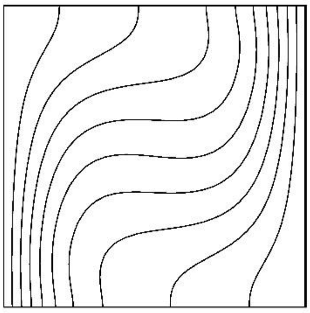
Ra	Author	$\overline{Nu}$	$u^{**}_{max}\left(0.5,\, y^{**}\right)$	$v^{**}_{max}\left(x^{**},\, 0.5\right)$
	Present work	16.5052	148.7557 (0.5, 0.8860)	699.3087 (0.0229, 0.5)
	Le Quéré [51]	16.523	-	-
10^7	Dixit and Babu [45]	16.790	164.236 (0.5, 0.851)	701.922 (0.020, 0.5)
	Baïri [46]	16.073	-	-
	Zhao and Tian [52]	16.5371	148.2929	698.8831
	Present work	30.0919	314.2984 (0.5, 0.9321)	2221.629 (0.0107, 0.5)
	Markatos and Pericleous [43]	32.045	514.3 (0.5, 0.941)	1812 (0.0135, 0.5)
	Le Quéré [51]	30.225	-	-
10^8	Barakos et al. [44]	30.100	-	-
	Dixit and Babu [45]	30.506	389.877 (0.5, 0.937)	2241.374 (0.0112, 0.5)
	Baïri [46]	31.339	-	-
	Zhao and Tian [52]	30.2787	316.8832	2224.25



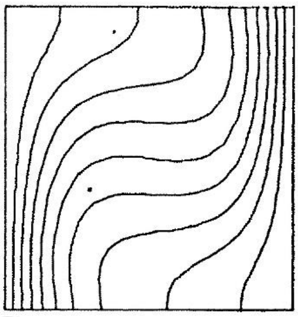
(a)



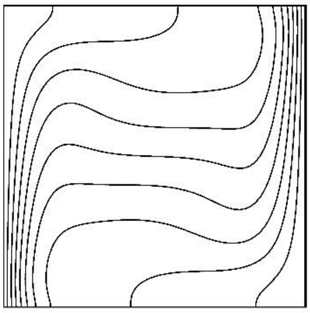
(b)



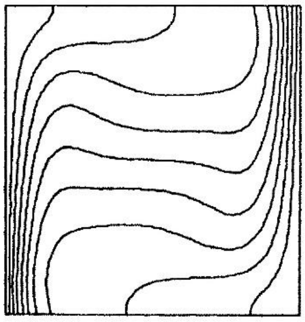
(c)



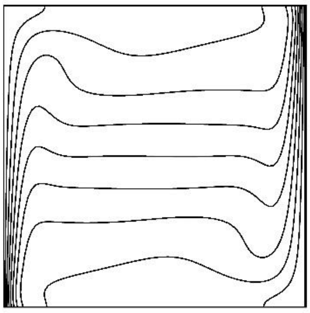
(d)



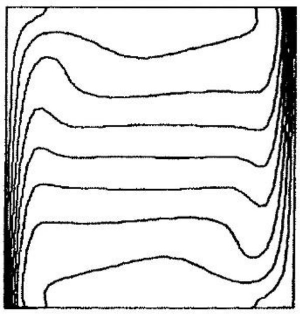
(e)



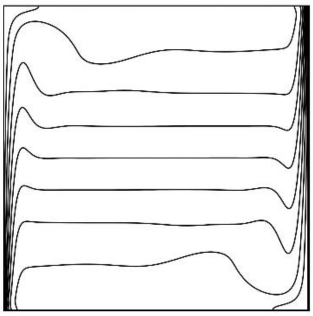
(f)



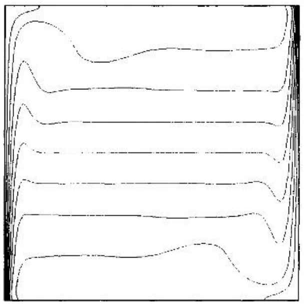
(g)



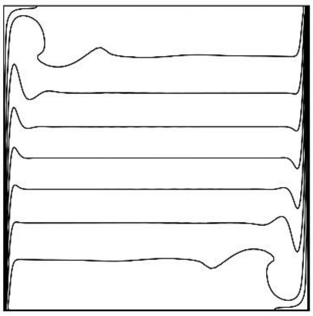
(h)



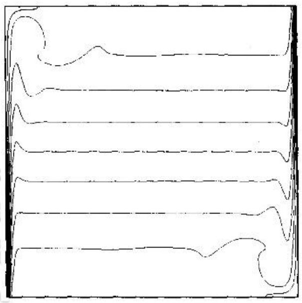
(i)



(j)

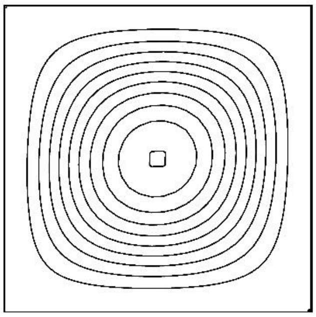


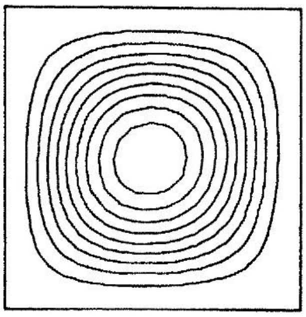
(k)

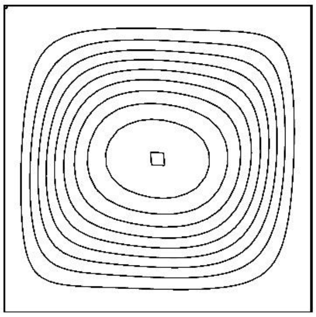


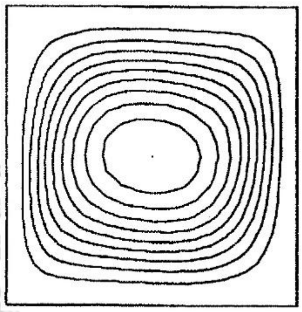
(l)

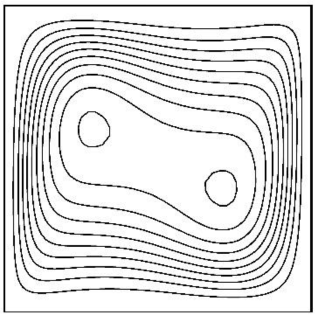
รูปที่ 0.6 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติ ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (a) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ (b) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ (c) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^4$ (d) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^4$ (e) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^5$ (f) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^6$ (g) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^3$ (h) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^6$ (i) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^7$ (j) Le Quéré [51] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^7$ (k) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^8$ และ (l) Le Quéré [51] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^8$

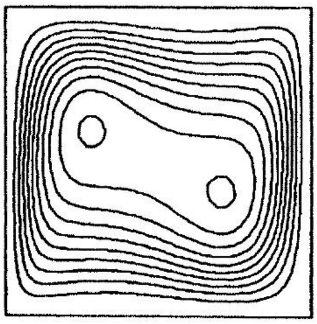

(a)

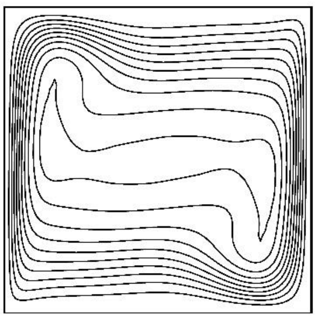

(b)

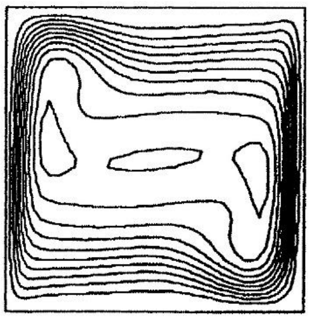

(c)

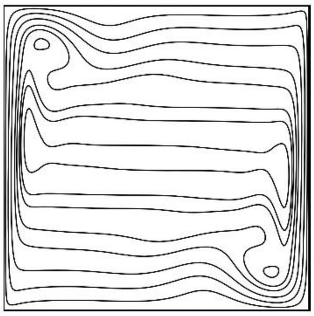

(d)


(e)

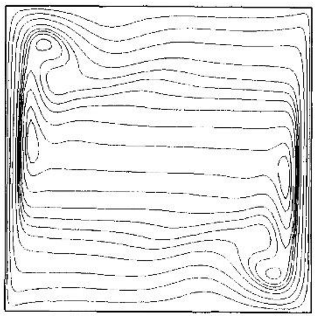

(f)


(g)

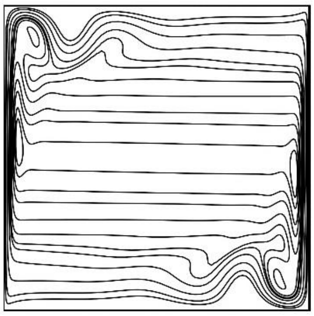

(h)



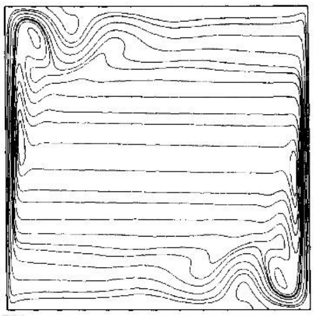
(i)



(j)



(k)



(l)

รูปที่ 0.7 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าสตรีมฟังก์ชั่น ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (a) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^3$ (b) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^3$ (c) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^4$ (d) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^4$ (e) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^5$ (f) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^6$ (g) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^3$ (h) Davis [41] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^6$ (i) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^7$ (j) Le Quéré [51] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^7$ (k) Present work ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^8$ และ (l) Le Quéré [51] ที่เลขเรย์ลี $Ra=10^8$

ตารางที่ 5.29 ค่าของค่าสตรีมฟังก์ชั่น ที่แสดงในรูปที่ 5.5

Ra	Values of stream-function
10^3	-1.174, -1.0566, -0.9392, -0.8218, -0.7044, -0.5870, -0.4696, -0.3522, -0.2348, -1174, 0
10^4	-5.071, -4.5639, -4.0568, -3.5497, -3.0426, -2.5355, -2.0284, -1.5213, -1.0142, -0.5071, 0
10^5	-9.507, -8.646, -7.6853, -6.7246, -5.7639, -4.8032, -3.8425, -2.8818, -1.9211, -0.9604, 0
10^6	-16.27, -15.07, -13.395, -11.72, -10.045, -8.37, -6.695, -5.02, -3.345, -1.67, 0
10^7	-31.3, -30.6, -29.3, -27.6, -26.3, -25, -23.3, -20, -13.3, -6.6, -1.6, 0
10^8	-53, 52, 50, 48, 44, 40, 37, 35, 30, 20, 10, 5, 0

5.1.4 การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

การตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ใช้วิธีการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการทดลอง (Experimental solution) ของ ElSherbiny et al. [50] และคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว (Published numerical solution) ของ zhu and Yang [48] และ Báez and Nicolás [49] ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1\times10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่าง (Aspect Ratio) เป็น $AR = 16$

การหาคำตอบด้วยแผนแบบ LIP สำหรับปัญหานี้ โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นได้กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็น $ERROR = 10^{-4}$ และค่าช่วงเวลาย่อยไร้มิติเป็น

$\Delta t^{**}=\dfrac{t\sqrt{g\,\beta\, b\left(T_{hot}-T_{cold}\right)}}{b}=0.001$ และใช้การทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบจากจำนวนจำนวนเม็สซ์ (Mesh independence test) แล้วจึงนำคำตอบที่ได้รับการปรับแก้แล้วไปใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแผนแบบ LIP โดยคำตอบที่ถูกปรับแก้สำหรับปัญหานี้ได้แก่ เลขนัสเซลต์เฉลี่ย (Average Nusselt number) $\left(\overline{Nu}=\dfrac{b}{2h}\dfrac{\int_0^h\left(q''|_{x=0}+q''|_{x=b}\right)dy}{k\left(T_{hot}-T_{cold}\right)}\right)$ โดยตารางที่ 5.30 เป็นการทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบเนื่องจากขนาดของจำนวนเม็สซ์ที่กรณีต่างๆ ซึ่งเปอร์เซ็นต์ของการเปลี่ยนแปลงของคำตอบ (Change (%))ที่เป็นค่าเลขนัสเซลต์เฉลี่ยคำนวณได้จาก $\mathrm{Change}(\%)=\left|\dfrac{\left(\overline{Nu}_{\text{Fine mesh}}-\overline{Nu}_{\text{Coarse mesh}}\right)\times 100}{\overline{Nu}_{\text{Fine mesh}}}\right|$

ตารางที่ 5.31 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ยที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP (Present work) กับคำตอบที่ได้จากการทดลองและคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra=1.1\times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR=16$ โดยที่ค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่าง $\left(\mathrm{Difference}(\%)=\left|\dfrac{\left(\mathrm{Solution}_{\text{Present work}}-\mathrm{Solution}_{\text{Other author}}\right)\times 100}{\mathrm{Solution}_{\text{Present work}}}\right|\right)$ ของเลขนัสเซลต์เฉลี่ยของ Present work มีค่าใกล้เคียงกับเลขนัสเซลต์เฉลี่ยของ zhu and Yang [48] และ Báez and Nicolás [49] ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากการคำนวณแบบเชิงตัวเลขเหมือนกัน แต่เลขนัสเซลต์เฉลี่ยของ Present work มีค่าค่อนข้างแตกต่างกับเลขนัสเซลต์เฉลี่ยของ ElSherbiny et al. [50] ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากการทดลอง

ตารางที่ 5.30 การทดสอบความเป็นอิสระของคำตอบเนื่องจากขนาดของจำนวนเม็สซ์ ของแผนแบบ LIP กับปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$

Mesh size	$\overline{Nu}$	Change (%)
25×100	1.5236	-
30×135	1.5232	0.0263
35×170	1.5231	0.0066
40×200	1.5231	0.0000

ตารางที่ 5.31 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบของเลขนัสเซลต์เฉลี่ยที่คำนวณด้วยแผนแบบ LIP กับคำตอบที่ได้จากการทดลองและคำตอบแบบเชิงตัวเลขที่ได้รับการตีพิมพ์แล้ว ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$

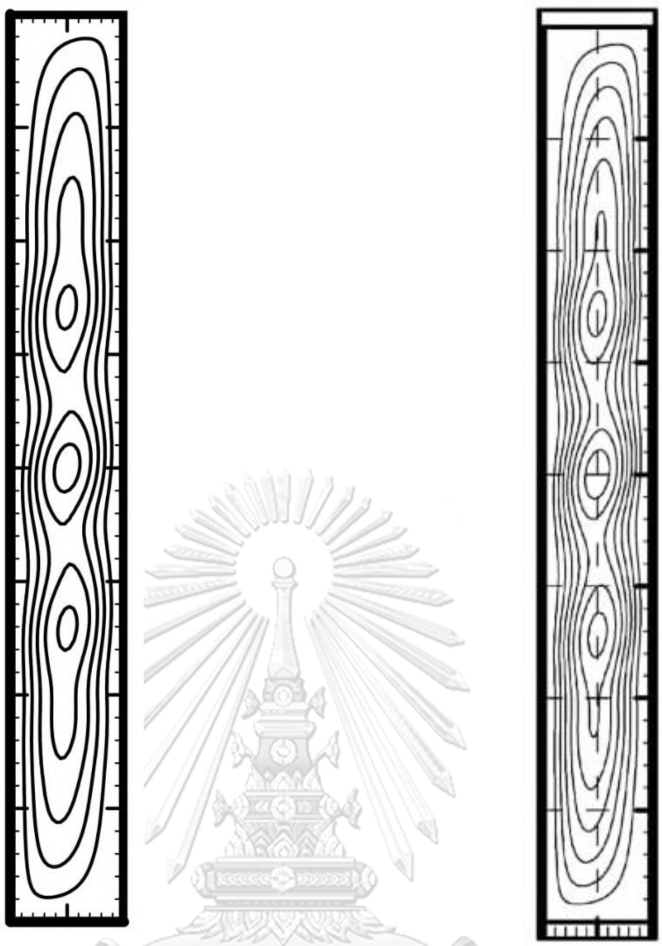
Author	$\overline{Nu}$	Difference (%)	Implementation
Present work	1.5231	-	Numerical
ElSherbiny et al. [50]	1.4307	6.0666	Experimental
Zhu and Yang [48]	1.525	0.1247	Numerical
Báez and Nicolás [49]	1.5351	0.7879	Numerical

รูปที่ 5.8 และ 5.9 แสดงการเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติ และค่าสตรีมฟังก์ชั่น ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ โดยค่าของเส้นคอนทัวร์ของอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 5.6 มีค่าเป็น 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 สำหรับค่าของเส้นคอนทัวร์ของสตรีมฟังก์ชั่นที่แสดงในรูปที่ 5.7 มีค่าเป็น -5, -10, -15, -20, -25, -30 และ -35 โดยเส้นคอนทัวร์ของอุณหภูมิของ Present work กับเส้นคอนทัวร์ของอุณหภูมิของ zhu and Yang [48] ไม่

มีความแตกต่างกัน ขณะที่เส้นคอนทัวร์ของสตรีมฟังก์ชั่นของ Present work กับเส้นคอนทัวร์ของสตรีมฟังก์ชั่นของ zhu and Yang [48] มีควาแตกต่างกันเล็กน้อยที่จำนวนของเส้นคอนทัวร์ที่ปรากฏในรูป

(a) (b)

รูปที่ 0.8 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติ ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ (a) Present work และ (b) zhu and Yang [48]



(a) (b)

รูปที่ 0.9 การเปรียบเทียบเส้นคอนทัวร์ของค่าอุณหภูมิไร้มิติ และค่าสตรีมฟังก์ชั่น ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก ที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ (a) Present work และ (b) zhu and Yang [48]

5.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ได้ถูกกระทำโดยการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (Computational time) ของปัญหาที่อยู่ในสภาวะไม่คงตัว (Transient condition) จนลู่เข้าสู่สภาวะคงตัว (Steady state condition) โดยปัญหาที่ใช้ในการทดสอบ ได้แก่

- ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต
- ปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน
- ปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ
- ปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

ซึ่งเวลาที่ใช้ในการคำนวณเวลาได้จากเวลาของหน่วยประมวลผล (CPU time) ของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ประมวลผล โดยการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ใช้คอมพิวเตอร์แบบตั้งโต๊ะ (Desktop computer) ในการรันโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมา ซึ่งมีรายละเอียดของหน่วยประมวลผล (CPU) ดังนี้ Intel ® Core ™ i5-4460 CPU @ 3.20 GHz โดยการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ซึ่งใช้การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาของการประมาณค่านอกช่วงในสี่แบบ (Category) ซึ่งการประมาณค่านอกช่วงใช้สำหรับการกำหนดค่าคาดเดาเริ่มต้น (Initial guess value) สำหรับการคำนวณในเวลาย่อยปัจุบันของปัญหาที่อยู่ในสภาวะไม่คงตัวที่ใช้การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำ (Iterative method) โดยรายละเอียดของของการประมาณค่านอกช่วงในสี่แบบนั้น ได้ถูกแสดงในตารางที่ 5.32

ตารางที่ 5.32 รายละเอียดของแบบต่างในการประมาณค่านอกช่วงที่ใช้ในการการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

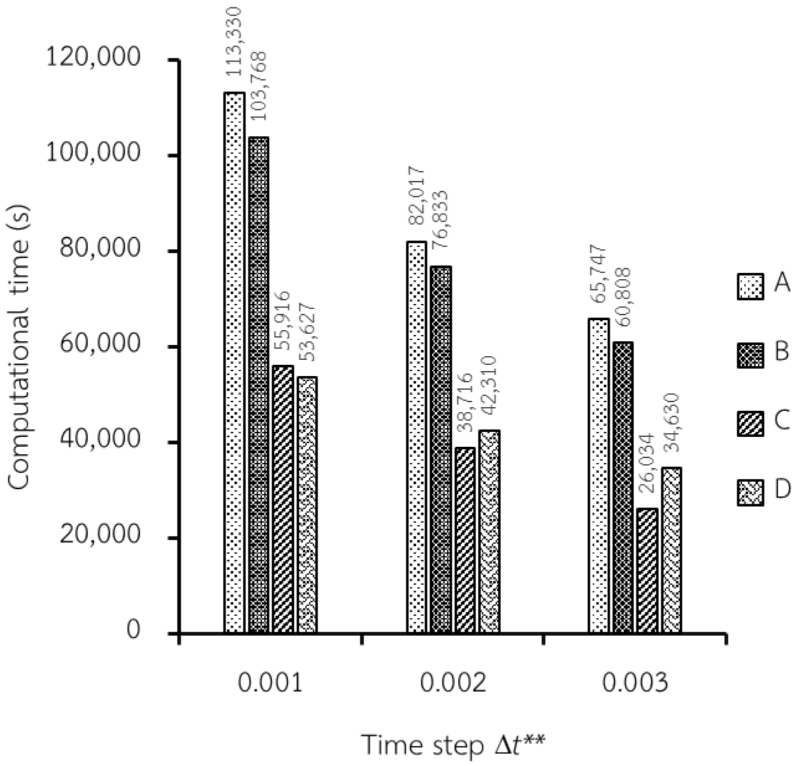
Category	Number of time steps ($ntmax$)	Extrapolation technique
A	2	Conventional method
B	4	Conventional method
C	4	LIP
D	4	WF-LIP

โดยการประมาณค่านอกช่วงแบบ **A** และ **B** ซึ่งเป็นการประมาณค่านองช่วงแบบ “Conventional method” หมายถึงการกำหนดค่าคาดเดาเริ่มต้นสำหรับการคำนวณในเวลาย่อยปัจจุบัน ให้มีค่าเท่ากับคำตอบของช่วงเวลาย่อย (Time step) ในช่วงก่อนหน้านี้ ขณะที่การประมาณค่านอกช่วงแบบ **C** ซึ่งเป็นการประมาณค่านองช่วงแบบ “LIP” หมายถึงการกำหนดค่าคาดเดาเริ่มต้นสำหรับการ

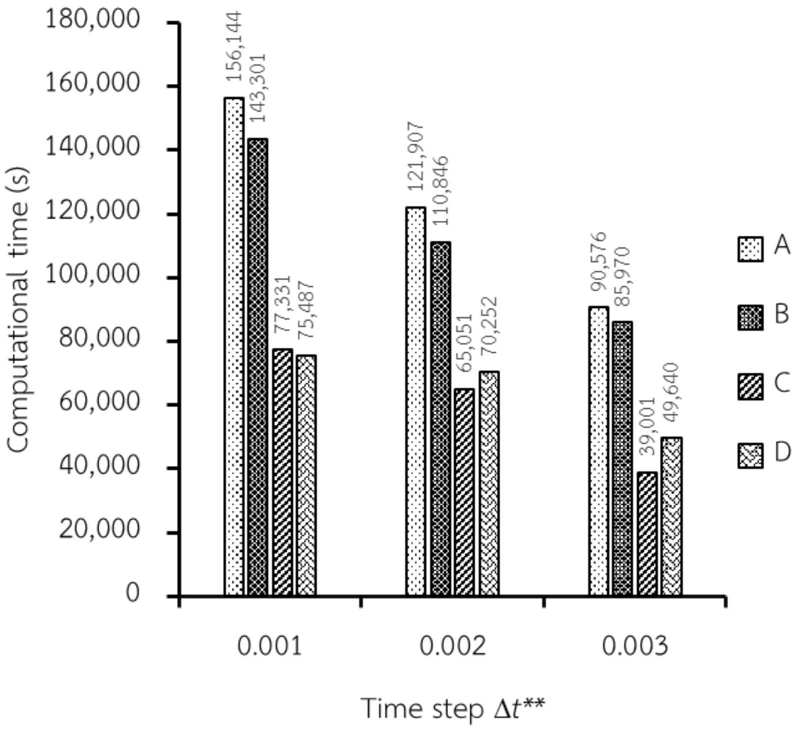
คำนวณในเวลาย่อยปัจจุบัน ได้จากการคำนวณด้วยวิธีที่ประยุกต์มาจากการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ (Lagrange Interpolating Polynomial (LIP))

5.2.1 การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ด้วยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต

การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (แบบ **D**) ด้วยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต กระทำที่ Case 5 ดังที่แสดงในหัวข้อการ 5.1.1 ซึ่งผลการทดสอบได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.10.และ 5.11 ที่จำนวนเม็สช์ 700×140 และ 800×160 ตามลำดับ โดยที่เวลาย่อย (Time step $\left(\Delta t^{**}\right)$) 0.001 การประมาณค่านอกช่วงแบบ **D** ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าประมาณค่านอกช่วงแบบอื่นๆ แต่ที่เวลาย่อย 0.002 และ 0.003 การประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าประมาณค่านอกช่วงแบบ **A** และ **B** แต่มากกว่าแบบ **C**



รูปที่ 0.10 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Case 5) ที่จำนวนเม็สช์ 700×140

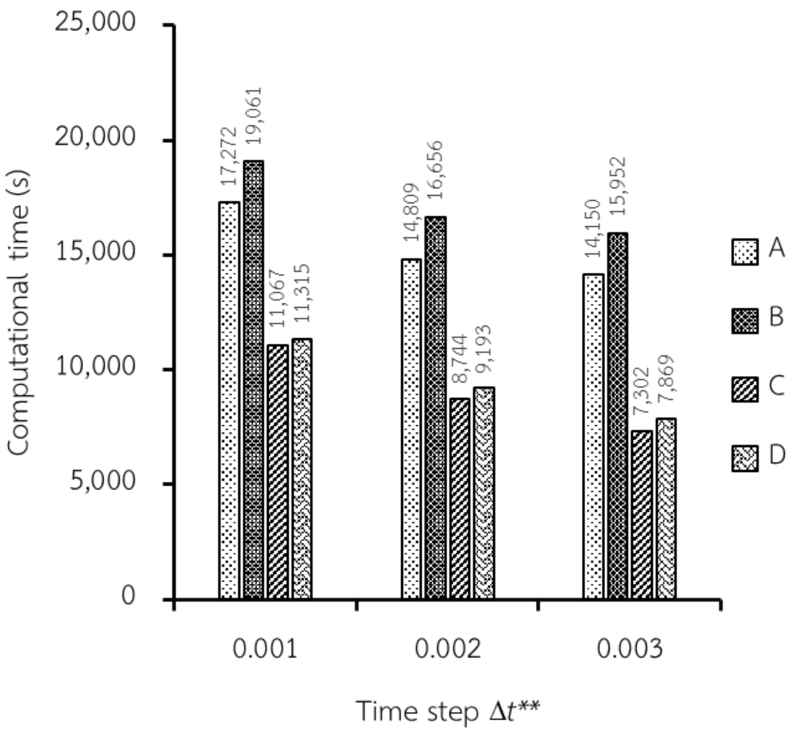


รูปที่ 0.11 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ระบุอุณหภูมิของขอบเขต (Case 5) ที่จำนวนเม็สช์ 800×160

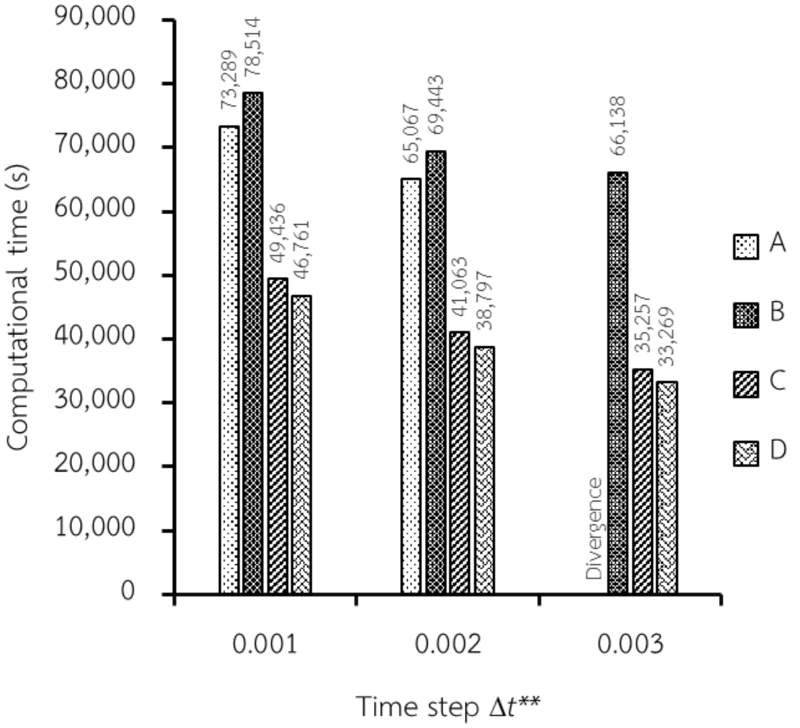
5.2.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ด้วยปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน

การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (แบบ **D**) ด้วยปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบน กระทำที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ ซึ่งผลการทดสอบได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.12.และ 5.13 ที่จำนวนเม็สช์ 60×60 และ 90×90 ตามลำดับ โดยที่จำนวนเม็สช์ 60×60 การประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าประมาณค่านอกช่วงแบบ **A** และ **B** แต่มากกว่าแบบ **C** แต่ที่จำนวนเม็สช์ 90×90 การประมาณค่านอกช่วงแบบ **D** ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบอื่นๆ ทั้งหมด ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP กับปัญหานี้ที่สามารถลดระยะเวลาในการคำนวณได้ตามวัตถุประสงค์และดีกว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบอื่นๆ ที่ใช้ในการทดสอบเปรียบเทียบ โดยการประมาณค่านอกช่วงแบบ **A** ที่จำนวนเม็สช์ 90×90 และที่เวลาย่อย (Time step $\left(\Delta t^{**}\right)$) เป็น 0.003 ผลของคำตอบของการรันโปรแกรมมีลักษณะลู่ออก

(Divergence) ไม่สามารถหาคำตอบได้ สำหรับการประมาณค่านอกช่วงแบบ **D** ที่จำนวนเม็สช์ 90×90 และที่เวลาย่อยเป็น 0.003 .ใช้เวลาในการคำนวณ (Computational time) น้อยกว่ากรณีที่ใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ **B** ถึง 49.69 เปอร์เซ็นต์ของเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยการใช้การประมาณค่านอกช่วงแบบ **B**



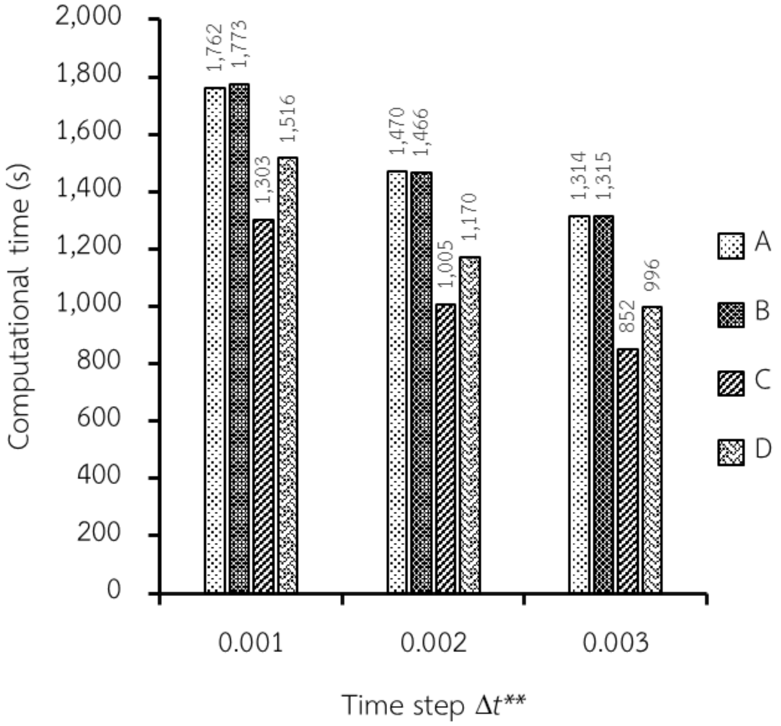
รูปที่ 0.12 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบนกระทำที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ ที่จำนวนเม็สช์ 60×60



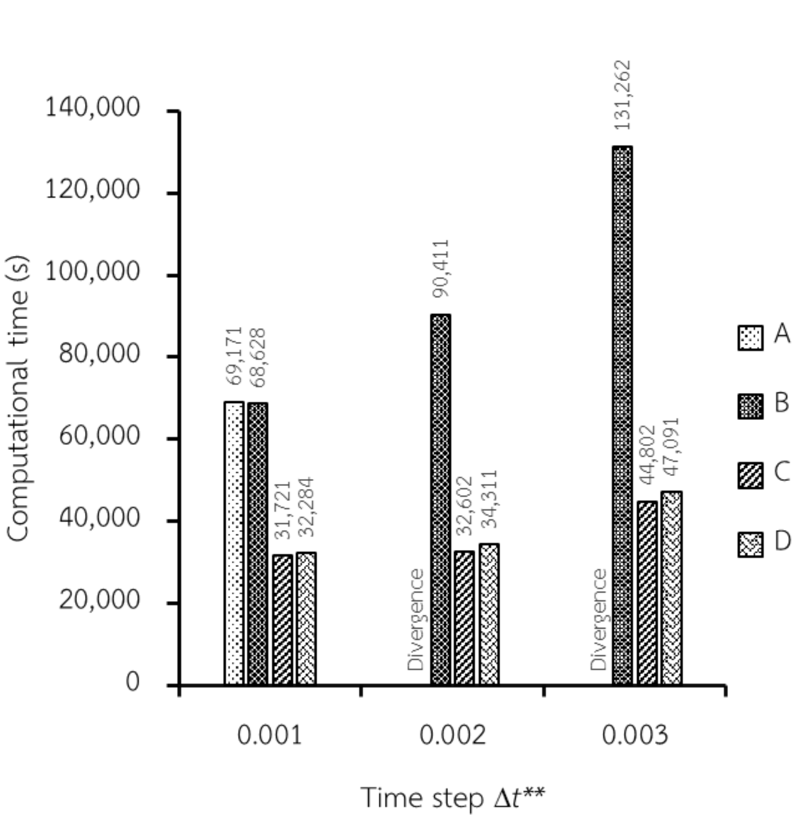
รูปที่ 0.13 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของของไหลในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผนังด้านบนกระทำที่เลขเรย์โนลดส์ $Re = 1,000$ ที่จำนวนเม็สช์ 90×90

5.2.3 การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (แบบ D) ด้วยปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ กระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^6$ ซึ่งผลการทดสอบได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.14.และ 5.15 ที่จำนวนเม็สช์ 30×30 และ 100×100 ตามลำดับ โดยการประมาณค่านอกช่วงแบบ D ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบ A และ B แต่มากกว่าประมาณค่านอกช่วงแบบ C



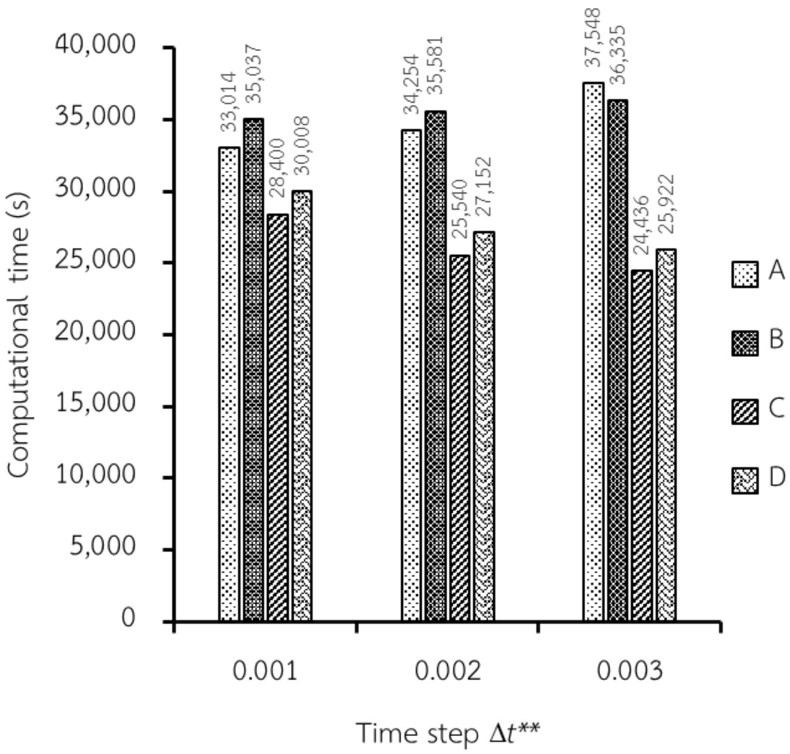
รูปที่ 0.14 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ กระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^6$ ที่จำนวนเม็สช์ 30×30



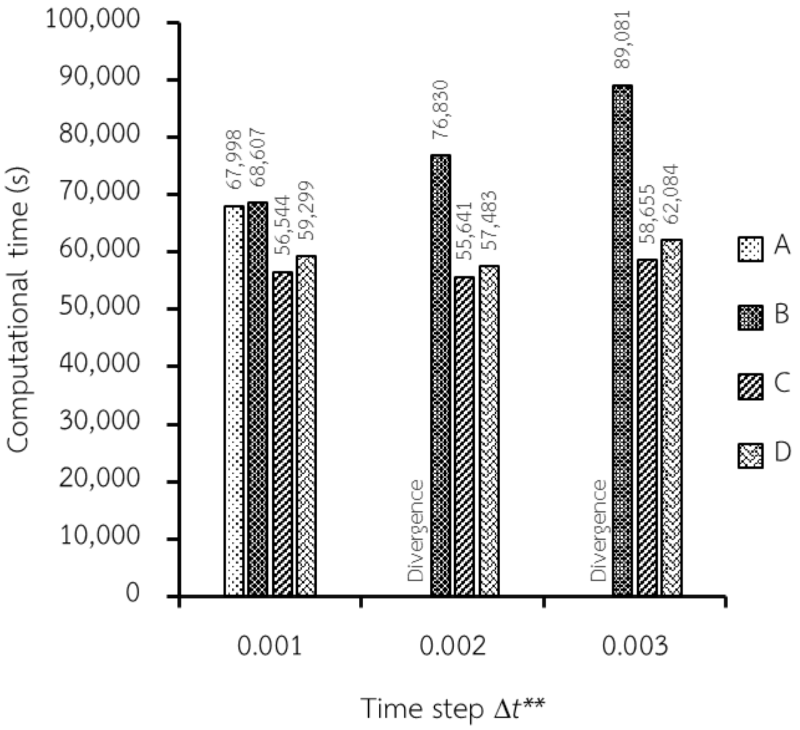
รูปที่ 0.15 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของอากาศในช่องว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติ กระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 10^6$ ที่จำนวนเม็สช์ 100×100

5.2.4 การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ด้วยปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก

การทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP (แบบ D) ด้วยปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามาก กระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ ซึ่งผลการทดสอบได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.16.และ 5.17 ที่จำนวนเม็สช์ 40×200 และ 50×300 ตามลำดับ โดยการประมาณค่านอกช่วงแบบ D ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบ A และ B แต่มากกว่าประมาณค่านอกช่วงแบบ C



รูปที่ 0.16 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามากกระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1\times10^{4}$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ ที่จำนวนเม็สช์ 40×200



รูปที่ 0.17 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ของปัญหาการไหลของอากาศเนื่องจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติในช่องว่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างมีค่ามากกระทำที่เลขเรย์ลี $Ra = 1.1 \times 10^4$ และค่าอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างของช่องว่างเป็น $AR = 16$ ที่จำนวนเม็สช์ 50×300

บทที่ 6
สรุปผล (Conclusion)

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์คือการนำเสนอแผนแบบใหม่ที่ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งเรียกว่าแผนแบบ LIP และการประมาณค่านอกช่วงแบบใหม่ที่ใช้สำหรับประมาณค่าคาดเดาเริ่มต้นของการคำนวณเพื่อหาคำตอบด้วยวิธีทำซ้ำของปัญหาแบบสภาวะไม่คงตัวโดยคำตอบลู่เข้าสู่สภาวะคงตัว ซึ่งการประมาณค่านอกช่วงแบบใหม่เรียกว่าการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ซึ่งจากผลของการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบของแผนแบบ LIP และการทดสอบประสิทธิภาพของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP สามารถสรุปได้ว่า คำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยแผนแบบ LIP มีความถูกต้องแม่นยำ และการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP ช่วยลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณได้จริงเมื่อเปรียบเทียบกับการกำหนดให้ค่าคาดเดาเริ่มต้นมีค่าเท่ากับคำตอบของช่วงเวลาย่อยก่อนหน้า โดยข้อดีและข้อด้อยของแผนแบบ LIP และการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP มีดังนี้

6.1 ข้อดีและข้อด้อยของแผนแบบ LIP

ข้อดีของแผนแบบ LIP

- เป็นแผนแบบที่มีความแม่นยำสูง (High order scheme)
- ง่ายต่อการพัฒนาโปรแกรมที่ใช้การแก้ปัญหาด้วยเม็สช์ที่ไม่สม่ำเสมอ (Non-uniform mesh)
- ง่ายต่อการพัฒนาให้เป็นแผนที่มีความแม่นยำสูงมาก (Very high order scheme)
- เป็นทั้งแผนทางระยะ (spatial scheme) และแผนทางเวลา (temporal scheme)

ข้อด้อยของแผนแบบ LIP

- ใช้ได้เฉพาะกับระบบแกนที่ตั้งฉาก (Ortho-axes) และเซลล์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular cell)

6.2 ข้อดีและข้อด้อยของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

ข้อดีของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

- ช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณเพื่อหาคำตอบของปัญหาที่สภาวะคงตัวลู่เข้าสู่สภาวะคงตัว เมื่อเทียบกับการใช้วิธีกำหนดให้ค่าคาดเดาเริ่มต้นของช่วงเวลาย่อยปัจจุบันมีค่าเท่ากับคำตอบของช่วงเวลาย่อยก่อนหน้านี้

ข้อด้อยของการประมาณค่านอกช่วงแบบ WF-LIP

- มีซับซ้อนในการเขียนโปรแกรม
- ยังไม่สามารถสรุปได้อย่างแน่ชัดว่าสามารถช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณเพื่อหาคำตอบของปัญหาที่สภาวะไม่คงตัวลู่เข้าสู่สภาวะคงตัว เมื่อเทียบกับการใช้วิธีประยุกต์การประมาณค่านอกช่วงด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงของลากรานก์ในการคำนวณหาค่าคาดเดาเริ่มต้นของช่วงเวลาย่อยปัจจุบัน

บรรณานุกรม

[1] B. Andersson, R. Andersson, L. Hakansson, M. Mortensen, R. Sudiyo, and B. V. WAachem, Computational Fluid Dynamics for Engineers. New York: Cambridge University Press 2012.

[2] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fliud Dynamics THE FINITE VOLUME METHOD, 2 ed.: PEARSON Pentice Hall, 2007.

[3] B. Van Leer, "Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method," Journal of Computational Physics, vol. 32, pp. 101-136, 1979/07/01 1979.

[4] T. J. Chung, Computational Fluid Dynamics, 2 ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

[5] X. D. Liu, "Weighted essentially non-oscillatory schemes," Journal of Computational Physics, vol. 115, pp. 200-212, 1994.

[6] L. Rami´rez, X. Nogueira, S. Khelladi, J. C. Chassaing, and I. Colominas, "A new higher-order finite volume method based on Moving Least Squares for the resolution of the incompressible Navier-Stokes equations on unstructured grids," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 278, pp. 883-901, 2014.

[7] J. Zhu and M. A. Leschziner, "A local oscillation-damping algorithm for higher-order convection schemes," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67, pp. 355-366, 1988.

[8] B. Song, G. R. Liu, K. Y. Lam, and R. S. Amano, "On a higher-order bounded discretization scheme," International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 32, pp. 881-897, 2000.

[9] N. Thai-Quang, K. Le-Cao, N. Mai-Duy, C. D. Tran, and T. Tran-Cong, "A numerical scheme based on compact integrated-RBFs and Adams-Bashforth/Crank-Nicolson algorithms for diffusion and unsteady fluid flow problems," Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 37, pp. 1653-1667, 2013.

[10] V. Kazemi-Kamyab, A. H. van Zuijlen, and H. Bijl, "Analysis and application of

high order implicit Runge-Kutta schemes to collocated finite volume discretization of the incompressible Navier-Stokes equations," Computers and Fluids, vol. 108, pp. 107-115, 2015.

[11] S. Sachs, M. Streitenberger, D. C. Sternel, and M. Schäfer, "Extrapolation methods for accelerating unsteady partitioned fluid-structure interaction simulations," International Journal of Multiphysics, vol. 5, pp. 287-297, 2011.

[12] A. V. Malevsky and D. A. Yuen, "Large-scale numerical simulations of turbulent non-Newtonian thermal convection using method of characteristics," Computer Physics Communications, vol. 73, pp. 61-71, 1992.

[13] P. Van Leemput, M. Rheinländer, and M. Junk, "Smooth initialization of lattice Boltzmann schemes," Computers and Mathematics with Applications, vol. 58, pp. 867-882, 2009.

[14] H. L. Hu, C. M. Chen, and K. J. Pan, "TIME-EXTRAPOLATION ALGORITHM (TEA) FOR LINEAR PARABOLIC PROBLEMS," Journal of Computational Mathematics, vol. 32, pp. 183-194, 2014.

[15] B. E. Merrill, Y. T. Peet, P. F. Fischer, and J. W. Lottes, "A spectrally accurate method for overlapping grid solution of incompressible Navier-Stokes equations," Journal of Computational Physics, vol. 307, pp. 60-93, 2016.

[16] P. Birken, T. Gleim, D. Kuhl, and A. Meister, "Fast solvers for unsteady thermal fluid structure interaction," International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 79, pp. 16-29, 2015.

[17] M. M. Rashid, "Deformation extrapolation and initial predictors in large-deformation finite element analysis," Computational Mechanics, vol. 16, pp. 281-289, 1995.

[18] R. Markovinović and J. D. Jansen, "Accelerating iterative solution methods using reduced-order models as solution predictors," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 68, pp. 525-541, 2006.

[19] L. Grinberg and G. Em Karniadakis, "Extrapolation-based acceleration of iterative solvers: Application to simulation of 3D flows," Communications in Computational Physics, vol. 9, pp. 607-626, 2011.

[20] W. L. Oberkampf and T. G. Trucano, "Verification and validation benchmarks,"

Nuclear Engineering and Design, vol. 238, pp. 716-743, 2008.

[21] P. J. Roache, "Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies," Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME, vol. 116, pp. 405-413, 1994.

[22] P. J. Roache, "Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics," in Annual Review of Fluid Mechanics vol. 29, ed, 1997, pp. 123-160.

[23] C. J. Roy, "Review of code and solution verification procedures for computational simulation," Journal of Computational Physics, vol. 205, pp. 131-156, 2005.

[24] J. V. Beck, N. T. Wright, A. Haji-Sheikh, K. D. Cole, and D. E. Amos, "Conduction in rectangular plates with boundary temperatures specified," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 51, pp. 4676-4690, Sep 2008.

[25] S. Albensoeder and H. C. Kuhlmann, "Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow," Journal of Computational Physics, vol. 206, pp. 536-558, 2005.

[26] K. Anupindi, W. Lai, and S. Frankel, "Characterization of oscillatory instability in lid driven cavity flows using lattice Boltzmann method," Computers and Fluids, vol. 92, pp. 7-21, 2014.

[27] O. Botella and R. Peyret, "Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow," Computers and Fluids, vol. 27, pp. 421-433, 1998.

[28] C. H. Bruneau and M. Saad, "The 2D lid-driven cavity problem revisited," Computers and Fluids, vol. 35, pp. 326-348, 2006.

[29] N. A. Kampanis and J. A. Ekaterinaris, "A staggered grid, high-order accurate method for the incompressible Navier-Stokes equations," Journal of Computational Physics, vol. 215, pp. 589-613, 2006.

[30] Z. Li and R. Wood, "Accuracy analysis of an adaptive mesh refinement method using benchmarks of 2-D steady incompressible lid-driven cavity flows and coarser meshes," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 275, pp. 262-271, 2015.

[31] Y. F. Peng, Y. H. Shiau, and R. R. Hwang, "Transition in a 2-D lid-driven cavity flow," Computers and Fluids, vol. 32, pp. 337-352, 2002.

[32] E. M. Wahba, "Steady flow simulations inside a driven cavity up to Reynolds

number 35,000," Computers and Fluids, vol. 66, pp. 85-97, 2012.

[33] G. C. Bourantas and V. C. Loukopoulos, "A meshless scheme for incompressible fluid flow using a velocity-pressure correction method," Computers and Fluids, vol. 88, pp. 189-199, 2013.

[34] Y. J. Jan and T. W. H. Sheu, "A quasi-implicit time advancing scheme for unsteady incompressible flow. Part I: Validation," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pp. 4755-4770, 2007.

[35] J. M. C. Pereira, M. H. Kobayashi, and J. C. F. Pereira, "A Fourth-Order-Accurate Finite Volume Compact Method for the Incompressible Navier-Stokes Solutions," Journal of Computational Physics, vol. 167, pp. 217-243, 2001.

[36] Y. V. S. S. Sanyasiraju and G. Chandhini, "Local radial basis function based gridfree scheme for unsteady incompressible viscous flows," Journal of Computational Physics, vol. 227, pp. 8922-8948, 2008.

[37] R. K. Shukla, M. Tatineni, and X. Zhong, "Very high-order compact finite difference schemes on non-uniform grids for incompressible Navier-Stokes equations," Journal of Computational Physics, vol. 224, pp. 1064-1094, 2007.

[38] Z. F. Tian and P. X. Yu, "An efficient compact difference scheme for solving the streamfunction formulation of the incompressible Navier-Stokes equations," Journal of Computational Physics, vol. 230, pp. 6404-6419, 2011.

[39] C. M. T. Tien, D. Ngo-Cong, N. Mai-Duy, C. D. Tran, and T. Tran-Cong, "High-order fluid solver based on a combined compact integrated RBF approximation and its fluid structure interaction applications," Computers and Fluids, vol. 131, pp. 151-168, 2016.

[40] J. Xiao, J. R. Travis, P. Royl, G. Necker, A. Svishchev, and T. Jordan, "Three-dimensional all-speed CFD code for safety analysis of nuclear reactor containment: Status of GASFLOW parallelization, model development, validation and application," Nuclear Engineering and Design, vol. 301, pp. 290-310, 2016.

[41] G. De Vahl Davis, "Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution," International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 3, pp. 249-264, 1983.

[42] T. Saitoh and K. Hirose, "High-accuracy bench mark solutions to natural convection in a square cavity," Computational Mechanics, vol. 4, pp. 417-427, 1989.

[43] N. C. Markatos and K. A. Pericleous, "Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 27, pp. 755-772, 1984.

[44] G. Barakos, E. Mitsoulis, and D. Assimacopoulos, "Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions," International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 18, pp. 695-719, 1994.

[45] H. N. Dixit and V. Babu, "Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 49, pp. 727-739, 2006.

[46] A. Baïri, "Nusselt-Rayleigh correlations for design of industrial elements: Experimental and numerical investigation of natural convection in tilted square air filled enclosures," Energy Conversion and Management, vol. 49, pp. 771-782, 2008.

[47] P. Le Quere, "Note on multiple and unsteady solutions in two-dimensional convection in a tall cavity," Journal of Heat Transfer, vol. 112, pp. 965-974, 1990.

[48] Z. J. Zhu and H. X. Yang, "Numerical investigation of transient laminar natural convection of air in a tall cavity," Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung, vol. 39, pp. 579-587, 2003.

[49] E. Báez and A. Nicolás, "From cats eyes to multiple disjoint natural convection flow in tall tilted cavities: A direct primitive variables approach," Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, vol. 377, pp. 2270-2274, 2013.

[50] S. M. ElSherbiny, G. D. Raithby, and K. G. T. Hollands, "HEAT TRANSFER BY NATURAL CONVECTION ACROSS VERTICAL AND INCLINED AIR LAYERS," Journal of Heat Transfer, vol. 104, pp. 96-102, 1982.

[51] P. Le Quéré, "Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number," Computers and Fluids, vol. 20, pp. 29-41, 1991.

[52] B. Zhao and Z. Tian, "High-resolution high-order upwind compact scheme-based numerical computation of natural convection flows in a square cavity," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 98, pp. 313-328, 2016.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	อุทัย ประสพชิงชนะ
วัน เดือน ปี เกิด	10 มกราคม 2513
สถานที่เกิด	ชลบุรี
วุฒิการศึกษา	ปริญญาตรี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปริญญาโท จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย Master's Degree, Drexel University, U.S.A.
ที่อยู่ปัจจุบัน	22/67 หมู่บ้าน ปิยวัฒน์ พาวิลเลี่ยน บ้านปึก ถนนมิตรสัมพันธ์ ซอย 14 ตำบลบ้านปึก อำเภอเมืองชลบุรี จังหวัดชลบุรี 20130