ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ไฟไนต์เอลิเมนต์และการปรับขนาดสำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง

นายนิพนธ์ วรรณโสภาคย์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ADAPTIVE STREAMLINE UPWIND FINITE ELEMENT METHOD FOR INTEGRATED FLUID-THERMAL-STRUCTURAL ANALYSIS

Mr. Niphon Wansophark

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ไฟไนต์เอลิเมนต์และการปรับขนาดสำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง
โดย	นายนิพนธ์ วรรณโสภาคย์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ดุลย์ มณีวัฒนา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ : ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ไฟไนต์เอลิเมนต์และการปรับขนาดสำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง. (ADAPTIVE STREAMLINE UPWIND FINITE ELEMENT METHOD FOR INTEGRATED FLUID-THERMAL-STRUCTURAL ANALYSIS) อ. ที่ปรึกษา : ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 175 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อโดยใช้วิธีการคำนวณแบบแยกกันเพื่อแก้ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง ซึ่งเป็นการคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน อีกทั้งนำผลที่เกิดขึ้นไปคำนวณหาค่าความเค้นในของแข็งด้วย โดยในส่วนของการไหลจะวิเคราะห์ด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์และใช้วิธีกาเลอร์คินในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง

ส่วนขั้นตอนการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้สามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ และการเคลื่อนตัวของของแข็งที่อันดับเท่ากันได้ เป็นผลให้สามารถทำความเข้าใจในขั้นตอนของการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยง่าย อีกทั้งยังเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณด้วยการคำนวณแบบแยกกัน กล่าวคือตัวแปรความเร็ว ความดันและอุณหภูมิจะถูกคำนวณไม่พร้อมกัน นอกจากนั้นยังได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณด้วย

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง ก่อนนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง พร้อมทั้งทำให้เกิดความเข้าใจถึงพฤติกรรมที่ส่งผลกระทบต่อกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

ปีการศึกษา 2549

4671816121 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: FINITE ELEMENT / STREAMLINE UPWIND / FLUID-THERMAL-STRUCTURAL ANSLYSIS

NIPHON WANSOPHARK : ADAPTIVE STREAMLINE UPWIND FINITE ELEMENT METHOD FOR INTEGRATED FLUID-THERMAL-STRUCTURAL ANALYSIS. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D. 175 pp.

A streamline upwind finite element method for 6-node triangular elements using a segregated finite element algorithm is developed. An integrated fluid-thermal-structural analysis is presented, where heat conduction in a solid is coupled with heat convection in viscous fluid flow inducing the stress in solid. The streamline upwind finite element method is used for the analysis of viscous thermal flow in the fluid region, while the analyses of heat conduction and thermal stress in solid region are performed by the Galerkin method.

The solution algorithm presented in this dissertation uses equal order element interpolation functions for the velocities, pressure, temperature and solid displacements that can reduce the complexity in deriving the finite element equations. A segregated solution algorithm is also incorporated to compute the velocities, pressure and temperature separately for improving the computational efficiency. In addition, the adaptive meshing technique is applied to increase the analysis solution accuracy.

A corresponding finite element computer program was developed and verified using simple examples that have exact solutions before applying to solve more complex problems. The computational results from several tested problems illustrate the effectiveness of the presented finite element method that can accurately predict the integrated fluid-thermal-structural phenomena.

Department Mechanical Engineering Student's signature Niphon Wansophark
Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature Pramote Dechaumphai
Academic Year 2006

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ และอาจารย์ ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ คอยให้คำปรึกษา และประสบการณ์ในทุก ๆ ด้าน ขอขอบคุณ คุณสุธี ไตรวิวัฒนา คุณปริญญา บุญมาเลิศ คุณอธิพงษ์ มาลาทิพย์ ซึ่งเป็นผู้ร่วมงานในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด และคุณพัชรินทร์ มณีโรจน์ ผู้ที่คอยให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าในการทำงานวิจัยจนสำเร็จลุล่วง อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... **ง**

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... **จ**

กิตติกรรมประกาศ ..... **ฉ**

สารบัญ ..... **ช**

สารบัญตาราง ..... **ฎ**

สารบัญภาพ ..... **ฎ**

คำอธิบายสัญลักษณ์ ..... **ท**

บทที่ 1 บทนำ **1**

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของการวิจัย 3

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย 3

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย 4

1.6 เอกสารและงานวิจัยหลักที่เกี่ยวข้อง 4

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล การถ่ายเทความร้อน และของแข็ง **6**

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล 6

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อน 7

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาของแข็ง 9

2.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 10

2.4.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 11

2.4.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ 14

บทที่ 3 วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ **17**

3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ 17

3.2 การแก้ปัญหาที่มีพจน์การพาโดยใช้ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ 26

หน้า

บทที่ 4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง **37**

4.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด 37

4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในของไหลและโครงสร้าง 42

4.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นในโครงสร้างอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 42

4.4 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ 46

4.4.1 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการโมเมนตัม 46

4.4.2 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการความดัน 51

4.4.3 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการอนุรักษ์พลังงาน 54

4.4.4 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในโครงสร้างอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 55

บทที่ 5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ **56**

5.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง 56

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม 63

5.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ 63

5.4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 60

5.5 รายละเอียดของโปรแกรม 61

5.6 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ 61

บทที่ 6 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ **63**

6.1 ตรวจสอบโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง 63

6.1.1 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานพร้อมการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง 63

6.1.2 การไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน 66

หน้า

6.2 ตรวจสอบโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 68
6.2.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว 68
6.2.2 ปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี 70

บทที่ 7 การวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง 74
7.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง 74
7.1.1 ปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน 74
7.1.2 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน 77
7.1.3 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 85

บทที่ 8 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ 94
8.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ 94
8.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ 98
8.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ 99
8.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการพาด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ 99
8.4.1 ปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง 99
8.4.2 กรณีทดสอบของสมิทธ์และฮัตตัน 103
8.5 การวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ 105
8.5.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 105

บทที่ 9 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ 112
9.1 บทสรุป 112
9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ 113
9.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต 114

หน้า

รายการอ้างอิง **115**

ภาคผนวก **119**

ภาคผนวก ก. รายละเอียดของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน 120

ภาคผนวก ข. รายละเอียดของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 146

ภาคผนวก ค. รายละเอียดของเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ 166

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ **175**

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

ตารางที่ 7.1 ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวดิ่งของของแข็งสำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน กรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน 77
ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวรอยต่อ 82
ตารางที่ 7.3 ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวนอนของของแข็งสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัส กรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน 84
ตารางที่ 7.4 ค่าการเคลื่อนตัวและค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงสุดในของแข็งสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนในกรณีค่า Re ต่าง ๆ กัน 92

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 2.1 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบหนืด 7
รูปที่ 2.2 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อน 8
รูปที่ 2.3 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็ง 9
รูปที่ 2.4 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ 11
รูปที่ 2.5 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ 12
รูปที่ 2.6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และจุด p ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์ 14
รูปที่ 2.7 การอ้างอิงหมายเลขจุดต่อด้วยตัวเลข α, β และ γ บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ 16
รูปที่ 3.1 ระบบพิกัดสตรีมไลน์ (streamline coordinate) 19
รูปที่ 3.2 แสดงนิยามของจุดดาวน์วินด์ในกรณีจุดมุมของสามเหลี่ยม 20
รูปที่ 3.3 จุดต่อด้านข้างที่เป็นจุดดาวน์วินด์ 21
รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพร้อมอัตราการไหลของมวลที่ด้านต่าง ๆ 21
รูปที่ 3.5 ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จากจุดดาวน์วินด์ที่เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม 22
รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา 23
(ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 1 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว
(ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 2 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว
(ค) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 3 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว
รูปที่ 3.7 ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จากจุดดาวน์วินด์ที่อยู่ด้านข้างของสามเหลี่ยม 24
รูปที่ 3.8 เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา 25
(ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว (กรณีที่ 1)
(ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว (กรณีที่ 2)
รูปที่ 3.9 ขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1 26
รูปที่ 3.10 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 1 27
รูปที่ 3.11 ผลการกระจายตัวของค่า ϕ จากระเบียบวิธีต่างๆ ที่ใช้แก้ปัญหาพจน์การพา 27
รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์และวิธีอื่น ๆ กับผลเฉลยแม่นตรงที่มุมการไหลเท่ากับ 60 องศา 28
รูปที่ 3.13 ขอบเขตของปัญหาพร้อมเส้นกระแสที่เกิดขึ้น 29
รูปที่ 3.14 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2 30
รูปที่ 3.15 ลักษณะการกระจายของค่า ϕ ตลอดขอบทางเข้า 30

หน้า

รูปที่ 3.16 การกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหา 31
รูปที่ 3.17 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = ∞ 32
รูปที่ 3.18 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = 100 32
รูปที่ 3.19 ลักษณะของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน 33
รูปที่ 3.20 ขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน 34
รูปที่ 3.21 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน 34
รูปที่ 3.22 การเปรียบเทียบอุณหภูมิบริเวณกึ่งกลางท่อกับผลเฉลยแม่นตรง 35
รูปที่ 4.1 การคำนวณพจน์ $\{R_b\}$ ที่บริเวณขอบรอบนอกของโดเมนการไหล 53
รูปที่ 6.1 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง 64
รูปที่ 6.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง 64
รูปที่ 6.3 เวกเตอร์ความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง 65
รูปที่ 6.4 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้างที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ 65
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 0.1$
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 1$
(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 10$
รูปที่ 6.5 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ 66
รูปที่ 6.6 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน 66
รูปที่ 6.7 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน 67
รูปที่ 6.8 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน 67
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 1$
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 5$
(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 10$

หน้า

รูปที่ 6.9 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์ของ Chen and Han ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ ตลอดแกน y ของปัญหาปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน ที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ 68
รูปที่ 6.10 แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว 69
รูปที่ 6.11 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว 69
รูปที่ 6.12 ค่าการเคลื่อนตัวเนื่องจากความร้อนในแนวแกน x สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว 70
รูปที่ 6.13 วงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี 71
รูปที่ 6.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี 71
รูปที่ 6.15 การเปลี่ยนแปลงของค่าการเคลื่อนตัวตามทิศทางรัศมีในแนวมุม θ เท่ากับ 0 72
รูปที่ 6.16 ความเค้นในแนวรัศมี σ_r ตามทิศทางรัศมีที่มีแนวมุม θ เท่ากับ 0 72
รูปที่ 6.17 ความเค้นในทิศ θ, σ_θ ตามทิศทางรัศมีที่มีแนวมุม θ เท่ากับ 0 73
รูปที่ 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน 75
รูปที่ 7.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 1$ 75
รูปที่ 7.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 5$ 76
รูปที่ 7.4 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 10$ 76
รูปที่ 7.5 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน 78
รูปที่ 7.6 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน 78

หน้า

รูปที่ 7.7 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า 79
(ก) เส้นกระแสการไหล
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 1
(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 10
รูปที่ 7.8 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $Gr = 10^5$ 80
(ก) เส้นกระแสการไหล
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 1
(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 10
รูปที่ 7.9 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อโดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Hriberšek & Kuhn ที่ค่า K_{sf} = 1, 5 และ 10 81
(ก) ค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อ
(ข) ค่าปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อ
รูปที่ 7.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน 82
รูปที่ 7.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $Gr = 10^5$ และ K_{sf} = 1 83
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ
(ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)
รูปที่ 7.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $Gr = 10^5$ และ K_{sf} = 5 83
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ
(ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)

หน้า

รูปที่ 7.13 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $Gr = 10^5$ และ $K_{sf} = 10$ 84
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ
(ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)
รูปที่ 7.14 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนสำหรับกรณีที่ 1 85
รูปที่ 7.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 86
รูปที่ 7.16 เส้นกระแสการไหลของปัญหาในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว 86
รูปที่ 7.17 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว 86
รูปที่ 7.18 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 87
รูปที่ 7.19 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนสำหรับกรณีที่ 2 87
รูปที่ 7.20 ลักษณะของเส้นกระแสการไหลในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน 88
(ก) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 50
(ข) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100
(ค) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200
(ง) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300
รูปที่ 7.21 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน 89
(ก) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 50
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100
(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200
(ง) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300
รูปที่ 7.22 เปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระอย่างเดียว กับกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน 90

หน้า

รูปที่ 7.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 91
รูปที่ 7.24 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็งสำหรับกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว 91
รูปที่ 7.25 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็งสำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100 92
รูปที่ 7.26 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็งสำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200 92
รูปที่ 7.27 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็งสำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300 92
รูปที่ 8.1 แสดงการวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลักทั้งสอง *(X, Y)* 96
รูปที่ 8.2 ตัวอย่างการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมล้อมจุดต่อ *j* ใด ๆ 96
รูปที่ 8.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง 100
รูปที่ 8.4 การกระจายตัวของตัวแปรไม่ทราบค่า (ϕ) สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น 100
รูปที่ 8.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้ 101
รูปที่ 8.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้ 101
รูปที่ 8.7 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้ 102
รูปที่ 8.8 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดกับผลเฉลยแม่นตรง 102
รูปที่ 8.9 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 103
รูปที่ 8.10 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 104
รูปที่ 8.11 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 104

หน้า

รูปที่ 8.12 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดกับผลเฉลยแม่นตรง 105
รูปที่ 8.13 ลักษณะปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน ... 106
รูปที่ 8.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนติเริ่มต้นและการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 106
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น
รูปที่ 8.15 ภาพขยายของรูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์เริ่มต้นและการกระจายตัวของอุณหภูมิ 107
(ก) ภาพขยายรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น
รูปที่ 8.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 107
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1
รูปที่ 8.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 108
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2
รูปที่ 8.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 108
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3

หน้า

รูปที่ 8.19 ภาพขยายของรูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3 และการกระจายตัวของอุณหภูมิ 109
(ก) ภาพขยายรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3
รูปที่ 8.20 เปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ระหว่างผลของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งต่าง ๆ กับผลการคำนวณของ Davalath and Bayazitoglu 109
รูปที่ 8.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของครีบระบายความร้อนทั้งสามและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน 110
รูปที่ 8.22 การกระจายตัวของค่าความเค้นฟอนมิสเซส (kPa) บนครีบระบายความร้อนทั้งสาม 110
รูปที่ 8.23 เวกเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อบนครีบระบายความร้อนทั้งสาม 110

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำอธิบายสัญลักษณ์

A พื้นที่, เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

a ความเร่ง, ตัวแปรความสูงของช่องการไหล

a_i สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน

B เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

b_i สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน

C เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

c ค่าความร้อนจำเพาะ

c_i สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน

D ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

E โมดูลัสยืดหยุ่น

F แรงที่กระทำกับขอบนอกของโครงสร้าง

Fn อัตราส่วนการไหลของมวลผ่านด้านเอลิเมนต์

Fp อัตราส่วนการไหลของมวลผ่านด้านเอลิเมนต์

f อัตราการไหลของมวลผ่านด้านต่าง ๆ

f_x แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน x

f_y แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน y

Gr กราซอร์ฟนัมเบอร์ (Grashof Number)

g แรงโน้มถ่วงโลก

h ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์

K_{sf} อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล

K_{pi} สัมประสิทธิ์สำหรับความดันที่กระจายมาจากสมการโมเมนตัม

K_x เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน

K_y เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
k_f	สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล
k_s	สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง
L	พิกัดธรรมชาติ, ตัวแปรระยะทาง
m	มวล
N	ฟังก์ชันน้ำหนัก
Nu	นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งใด ๆ (local Nusselt number)
$\overline{\mathrm{Nu}}$	นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ย (average Nusselt number)
$\hat{n}$	ทิศทางตั้งฉาก
n_x	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x
n_y	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง y
Pe	เพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)
Pr	พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandlt number)
p	ความดัน
Q	อัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล
q_s	ปริมาณความร้อนที่ผ่านขอบ
q_x	ปริมาณความร้อนในแนวแกน x
q_y	ปริมาณความร้อนในแนวแกน y
R	เศษตกค้าง, โหลดเวกเตอร์
Ra	เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number)
Re	เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number)
s	แกนที่สัมผัสกับเส้นสตรีมไลน์
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิอ้างอิง
U_s	ความเร็วในแนวเส้นสตรีมไลน์
u	ความเร็วในแนวแกน x

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\hat{u}_i$	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
$\hat{v}_i$	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน y
W	ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก
x	ระยะในแนวราบ
y	ระยะในแนวดิ่ง
α	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ
β	สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (coefficient of thermal expansion)
Γ	ขอบของการไหล
Γ_ϕ	สัมประสิทธิ์การแพร่
γ	ความเครียดเฉือน
Ω	โดเมนของการไหล
ε	ความเครียด
ϕ	ตัวแปรใด ๆ
ϕ'	ตัวแปรตามแม่นตรง
λ	ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
μ	ความหนืด
υ	อัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio)
θ	มุมการไหล
ρ	ความหนาแน่น
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาปัญหาทางพลศาสตร์ของของไหล (fluid dynamics) เป็นงานวิจัยที่ยังคงได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องจากอดีตจนถึงปัจจุบัน ทั้งด้านการคำนวณ (computation) และด้านการทดลอง (experiment) ซึ่งมีการวิจัยทั้งในหัวข้อของการไหลแบบอัดตัวได้ (compressible flow) และการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (incompressible flow) รวมถึงการไหลแบบราบเรียบ (lamina flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) งานวิจัยในหัวข้อต่าง ๆ เหล่านี้ก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนางานทางด้านวิศวกรรม

สำหรับงานวิจัยด้านการคำนวณทางพลศาสตร์ของของไหลในหัวข้อการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้นั้น ปัญหาหนึ่งที่เป็นหัวข้อในการวิจัยมาอย่างต่อเนื่องคือการแก้ปัญหาพจน์การพา (convection term) โดยงานวิจัยในช่วงต้น ๆ เริ่มจากการพัฒนาในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference) [1-2] ซึ่งพบว่าการใช้การประมาณผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) กับพจน์การพาก่อให้เกิดปัญหาการสั่นของคำตอบ [3] จากปัญหาดังกล่าวมีนักวิจัยหลายท่านได้พัฒนาวิธีที่เรียกว่าวิธีอัปวินด์ (upwind method) ขึ้น [4-5] ซึ่งสามารถแก้ปัญหาการสั่นของคำตอบได้ แต่ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไม่เป็นที่นิยมนักหนึ่งในสาเหตุก็คือการประยุกต์ใช้งานกับขอบเขตที่เป็นส่วนโค้งนั้นมีความยากลำบาก ต่อมาความนิยมในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element) มีเพิ่มมากขึ้นโดยเฉพาะในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง (structural analysis) อีกทั้งยังเหมาะกับการวิเคราะห์ปัญหาที่ขอบเขตเป็นส่วนโค้งเป็นอย่างดี นักวิจัยจึงเริ่มพัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล แต่เนื่องจากการใช้วิธีกาเลอร์คิน (Galerkin method) ที่ใช้โดยทั่วไปในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ให้ผลเช่นเดียวกันกับการใช้การประมาณผลต่างแบบตรงกลางของวิธีผลต่างสืบเนื่องนั่นคือทำให้เกิดปัญหาการสั่นของคำตอบ วิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ (streamline upwind) ซึ่งได้ถูกพัฒนาต่อมาจากวิธีที่ใช้ในวิธีผลต่างสืบเนื่อง

วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ที่นิยมใช้เพื่อแก้ปัญหาพจน์การพาในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นแบ่งได้เป็นสองวิธีการหลัก ๆ วิธีแรกคือวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรง (direct streamline upwind method) [6] วิธีการนี้จะทำการหาทิศทางของกระแสการไหล (streamline direction) และทำการคำนวณพจน์การพาโดยตรงในทิศทางนั้น สำหรับวิธีที่สองคือวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (streamline upwind Petrov – Galerkin method, SUPG)

[7] วิธีการนี้จะทำการปรับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเพื่อทำการถ่วงน้ำหนักในทิศทางของการไหล ซึ่งวิธีการสตรีมไลน์อัปวินด์ทั้งสองวิธีนี้ช่วยลดปัญหาการสั่นของคำตอบได้ แต่ถึงแม้ว่าวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงจะให้ความถูกต้องเพียงอันดับหนึ่ง (first order accuracy) ในขณะที่วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพทรอฟ-กาเลอร์คินจะให้ความถูกต้องอันดับที่สอง (second order accuracy) แต่วิธีการแรกนั้นจะทำให้เมตริกซ์ของพจน์การพามีค่าในแนวทแยงมุมหลักที่เหมาะสม (diagonally dominant matrices) ซึ่งส่งผลให้การคำนวณมีสเถียรภาพมากกว่า [8] อนึ่ง งานวิจัยโดยส่วนใหญ่จะศึกษาพฤติกรรมของของไหลเพียงอย่างเดียว ขณะที่มีงานวิจัยจำนวนไม่มากนักที่สนใจศึกษาผลกระทบที่เกิดขึ้นระหว่างปัญหาการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างไปพร้อม ๆ กัน การศึกษาผลกระทบที่เกิดขึ้นระหว่างองค์ความรู้ทั้งสามด้านดังกล่าวจะช่วยให้สามารถประยุกต์ใช้งานทางด้านวิศวกรรมที่กว้างขวางมากยิ่งขึ้น

ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะดำเนินงานวิจัยด้านการคำนวณที่เน้นการทำนายปฏิสัมพันธ์ของการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในส่วนที่เป็นของไหลและของแข็ง พร้อมทั้งค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในโครงสร้างภายใต้อุณหภูมิที่เกิดขึ้นนั้น โดยในส่วนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณพฤติกรรมของการไหลจะประยุกต์ใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงพร้อมทั้งใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องในลำดับที่สูงขึ้น จากนั้นก็จะทำการประยุกต์เทคนิคการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ (adaptive remeshing) [9] เข้ากับกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาของการไหลข้างต้น เพื่อช่วยลดเวลาและขนาดหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลงเมื่อเปรียบกับการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็ก ๆ ตลอดทั่วทั้งขอบเขตของปัญหา ลำดับสุดท้ายก็จะทำการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ ทั้งปัญหาแบบอย่างที่มีผลเฉลยแม่นตรง และปัญหาที่มีความซับซ้อนทั้งในด้านของปรากฏการ์ของการไหลและรูปร่างของปัญหา (geometry) เพื่อให้มั่นใจว่าเทคนิคที่ถูกนำเสนอในงานวิจัยชิ้นนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาในทางปฏิบัติที่มีความซับซ้อนและหลากหลายต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 ประดิษฐ์วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ เพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัว

1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งในของไหลและของแข็ง

1.2.3 ศึกษาลักษณะความเค้นเนื่องจากความร้อนที่เกิดขึ้นบนโครงสร้าง ในขณะที่ของไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ไหลผ่านโครงสร้างนั้น

1.2.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนาย 3 ปรากฏการณ์ได้ ดังนี้

1.2.4.1 พฤติกรรมของของไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ขณะไหลผ่านโครงสร้าง

1.2.4.2 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิทั้งในของไหลและบนโครงสร้างขณะที่มีการถ่ายเทความร้อนกับของไหลที่ไหลผ่าน

1.2.4.3 ลักษณะความเค้นและความเครียดของโครงสร้างขณะมีการถ่ายเทความร้อนระหว่างโครงสร้างและของไหลที่ไหลผ่าน

1.2.5 ศึกษาและประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการศึกษาที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ข้างต้น มีดังต่อไปนี้

1.3.1 ศึกษาถึงพฤติกรรมของของไหลชนิดอัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัวในสองมิติ

1.3.2 ลักษณะการไหลที่พิจารณาเป็นการไหลแบบราบเรียบ

1.3.3 พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

1.3.4 ศึกษาการถ่ายเทความร้อนทั้งในของไหลและโครงสร้างในสองมิติ

1.3.5 ศึกษาลักษณะความเค้นเนื่องจากความร้อนในโครงสร้างสองมิติ

1.3.6 การเคลื่อนตัวของโครงสร้างจะมีค่าน้อยมากจนไม่ส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลดังนั้นจะไม่นำมาพิจารณา

1.3.7 ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดของโครงสร้างมีลักษณะยืดหยุ่นเชิงเส้น

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 มีความเข้าใจถึงการแก้ปัญหาพจน์การพาด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

1.4.2 ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่าง 3 สาขาวิชา คือ พลศาสตร์ของไหล การถ่ายเทความร้อน และกลศาสตร์ของแข็ง อันเป็นแนวทางพื้นฐานที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัยระดับสูงต่อไป

1.4.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถทำนายพฤติกรรมการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ การกระจายของอุณหภูมิทั้งในของไหลและของแข็ง และลักษณะของความเค้นและความเครียดอันเนื่องจากความร้อนบนโครงสร้างได้

1.4.4 สามารถนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปใช้แก้ไขปัญหาที่มีรูปร่างหรือเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้

1.4.5 สามารถนำไปขยายผลเพื่อศึกษาปัญหาการไหลชนิดอื่น ๆ เช่น การไหลแบบหนืดและราบเรียบในสภาวะไม่คงตัว (unsteady viscous laminar flows) หรือการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flows) เป็นต้น

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1.5.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีด้านพลศาสตร์ของไหล และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้

1.5.2 ศึกษาและประดิษฐ์วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

1.5.3 ศึกษาลักษณะของของไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้

1.5.4 ศึกษาลักษณะการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับโครงสร้าง

1.5.5 ศึกษาลักษณะความเค้นเนื่องมาจากความร้อนที่เกิดขึ้นบนโครงสร้าง

1.5.6 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

1.5.7 ทดสอบความถูกต้องของวิธีที่นำเสนอทั้งหมดข้างต้น ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงและปัญหาที่มีความซับซ้อน

1.5.8 จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ และสรุปผล

1.6 เอกสารและงานวิจัยหลักที่เกี่ยวข้อง

1.6.1 Raithby, G. D. [4] พัฒนาวิธีการอัปวินด์สำหรับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จากเดิมที่จะเกิดค่าความผิดพลาดเป็นอย่างมากเมื่อการไหลไม่อยู่ในแนวของกริดที่สร้างขึ้น

1.6.2 Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. [7] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพทรอฟ-กาเลอร์คินสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้น วิธีดังกล่าวได้ทำการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยใช้ทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วในการทำให้ฟังก์ชันดังกล่าวมีการถ่วงน้ำหนักไปในแนวของการไหล โดยที่วิธีการดังกล่าวสามารถให้ความถูกต้องในอันดับ 2 (2^{nd} order of accuracy) แต่ยังให้ผลคำตอบที่มีการสั่นอยู่บ้างในบางปัญหา

1.6.3 Hassan, Y. A., Rice, J. G. and Kim, J. H. [5] ปรับปรุงวิธีอัปวินด์สำหรับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องของ Raithby, G. D. ให้มีสเถียรภาพและมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

1.6.4 Rice, J. G. and Schnipke, R. J. [6] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นวิธีที่ทำการคำนวณพจน์การพาในทิศทางของการไหลโดยตรง และใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ วิธีการดังกล่าวให้ความถูกต้องในอันดับ 1 (1^{st} order of accuracy) แต่ให้เมตริกซ์ของพจน์การพามีค่าในแนวทแยงมุมหลักที่เหมาะสม ทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพมากยิ่งขึ้น

1.6.5 Rice, J. G. and Schnipke, R. J. [21] นำวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ พร้อมทั้งใช้ขั้นตอนการคำนวณความเร็วและความดันแบบแยกกัน

1.6.6 Hill, D. L. and Baskharone, E. A. [15] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ

1.6.7 Wansophark, N. and Dechaumphai, P. [22] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ และประยุกต์ใช้วิธีดังกล่าวเข้ากับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ ซึ่งการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นทำให้การประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เป็นไปได้โดยง่าย

1.6.8 Wansophark, N. and Dechaumphai, P. [23] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ ที่มีอุณหภูมิเกี่ยวข้องด้วย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล การถ่ายเทความร้อน และของแข็ง

งานวิจัยนี้จะศึกษาปัญหาปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างในสองมิติโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การทำความเข้าใจในพฤติกรรมของการไหลของของไหลจะต้องอาศัยความรู้ทฤษฎีพลศาสตร์ของไหล ส่วนการหาลักษณะความเค้นเนื่องจากความร้อนที่เกิดขึ้นในโครงสร้างจะต้องอาศัยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน และทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งเพิ่มเติมด้วย ดังนั้นในบทนี้จะได้กล่าวถึงทฤษฎีพลศาสตร์ของไหล [3] เพื่อหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหล ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน [10] เพื่อหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน และทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็ง [11] เพื่อหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาของแข็ง ตามลำดับ สุดท้ายจะได้นำเสนอขั้นตอนโดยรวมของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และคุณลักษณะของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล

สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัว (two dimensional steady state viscous incompressible flows) ประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับ: (1) การอนุรักษ์มวล (conservation of mass), (2) การอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และ (3) การอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) ซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งหมด 4 สมการในปัญหาแบบสองมิติ ดังนี้

สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\rho f_x \tag{2.2}$$

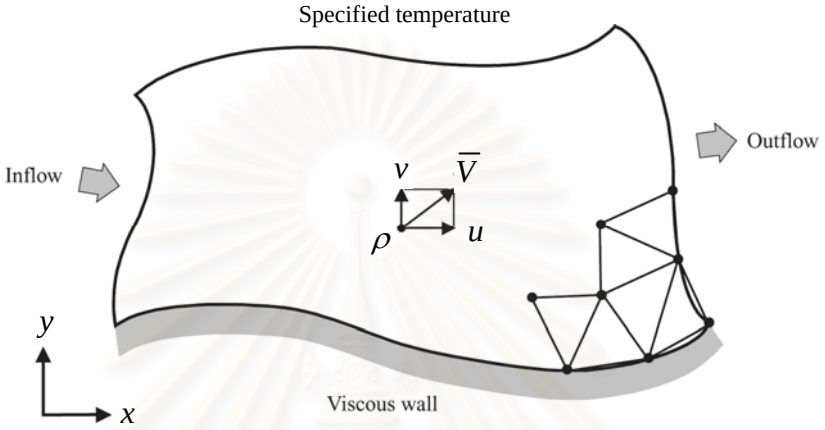
สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+\rho f_y \tag{2.3}$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho c\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]+\rho Q \tag{2.4}$$

โดย u และ v หมายถึงความเร็วในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ ρ หมายถึงความหนาแน่น p หมายถึงค่าความดัน μ หมายถึงค่าความหนืด f_x และ f_y หมายถึงแรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ T หมายถึงค่าอุณหภูมิ c หมายถึงค่าความจุความร้อน Q หมายถึงอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล และ k หมายถึงค่าการนำความร้อน



รูปที่ 2.1 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบหนืด

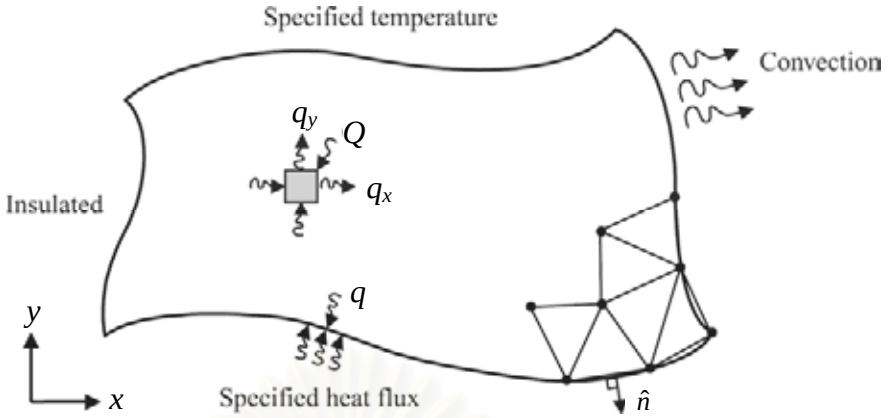
ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหล (2.1) – (2.4) นี้ จำเป็นต้องแก้ควบคู่ไปกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่กำหนดให้ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ซึ่งอาจประกอบไปด้วย: (1) การกำหนดขอบเขตของการไหลเข้า (inflow); (2) การกำหนดขอบเขตของผนังแบบหนืด (viscous wall); (3) การกำหนดขอบเขตของการไหลออก (outflow); และ (4) การกำหนดอุณหภูมิที่ขอบ เป็นต้น

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อน

สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความสมดุลของปริมาณฟลักซ์ q_x และ q_y ซึ่งผ่านเข้าและออกในแนวแกน x และ y ของเอลิเมนต์เล็ก ๆ ที่วางตัวอยู่ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนแผ่นระนาบดังแสดงในรูปที่ 2.2 คือ

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q = 0 \qquad (2.5)$$

โดย Q แทนอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง (internal heat generation) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร



รูปที่ 2.2 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อน

ปริมาณฟลักซ์เหล่านี้ขึ้นอยู่กับความชัน (temperature gradients) ของอุณหภูมิ T และค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) k ของแผ่นระนาบตามกฎฟูริเยร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x};\quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.6}$$

แทนสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.5) ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการถ่ายเทความร้อนภายใต้สภาวะอยู่ตัว คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k\frac{\partial T}{\partial y}\right]+Q = 0 \tag{2.7}$$

ความซับซ้อนของลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ $T(x, y)$ ที่เกิดขึ้นจากสมการ (2.7) นี้ ขึ้นอยู่กับรูปร่างลักษณะของแผ่นระนาบและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ เงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบของแผ่นบางอาจประกอบด้วย

(ก) การกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ เช่น

$$T(x, y) = T_1(x, y)$$

(ข) การกำหนดปริมาณฟลักซ์ q_s ที่ผ่านเข้าสู่ขอบ

$$q_s = -q = k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y$$

โดย n_x และ n_y แทนทิศทางโคซายน์ (cosines direction) ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(ค) การกำหนดว่าขอบเป็นฉนวน ไม่มีปริมาณฟลักซ์ผ่านเข้าหรือออกได้

$$q_s = k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y = 0$$

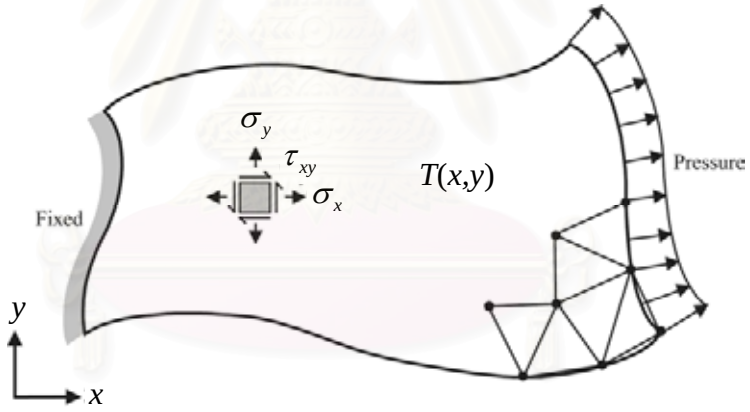
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาของแข็ง

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งแสดงความสมดุลของแรงในแนวแกน x และ y บนแผ่นระนาบ เมื่อไม่คิดน้ำหนักของตัวเอง ดังแสดงในรูปที่ 2.3 คือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (2.8ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (2.8ข)$$

โดย σ_x, σ_y แทนค่าความเค้นฉาก (normal stress) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ส่วน τ_{xy} แทนค่าความเค้นเฉือน (shearing stress)



รูปที่ 2.3 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็ง

ในกรณีของแผ่นบางซึ่งเป็นปัญหาความเค้นในระนาบ (plane stress) ค่าความเค้นในแนวแกน z จะถูกสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ โดยค่าความเค้นย่อยต่าง ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าความเครียดย่อย (strain components) ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x - \alpha(T-T_0)\\ \varepsilon_y - \alpha(T-T_0)\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

โดย E แทนค่าโมดูลัสของยังส์ (Young's modulus) และ υ แทนค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's ratio) ส่วน $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ แทนค่าความเครียดฉาก (normal strain) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ γ_{xy} แทนค่าความเครียดเฉือน α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (coefficient of thermal expansion) และ T_0 แทนอุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น (reference temperature for zero stress) เช่นอุณหภูมิห้อง เป็นต้น

ค่าความเครียดย่อยเหล่านี้เขียนให้อยู่ในรูปของค่าการเสียรูป u และ v ในแนวแกน x และ y ได้คือ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.10}$$

และ $$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ซึ่งหมายความว่า ตัวไม่รู้ค่าในปัญหาแผ่นระนาบมีเพียง 2 ค่า คือ u และ v เมื่อทราบค่า u และ v แล้วจึงสามารถนำไปคำนวณหาค่าความเครียดและความเค้นย่อยต่าง ๆ ได้ตามลำดับ

สำหรับปัญหาที่ค่าความเครียดในแนวแกน z ถูกสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ (plane strain) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.8) และสมการ (2.10) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดย่อยและค่าการเสียรูป ยังคงใช้ได้เช่นเดิม ยกเว้นความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นย่อยและความเครียดย่อยดังแสดงในสมการ (2.9) ต้องเปลี่ยนมาเป็น

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_y - \alpha(T-T_0) \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตโดยทั่วไปดังแสดงในรูปที่ 2.3 ประกอบด้วย การยึดแน่น (fixed) หรือปล่อยอิสระ (free) ตลอดขอบต่าง ๆ รวมทั้งอาจกำหนดแรงดัน (pressure) ซึ่งแทนแรงที่กระทำต่อพื้นที่ตลอดขอบนั้น ๆ อีกทั้งยังต้องการผลการกระจายตัวของอุณหภูมิ $T = T(x, y)$ ที่สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.7) ก่อนด้วย ซึ่งผลจากอุณหภูมิ T นี้เองแฝงตัวอยู่ในสมการ (2.9) และ (2.11) ซึ่งอธิบายลักษณะของความเค้นย่อยนั่นเอง

2.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

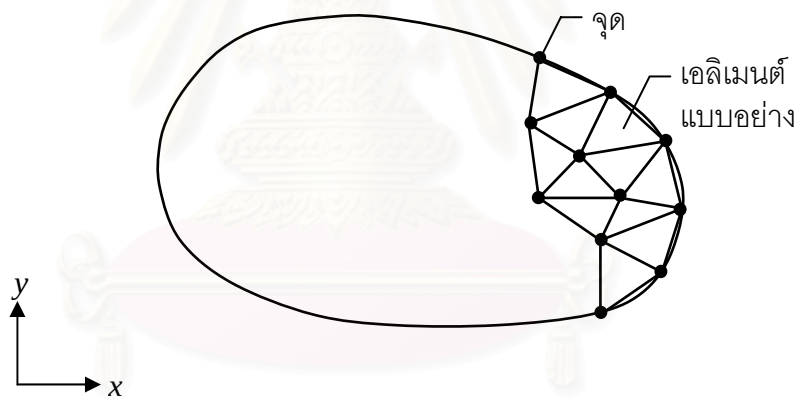
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จัดเป็นวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมสำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ โดยงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงในการ

แก้ปัญหาการไหล และใช้วิธีกาเลอร์คินในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน และปัญหาของแข็ง ซึ่งทั้งหมดนี้จะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะเริ่มจากการอธิบายขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะแสดงฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ ซึ่งจะได้นำเอลิเมนต์ดังกล่าวไปใช้ในการคำนวณพจน์การพาโดยใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ในบทที่ 4 ต่อไป

2.4.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 6 ขั้นตอน [12] (โดยในหัวข้อนี้จะอธิบายโดยใช้ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ) คือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ ดังรูปที่ 2.4



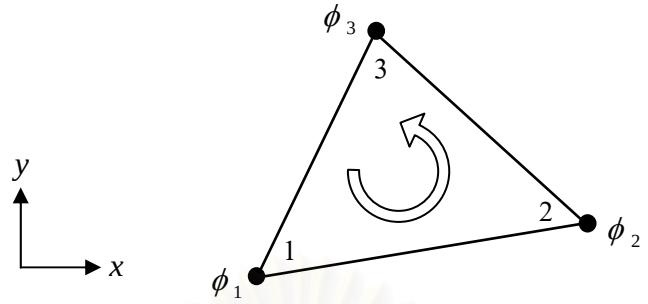
รูปที่ 2.4 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

จากนั้นก็ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้นั้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ใน

$$D(\phi') = 0 \qquad (2.12)$$

โดยที่ D คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ' คือตัวแปรตามแม่นตรง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> พิจารณาลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์



รูปที่ 2.5 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ยกตัวอย่างเช่น สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยสามจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 2.5 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่าง ๆ ของการไหล ซึ่งสามารถสร้างสมการอธิบายลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \qquad (2.13)$$

โดย $N_i(x,y);\ i=1,2,3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สมการ (2.13) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi = \phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(1\times 3)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \underset{(3\times 1)}{\{\phi\}} \qquad (2.14)$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อให้ผลลัพธ์โดยประมาณนั้นมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equation) ที่สอดคล้องกัน ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$D(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ R

โดยที่ R คือเศษตกค้าง (residual) นั่นหมายถึง

$$R = D(\phi) = D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) \tag{2.15}$$

โดย m คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function; W) จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.16}$$

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งเราจะเลือกใช้ฟังก์ชันน้ำหนักเป็น $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกโดยทั่วไปว่าบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by part) ซึ่งหากเราแทนสมการ (2.15) ลงในสมการ (2.16) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์ } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ } \Gamma^{(e)}} = 0$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> จากนั้นเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ นั่นคือ

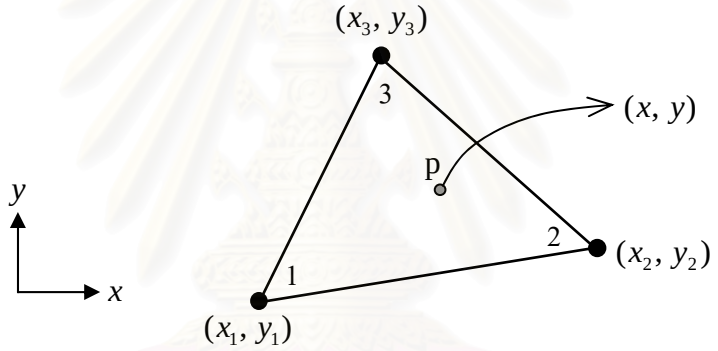
$$\underset{(m\times m)}{[K]} \; \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{2.17}$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix) $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์และ $\{F\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของ

เอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (2.17) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขต แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

2.4.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์ที่นิยมใช้กันมากเนื่องจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนมากสามารถสร้างขึ้นมาโดยง่ายและโดยอัตโนมัติ [13] ดังนั้นในหัวข้อนี้จะแสดงการสร้างฟังก์ชันภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมหกจุดต่อโดยใช้พิกัดธรรมชาติ (natural coordinates) ซึ่งการใช้พิกัดดังกล่าวมีข้อดีก็คือจะได้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อยู่ในรูปแบบปิด และสามารถที่จะแสดงจุดพิกัดของจุดใด ๆ ที่อยู่ใน เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปของจุดต่อของเอลิเมนต์นั้นได้



รูปที่ 2.6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ และจุด *p* ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์

รูปที่ 2.6 แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ และถ้ากำหนดให้ L_i $(i = 1, 2,\ldots, n)$ เป็นพิกัดธรรมชาติ โดยที่ n คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์ (ในที่นี้ n = 3) และถ้าจุด p เป็นจุดที่อยู่ภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแล้ว เราสามารถเขียนจุดพิกัดของจุด p ให้อยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ L_1, L_2, และ L_3 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \end{aligned} \tag{2.18}$$

โดยพิกัดธรรมชาติ L_1, L_2, และ L_3 นี้สามารถเรียกใหม่ว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ซึ่งคุณสมบัติของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักก็คือผลรวมของฟังก์ชันจะมีค่าเท่ากับหนึ่ง ดังนี้

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \tag{2.19}$$

เมื่อแก้สมการ (2.18) กับสมการ (2.19) พร้อม ๆ กันเพื่อเขียน L_1, L_2, และ L_3 ให้อยู่ในระบบพิกัดแกน x และแกน y จะได้

$$L_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.20}$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม สามารถคำนวณได้จากพิกัดของจุดต่อทั้งสามจุดดังนี้

$$A = \frac{1}{2}[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{2.22}$$

สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อหรือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีอันดับสูง ๆ ขึ้นไป ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ L_1, L_2, และ L_3 ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อได้ ซึ่งนักวิจัยที่ชื่อ Silvester [14] ได้ให้สูตรสำหรับสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับ n ใด ๆ ไว้ดังนี้

$$N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = N_\alpha(L_1)\, N_\beta(L_2)\, N_\gamma(L_3)$$

โดยที่

$$N_\alpha(L_1) = \prod_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{nL_1 - i + 1}{i}\right), \qquad \alpha \geq 1 \tag{2.23}$$

$$= 1, \qquad \alpha = 0 \tag{2.24}$$

สำหรับ $N_\beta(L_2)$ และ $N_\gamma(L_3)$ ก็สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (2.23) และ (2.24) ส่วน α, β และ γ นั้นเป็นเลขจำนวนเต็มที่ใช้สำหรับอ้างอิงจุดต่อบนเอลิเมนต์ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $\alpha + \beta + \gamma = n$ โดยที่ n คืออันดับของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับที่ 2 เป็นต้น ส่วนการใช้งานของเลขจำนวนเต็มชุดนี้ได้แสดงในรูปที่ 2.7 ยกตัวอย่างเช่นที่จุดต่อหมายเลข 1 จะมีหมายเลขอ้างอิงคือ $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ซึ่งฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ก็คือ N_{200} และจากสมการ (2.23) และ (2.24) จะได้ว่า

$$N_\alpha = N_2 = \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{2L_1 - i + 1}{i}\right)$$

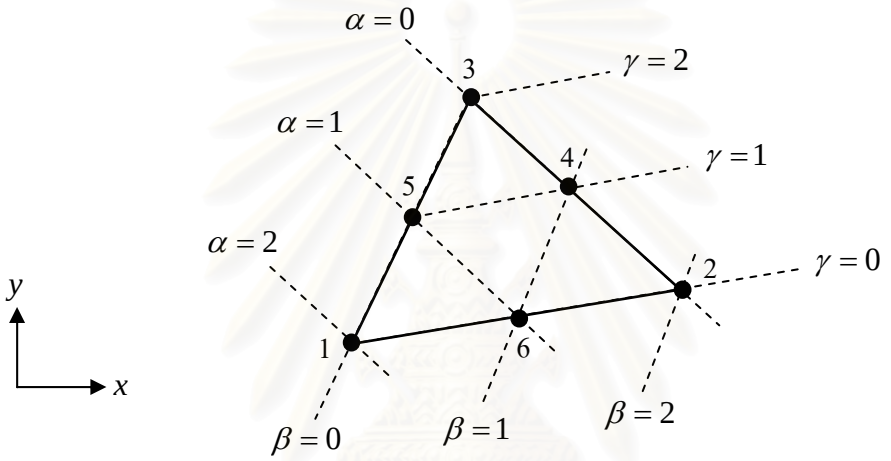
$$= \left(\frac{2L_1 - 1 + 1}{1}\right)\left(\frac{2L_1 - 2 + 1}{2}\right) = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_\beta = N_0 = 1$$

$$N_\beta = N_0 = 1$$

ดังนั้น

$$N_{200} = N_2(L_1)\, N_0(L_2)\, N_0(L_3) = L_1(2L_1 - 1) \qquad (2.25)$$



รูปที่ 2.7 การอ้างอิงหมายเลขจุดต่อด้วยตัวเลข α, β และ γ บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ

สำหรับจุดต่ออื่น ๆ ก็จะสามารถสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในได้ด้วยวิธีเดียวกัน ดังนั้น สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อจะมีฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของแต่ละจุดต่อ ดังนี้

$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i - 1), \quad i = 1, 2, 3 \\ N_4 &= 4L_2 L_3 \\ N_5 &= 4L_1 L_3 \\ N_6 &= 4L_1 L_2 \end{aligned} \qquad (2.26)$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์จากสมการ (2.26) นี้จะถูกนำไปใช้กับวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพื่อแก้ปัญหาพจน์การพา โดยจะได้แสดงรายละเอียดในบทถัดไป

บทที่ 3
วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์

ความซับซ้อนในการแก้ปัญหาการไหลนั้นเป็นผลมาจากความมีลักษณะไม่เชิงเส้นของพจน์การพาในสมการนาเวียร์-สโตกส์ ดังนั้นในบทนี้จะเป็นการนำเสนอระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรง (direct streamline upwind method) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการจัดพจน์การพา โดยจะเริ่มอธิบายถึงรายละเอียดของระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรง และสุดท้ายจะแสดงถึงความสามารถของระเบียบวิธีดังกล่าวในการแก้ปัญหาที่มีพจน์การพา

3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์

ในหัวข้อต่อไปนี้จะนำเสนอระเบียบสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาพจน์การพาซึ่งอยู่ในสมการทรานสปอร์ต (transport equation) โดยทั่ว ๆ ไปนั่นเอง ซึ่งมีขั้นตอนโดยสังเขปดังนี้

เริ่มจากการพิจารณาการแก้ปัญหาสมการทรานสปอร์ตในสองมิติ โดยสมมติว่าทราบค่าสนามความเร็ว (velocity field) ของทุกๆตำแหน่งภายในขอบเขตของปัญหานั้น ๆ และกำหนดให้ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหลมีค่าคงที่ ซึ่งสมการดังกล่าวจะมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\rho u\frac{\partial \phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

โดยที่ ϕ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งอาจเป็นค่าความเร็วในแนวแกน x หรือ y (u, v) หรืออาจเป็นค่าอุณหภูมิ (T) ก็ได้

Γ_{ϕ} คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่ (diffusion coefficient)

จากนั้นทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งเราจะได้สมการสำหรับเอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_{A} N\left(\rho u\frac{\partial \phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dA=\int_{A} N\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right)dA \tag{3.2}$$

การจัดพจน์ทางด้านขวามือของสมการนั้นสามารถทำได้โดยทำการอินทิเกรตโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังนี้

$$\int_{\Omega} u\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\Omega \;=\; \int_{\Gamma} u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)d\Gamma - \int_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\vec{V}\right)d\Omega \qquad (3.3)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.3) กับพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.2) จะพบว่า

$$\left.\begin{aligned} u &= N \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j \\ \vec{V} &= \Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}j \end{aligned}\right\} \quad \left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)$$

และเนื่องจาก $\hat{n}=n_x i+n_y j$ ดังนั้น

$$\vec{V}\cdot\hat{n} = \Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y$$

$$u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) = N\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N}{\partial x}i+\frac{\partial N}{\partial y}j$$

$$\nabla u\cdot\vec{V} = \frac{\partial N}{\partial x}\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

พจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.2) จะกลายมาเป็น

$$\int_{\Omega} N\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)d\Omega = \Gamma_\phi\int_{\Gamma} N\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)d\Gamma$$

$$-\Gamma_\phi\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)d\Omega \qquad (3.4)$$

สมการ (3.4) ที่ได้จากการจัดพจน์การแพร่นี้สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง ส่วนพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.2) จะได้นำเอาระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์มาใช้ในการจัดพจน์ดังกล่าวและเพื่อให้สามารถทำความเข้าใจกับระเบียบวิธีนี้ได้โดยง่าย เราจะเริ่มพิจารณากับปัญหาที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียวก่อนเท่านั้น นั่นคือกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.1) จะลดรูปลงเหลือ

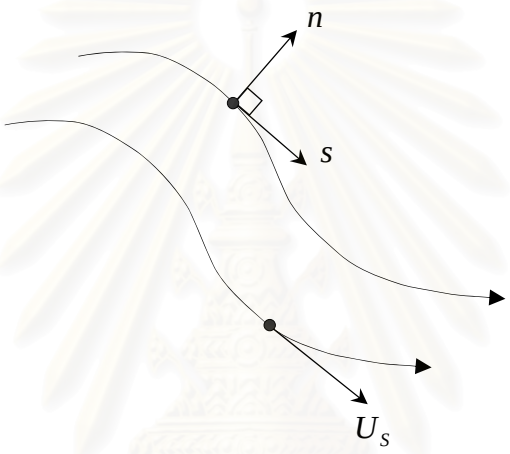
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad (3.5)$$

จากนั้นทำการเขียนสมการ (3.5) ให้อยู่ในระบบพิกัดสตรีมไลน์ดังในรูปที่ 3.1 ซึ่งจะได้สมการในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \qquad (3.6)$$

โดยที่ U_S คือ ความเร็วในแนวเส้นสตรีมไลน์
s คือ แกนที่สัมผัสกับเส้นสตรีมไลน์



รูปที่ 3.1 ระบบพิกัดสตรีมไลน์ (streamline coordinate)

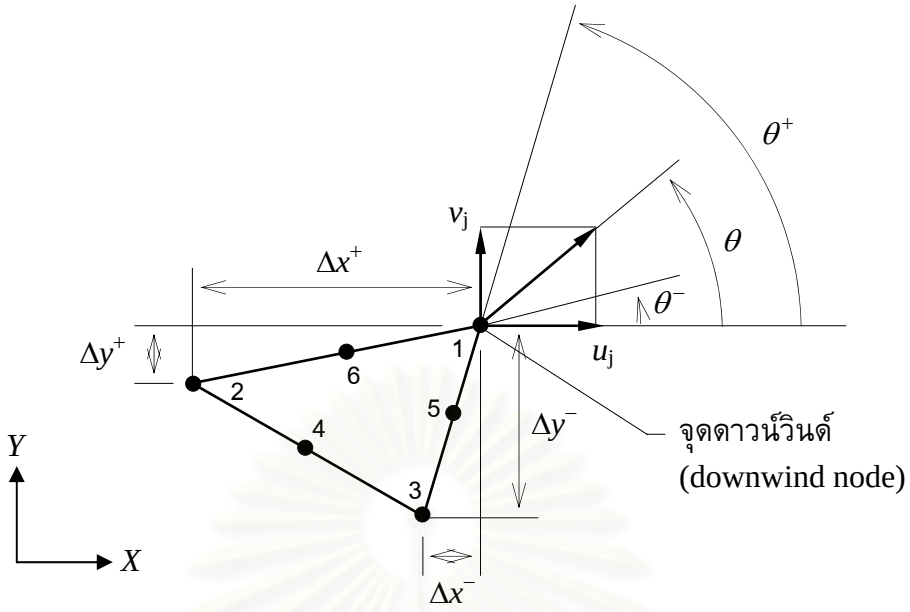
จากสมการ (3.6) จะเห็นได้ว่าค่า ϕ จะมีค่าคงที่ตลอดเส้นสตรีมไลน์ ส่วนบนเอลิเมนต์ที่จะพิจารณานั้น อาจจะสมมติได้ว่า

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{ค่าคงที่} \qquad (3.7)$$

จากข้อสมมติดังกล่าวข้างต้น สามารถเขียนสมการของเอลิเมนต์สำหรับพจน์การพาได้ใหม่ดังนี้

$$\int N \left(\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) dA = \left(\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \int N \, dA \qquad (3.8)$$

สำหรับพจน์ในวงเล็บทางด้านขวาของสมการ (3.8) สามารถหาค่าได้โดยขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.2 แสดงนิยามของจุดดาวน์วินด์ในกรณีจุดมุมของสามเหลี่ยม

พิจารณารูปที่ 3.2 ซึ่งแสดงเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่กำลังพิจารณา จุดต่อที่ 1 กำหนดให้เรียกว่าจุดดาวน์วินด์ (downwind node) ซึ่งมีนิยามว่า จุดต่อใดจะถูกกำหนดให้เป็นจุดดาวน์วินด์ก็ต่อเมื่อทิศทางลบของเวคเตอร์ความเร็วที่จุดต่อนั้นจะต้องมีทิศทางพุ่งเข้าในเอลิเมนต์ [6] โดยจุดต่อที่เป็นจุดดาวน์วินด์จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\tan\theta^- \;\le\; \tan\theta \;\le\; \tan\theta^+ \qquad (3.9)$$

สมการ (3.9) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

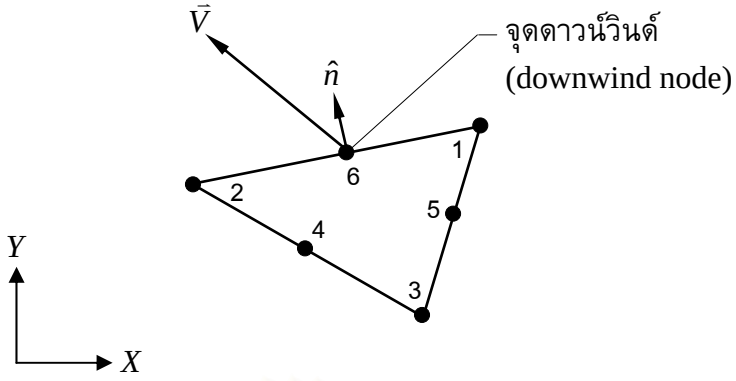
$$-v_j\,\Delta x^- + u_j\,\Delta y^- \;\ge\; 0 \qquad (3.10\text{ก})$$

$$-v_j\,\Delta x^+ + u_j\,\Delta y^+ \;\ge\; 0 \qquad (3.10\text{ข})$$

ซึ่งจุดดาวน์วินด์จะต้องมีคุณสมบัติตามสมการ (3.10ก-ข) ทั้งสองสมการ

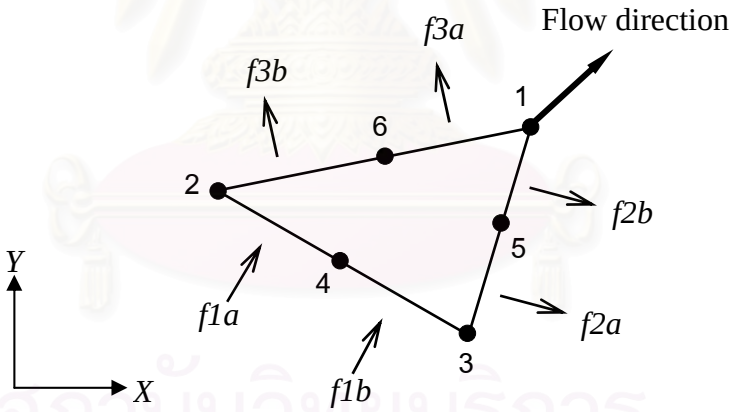
จากตัวอย่างข้างต้น ได้แสดงตัวอย่างในกรณีที่จุดต่อที่มุมของสามเหลี่ยมเป็นจุดดาวน์วินด์ รูปที่ 3.3 จะได้แสดงในกรณีที่จุดต่อที่อยู่ด้านข้างของเอลิเมนต์เป็นจุดดาวน์วินด์ ซึ่งนิยามของจุดต่อที่จะเป็นจุดดาวน์วินด์ได้นั้นยังคงเหมือนกับที่อธิบายในข้างต้น และสามารถตรวจสอบด้วยเงื่อนไขง่าย ๆ ดังนี้

$$\vec{V}\cdot\hat{n} \;\ge\; 0 \qquad (3.11)$$



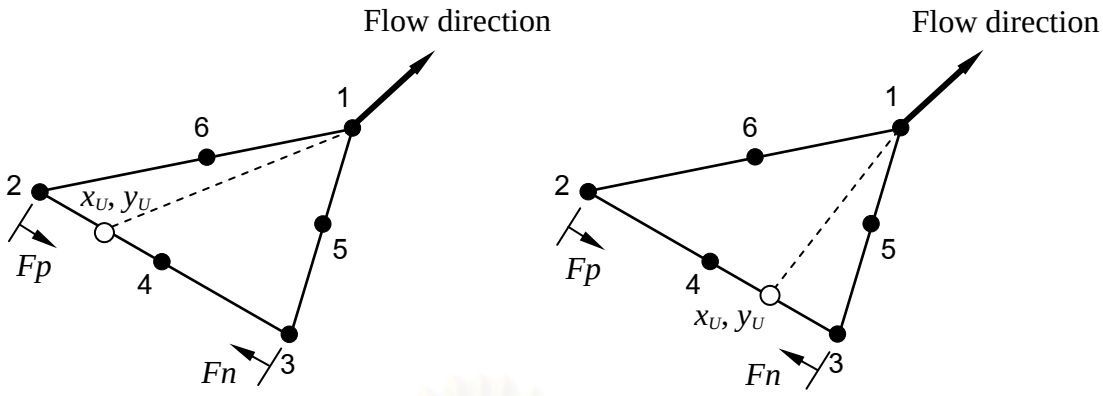
รูปที่ 3.3 จุดต่อด้านข้างที่เป็นจุดดาวน์วินด์

เมื่อทราบจุดดาวน์วินด์ของเอลิเมนต์ใด ๆ แล้ว ต่อไปต้องทำการคำนวณอัตราการไหลของมวล (mass flow rate) ผ่านด้านต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 3.4 ซึ่งได้แก่ *f1a, f1b, f2a, f2b, f3a* และ *f3b* จากนั้นการหาค่าของสมการ (3.8) จำเป็นต้องหาตำแหน่งของจุดอัปวินด์โดยใช้อัตราการไหลของมวลที่คำนวณได้นั่นเอง โดยสามารถแบ่งการหาจุดอัปวินด์ได้เป็น 2 กรณี คือ 1. หาจุดอัปวินด์เมื่อจุดมุมของสามเหลี่ยมเป็นจุดดาวน์วินด์ 2. หาจุดอัปวินด์เมื่อจุดที่อยู่บนด้านของเอลิเมนต์เป็นจุดดาวน์วินด์



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพร้อมอัตราการไหลของมวลที่ด้านต่าง ๆ

รูปที่ 3.5 แสดงการหาจุดอัปวินด์เมื่อจุดมุมของสามเหลี่ยมเป็นจุดดาวน์วินด์ ซึ่งยังคงแบ่งได้เป็นอีก 2 กรณีด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่นถ้าจุดดาวน์วินด์เป็นจุดต่อหมายเลข 1 และอัตราการไหลของมวล $f3a + f3b \leq f1a$ จุดอัปวินด์จะอยู่ระหว่างจุดต่อหมายเลข 2 และ 4 ดังรูปที่ 3.5ก แต่ถ้าอัตราการไหลของมวล $f3a + f3b \geq f1a$ จุดอัปวินด์ก็จะอยู่ระหว่างจุดต่อหมายเลข 4 และ 3 ดังรูปที่ 3.5ข ส่วนตำแหน่งของจุดอัปวินด์ก็จะหาจากการคำนวณสัดส่วนของอัตราการไหลของมวล *Fp* และ *Fn* ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้



(ก) (ข)

รูปที่ 3.5 ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จากจุดดาวน์วินด์ที่เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม

$$Fp = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f3a + f3b}{f1a} ,1 \right\} ,0 \right\} \tag{3.12}$$

$$Fn = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f2a + f2b}{f1b} ,1 \right\} ,0 \right\} \tag{3.13}$$

เมื่อคำนวณหาค่าของ Fp และ Fn แล้ว ตำแหน่งพิกัดของจุดอัปวินด์สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$x_U = (1-Fp)x_2 + (1-Fn)x_3 + (Fp \cdot Fn)x_4 \tag{3.14}$$

$$y_U = (1-Fp)y_2 + (1-Fn)y_3 + (Fp \cdot Fn)y_4 \tag{3.15}$$

โดย x_U และ y_U คือจุดพิกัดของจุดอัปวินด์ ส่วนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่จุดอัปวินด์, ϕ_U สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\phi_U = (1-Fp)\phi_2 + (1-Fn)\phi_3 + (Fp \cdot Fn)\phi_4 \tag{3.16}$$

เมื่อหาค่าต่าง ๆ ได้แล้ว พจน์ในวงเล็บทางด้านขวาของสมการ (3.8) สามารถจัดรูปสำหรับเอลิเมนต์ในรูปที่ 3.2 ที่มีจุดต่อที่ 1 เป็นจุดดาวน์วินด์ได้ดังนี้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} \approx \rho U_S \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \rho U_S \frac{\phi_1 - \phi_U}{\Delta s}$$

แทนค่า ϕ_U จากสมการ (3.16) จะได้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = \rho U_S \frac{\phi_1 + (Fp-1)\phi_2 + (Fn-1)\phi_3 - (Fp \cdot Fn)\phi_4}{\Delta s} \tag{3.17}$$

โดยที่ $$\Delta s = \sqrt{(x_1 - x_U)^2 + (y_1 - y_U)^2} \quad (3.18)$$

$$U_S = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \quad (3.19)$$

จากสมการ (3.8) ค่าของพจน์การพาที่คำนวณได้จากสมการ (3.17) จะต้องนำไปคูณกับพจน์ $\int N\,dA$ ก่อน ซึ่งค่าของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก N สำหรับพจน์การพานี้จะกำหนดให้เท่ากับ 1 ดังนั้นพจน์ $\int N\,dA$ จึงมีค่าเท่ากับพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา ซึ่งตัวอย่างของเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับพจน์การพาในกรณีที่จุดต่อ 1 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียวได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.6ก ส่วนเอลิเมนต์เมตริกซ์ในกรณีที่จุดต่อที่ 2 และ 3 เป็นจุดดาวน์วินด์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.6ข และ 3.6ค ตามลำดับ

$$\rho U_S \frac{A}{\Delta s} \cdot \begin{bmatrix} 1 & (Fp-1) & (Fn-1) & -Fp \cdot Fn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \quad \text{(ก)}$$

$$\rho U_S \frac{A}{\Delta s} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Fn-1) & 1 & (Fp-1) & 0 & -Fp \cdot Fn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \quad \text{(ข)}$$

$$\rho U_S \frac{A}{\Delta s} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Fp-1) & (Fn-1) & 1 & 0 & 0 & -Fp \cdot Fn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \quad \text{(ค)}$$

รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา

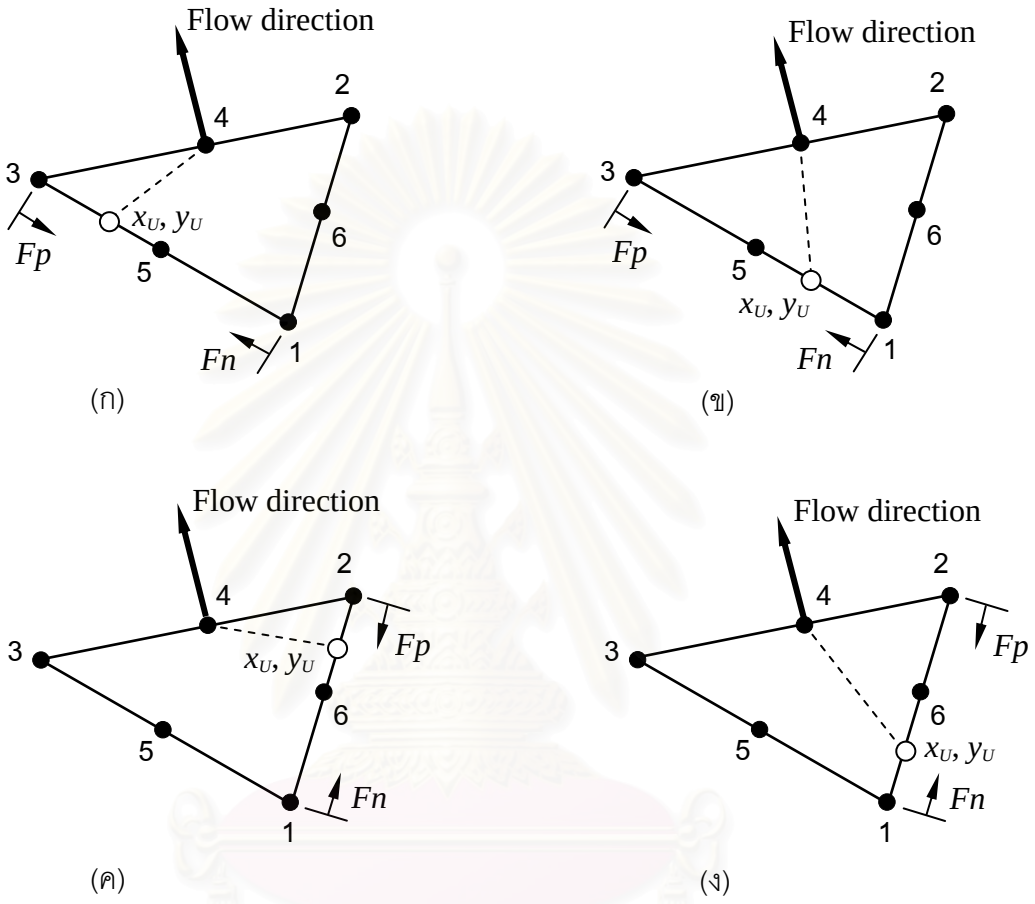
(ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 1 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว

(ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 2 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว

(ค) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 3 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สำหรับกรณีที่จุดต่อด้านข้างเป็นจุดดาวน์วินด์ ยกตัวอย่างเช่นถ้าจุดต่อที่ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์ ตำแหน่งของจุดอัปวินด์สามารถเป็นไปได้ทั้งหมด 4 กรณีด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 3.7(ก-ง) และการพิจารณาว่าจะเป็นกรณีใดนั้น สามารถดูจากอัตราการไหลของมวลตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้ (พิจารณารูปที่ 3.4 ประกอบกับรูปที่ 3.6)



รูปที่ 3.7 ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จากจุดดาวน์วินด์ที่อยู่ด้านข้างของสามเหลี่ยม

กรณีที่ 1 ***f1b < (f2a + f2b)***

ในกรณีที่ 1 นี้ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จะเป็นกรณีที่แสดงในรูปที่ 3.7ก หรือ 3.7ข อย่างใดอย่างหนึ่ง ส่วนตำแหน่งของจุดอัปวินด์จะคำนวณหาจากสัดส่วนของอัตราการไหลของมวล *Fp* และ *Fn* ดังนี้

$$Fp = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f1b}{f2a}, 1 \right\}, 0 \right\} \tag{3.20}$$

$$Fn = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f1b - (f2a + f2b)}{f2b}, 1 \right\}, 0 \right\} \tag{3.21}$$

กรณีที่ 2 ***f1a < (f3a + f3b)***

ในกรณีที่ 2 นี้ตำแหน่งของจุดอัปวินด์จะเป็นกรณีที่แสดงในรูปที่ 3.7ค หรือ 3.7ง อย่างใดอย่างหนึ่ง ส่วนตำแหน่งของจุดอัปวินด์จะคำนวณหาจากสัดส่วนของอัตราการไหลของมวล Fp และ Fn ดังนี้

$$Fp = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f1a}{f3b} , 1 \right\} , 0 \right\} \tag{3.22}$$

$$Fn = \max\left\{ \min\left\{ \frac{f1a - (f3a + f3b)}{f3a} , 1 \right\} , 0 \right\} \tag{3.23}$$

เมื่อคำนวณหาค่าของ Fp และ Fn แล้ว ตำแหน่งพิกัดของจุดอัปวินด์สามารถคำนวณโดยใช้รูปแบบเช่นเดียวกันกับสมการ (3.14) และสมการ (3.15) ส่วนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่จุดอัปวินด์สามารถหาค่าได้โดยรูปแบบเช่นเดียวกันกับสมการ (3.16)

ตัวอย่างเอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาในกรณีจุดต่อที่ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์และอยู่ในกรณีที่ 1 แสดงไว้ในรูปที่ 3.8ก และถ้าเป็นในกรณีที่ 2 แสดงไว้ในรูปที่ 3.8ข

$$\rho U_S \frac{A}{\Delta s} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Fn-1) & 0 & (Fp-1) & 1 & -Fp \cdot Fn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \tag{ก}$$

$$\rho U_S \frac{A}{\Delta s} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Fn-1) & (Fp-1) & 0 & 1 & 0 & -Fp \cdot Fn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \tag{ข}$$

รูปที่ 3.8 เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา

(ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว (กรณีที่ 1)

(ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์กรณีที่จุดต่อ 4 เป็นจุดดาวน์วินด์เพียงจุดเดียว (กรณีที่ 2)

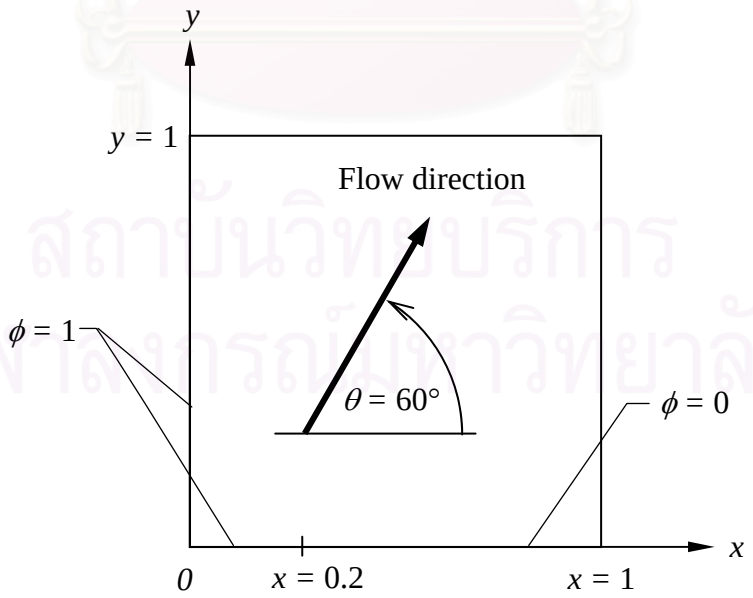
ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้อธิบายในหัวข้อนี้ถูกนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาพจน์การพา โดยในหัวข้อต่อไปจะได้แสดงถึงผลการใช้โปรแกรมที่ได้ประดิษฐขึ้นกับปัญหาตัวอย่างที่มีพจน์การพา

3.2 การแก้ปัญหาที่มีพจน์การพาโดยใช้ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์

ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้แสดงความสามารถของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ โดยจะได้นำไปทดสอบกับปัญหาทั้งหมด 3 ตัวอย่างด้วยกัน โดยที่ปัญหาดังกล่าวมีทั้งที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว และมีทั้งพจน์การพาและการแพร่มาเกี่ยวข้องพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง (advection skew to the mesh)

ตัวอย่างแรกที่จะนำเสนอเป็นปัญหาที่มีแต่พจน์การพาเพียงอย่างเดียว นั่นคือกำหนดให้สัมประสิทธิ์การแพร่มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งปัญหาดังกล่าวมักจะถูกนำมาใช้ในการทดสอบระเบียบวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาพจน์การพา [4-6, 15] โดยที่ขอบเขตของปัญหาจะมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังแสดงในรูปที่ 3.9 และกำหนดให้ความเร็วมีลักษณะคงตัว (uniform) ตลอดภายในขอบเขตของปัญหา พร้อมทั้งกำหนดให้การไหล ไหลทำมุม 60 องศากับแกน x ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น จะเริ่มต้นจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.10 โดยประกอบไปด้วย 3721 จุดต่อ และ 1800 เอลิเมนต์



รูปที่ 3.9 ขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1

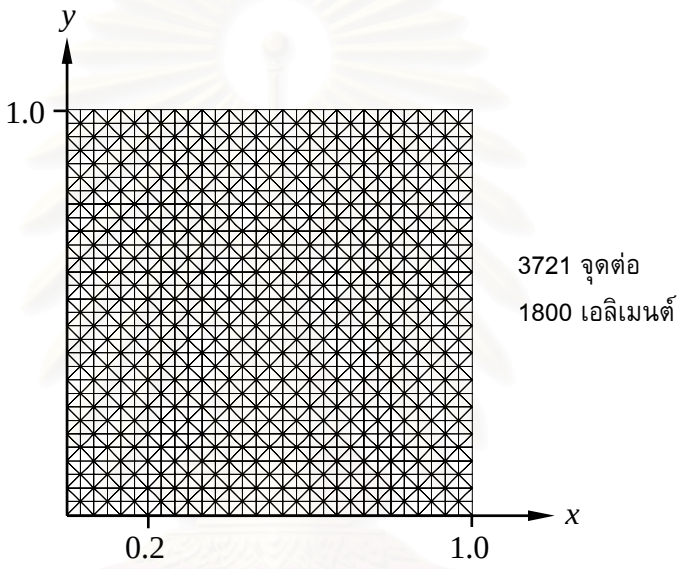
สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตัวอย่างที่ 1

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \tag{3.24}$$

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

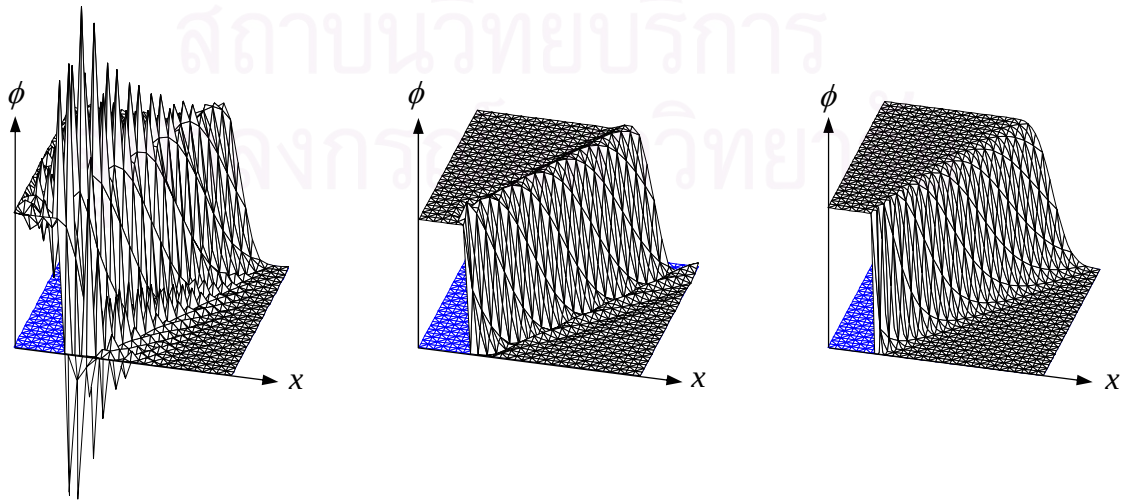
$$\phi = 1 \quad ;\begin{cases} x=0 \\ y=0 \ \wedge \ 0\le x\le 0.2 \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\phi = 0 \quad ; y=0 \ \wedge \ 0.2 < x \le 1 \tag{3.26}$$

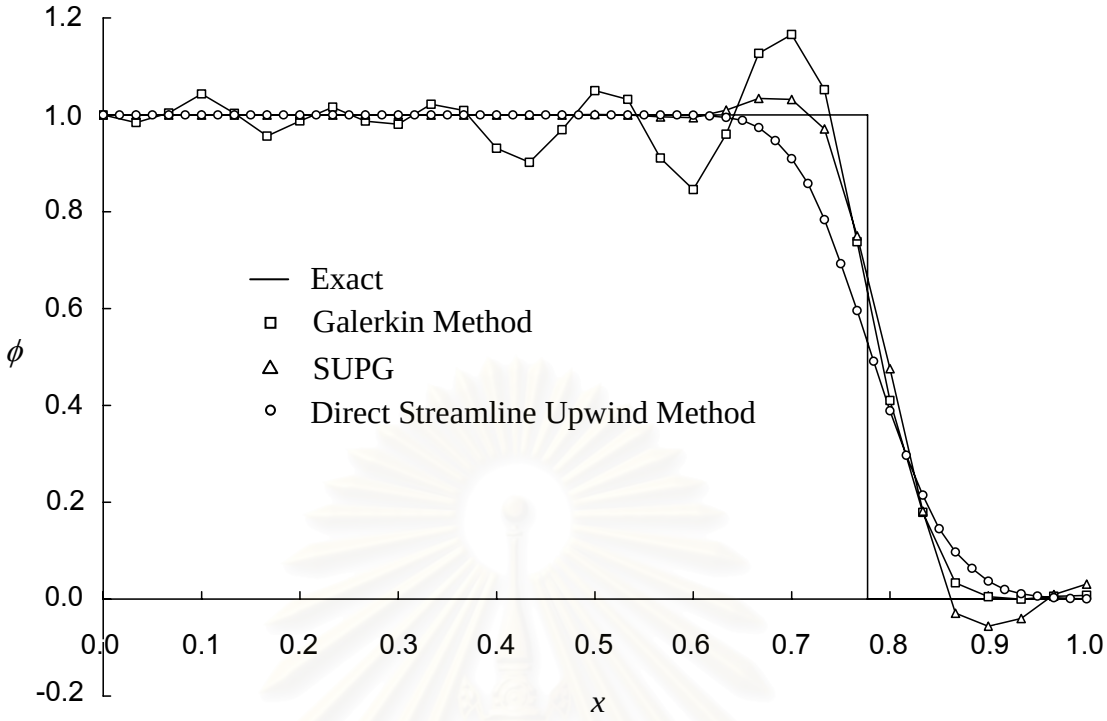


รูปที่ 3.10 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 1

Galerkin SUPG Direct Streamline Upwind



รูปที่ 3.11 ผลการกระจายตัวของค่า ϕ จากระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ใช้แก้ปัญหาพจน์การพา



รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ และวิธีอื่น ๆ กับผลเฉลยแม่นตรงที่มุมการไหลเท่ากับ 60 องศา

จากผลการกระจายตัวของค่า ϕ ที่แสดงในรูปที่ 3.11 พบว่าการใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์คินเพื่อแก้ปัญหาพจน์การพาทำให้ผลลัพธ์เกิดการสั่นเป็นอย่างมาก ส่วนการนำวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพทรอฟ-การ์เลอร์คินมาใช้ในการแก้ปัญหาพจน์การพา ถึงแม้จะให้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นมากแต่ก็ยังเกิดปัญหาการสั่นของคำตอบอยู่ ส่วนการนำวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงมาแก้ปัญหาพจน์การพานั้น ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เกิดการสั่นและให้คำตอบที่มีความถูกต้องในระดับที่น่าพอใจด้วย ส่วนในรูปที่ 3.12 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าของคำตอบที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ และวิธีอื่น ๆ กับผลเฉลยแม่นตรง ที่ตำแหน่ง $y = 1$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงไม่เกิดการสั่น อีกทั้งยังคงให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงด้วย

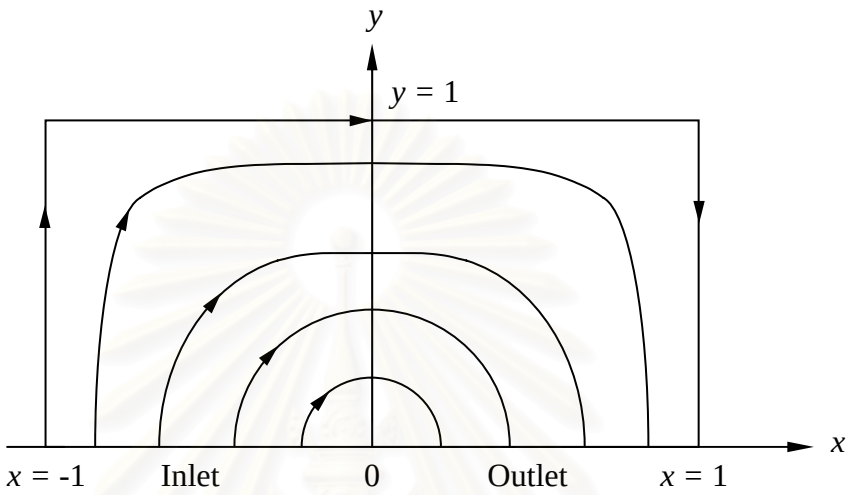
ตัวอย่างที่ 2 กรณีทดสอบของสมิทธ์และฮัตตัน (Smith and Hutton test case)

ตัวอย่างที่สองเป็นปัญหาที่ถูกเสนอโดย Smith and Hutton [16] และใช้เป็นปัญหาในการทดสอบวิธีที่ใช้แก้ปัญหาพจน์การพา การทดสอบกับตัวอย่างนี้จะทำการทดสอบทั้งหมดสองกรณีด้วยกัน คือทดสอบในกรณีที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว และทดสอบในกรณีที่มีทั้งพจน์การพาและการแพร่พร้อมกัน โดยที่โดเมนของปัญหามีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังแสดงในรูปที่ 3.13 และกำหนดให้ความเร็วตลอดภายในขอบเขตของปัญหามีความสัมพันธ์ดังนี้

$$u = 2y(1-x^2) \tag{3.27}$$

$$v = -2x(1-y^2) \tag{3.28}$$



รูปที่ 3.13 ขอบเขตของปัญหาพร้อมเส้นกระแสที่เกิดขึ้น

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตัวอย่างที่ 2

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] \tag{3.29}$$

โดยที่ Pe = ค่าเพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)

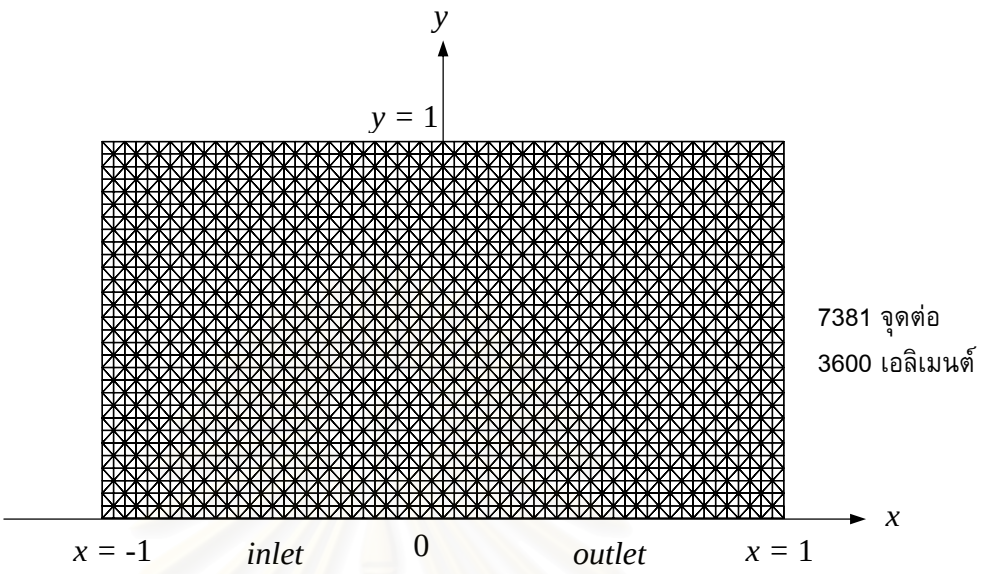
เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

$$\phi = 1 + \tanh\left[(2x+1)10\right] \quad ; \quad y = 0,\ -1 \le x \le 0 \tag{3.30}$$

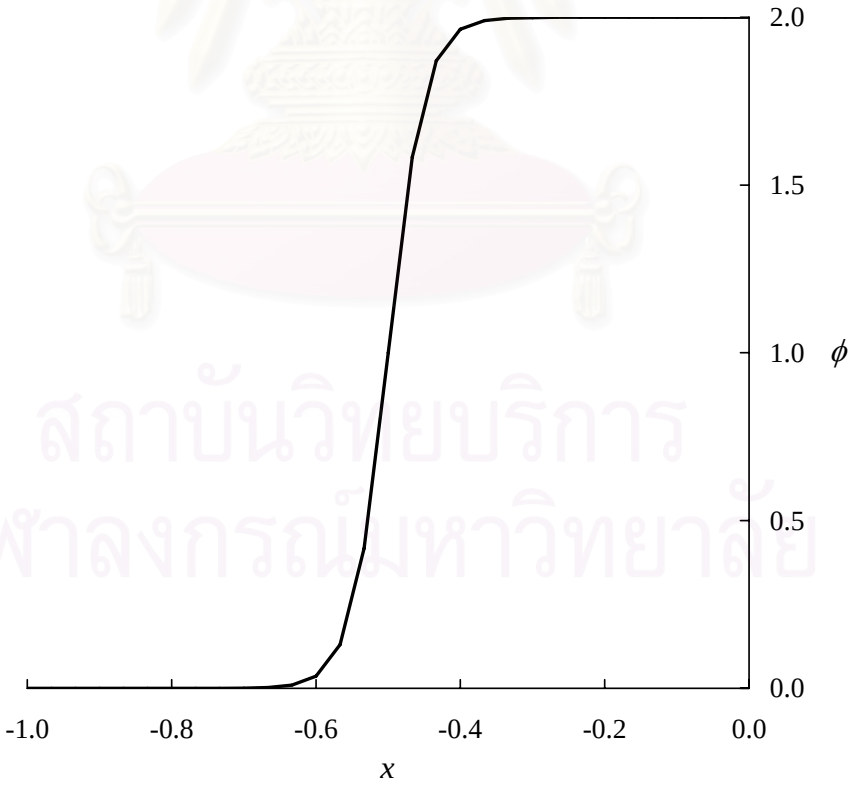
$$\phi = 1 - \tanh 10 \begin{cases} x = -1 & ; \quad 0 \le y \le 1 \\ y = 1 & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ x = 1 & ; \quad 0 \le y \le 1 \end{cases} \tag{3.31}$$

รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.14 ซึ่งประกอบไปด้วย 1891 จุดต่อ และ 3600 เอลิเมนต์ สำหรับลักษณะการกระจายของค่า ϕ บริเวณทางเข้าแสดงไว้ในรูปที่ 3.15 ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีการเปลี่ยนแปลงค่าจาก $\phi = 0$ ที่ตำแหน่ง

x = -1, y = 0 จนถึง ϕ = 2 ที่ x = 0, y = 0 โดยมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันบริเวณตำแหน่งที่ x = -0.5



รูปที่ 3.14 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2



รูปที่ 3.15 ลักษณะการกระจายของค่า ϕ ตลอดขอบทางเข้า

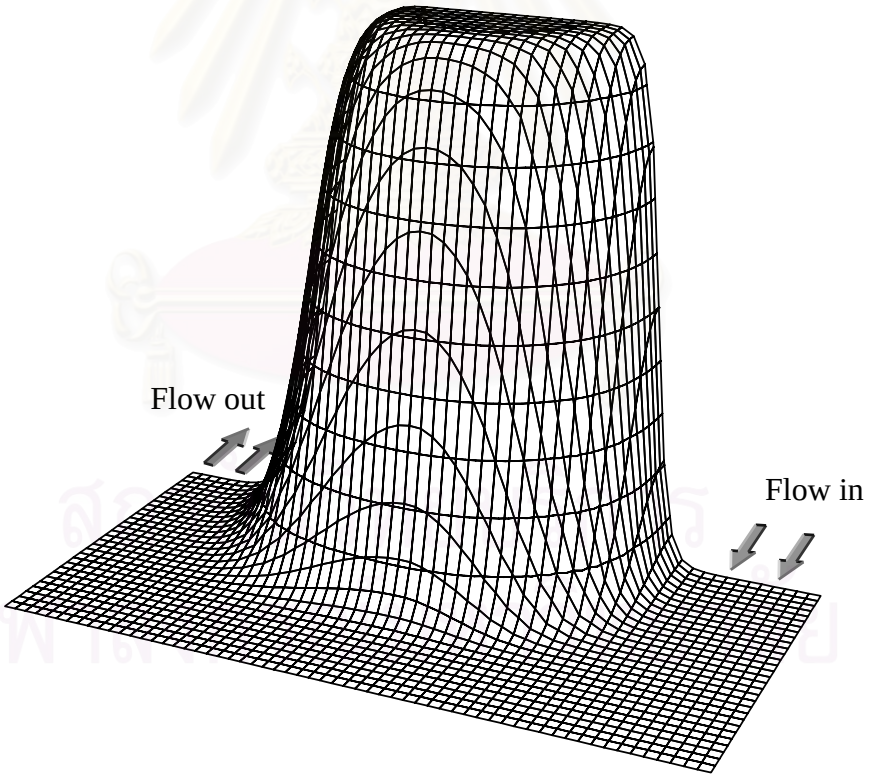
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>กรณีที่ 1</u> **เพกเลตนัมเบอร์มีค่าเท่ากับอนันต์ (Pe = ∞)**

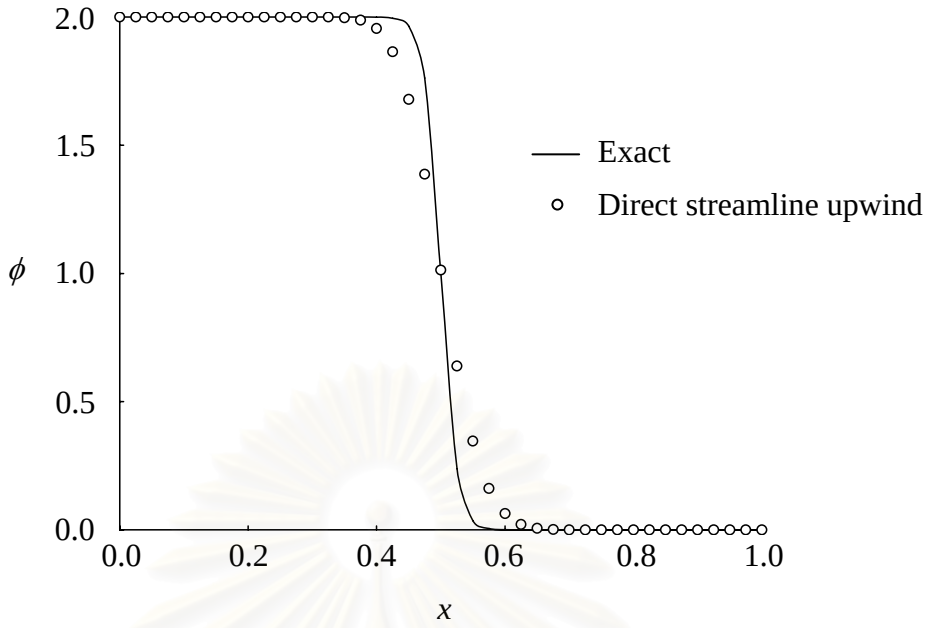
กรณีแรกที่พิจารณานี้เป็นปัญหาที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาในกรณีที่ 1 นี้จะลดรูปจากสมการ (3.29) ลงเป็นสมการ (3.24) ดังนี้

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad (3.24)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีแต่พจน์การพาเพียงอย่างเดียว ดังนั้นลักษณะการกระจายตัวของค่า ϕ ที่ทางเข้าควรจะกระจายตัวไปยังขอบทางด้านออกโดยที่ไม่มีการแพร่เกิดขึ้น จากรูปที่ 3.16 แสดงให้เห็นถึงการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหาที่ค่าเพกเลตนัมเบอร์เท่ากับอนันต์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ ส่วนการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดขอบทางออกที่คำนวณได้นั้นแสดงไว้ในรูปที่ 3.17 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นได้ว่าค่าของ ϕ ที่กำหนดไว้ทางด้านเข้ากระจายตัวไปยังทางด้านออกโดยเกิดการแพร่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น



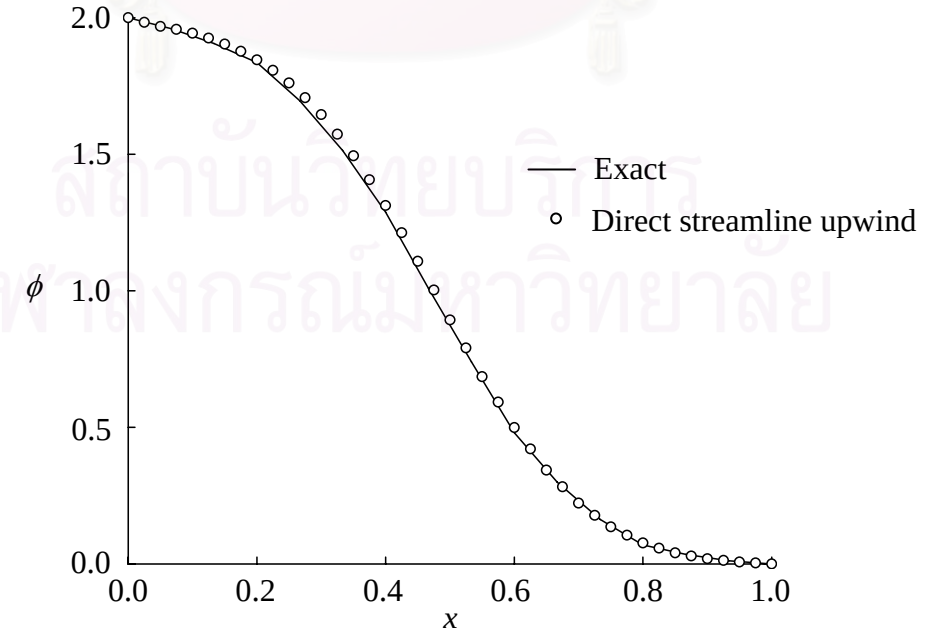
รูปที่ 3.16 การกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 3.17 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = ∞

<u>กรณีที่ 2</u> เพกเลตนัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 100 (Pe = 100)

สำหรับกรณีที่สองนี้เป็นปัญหาที่ผสมผสานกันระหว่างพจน์การพาและพจน์การแพร่ ผลการคำนวณลักษณะการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดขอบทางออกได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.18 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นว่าค่าที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ให้ผลลัพธ์ที่ดี



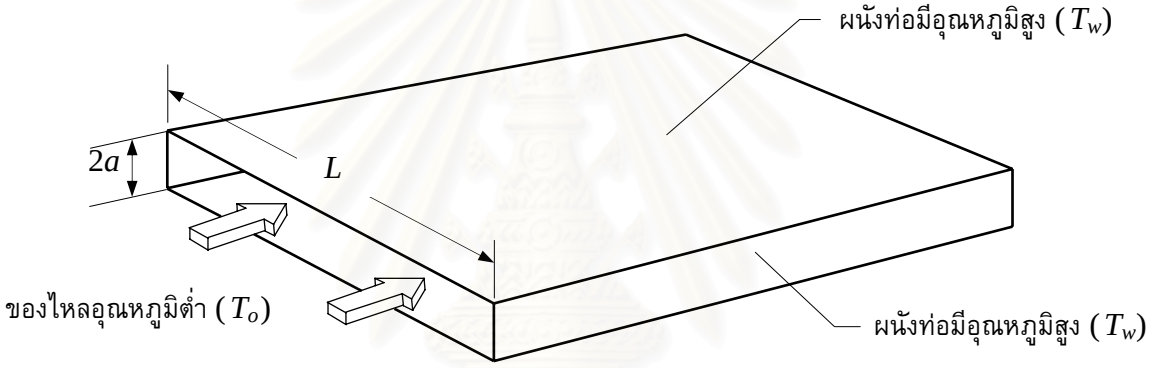
รูปที่ 3.18 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = 100

ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนช่วงการไหลเข้า (thermal entry problem)

ตัวอย่างสุดท้ายเป็นปัญหาการไหลที่มีของไหลอุณหภูมิต่ำไหลเข้าไปภายในท่อที่ให้ความร้อนอยู่ดังแสดงในรูปที่ 3.19 ถ้าสมมติว่าท่อดังกล่าวมีอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของปากทางเข้ามีค่ามากพอ ($L>>2a$) การกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณที่ห่างจากผนังท่อหรือบริเวณกึ่งกลางท่อจะมีลักษณะเป็นสองมิติ ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถอธิบายได้โดยสมการพลังงานภายใต้สถานะอยู่ตัวดังนี้

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + k_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (3.32)$$

โดยที่ $k_x = k_y = k$ = ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของสมการพลังงาน



รูปที่ 3.19 ลักษณะของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน

สมการ (3.32) สามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ [17] โดยกำหนดให้

$$T' = \frac{T-T_O}{T_W-T_O}, \quad u' = \frac{u}{U_m}, \quad v' = \frac{v\,\mathrm{Re}}{2.5\,U_m}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu C_P}{k}$$

$$x' = \frac{2.5\,x}{a\,\mathrm{Re}}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad \mathrm{Re} = \frac{4\,a\,U_m}{\nu},$$

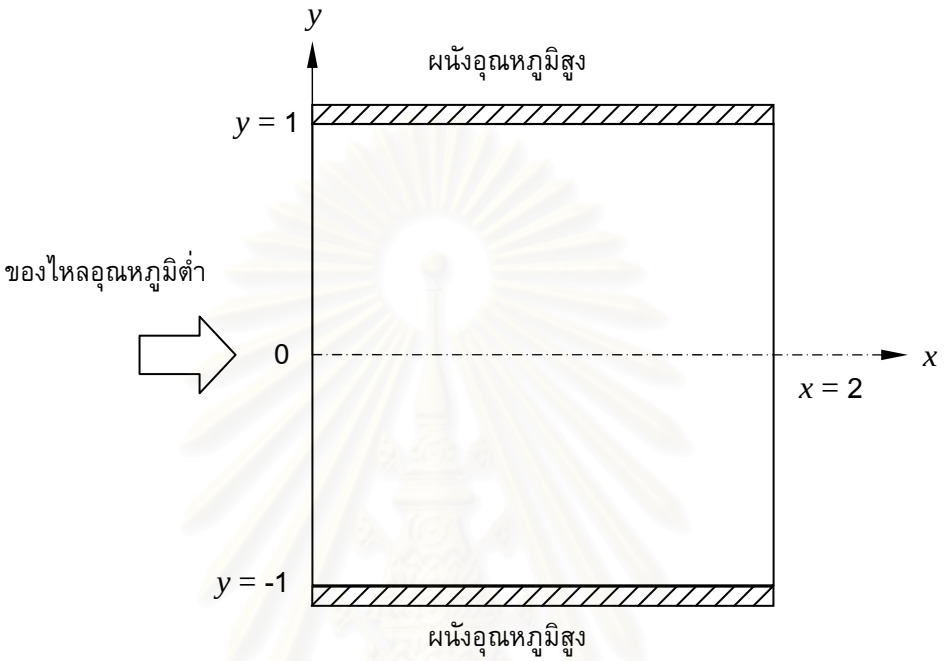
ซึ่งจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v'\frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}\right) + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right) \qquad (3.33)$$

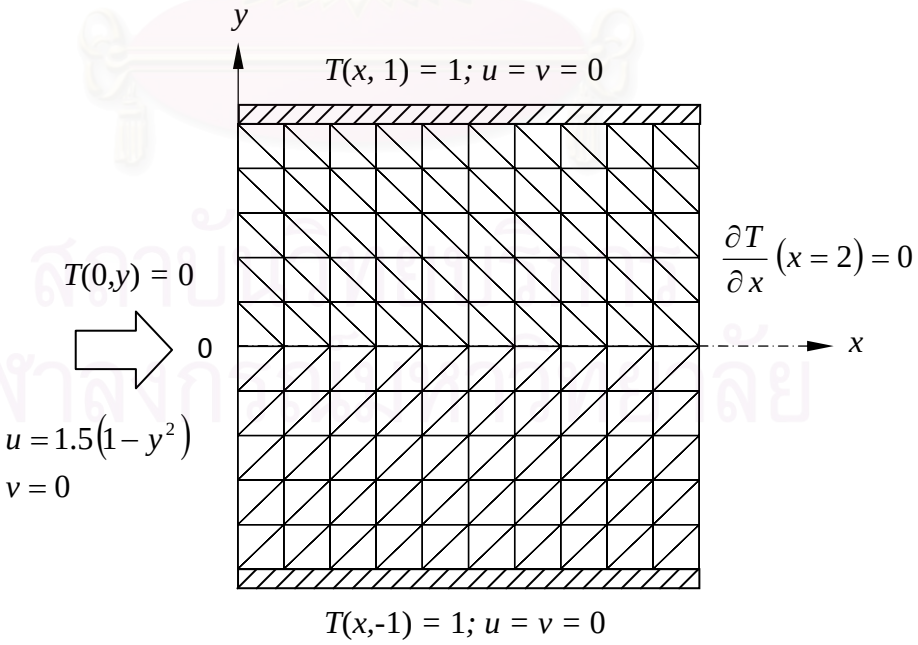
โดยที่ $\alpha_x = \dfrac{10}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^2}$ และ $\alpha_y = \dfrac{1.6}{\mathrm{Pr}}$

สำหรับในส่วนต่อๆไป จะขอละเครื่องหมาย (′) ออกจากตัวแปรไร้มิติ

รูปที่ 3.20 แสดงขอบเขตของปัญหาที่จะใช้ในการคำนวณ ซึ่งมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยมีขอบเขตคือ $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$ ส่วนรูปที่ 3.21 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้ซึ่งประกอบไปด้วย 462 จุดต่อ และ 200 เอลิเมนต์



รูปที่ 3.20 ขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน



รูปที่ 3.21 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขต
ของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

$$T(0,y) = 0 \quad \text{ที่} \quad x = 0 \tag{3.34}$$

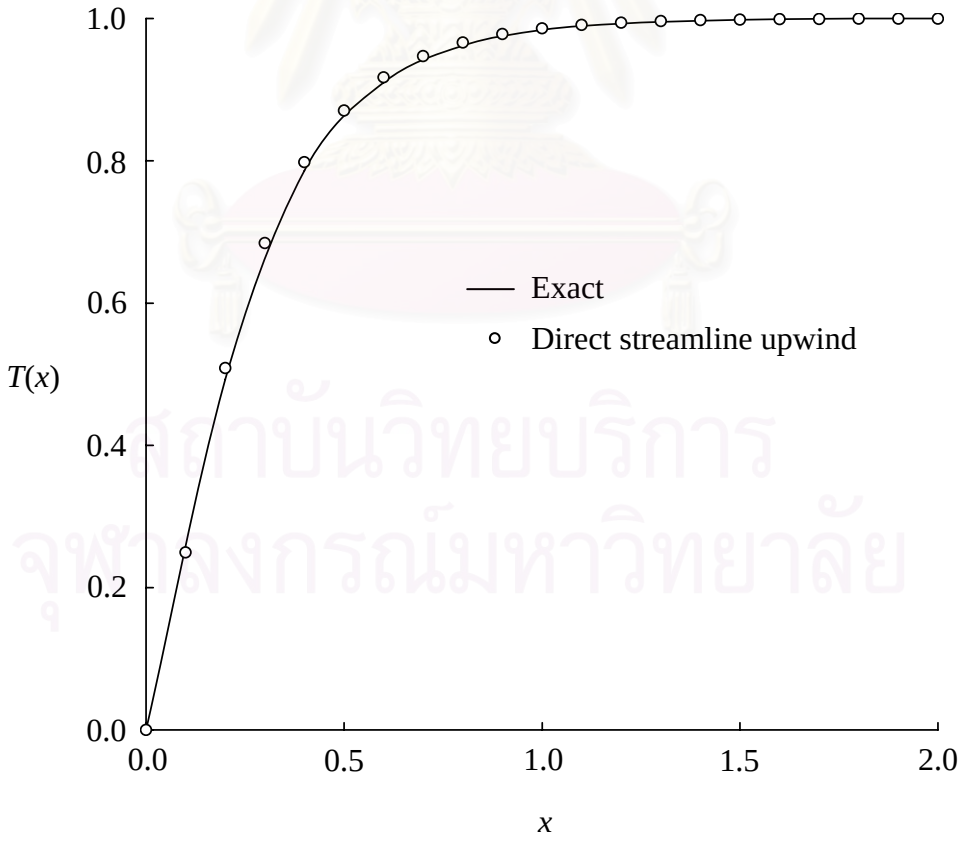
$$T(x,\pm 1) = 1 \quad \text{ที่} \quad y = \pm 1 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{ที่} \quad x = 2 \tag{3.36}$$

สมมติให้การไหลภายในท่อเป็นการไหลเต็มรูปแบบ (fully developed flow) และมีการกระจายตัวของความเร็วดังนี้

$$u = 1.5\left(1-y^2\right), \quad v = 0 \tag{3.37}$$

ผลการคำนวณค่าอุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางของท่อที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.22 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงของ Brown [18] ซึ่งกำหนดค่าของตัวแปรไร้มิติดังนี้ Pr = 0.7 และ Re = 100 จากรูปที่ 3.22 แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 3.22 การเปรียบเทียบอุณหภูมิบริเวณกึ่งกลางท่อกับผลเฉลยแม่นตรง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากปัญหาตัวอย่างทั้งสามที่ได้นำมาใช้ทดสอบระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้นำเสนอในบทนี้จะเห็นได้ว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจ อันแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีดังกล่าวในการแก้ปัญหาพจน์การพา อีกทั้งยังสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย และสามารถนำระเบียบวิธีดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่าง การไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง

ในบทนี้จะแสดงการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว ปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในของไหล และโครงสร้าง สุดท้ายคือปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ โดยจะเริ่มอธิบายตั้งแต่ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะได้กล่าวถึงรายละเอียดของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และอธิบายถึงขั้นตอนการคำนวณโดยใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น สุดท้ายจะแสดงไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

4.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด

จากสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ และสมการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งได้แก่

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\rho f_x \qquad (2.2)$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+\rho f_y \qquad (2.3)$$

$$\rho c\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]+\rho Q \qquad (2.4)$$

จากที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.4 ว่าการนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ขั้นแรกจะต้องทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ โดยในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน x ตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน y ตัวไม่ทราบค่าของความดัน p และตัวไม่ทราบค่าของอุณหภูมิ T ที่จุดต่อทั้งหกของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น จากนั้นกำหนดให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิบนเอลิเมนต์มีลักษณะดังนี้

$$u(x,y) = \lfloor N \rfloor \{u\} \qquad (4.1ก)$$

$$v(x,y) = \lfloor N \rfloor \{v\} \qquad (4.1ข)$$

$$p(x,y) = \lfloor N \rfloor \{ p \} \quad (4.1\text{ค})$$

$$T(x,y) = \lfloor N \rfloor \{ T \} \quad (4.1\text{ง})$$

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณภายใน $\lfloor N \rfloor$ ของทั้งความเร็วและความดันเป็นชนิดเดียวกันซึ่งอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) \quad N_4(x,y) \quad N_5(x,y) \quad N_6(x,y) \rfloor$$

โดยที่

$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i - 1), \quad i = 1, 2, 3 \\ N_4 &= 4L_2 L_3 \\ N_5 &= 4L_1 L_3 \\ N_6 &= 4L_1 L_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

จากนั้นทำการประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์โดยใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างดังที่ได้อธิบายไว้แล้วในบทที่ 2 กับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการ แต่สำหรับในที่นี้จะได้อธิบายวิธีการประยุกต์กับสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x เท่านั้นซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x จะได้

$$\int_\Omega N \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega = -\int_\Omega N \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega N \left(\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (4.3)$$

โดยสมมติให้ไม่มีแรงวัตถุในแนวแกน x (f_x) ส่วนพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (4.3) นั้นจะได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้กล่าวถึงรายละเอียดแล้วในบทที่ 3 มาประยุกต์ใช้ ส่วนพจน์ของการแพร่ (พจน์ที่สองทางด้านขวามือของสมการ (4.3)) นั้นจะใช้การอินทิเกรตโดยทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังอธิบายไว้ในบทที่ 3 แล้วเช่นกัน

ซึ่งภายหลังจากการจัดพจน์ต่างๆ แล้ว สมการของเอลิเมนต์สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]\{u\} = \{R_u\} + \{ R_{px} \} \quad (4.4)$$

โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของสมการ (4.4) ประกอบไปด้วยพจน์จากการพาที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ในการจัด และพจน์ที่ได้จากพจน์ของการแพร่ดังที่ได้แสดงไว้ในพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.4) ส่วนอีกสองพจน์ทางด้านขวาของสมการ (4.4) นั้นมีรายละเอียดดังนี้

$$\{R_u\} = \mu \int_{\Gamma} \{N\} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] d\Gamma \quad (4.5)$$

$$\{R_{px}\} = -\int_{\Omega} \{N\} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \quad (4.6)$$

สำหรับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกันซึ่งจะได้รูปแบบดังนี้

$$[A]\{v\} = \{R_v\} + \{ R_{py} \} + \{R_{by}\} \quad (4.7)$$

และเช่นเดียวกันกับสมการ (4.4) เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ นั้นประกอบไปด้วยพจน์ของการพาและพจน์ของการแพร่ โดยที่พจน์ทั้งสองทางด้านขวาของสมการ (4.7) มีรายละเอียดดังนี้

$$\{R_v\} = \mu \int_{\Gamma} \{N\} \left[\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right] d\Gamma \quad (4.8)$$

$$\{R_{py}\} = -\int_{\Omega} \{N\} \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega \quad (4.9)$$

$$\{R_{by}\} = -\int_{\Omega} \{N\} \rho f_y \, d\Omega \quad (4.10)$$

สำหรับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสมการอนุรักษ์พลังงานนั้นก็สามารถดำเนินการได้เช่นเดียวกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น โดยเริ่มจากการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (2.4) และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์มาประยุกต์เข้ากับพจน์การพา ซึ่งจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสมการอนุรักษ์พลังงานที่อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$[K]\{T\} = \{R\} + \{Q\} \quad (4.11)$$

โดยที่เมตริกซ์ $[K]$ ก็จะประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์การแพร่ในลักษณะที่คล้ายกับเมตริกซ์ $[A]$ ของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง ส่วนเมตริกซ์ $\{R\}$ และ $\{Q\}$ คือเมตริกซ์ที่เกี่ยวกับฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านขอบของเอลิเมนต์ และค่าการผลิตความร้อนภายในตามลำดับ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$\{R\} = k \int_{\Gamma} \{N\} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (4.12)$$

$$\{Q\} = \rho \int_{\Omega} \{N\} Q \, d\Omega \quad (4.13)$$

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวที่จะทำการวิเคราะห์นี้มีทั้งหมด 4 สมการด้วยกัน ซึ่งได้แก่สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสองสมการ สมการอนุรักษ์มวลหนึ่งสมการ และสมการอนุรักษ์พลังงานอีกหนึ่งสมการ ประกอบกับมีตัวไม่ทราบค่า 4 ตัวเช่นเดียวกันด้วย นั่นคือความเร็วในแนวแกนทั้งสอง ความดัน และอุณหภูมิ ถ้ากำหนดให้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการใช้ในการแก้หาค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง และใช้สมการอนุรักษ์พลังงานในการแก้หาค่าอุณหภูมิแล้ว ดังนั้นก็จะเหลือสมการอนุรักษ์มวลที่ต้องนำไปใช้ในการแก้หาค่าความดัน แต่จะเห็นได้ว่าในสมการอนุรักษ์มวลนั้นไม่ปรากฏตัวแปรความดันอยู่เลย ดังนั้นจะต้องใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับความดันที่มีอยู่ในสมการโมเมนตัมมาประยุกต์ร่วมกับสมการอนุรักษ์มวลเพื่อใช้ในการสร้างสมการสำหรับความดัน โดยสามารถทำได้ดังนี้

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับความดันนั้น สามารถทำได้โดยเริ่มจากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการการอนุรักษ์มวลก่อน ดังนี้

$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u + \frac{\partial N_i}{\partial y} v \right) d\Omega + \int_{\Gamma} N_i \left(u n_x + v n_y \right) d\Gamma = 0 \qquad (4.14)$$

นำสมการ (4.4) และ (4.7) มาจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$A_{ii} u_i = -\sum_{j \neq i} A_{ij} u_j + f_i^u - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \qquad (4.15)$$

$$A_{ii} v_i = -\sum_{j \neq i} A_{ij} v_j + f_i^v - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega \qquad (4.16)$$

โดยที่ f_i^u และ f_i^v คือพจน์เงื่อนไขขอบเขตและพจน์อันเนื่องมาจากแรงวัตถุดังแสดงในสมการ (4.5), (4.8) และ (4.10) นั่นเอง

จากนั้นสมมติให้การเปลี่ยนแปลงของความดันตลอดภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$u_i = \hat{u}_i - K_{pi} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4.17)$$

$$v_i = \hat{v}_i - K_{pi} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4.18)$$

โดยที่

$$\hat{u}_i = \frac{-\sum_{j\neq i} A_{ij}u_j + f_i^u}{A_{ii}} \quad (4.19)$$

$$\hat{v}_i = \frac{-\sum_{j\neq i} A_{ij}v_j + f_i^v}{A_{ii}} \quad (4.20)$$

$$K_{pi} = \frac{\int_A N_i d\Omega}{A_{ii}} \quad (4.21)$$

ต่อมานำฟังก์ชันการประมาณภายในของ u และ v จากสมการ (4.1ก) และ (4.1ข) แทนลงในสมการ (4.14) จะได้ว่า

$$-\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j u_j\right)d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j v_j\right)d\Omega + \int_\Gamma N_i\left(un_x + vn_y\right)d\Gamma = 0 \quad (4.22)$$

จากนั้นแทนค่า u_i และ v_i จากสมการ (4.17), (4.18) ลงในสมการ (4.22) แล้วจัดพจน์ใหม่

$$\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial y}d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right)d\Omega$$

$$+\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j \hat{v}_j\right)d\Omega - \int_\Gamma N_i\left(un_x + vn_y\right)d\Gamma \quad (4.23)$$

สุดท้ายแทนฟังก์ชันการประมาณภายในของความดัน (สมการ (4.1ค)) ลงในสมการ (4.23) แล้วจัดพจน์ใหม่ จะสามารถเขียนสมการเอลิเมนต์ของความดันในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left[K_x + K_y\right]\{p\} = \left\{R_{pu}\right\} + \left\{R_{pv}\right\} + \left\{R_b\right\} \quad (4.24)$$

โดยที่

$$\left[K_x\right] = \int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left|\frac{\partial N}{\partial x}\right| d\Omega \quad (4.25)$$

$$\left[K_y\right] = \int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left|\frac{\partial N}{\partial y}\right| d\Omega \quad (4.26)$$

$$\left\{R_{pu}\right\} = \int_\Omega \left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right)\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}d\Omega \quad (4.27)$$

$$\{R_{pv}\} = \int_{\Omega} \left(\sum_j N_j \hat{v}_j \right) \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} d\Omega \quad (4.28)$$

$$\{R_b\} = -\int_{\Gamma} \{N\}\left(un_x + vn_y\right) d\Gamma \quad (4.29)$$

สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้สมการต่าง ๆ ข้างต้นจะเริ่มต้นจากการสมมติความเร็ว ความดันและอุณหภูมิตลอดทั้งขอบเขตก่อน จากนั้นคำนวณหาค่าอุณหภูมิค่าใหม่ภายในขอบเขตโดยใช้สมการ (4.11) แล้วนำค่าอุณหภูมิค่าใหม่ที่ได้มาใช้ร่วมในการคำนวณหาค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.4) และ (4.7) เมื่อได้ค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อแล้วนำค่าเหล่านี้ไปคำนวณหาค่าความดันค่าใหม่ที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.24) สุดท้ายใช้ค่าความดันใหม่ที่ได้มาทำการปรับปรุงค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.15) และ (4.16) ขั้นตอนการคำนวณดังกล่าวจะดำเนินซ้ำเป็นวงรอบจนกว่าค่าของคำตอบที่ต้องการจะลู่เข้า

4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในของไหลและโครงสร้าง

สำหรับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในของไหลและของแข็งนั้น สามารถนำสมการ (4.11) มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาได้โดยทันที โดยถ้าจะทำการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในโครงสร้าง ก็เพียงแต่กำหนดให้ค่าความเร็วในแนวแกน x และ y ภายในสมการ (4.11) มีค่าเท่ากับศูนย์เท่านั้น ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการสมการเอลิเมนต์และขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณที่ได้อธิบายไปในหัวข้อที่ 4.1 นั้น ไม่เพียงแต่จะสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้เท่านั้น ยังสามารถนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในตัวของไหลเองและภายในโครงสร้างได้โดยทันที ทำให้เกิดความสะดวกในการวิเคราะห์ปัญหาเป็นอย่างมาก

4.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นในโครงสร้างอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นในโครงสร้างอันเนื่องมาจากอุณหภูมิสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเช่นกัน จากสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของแรงในสองมิติดังแสดงในบทที่ 2

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (2.8ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (2.8ข)$$

ทำการประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการ (2.8ก) ดังนี้

$$\int_{\Omega} \{N\} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \qquad (4.30)$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เข้ากับสมการ (4.30) จะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial N}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \{N\} \left(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \right) d\Gamma \qquad (4.31)$$

ในทำนองเดียวกัน ทำการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการ (2.8ข) จะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial N}{\partial y} \sigma_y \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \{N\} \left(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \right) d\Gamma \qquad (4.32)$$

จากนั้นกำหนดให้แรงที่กระทำกับขอบนอกของโครงสร้าง เช่น ความดัน หรือแรงที่กระทำที่ผิว สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \qquad (4.33)$$

แทนความสัมพันธ์ดังสมการ (4.33) ลงในสมการ (4.31) และ (4.32) แล้วจัดสมการใหม่ ให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Gamma, \quad i = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (4.34)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่เข้าใจได้ง่ายขึ้นดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Gamma \qquad (4.35)$$

โดยที่

$$\underset{(3\times12)}{[B]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (4.36ก)$$

$$\underset{(2\times12)}{[N]} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \qquad (4.36ข)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

$$\underset{(3\times1)}{\{\sigma\}} = \underset{(3\times3)}{[C]}\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon - \varepsilon_0\}} \qquad (4.37)$$

โดย $\{\varepsilon_0\}$ คือค่าความเครียดชั้นต้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\}\left(T(x,y) - T_0\right)$$

และเมตริกซ์ $[C]$ และ $\{\alpha\}$ ก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาว่าเป็นแบบความเค้นในระนาบ (plane stress) หรือความเครียดในระนาบ (plane strain) ซึ่งในกรณีของความเค้นในระนาบ

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.38ก)$$

และกรณีของความเครียดในระนาบ

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha(1+\nu) \\ \alpha(1+\nu) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.38ข)$$

สำหรับความเครียดนั้นก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวได้ดังแสดงในสมการ (2.10)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.10}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon\}} = \underset{(3\times12)}{[B]}\ \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} \tag{4.39}$$

โดยที่ $$\underset{(12\times1)}{\{\delta\}^T} = \lfloor\, u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \,\rfloor \tag{4.40}$$

แทนค่าสมการ (4.37), (4.39) และ (4.40) ลงในสมการ (4.35) แล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ดังนี้

$$\int_\Omega [B]^T [C][B]\, d\Omega\, \{\delta\} = \int_\Omega [B]^T [C]\{\varepsilon_0\}\, d\Omega + \int_\Gamma [N]^T \{F\} d\Gamma \tag{4.41}$$

เพื่อให้สามารถเข้าใจได้ง่ายต่อการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สามารถจัดรูปสมการ (4.41) ให้อยู่ในรูปแบบที่สั้นขึ้นได้ดังนี้

$$\underset{(12\times12)}{[K]}\ \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(12\times1)}{\{F_0\}} + \underset{(12\times1)}{\{F_T\}} \tag{4.42}$$

โดยที่

$$\underset{(12\times12)}{[K]} = \int_\Omega \underset{(12\times3)}{[B]^T}\ \underset{(3\times3)}{[C]}\ \underset{(3\times12)}{[B]}\, d\Omega \tag{4.43}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_0\}} = \int_\Omega \underset{(12\times3)}{[B]^T}\ \underset{(3\times3)}{[C]}\ \underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_0\}}\, d\Omega \tag{4.44}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_T\}} = \int_\Gamma \underset{(12\times3)}{[N]^T}\ \underset{(3\times1)}{\{F\}}\, d\Gamma \tag{4.45}$$

ในที่นี้ $[K]$ แทนเมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง $\{F_0\}$ แทนโหลดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากความเค้นชั้นต้น และ $\{F_T\}$ แทนโหลดเวกเตอร์ของแรงที่ผิว

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.4 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ดังในสมการที่ได้แสดงข้างต้นนั้นสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่าย วิธีการดังกล่าวจะได้แสดงในหัวข้อนี้

4.4.1 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการโมเมนตัม

เริ่มจากสมการของโมเมนตัมทั้งสองสมการ นั่นคือจากสมการ (4.4) และ (4.7)

$$[A]\{u\} = \{R_u\} + \{ R_{px} \} \tag{4.4}$$

$$[A]\{v\} = \{R_v\} + \{ R_{py} \} + \{R_{by}\} \tag{4.7}$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของทั้งสองสมการนั้นประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์จากการแพร่นั่นคือ

$$[A] = [A_{conv}] + [A_{diff}]$$

โดยที่ $[A_{conv}]$ = สามารถหาได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ในบทที่ 3

$$[A_{diff}] = \mu \int_{\Omega} \left[\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega \tag{4.46}$$

การจัดรูปสมการ (4.46) จะเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ $\{N_i\},\ i = 1, 2, \ldots, 6$ ให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ใหม่ได้ดังนี้

$$\underset{(6\times1)}{\{N\}} = \underset{(6\times6)}{[A_m]^T} \ \underset{(6\times1)}{\{R\}} \tag{4.47}$$

และกำหนดให้ $\{H\} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$ (4.48)

โดย

$$[A_m]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2L_3 \\ L_1L_3 \\ L_1L_2 \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} &= [A_m]^T \left\{\frac{\partial R}{\partial x}\right\} \\ &= [A_m]^T \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \\ &= [A_m]^T [B_m]^T \{H\} \end{aligned} \tag{4.51}$$

และ

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\} &= [A_m]^T \left\{\frac{\partial R}{\partial y}\right\} \\ &= [A_m]^T \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \\ &= [A_m]^T [C_m]^T \{H\} \end{aligned} \tag{4.52}$$

ดังนั้นพจน์แรกของสมการ (4.46) สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x}\right] d\Omega &= \int_\Omega [A_m]^T [B_m]^T \{H\} \{H\} [B_m] [A_m] \, d\Omega \\ &= [A_m]^T [B_m]^T \int_\Omega \{H\}\{H\} \, d\Omega \, [B_m] [A_m] \end{aligned}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= [A_m]^T[B_m]^T[G][B_m][A_m] \quad (4.53)$$

โดยที่ $$\underset{(3\times3)}{[G]} = \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ส่วนพจน์ที่สองของสมการ (4.46) ก็สามารถจัดรูปได้ในลักษณะเช่นเดียวกันได้ดังนี้

$$\int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega = [A_m]^T[C_m]^T[G][C_m][A_m] \quad (4.54)$$

ทำให้สมการ (4.46) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ที่พร้อมนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ดังนี้

$$[A_{diff}] = \mu\left([A_m]^T[B_m]^T[G][B_m][A_m] + [A_m]^T[C_m]^T[G][C_m][A_m]\right) \quad (4.55)$$

ส่วนทางด้านขวามือของสมการ (4.4) และ (4.7) นั้นสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_{px}\} = -\int_\Omega \{N\}\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega = -\int_\Omega \{N\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega\,\{p\}$$

$$= -\int_\Omega \{N\}\lfloor H\rfloor[B_m][A_m]d\Omega\,\{p\}$$

$$= -\int_\Omega \{N\}\lfloor H\rfloor d\Omega\,[B_m][A_m]\{p\}$$

โดยพจน์อินทิกรัลสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$-\int_\Omega \{N\}\lfloor H\rfloor d\Omega = \int_\Omega \begin{Bmatrix} L_1(2L_1-1) \\ L_2(2L_2-1) \\ L_3(2L_3-1) \\ 4L_2L_3 \\ 4L_1L_3 \\ 4L_1L_2 \end{Bmatrix}\lfloor L_1 \quad L_2 \quad L_3\rfloor\, d\Omega$$

สำนักวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1^2(2L_1-1) & L_1L_2(2L_1-1) & L_1L_3(2L_1-1) \\ L_2L_1(2L_2-1) & L_2^2(2L_2-1) & L_2L_3(2L_2-1) \\ L_3L_1(2L_3-1) & L_3L_2(2L_3-1) & L_3^2(2L_3-1) \\ 4L_1L_2L_3 & 4L_2^2L_3 & 4L_2L_3^2 \\ 4L_1^2L_3 & 4L_1L_2L_3 & 4L_1L_3^2 \\ 4L_1^2L_2 & 4L_1L_2^2 & 4L_1L_2L_3 \end{bmatrix} d\Omega$$

$$= -\frac{A}{60} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \underset{(6\times3)}{[S]}$$

ดังนั้น

$$\underset{(6\times1)}{\{R_{px}\}} = -\int_{\Omega} \{N\}\lfloor H \rfloor d\Omega \, [B_m][A_m]\{p\} = \underset{(6\times3)}{[S]}\,\underset{(3\times6)}{[B_m]}\,\underset{(6\times6)}{[A_m]}\,\underset{(6\times1)}{\{p\}} \qquad (4.56)$$

$$\underset{(6\times1)}{\{R_{py}\}} = -\int_{\Omega} \{N\}\lfloor H \rfloor d\Omega \, [C_m][A_m]\{p\} = \underset{(6\times3)}{[S]}\,\underset{(3\times6)}{[C_m]}\,\underset{(6\times6)}{[A_m]}\,\underset{(6\times1)}{\{p\}} \qquad (4.57)$$

สำหรับพจน์อินทิเกรตขอบเขตทางด้านขวาของสมการ (4.4) และ (4.7) $(\{R_u\}, \{R_v\})$ นั้น พจน์ต่างๆ เหล่านี้จะตัดกันหมดไปภายในขอบเขตของปัญหาจึงไม่จำเป็นต้องหาค่า

ส่วนพจน์ $\{R_{by}\}$ ของสมการ (4.7) สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_{by}\} = -\int_{\Omega} \{N\}\rho f_x \, d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \{N\}[\rho g(1-\beta(T-T_o))]d\Omega$$

$$= -\rho g \int_{\Omega} \{N\}[1-\beta T+\beta T_o]d\Omega$$

$$= \underbrace{\rho g \int_{\Omega} \{N\}[\beta T]d\Omega}_{\text{I}} - \underbrace{\rho g \int_{\Omega} \{N\}[1+\beta T_o]d\Omega}_{\text{II}}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หาค่าพจน์ที่ I

$$\rho g \int_{\Omega} \{N\}[\beta T]\, d\Omega \;=\; \rho g \beta \int_{\Omega} \{N\}\lfloor N \rfloor\, d\Omega \,\{T\}$$

โดยพจน์ในอินทิกรัลสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \{N\}\lfloor N \rfloor\, d\Omega \;=\; \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 & N_1N_5 & N_1N_6 \\ & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 & N_2N_5 & N_2N_6 \\ & & N_3^2 & N_3N_4 & N_3N_5 & N_3N_6 \\ & & & N_4^2 & N_4N_5 & N_4N_6 \\ & & & & N_5^2 & N_5N_6 \\ sym & & & & & N_6^2 \end{bmatrix} d\Omega$$

$$= \frac{A}{180} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ & 3 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & -4 \\ & & & 32 & 16 & 16 \\ & & & & 32 & 16 \\ sym & & & & & 32 \end{bmatrix} \;=\; \underset{(6\times 6)}{[N2]}$$

หาค่าพจน์ที่ II

$$\rho g \int_{\Omega} \{N\}[1+\beta T_o]\, d\Omega \;=\; \rho g [1+\beta T_o] \int_{\Omega} \{N\} d\Omega$$

$$= \frac{\rho g [1+\beta T_o] A}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\{R_{by}\} = \rho g \beta [N2]\{T\} \;-\; \frac{\rho g [1+\beta T_o] A}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.58)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.4.2 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการความดัน

จากสมการ (4.24)

$$\left[K_x + K_y\right]\{p\} \quad = \quad \{R_u\}+\{R_v\}+\{R_b\ \} \tag{4.24}$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของความดันสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\left[K_p\right] \quad = \quad \left[K_x\right] \quad + \quad \left[K_y\right]$$

$$= \int_{\Omega}\left[\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left(N_j K_j\right)\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\right]+\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left(N_j K_j\right)\left[\frac{\partial N_i}{\partial y}\right]\right] d\Omega$$

โดยที่

$$\left[K_x\right] \quad = \quad \int_{\Omega}\left[\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left(N_i K_i\right)\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]\right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega}\left[A_m\right]^T\left[B_m\right]^T\{H\}(N_i K_i)\{H\}\left[B_m\right]\left[A_m\right] d\Omega$$

$$= \left[A_m\right]^T\left[B_m\right]^T \int_{\Omega}\{H\}(N_i K_i)\{H\}\, d\Omega \ \left[B_m\right]\left[A_m\right]$$

โดยพจน์ในอินทิกรัลสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\int_{\Omega}\{H\}(N_i K_i)\{H\}\, d\Omega \quad = \quad \int_{\Omega}\begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3 \\ L_1L_2 & L_2^2 & L_2L_3 \\ L_1L_3 & L_2L_3 & L_3^2 \end{bmatrix}(N_i K_i)\, d\Omega$$

$$= \frac{A}{45}\begin{bmatrix} K_4+3K_5+3K_6 & K_4+K_5+2K_6 & K_4+2K_5+K_6 \\ & 3K_4+K_5+3K_6 & 2K_4+K_5+K_6 \\ sym & & 3K_4+3K_5+K_6 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(3\times3)}{\left[W\right]}$$

ดังนั้น

$$\underset{(6\times6)}{\left[K_x\right]} \quad = \quad \underset{(6\times6)}{\left[A_m\right]^T}\underset{(6\times3)}{\left[B_m\right]^T}\ \underset{(3\times3)}{\left[W\right]}\ \underset{(3\times6)}{\left[B_m\right]}\underset{(6\times6)}{\left[A_m\right]} \tag{4.59}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และเช่นเดียวกัน $$\underset{(6\times6)}{\left[K_y\right]} = \underset{(6\times6)}{\left[A_m\right]^T}\underset{(6\times3)}{\left[C_m\right]^T}\underset{(3\times3)}{\left[W\right]}\underset{(3\times6)}{\left[C_m\right]}\underset{(6\times6)}{\left[A_m\right]} \quad (4.60)$$

การสร้างเมตริกซ์ต่าง ๆ ทางด้านขวาของสมการ (4.24) มีขั้นตอนดังนี้
พจน์ $\{R_u\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_u\} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}(N_i\hat{u}_i)\,d\Omega = \int_\Omega [A]^T[B]^T\{H\}(N_i\hat{u}_i)\,d\Omega$$

$$= [A]^T[B]^T\int_\Omega \{H\}(N_i\hat{u}_i)\,d\Omega$$

โดยพจน์ในอินทิกรัลคำนวณได้ดังนี้

$$\int_\Omega \{H\}(N_i\hat{u}_i)\,d\Omega = \int_\Omega \begin{Bmatrix} L_1(N_1\hat{u}_1+N_2\hat{u}_2+N_3\hat{u}_3+N_4\hat{u}_4+N_5\hat{u}_5+N_6\hat{u}_6)\\ L_2(N_1\hat{u}_1+N_2\hat{u}_2+N_3\hat{u}_3+N_4\hat{u}_4+N_5\hat{u}_5+N_6\hat{u}_6)\\ L_3(N_1\hat{u}_1+N_2\hat{u}_2+N_3\hat{u}_3+N_4\hat{u}_4+N_5\hat{u}_5+N_6\hat{u}_6)\end{Bmatrix} d\Omega$$

$$= \frac{A}{60}\begin{Bmatrix} 2\hat{u}_1-\hat{u}_2-\hat{u}_3+4\hat{u}_4+8\hat{u}_5+8\hat{u}_6\\ -\hat{u}_1+2\hat{u}_2-\hat{u}_3+8\hat{u}_4+4\hat{u}_5+8\hat{u}_6\\ -\hat{u}_1-\hat{u}_2+2\hat{u}_3+8\hat{u}_4+8\hat{u}_5+4\hat{u}_6\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\{R_u\} = \frac{A}{60}[A]^T[B]^T\begin{Bmatrix} 2\hat{u}_1-\hat{u}_2-\hat{u}_3+4\hat{u}_4+8\hat{u}_5+8\hat{u}_6\\ -\hat{u}_1+2\hat{u}_2-\hat{u}_3+8\hat{u}_4+4\hat{u}_5+8\hat{u}_6\\ -\hat{u}_1-\hat{u}_2+2\hat{u}_3+8\hat{u}_4+8\hat{u}_5+4\hat{u}_6\end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

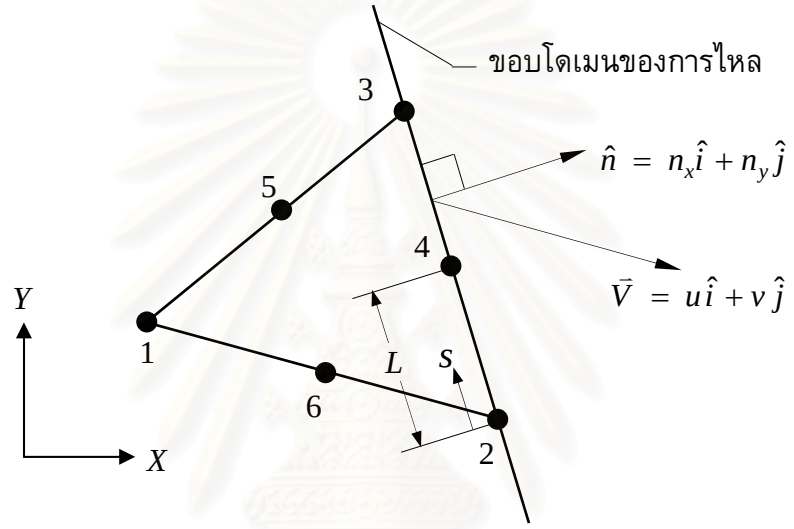
ส่วนพจน์ $\{R_v\}$ ก็สามารถหาค่าได้ในรูปแบบเดียวกัน

$$\{R_v\} = \frac{A}{60}[A]^T[C]^T\begin{Bmatrix} 2\hat{v}_1-\hat{v}_2-\hat{v}_3+4\hat{v}_4+8\hat{v}_5+8\hat{v}_6\\ -\hat{v}_1+2\hat{v}_2-\hat{v}_3+8\hat{v}_4+4\hat{v}_5+8\hat{v}_6\\ -\hat{v}_1-\hat{v}_2+2\hat{v}_3+8\hat{v}_4+8\hat{v}_5+4\hat{v}_6\end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

พจน์ $\{R_b\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_b\} = -\int_\Gamma \{N\}\left(u\,n_x+v\,n_y\right)d\Gamma \quad (4.29)$$

เนื่องจากเป็นพจน์การอินทิเกรตขอบเขต ดังนั้นภายในขอบเขตของปัญหาพจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไป เหลือที่จะต้องคำนวณเฉพาะบริเวณขอบเขตรอบนอกของโดเมนเท่านั้น หากพิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 4.1 ซึ่งมีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-4-3 เป็นขอบที่อยู่รอบนอกของโดเมนการไหล เพื่อการคำนวณที่ง่ายขึ้นจึงอาจแยกการอินทิเกรตตลอดขอบดังกล่าวออกเป็น 2 ช่วงคือช่วงระหว่างจุดต่อ 2-4 และ 4-3 ทำให้ในแต่ละช่วงนั้นลักษณะการกระจายตัวของฟังก์ชันความเร็วตามขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-4 และ 4-3 จะมีลักษณะเชิงเส้น โดยแต่ละช่วงมีความยาว L ดังที่แสดงในรูปที่ 4.1 ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ ในรูปแบบของสูตรอินทิเกรตที่สอดคล้องกับขอบ 2-4 นี้คือ



รูปที่ 4.1 การคำนวณพจน์ $\{R_b\}$ ที่บริเวณขอบรอบนอกของโดเมนการไหล

$$-\int_0^L \left(u_{24}\,n_x + v_{24}\,n_y\right)\begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds \quad = \quad -\left(u_{24}\,n_x + v_{24}\,n_y\right)\int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds$$

$$\{R_b\}_{2-4} \quad = \quad -\left(u_{24}\,n_x + v_{24}\,n_y\right)\frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ส่วนขอบ 4-3 ก็จะได้ในลักษณะเดียวกันนั่นคือ

$$\{R_b\}_{4-3} \quad = \quad -\left(u_{43}\,n_x + v_{43}\,n_y\right)\frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ขอบประกอบด้วยจุดต่อ 2-4-3 คือ

$$\{R_b\} = -\frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ (u_{24}\,n_x + v_{24}\,n_y) \\ (u_{24}\,n_x + v_{24}\,n_y) + (u_{43}\,n_x + v_{43}\,n_y) \\ (u_{43}\,n_x + v_{43}\,n_y) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.63)$$

โดยที่ u_{43} และ v_{43} คือความเร็วเฉลี่ยในแนวแกน x และ y ตามลำดับในช่วง 4-3
u_{24} และ v_{24} คือความเร็วเฉลี่ยในแนวแกน x และ y ตามลำดับในช่วง 2-4

4.4.3 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการอนุรักษ์พลังงาน

จากสมการ (4.11)

$$[K]\{T\} = \{R\} + \{Q\} \quad (4.11)$$

โดยเมตริกซ์ $[K]$ ก็จะประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์การแพร่ในลักษณะที่คล้ายกับเมตริกซ์ $[A]$ ของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง จึงจะไม่แสดงซ้ำในหัวข้อนี้ ส่วนเมตริกซ์ $\{R\}$ คือเมตริกซ์ที่เกี่ยวกับฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านขอบของเอลิเมนต์ ซึ่งพจน์ดังกล่าวจะตัดกันหมดไปภายในขอบเขตของปัญหา จะเหลือเฉพาะที่ขอบด้านนอกของขอบเขตที่พิจารณาเท่านั้น โดยถ้าขอบดังกล่าวถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่ เมตริกซ์ $\{R\}$ ก็ไม่ต้องทำการคำนวณ หรือถ้าขอบดังกล่าวกำหนดให้เป็นฉนวน (ฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านขอบเป็นศูนย์) เมตริกซ์ $\{R\}$ ก็จะถูกกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ เป็นต้น ส่วนเมตริกซ์ $\{Q\}$ คือเมตริกซ์ที่แทนค่าการผลิตความร้อนภายในเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \rho \int_{\Omega} \{N\} Q \, d\Omega \\ &= \rho Q \int_{\Omega} \{N\} \, d\Omega \\ &= \frac{\rho Q A}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.64)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.4.4 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในโครงสร้างอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

จากสมการ (4.42)

$$\underset{(12\times12)}{[K]}\ \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(12\times1)}{\{F_0\}} + \underset{(12\times1)}{\{F_T\}} \tag{4.42}$$

โดยที่

$$\underset{(12\times12)}{[K]} = \int_{\Omega} \underset{(12\times3)}{[B]}^{T}\ \underset{(3\times3)}{[C]}\ \underset{(3\times12)}{[B]}\, d\Omega \tag{4.43}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_0\}} = \int_{\Omega} \underset{(12\times3)}{[B]}^{T}\ \underset{(3\times3)}{[C]}\ \underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_0\}}\, d\Omega \tag{4.44}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_T\}} = \int_{\Gamma} \underset{(12\times3)}{[N]}^{T}\ \underset{(3\times1)}{\{F\}}\, d\Gamma \tag{4.45}$$

สำหรับรายละเอียดต่าง ๆ ของเมตริกซ์ในสมการ (4.43) – (4.45) นั้นมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งจะแสดงไว้ในภาคผนวก ค

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ ที่ได้แสดงในหัวข้อนี้ สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างได้โดยตรง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะได้แสดงไว้ในบทที่ 5

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5
โปรแกรมคอมพิวเตอร์

บทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณภายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นให้สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 4 โดยโปรแกรมดังกล่าวได้ถูกเขียนขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 (FORTRAN 90) ซึ่งประกอบไปด้วยโปรแกรมที่สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดไม่อัดตัวที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง และโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ โดยรายละเอียดต่าง ๆ ของโปรแกรมมีดังนี้

5.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้างนั้น ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 10 โปรแกรมย่อย (subroutines) โดยมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

5.1.1 เริ่มต้นการทำงานภายในโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] โดยจะเรียกโปรแกรมย่อยแรก [READ_INPUT] โดยในโปรแกรมย่อยดังกล่าวก็จะทำการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหลและโครงสร้าง ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ เป็นต้น

5.1.2 จากนั้นก็เริ่มการคำนวณแบบทำซ้ำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SOLVET] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ของสมการอนุรักษ์พลังงาน โดยจะมีการเรียกโปรแกรมย่อย [STREAM] เพื่อหาเอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เมื่อสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์เสร็จแล้ว ก็ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต และแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าอุณหภูมิค่าใหม่

5.1.3 เรียกโปรแกรมย่อย [SOLVEUV] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ของสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [STREAM] อีกครั้งหนึ่งเพื่อสร้างเมตริกซ์ของพจน์การพา จากนั้นประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต แล้วแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองใหม่

5.1.4 ค่าความเร็วค่าใหม่ที่ได้จากขั้นตอน 5.1.3 ก็จะถูกนำมาใช้ในโปรแกรมย่อย [SOLVEP] เพื่อสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับหาค่าตัวแปรความดัน เมื่อสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์เสร็จ และได้ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแล้วก็จะทำการหาค่าความดันค่าใหม่

5.1.5 นำค่าความดันค่าใหม่ที่ได้ไปปรับปรุงค่าของความเร็ว โดยเรียกโปรแกรมย่อย [UPDATE]

5.1.6 เมื่อทำการปรับปรุงค่าความเร็วเรียบร้อยแล้วก็จะเรียกโปรแกรมย่อย [ERROR] เพื่อตรวจสอบค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแต่ละรอบของการคำนวณซ้ำ

5.1.7 จากนั้นจะเรียกโปรแกรมย่อย [BUFFER] เพื่อทำการเขียนผลลัพธ์ในแต่ละรอบของการคำนวณซ้ำลงไปในไฟล์สำรองที่เตรียมไว้

5.1.8 สุดท้ายภายในโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] จะตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ โดยถ้าค่าความเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าที่กำหนดหรือทำการคำนวณครบจำนวนรอบที่ตั้งไว้ก็ให้ดำเนินการตามข้อ 5.1.9 ต่อไป แต่ถ้าไม่ก็ต้องกลับไปทำการคำนวณซ้ำตั้งแต่ข้อ 5.1.2 เป็นต้นไปจนกว่าคำตอบจะลู่เข้า

5.1.9 พิมพ์ค่าผลลัพธ์สุดท้ายที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง ค่าความดัน และค่าอุณหภูมิทั้งภายในของไหลและโครงสร้างลงในไฟล์เพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรมแสดงไว้ในภาคผนวก ก

5.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ สามารถแบ่งออกเป็น 6 ส่วนย่อยได้ดังนี้

<u>ส่วนที่ 1</u> ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่าง ๆ ที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
1
FINITE ELEMENT DATA FOR FLUID FLOW
```

<u>ส่วนที่ 2</u> ขนาดของปัญหา พร้อมค่าที่จะใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ที่ขอบ รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ที่ขอบ รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

ตัวอย่างเช่น:

NPOIN	NELEM	NBOU	NITER	TOL
1521	2888	6	10000	1.e-8

หมายเหตุ: จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบ (NBOU) หมายถึง จำนวนเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบเขตของปัญหาซึ่งมีของไหลไหลผ่าน เช่นเอลิเมนต์ที่ขอบทางเข้าของการไหลในปัญหาที่จะพิจารณาเป็นต้น

<u>ส่วนที่ 3</u> คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงค่าความหนาแน่น ค่าความหนืด ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว ค่าความร้อนจำเพาะ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของโครงสร้าง และของไหล ตามลำดับ สุดท้ายค่าอุณหภูมิอ้างอิง

ตัวอย่างเช่น:

DEN	VIS	TH EXP	C	Ks	Kf	Tref
10.0	0.25	10.	7.1	10.	1.	0.

<u>ส่วนที่ 4</u> ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศทาง x และ y พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตของความดัน ตำแหน่งจุดต่อในแกน x และ y และค่าความเร็วในแกน x, y และค่าความดัน

ตัวอย่างเช่น:

NODE	IBCU	IBCV	IBCP	IBCT	X	Y	U	V	P	T
1	1	0	0	0	1.033	0.	2.5	0.	0.	0.
2	0	0	0	0	1.066	0.	0.	0.	0.	0.
3	1	1	0	1	1.1	0.	1.2	0.3	0.	0.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	1	0	1	0	1.82	0.	0.5	0.	1.3	0.
52	0	0	0	0	1.833	0.	0.	0.	0.	0.

หมายเหตุ: เงื่อนไขขอบเขต IBC ในทิศทาง x หรือ y เงื่อนไขขอบเขตของความดัน และเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิ

หมายถึง

IBC = 1 จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าตามที่ให้ไว้ และไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

IBC = 0 ให้ทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ ชนิดของเอลิเมนต์ และหมายเลขของจุดต่อทั้งหกในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น:

ELEM	TYPE	I	J	K	L	M	N
1	1	182	184	190	42	79	87
2	1	181	182	190	79	45	95
3	1	175	181	190	45	68	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2604	0	880	138	990	32	69	77
2605	0	879	880	990	69	35	85

หมายเหตุ: ชนิดของเอลิเมนต์มีความหมายดังนี้

TYPE = 1 เป็นเอลิเมนต์ของของแข็ง

TYPE = 0 เป็นเอลิเมนต์ของของไหล

ส่วนที่ 6 เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบเขตของปัญหาที่มีการไหลไหลผ่านขอบด้านนั้น

บรรทัดแรก คำระบุเอลิเมนต์ขอบเขต

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบดังกล่าว และหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของเอลิเมนต์นั้น ๆ (โดยมีจำนวนบรรทัดต้องเท่ากับค่า NBOU ที่ให้ไว้ในส่วนที่ 2)

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT NO.	II	JJ	KK
1966	939	940	801
1968	940	941	802
1965	941	942	803
⋮	⋮	⋮	⋮
1791	952	953	813
1786	953	954	814

จำนวนบรรทัดเท่ากับค่า NBOU

5.4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 9 โปรแกรมย่อย (subroutines) โดยมีขั้นตอนในการทำงานดังต่อไปนี้

5.4.1 เริ่มต้นการทำงานภายในโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] โดยจะเรียกโปรแกรมย่อยแรก [READ_INPUT] โดยในโปรแกรมย่อยดังกล่าวก็จะทำการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ เป็นต้น

5.4.2 จากนั้นก็เริ่มการคำนวณ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [CST] โดยภายในโปรแกรมย่อยนี้จะเรียกโปรแกรมย่อย [CnK_ELE] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ

5.4.3 เรียกโปรแกรมย่อย [ALL_LOAD] เพื่อคำนวณเอลิเมนต์เมตริกซ์ของโหลดต่าง ๆ เช่นโหลดจากแรงภายนอก

5.4.4 จากนั้นส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ที่คำนวณได้นี้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมโดยเรียกโปรแกรมย่อย [ASSMP]

5.4.5 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น บางจุดต่อจะถูกตรึงแน่นเคลื่อนที่ไม่ได้หรือบางจุดต่อมีแรงภายนอกมากระทำโดยเรียกโปรแกรมย่อย [APPLBC]

5.4.6 แก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าเคลื่อนตัว u และ v ที่ทุกจุดต่อโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SYMPCG]

5.4.7 คำนวณค่าความเค้น σ_x, σ_y และ τ_{xy} ที่ทุกจุดต่อโดยเรียกโปรแกรมย่อย [STRESS]

5.4.8 สุดท้ายพิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อในแนวแกนทั้งสอง ค่าความเค้นต่าง ๆ ลงในไฟล์เพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

5.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรมแสดงไว้ในภาคผนวก ข

5.6 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมวิเคราะห์ความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิต้องการสามารถจำแนกออกเป็น 6 ส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่าง ๆ ที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
1
FINITE ELEMENT DATA FOR THERMAL STRESS
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา พร้อมค่าที่จะใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ และชนิดของปัญหา

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ ตัวเลขระบุชนิดของปัญหา

ตัวอย่างเช่น:

```
NPOIN    NELEM    STYPE
 1521     2888       1
```

หมายเหตุ: ชนิดของปัญหามีความหมายดังนี้

STYPE = 0 กำหนดชนิดของปัญหาเป็นความเค้นระนาบ

STYPE = 1 กำหนดชนิดของปัญหาเป็นความเครียดระนาบ

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วนของปัวส์ซง ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ และความหนาของของโครงสร้าง

ตัวอย่างเช่น:

```
ELAS       PR      Tref      ALPHA      THICK
7.E+10    0.29      10.      0.2E-6       1.
```

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตในทิศทาง x และ y ตำแหน่งจุดต่อในแกน x และ y ค่าระยะการเคลื่อนตัวในแกน x และ y ค่าแรงดันจากภายนอกในแกน x และ y และค่าอุณหภูมิของจุดต่อนั้น

ตัวอย่างเช่น:

NODE	IBCU	IBCV	X	Y	U	V	SX	SY	T
1	1	0	1.033	0.	0.	0.	0.	0.	30.
2	0	0	1.066	0.	0.	0.	0.	0.	30.
3	1	1	1.1	0.	0.	0.	0.	0.	30.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	1	0	1.82	0.	0.	0.	0.	0.	50.
52	0	0	1.833	0.	0.	0.	0.	0.	50.

หมายเหตุ: เงื่อนไขขอบเขต IBC ในทิศทาง x หรือ y

หมายถึง

IBC = 1 จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ในทิศนั้น

IBC = 0 คำนวณหาการเคลื่อนตัวที่จุดต่อดังกล่าวในทิศนั้น

<u>ส่วนที่ 5</u> ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ และหมายเลขของจุดต่อทั้งหกในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น:

ELEM	I	J	K	L	M	N
1	182	184	190	42	79	87
2	181	182	190	79	45	95
3	175	181	190	45	68	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2604	880	138	990	32	69	77
2605	879	880	990	69	35	85

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง และโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิจะได้นำมาตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง และผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีอื่น ๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 ตรวจสอบโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและโครงสร้าง

โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจะนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับตัวอย่างปัญหา 2 ตัวอย่างด้วยกัน ปัญหาแรกเป็นปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานพร้อมการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง (conjugate Couette flow problem in parallel plate channel) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง ส่วนปัญหาที่สองเป็นปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (conjugate counter flow heat exchanger) โดยจะได้ตรวจสอบผลการคำนวณกับผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีอื่น

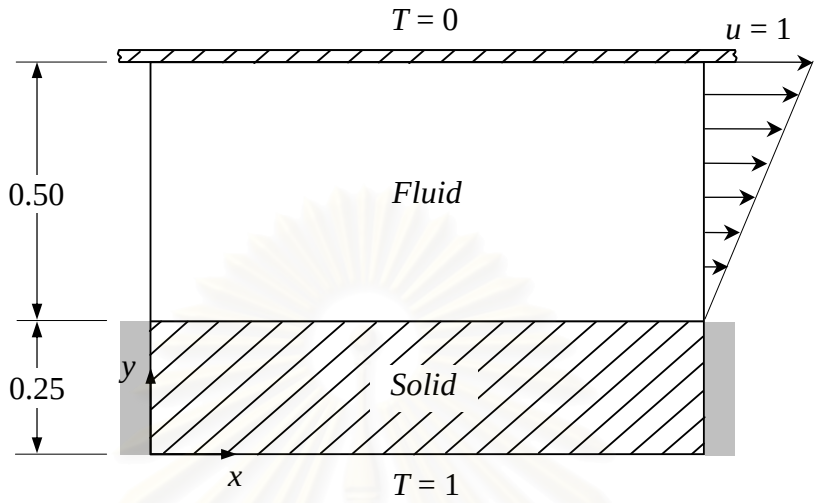
6.1.1 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานพร้อมการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง (conjugate Couette flow problem in parallel plate channel)

ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้างนี้ได้แสดงในรูปที่ 6.1 จากรูปของไหลจะอยู่ระหว่างแผ่นคู่ขนาน โดยที่แผ่นด้านบนนั้นเป็นแผ่นบางที่มีอุณหภูมิต่ำ ($T = 0$) และกำหนดให้มีการเคลื่อนที่ไปทางด้านขวาด้วยความเร็วเท่ากับ 1 ในขณะที่แผ่นด้านล่างนั้นเป็นผนังที่มีความหนาและหยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่ โดยที่อีกด้านของผนังกำหนดให้มีอุณหภูมิสูง ($T = 1$) สำหรับระยะระหว่างแผ่นคู่ขนาน และความหนาของแผ่นได้แสดงในรูปที่ 6.1 ปัญหานี้เป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ [24] จึงนำมาใช้ในการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยที่ผลเฉลยแม่นตรงของความเร็ว u และอุณหภูมิ T ตามแนวแกน y คือ

$$u(y) = 2y - 0.5 \tag{6.1}$$

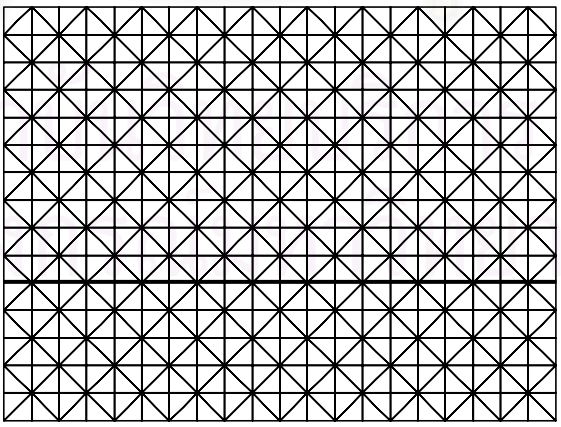
$$T(y) = \frac{2K_{sf}}{2K_{sf}+1}(1.5 - y) \tag{6.2}$$

โดยที่ $$K_{sf} = \frac{k_s}{k_f} = \frac{\text{สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในโครงสร้าง}}{\text{สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล}}$$

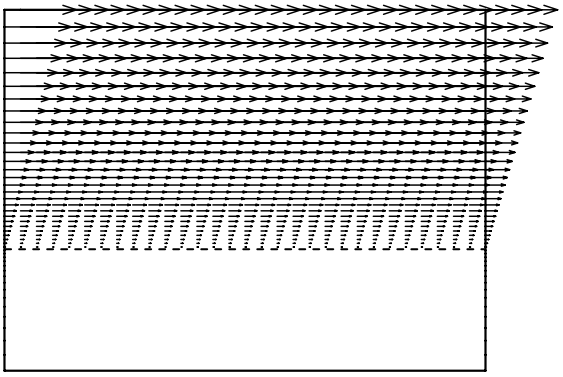


รูปที่ 6.1 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง

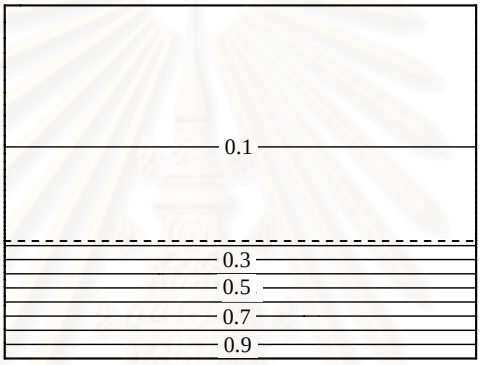
การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งประกอบด้วย 1,271 จุดต่อ 600 เอลิเมนต์ และทำการวิเคราะห์ในกรณีต่าง ๆ กัน 3 กรณีด้วยกัน คือ K_{sf} = 0.1, 1 และ 10 โดยรูปที่ 6.3 แสดงผลลัพธ์ของเวกเตอร์ความเร็วที่ได้จากการคำนวณ ส่วนรูปที่ 6.4 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ จากรูปพบว่าเมื่ออัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้น การถ่ายเทความร้อนก็มากขึ้นด้วย



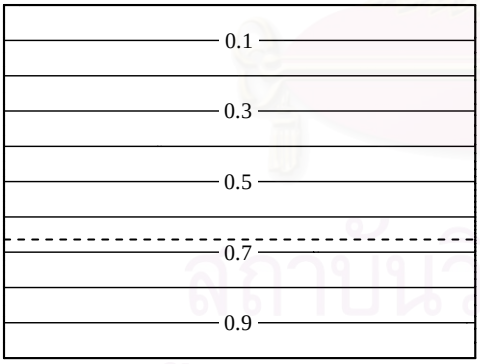
รูปที่ 6.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน
ที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง



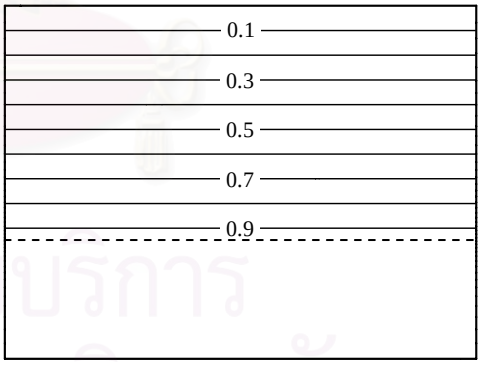
รูปที่ 6.3 เวกเตอร์ความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน
ที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 0.1$



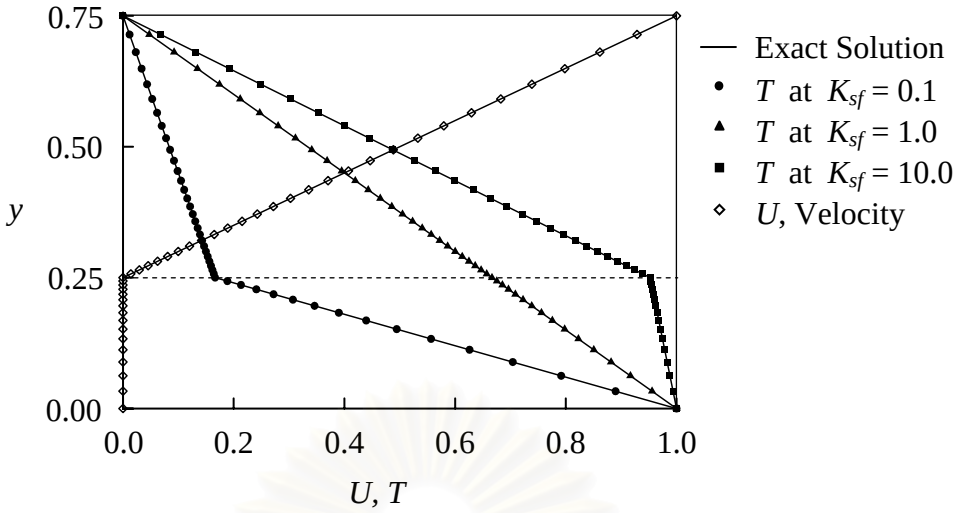
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 1$



(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี $K_{sf} = 10$

รูปที่ 6.4 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการไหลระหว่าง
แผ่นคู่ขนานที่มีการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้างที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ

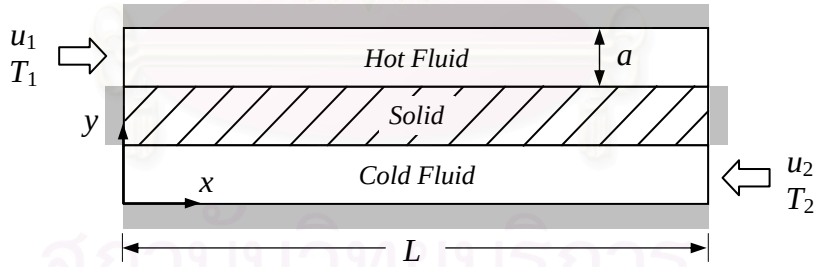
จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ทั้งความเร็ว และอุณหภูมิที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ กับผลเฉลยแม่นตรง โดยผลการเปรียบเทียบได้แสดงในรูปที่ 6.5 จากผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าความความเร็ว และอุณหภูมิมีค่าที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างดี



รูปที่ 6.5 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ

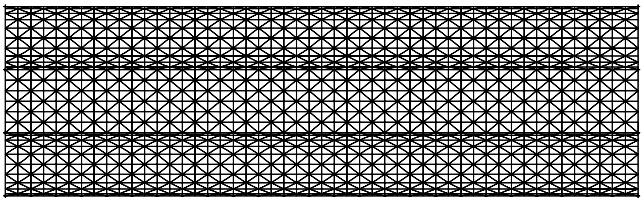
6.1.2 การไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (conjugate counter flow heat exchanger)

ลักษณะของปัญหาเป็นการแลกเปลี่ยนความร้อนของของไหลที่ไหลสวนทางกันโดยมีแผ่นโลหะเป็นตัวกลางในการแลกเปลี่ยนความร้อน ซึ่งปลายทั้งสองข้างของแผ่นโลหะ และผนังด้านนอกที่ของไหลไหลผ่านถูกกำหนดให้เป็นฉนวน ดังแสดงในรูปที่ 6.6



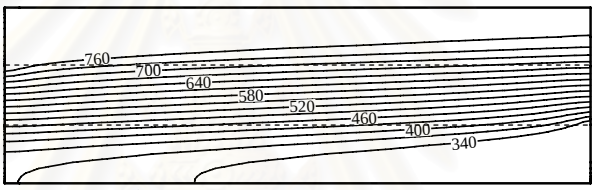
รูปที่ 6.6 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน

สำหรับขนาดของปัญหาที่จะทำการคำนวณ และเงื่อนไขขอบเขตถูกกำหนดดังนี้ ขนาดของช่องทางการไหลทั้งสองด้านมีค่าเท่ากับความหนาของแผ่นโลหะและมีค่าเท่ากับ 0.1 (a = 0.1) ส่วนช่องทางการไหลมีความยาวเท่ากับ 1 (L = 1) ช่องการไหลด้านบนจะมีของไหลอุณหภูมิสูง (T_1 = 800) ไหลจากด้านซ้ายไปขวาด้วยความเร็ว (u_1 = 0.2) และมีค่าเรย์โนลด์ Re = 133 ส่วนช่องทางการไหลด้านล่างจะมีของไหลอุณหภูมิต่ำ (T_2 = 300) ไหลจากขวามาซ้ายด้วยความเร็ว (u_2 = 0.1) และมีค่าเรย์โนลด์ Re = 66 สุดท้ายกำหนดให้ของไหลทั้งหมดมีค่าพรันด์เทิล Pr = 0.75

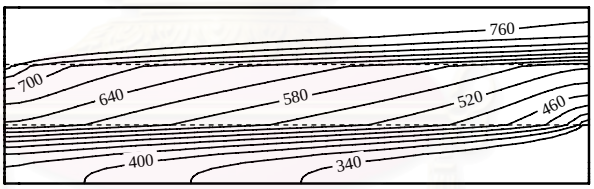


รูปที่ 6.7 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลแบบสวนทาง
ภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน

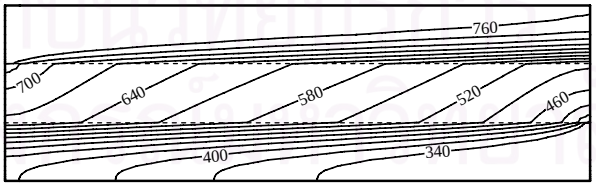
การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 5,353 จุดต่อ 2,600 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.7 จากนั้นจึงนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น รูปที่ 6.8 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งภายในของไหลและแผ่นโลหะในกรณีที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน จากนั้นจึงได้นำผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Chen and Han [25] ที่ค่า K_{sf} = 5 ดังแสดงในรูปที่ 6.9 จากรูปพบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกัน



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี K_{sf} เท่ากับ 1

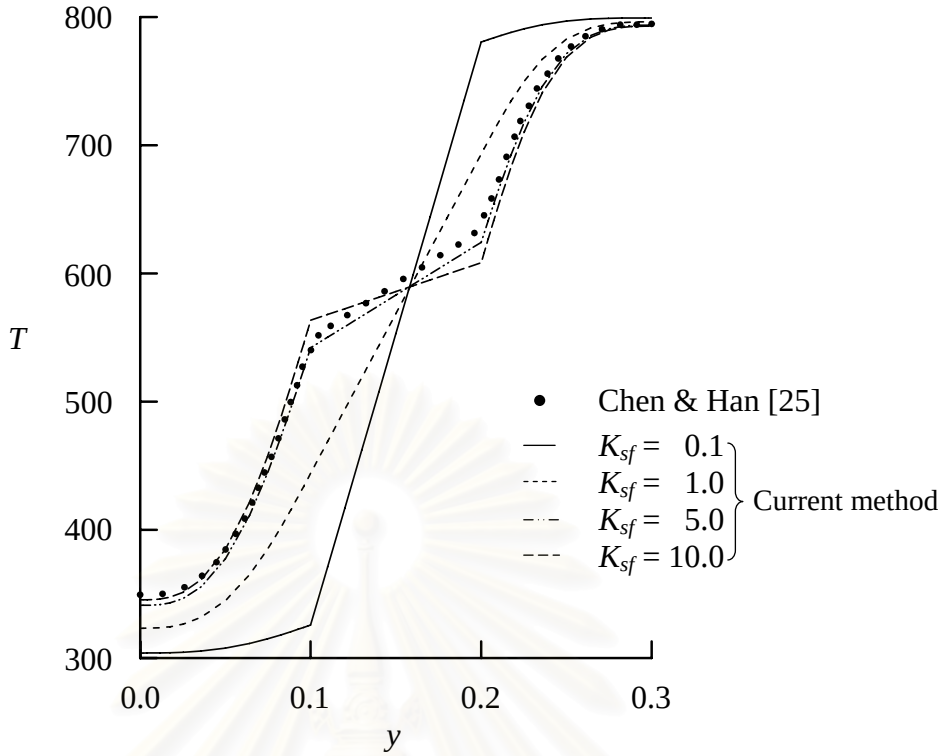


(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี K_{sf} เท่ากับ 5



(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิกรณี K_{sf} เท่ากับ 10

รูปที่ 6.8 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการไหลแบบสวนทาง
ภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน



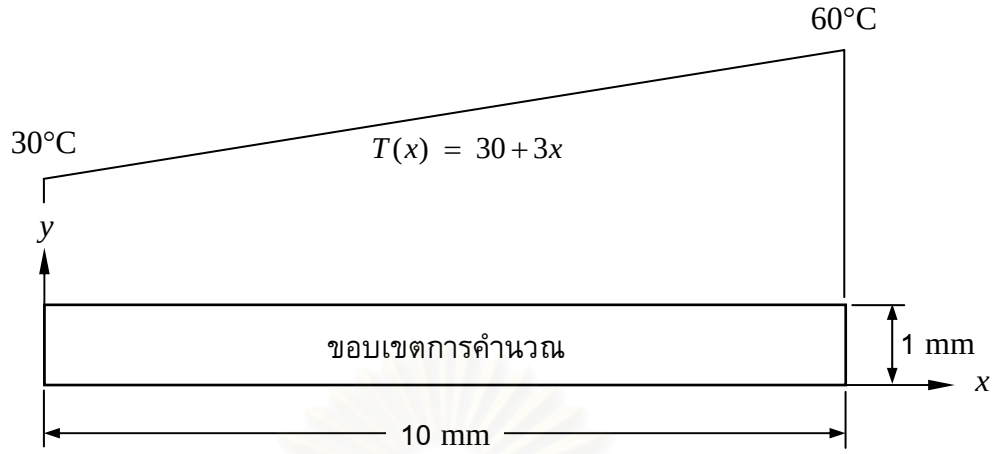
รูปที่ 6.9 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์ของ Chen and Han ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ ตลอดแกน y ของปัญหาปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกันที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ

6.2 ตรวจสอบโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

ในหัวข้อต่อไปนี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ โดยจะทำการทดสอบกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง 2 ปัญหาดังนี้

6.2.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว

ลักษณะของปัญหาเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 10×1 mm มีอุณหภูมิที่ขึ้นกับระยะทาง x ด้วยความสัมพันธ์เชิงเส้น $T(x) = 30 + 3x$ โดยตลอดขอบทางซ้ายจะมีอุณหภูมิเท่ากับ 30°C ส่วนตลอดขอบทางด้านขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 60°C ดังแสดงในรูปที่ 6.10 ส่วนขอบทางด้านซ้ายจะไม่มีการเคลื่อนที่ทางแกน x ส่วนคุณสมบัติทางกลของแผ่นสี่เหลี่ยมนี้คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E = 71,705.5 N/mm^2 ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง ν = 0.29 และสัมประสิทธิ์การขยายตัว $\alpha = 1.27\times10^{-5}$ mm/mm-°C



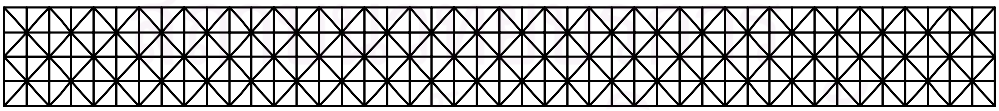
รูปที่ 6.10 แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงดังนี้ [26]

$$u(x) = \alpha\left(30x + \frac{3x^2}{2}\right) \tag{6.3}$$

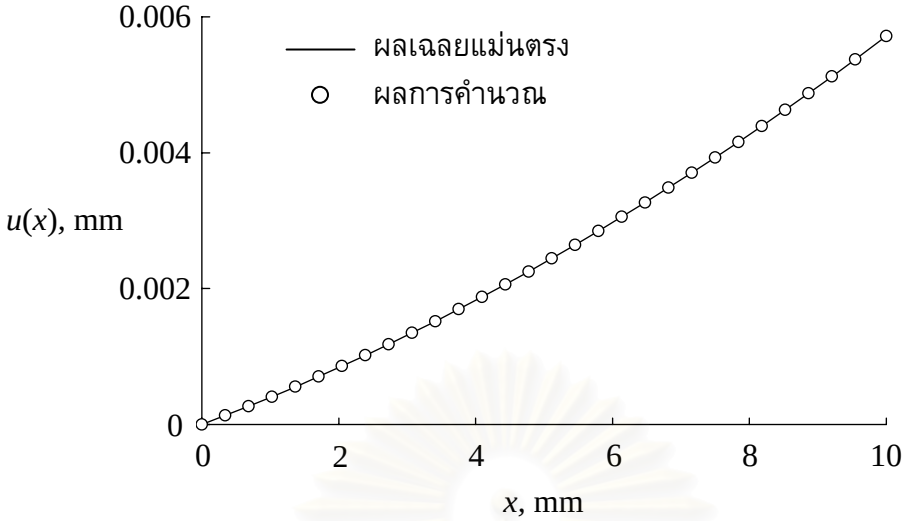
โดย $u(x)$ คือค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x

การคำนวณค่าการเคลื่อนตัวบนแผ่นสี่เหลี่ยมดังที่แสดงข้างต้นโดยใช้โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้ จะเริ่มต้นจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ จำนวน 801 จุดต่อ 352 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.11 จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตตามที่กล่าวข้างต้น และกำหนดอุณหภูมิขณะที่วัสดุไม่มีความเค้น T_0 เท่ากับ 0°C แล้วทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น



รูปที่ 6.11 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยม
ที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว

รูปที่ 6.12 เป็นการเปรียบเทียบระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน x ที่คำนวณได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรง พบว่ามีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.017%



รูปที่ 6.12 ค่าการเคลื่อนตัวเนื่องจากความร้อนในแนวแกน x สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว

6.2.2 ปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

ลักษณะของปัญหาเป็นวงแหวนที่มีรัศมีภายใน a เท่ากับ 100 mm รัศมีภายนอก b เท่ากับ 200 mm และวงแหวนมีอุณหภูมิเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับรัศมี r ดังนี้

$$T(r) = 110 - 0.4r \tag{6.4}$$

โดยอุณหภูมิตลอดขอบด้านในเท่ากับ 30°C และขอบด้านนอกเท่ากับ 70°C ดังแสดงในรูปที่ 6.13 โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ทางกลของวงแหวนคือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E = 71,705.5 N/mm^2 ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง ν = 0.29 สัมประสิทธิ์การขยายตัว $\alpha = 1.27\times10^{-5}$ mm/mm-°C และมีอุณหภูมิที่วัสดุไม่มีความเค้น T_0 เท่ากับ 0°C

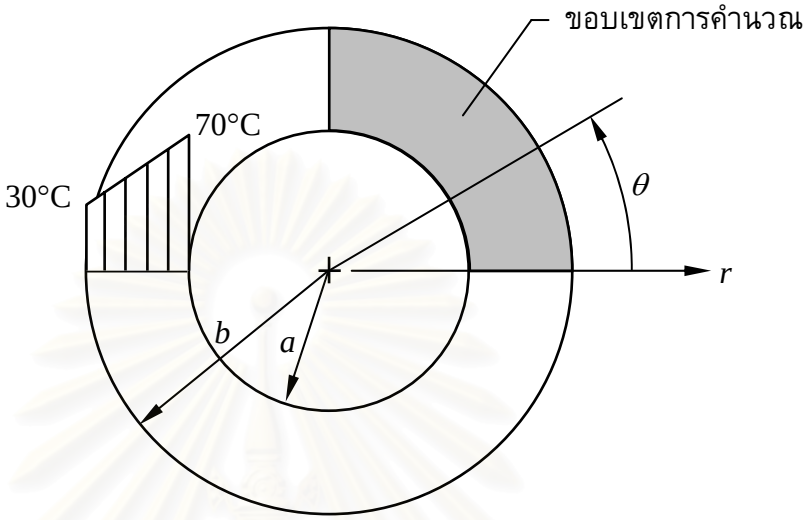
ปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงสำหรับกรณีความเค้นในระนาบดังนี้ [26]

$$u(r) = \frac{\alpha}{r}\left(\frac{(1-\nu)r^2+(1+\nu)a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr + (1+\nu)\int_a^r T(r)\,r\,dr\right) \tag{6.5}$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr - \int_a^r T(r)\,r\,dr\right) \tag{6.6}$$

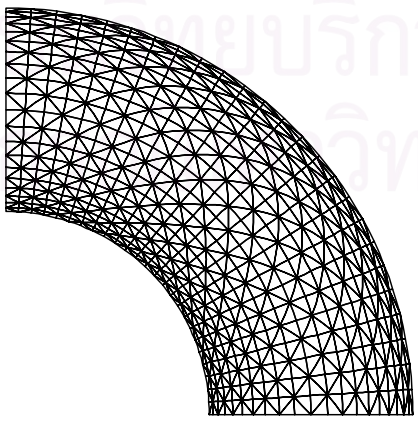
$$\sigma_\theta(r) = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr + \int_a^r T(r)\,r\,dr - T(r)r^2 \right) \qquad (6.7)$$

โดย $u(r)$ คือค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี



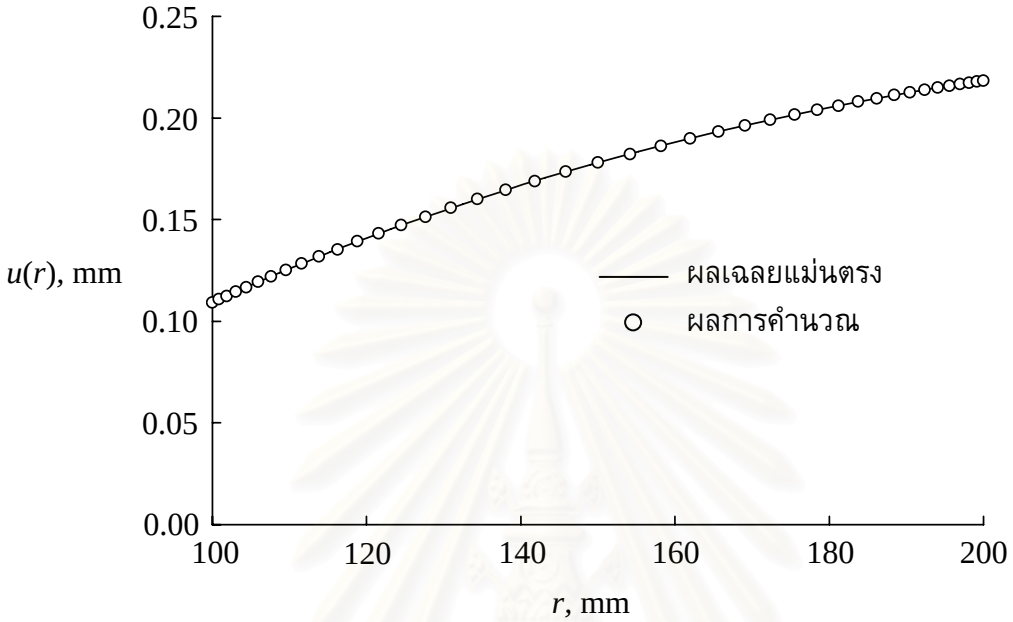
รูปที่ 6.13 วงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร ดังนั้นสามารถใช้ขอบเขตในการคำนวณเพียง 1 ใน 4 ของวงแหวนได้ ดังแสดงในรูปที่ 6.13 การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ซึ่งประกอบไปด้วย 2091 จุดต่อ 1000 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.14 จากนั้นประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตโดยกำหนดให้ตลอดขอบด้านล่างไม่มีการเคลื่อนตัวในแนวแกน y และตลอดขอบทางด้านซ้ายกำหนดให้ไม่มีการเคลื่อนตัวในแกน x รวมทั้งกำหนดอุณหภูมิ $T(r)$ ตลอดทั้งขอบเขตการคำนวณ แล้วทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น

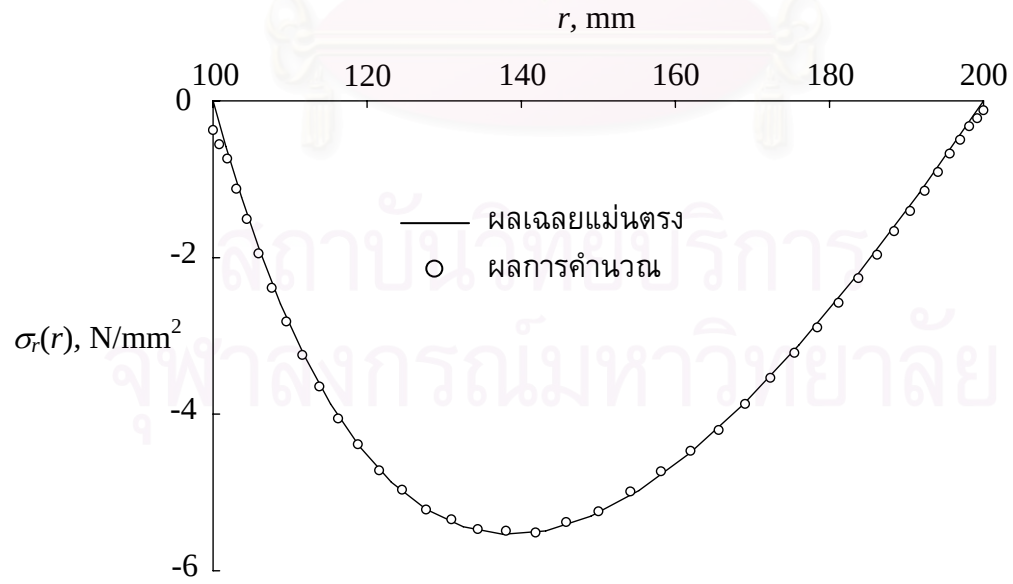


รูปที่ 6.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาวงแหวน
ที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

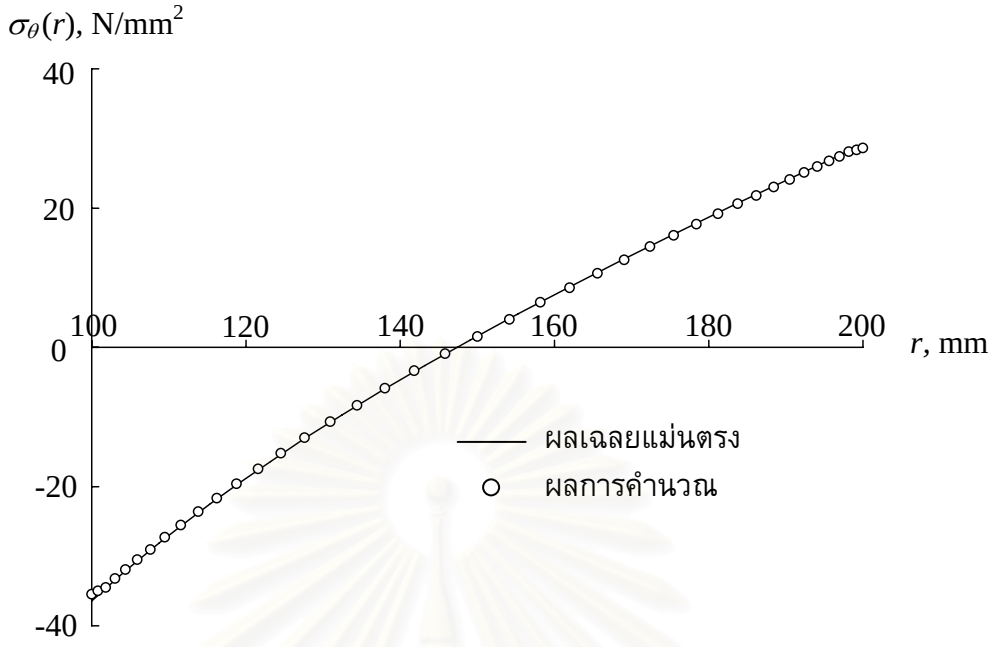
ค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี ความเค้นในแนวรัศมี และในแนว θ ที่คำนวณได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น ได้นำมาแสดงเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (6.5) – (6.7) ดังแสดงในรูปที่ 6.15 – 6.17 ซึ่งมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.038%, 2.13% และ 1.12% ตามลำดับ



รูปที่ 6.15 การเปลี่ยนแปลงของค่าการเคลื่อนตัวตามทิศทางรัศมี ในแนวมุม θ เท่ากับ 0



รูปที่ 6.16 ความเค้นในแนวรัศมี σ_r ตามทิศทางรัศมีที่มีแนวมุม θ เท่ากับ 0



รูปที่ 6.17 ความเค้นในทิศ θ, σ_θ ตามทิศทางรัศมีที่มีแนวมุม θ เท่ากับ 0

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 7
การวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง

ผลกระทบที่เกิดร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง เป็นพฤติกรรมที่พบได้ในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger) หรือการทำความเย็นบนแผงวงจรอิเลกทรอนิกส์ (electronics board cooling) เป็นต้น ความเข้าใจในพฤติกรรมเหล่านี้จะช่วยให้การออกแบบมีประสิทธิภาพมากขึ้น ในหัวข้อนี้จะได้แสดงถึงขั้นตอนการคำนวณและตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ขั้นตอนดังกล่าว

7.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้าง

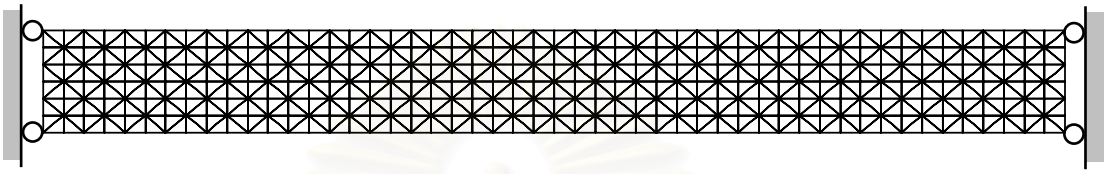
ขั้นตอนที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างนี้ จะเริ่มจากทำการคำนวณหาพฤติกรรมของการไหลและการถ่ายเทความร้อนไปพร้อม ๆ กัน หลังจากนั้นนำค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่คำนวณได้จากขั้นตอนก่อนนี้กับแรงอันเนื่องมาจากความดันของของไหลที่กระทำกับโครงสร้างมาคำนวณหาค่าความเค้นภายในโครงสร้างเป็นลำดับสุดท้าย ซึ่งในส่วนถัดไปจะได้แสดงการนำขั้นตอนที่อธิบายนี้มาวิเคราห์กับปัญหาตัวอย่าง 3 ตัวอย่างด้วยกัน โดยตัวอย่างแรกเป็นปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (conjugate counter flow heat exchanger) ปัญหาที่สองคือปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน (conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall) และปัญหาสุดท้ายเป็นปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน (free and forced convection in channel with fins)

7.1.1 ปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (conjugate counter flow heat exchanger)

ลักษณะของปัญหาดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วในรูปที่ 6.6 และได้ทำการวิเคราะห์หาพฤติกรรมของการไหลและการถ่ายเทความร้อนในกรณีที่ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลมีค่าต่าง ๆ กันเป็นที่เรียบร้อยแล้วอีกเช่นเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 6.8ก-ค ในหัวข้อนี้จะได้นำเอาค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิและความดันที่ของไหลกระทำกับของแข็งมาทำการวิเคราะห์หาค่าความเค้นที่เกิดขึ้น โดยกำหนดให้ของแข็งที่จะ

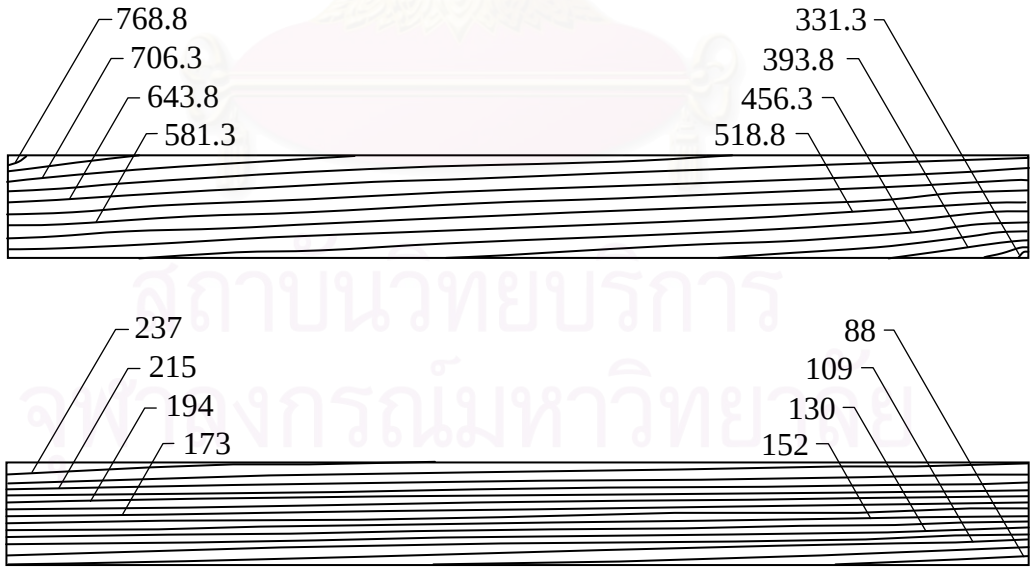
ทำการวิเคราะห์มีค่าคุณสมบัติดังต่อไปนี้ มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น 7×10^{10} N/m^2 ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว $6\times10^{-6}/°C$ ค่าอัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และอุณหภูมิขณะที่ไม่มีความเค้นคือที่ 300 K

สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิสำหรับตัวอย่างนี้ได้แสดงในรูปที่ 7.1 ซึ่งประกอบไปด้วย 1313 จุดต่อ 600 เอลิเมนต์

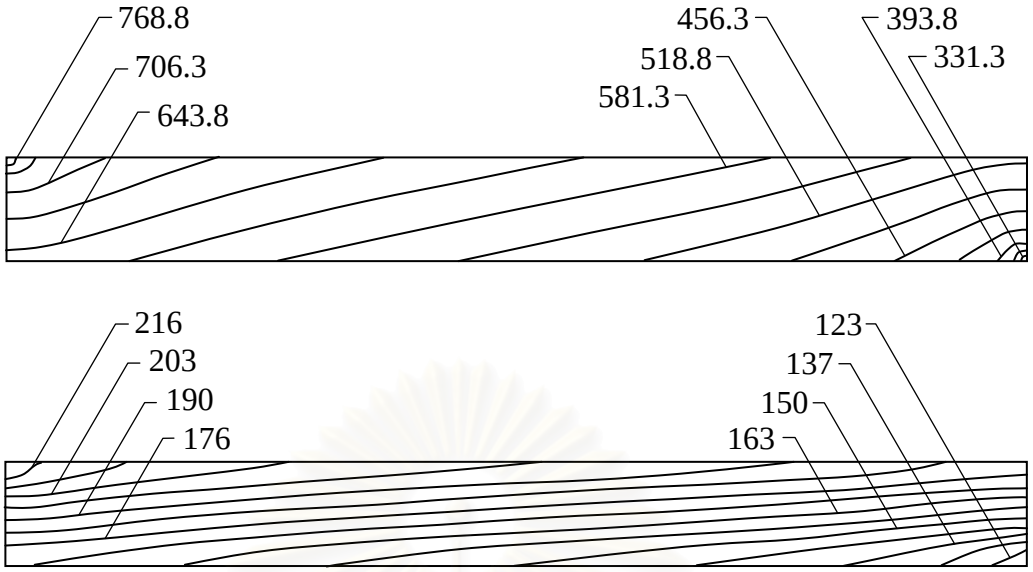


รูปที่ 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน

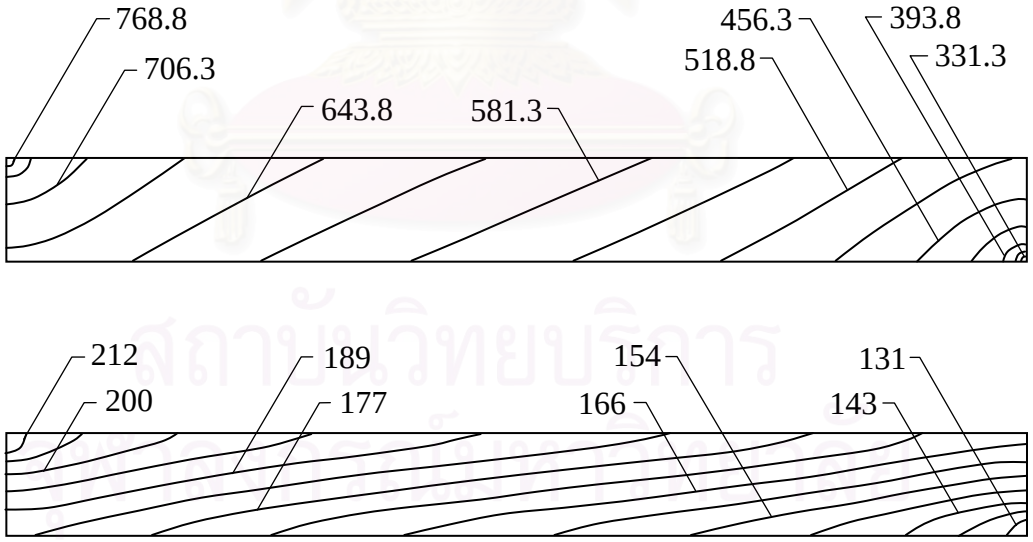
เมื่อกำหนดอุณหภูมิภายในจุดต่อและค่าความดันที่กระทำกับผิวของของแข็งที่คำนวณได้จากบทที่ 6 แล้ว ต่อไปก็ทำการคำนวณหาค่าความเค้น โดยในรูปที่ 7.2 (ก-ข) แสดงลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ (K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซส (Von Mises stress, MPa) ในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 1$ ตามลำดับ สำหรับลักษณะการกระจายตัวอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 5$ และ 10 ได้แสดงในรูปที่ 7.3 และ 7.4 ตามลำดับ



รูปที่ 7.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า $K_{sf} = 1$



รูปที่ 7.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า K_{sf} = 5



รูปที่ 7.4 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (ภาพบน, K) และค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็ง (ภาพล่าง, MPa) สำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในกรณีที่ค่า K_{sf} = 10

ส่วนค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวดิ่งของของแข็งในกรณีที่ค่า K_{sf} มีค่าต่าง ๆ กันได้แสดงไว้ในตารางที่ 7.1 ซึ่งเห็นได้ว่ามีระยะการเคลื่อนตัวที่น้อยมาก จึงอาจกล่าวได้ว่าไม่มีผลกระทบต่อรูปแบบของการไหล

ตารางที่ 7.1 ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวดิ่งของของแข็งสำหรับปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน กรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน

	อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน, K_{sf}		
	1	5	10
ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวดิ่ง (mm)	0.1628	0.1653	0.1661

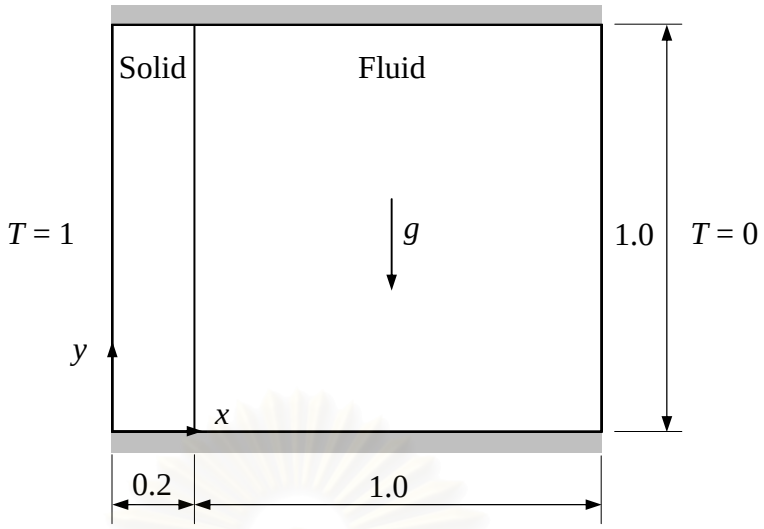
7.1.2 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน (conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall)

ในปัญหานี้จะทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขของ Hriberšek & Kuhn [27] เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ลักษณะของปัญหาประกอบไปด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วย ซึ่งภายในบรรจุของไหลอยู่ และมีผนังนำความร้อนหนา 0.2 อยู่ทางด้านซ้าย ส่วนผนังด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 ในขณะที่ผนังด้านขวามีอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 ซึ่งความแตกต่างของอุณหภูมิจะทำให้ของไหลเกิดการหมุนวนขึ้นในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส ปัญหานี้จะคิดแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ดังแสดงในรูปที่ 7.5 จากนั้นทำการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วย 2,009 จุดต่อและ 3,840 เอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 7.6

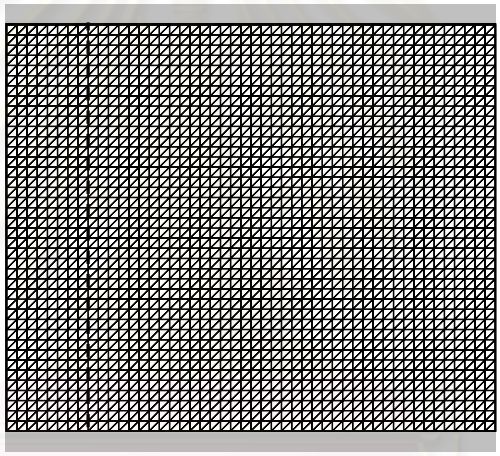
ในขั้นตอนการวิเคราะห์สภาวะการไหลสำหรับปัญหานี้ได้กำหนดให้พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl Number; Pr) มีค่าเท่ากับ 0.71 และกำหนดให้ค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์ (Grashof Number; Gr) มีค่าเท่ากับ 10^3 และ 10^5 โดยค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์คืออัตราส่วนของแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิกับแรงของความหนืดในของไหล ดังนี้

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\rho^2\Delta T L^3}{\mu^2} \qquad (7.1)$$

โดยที่ L แทนความยาวเฉพาะ (characteristic length) โดยมีค่าเท่ากับ 1 และ β คือค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนของของไหล



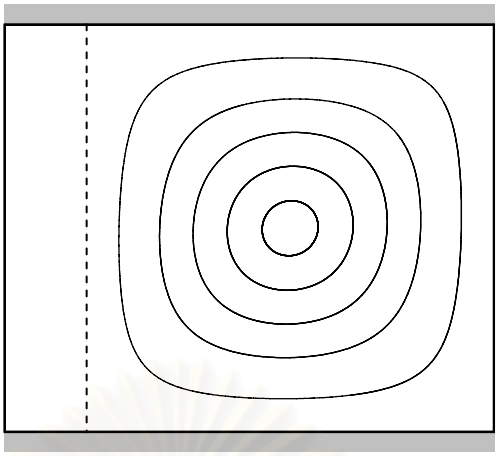
รูปที่ 7.5 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน



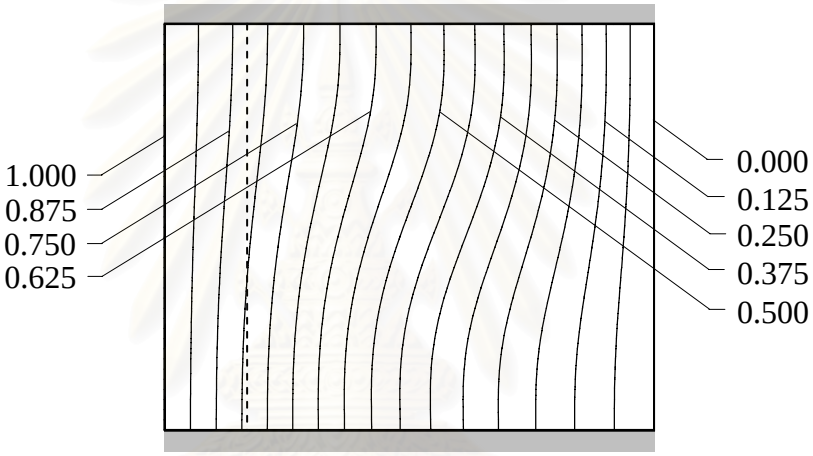
รูปที่ 7.6 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณสำหรับปัญหาดังกล่าวแสดงในรูปที่ 7.7 (ก-ค) ในรูปที่ 7.7 (ก) แสดงเส้นกระแสการไหล ซึ่งอธิบายถึงการไหลหมุนวนของของไหลในทิศตามเข็มนาฬิกาอันเนื่องมาจากของไหลเกิดการลอยตัวขึ้นในบริเวณผนังด้านซ้ายที่มีอุณหภูมิสูงและลอยตัวลงในบริเวณผนังด้านขวาที่มีอุณหภูมิต่ำ รูปที่ 7.7 (ข-ค) จะแสดงถึงเส้นชั้นของอุณหภูมิ (temperature contours) ที่ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล K_{sf} เท่ากับ 1 และ 10 ตามลำดับ ที่ค่า $\mathrm{Gr} = 10^3$

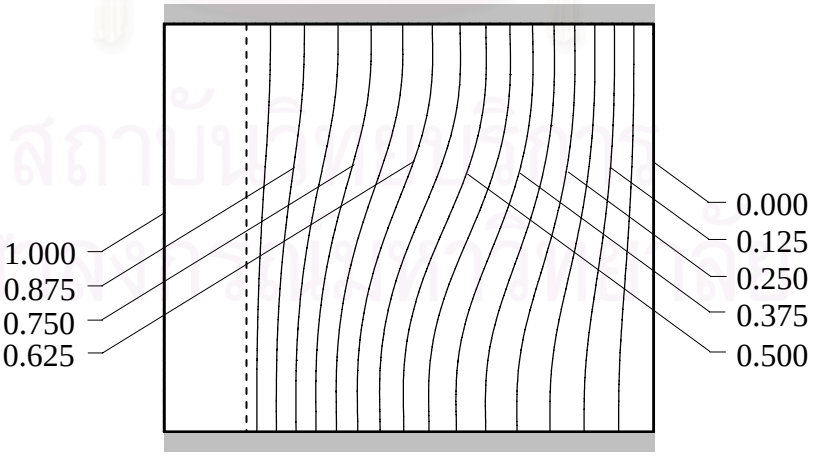
จากนั้นทำการวิเคราะห์สภาวะการไหลสำหรับปัญหานี้โดยการทำซ้ำอีกครั้งในกรณีเมื่อค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์ Gr มีค่าสูงขึ้นเป็น 10^5 ซึ่งหมายถึงแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่าของกรณีที่แล้วหรือค่าความหนืดของของไหลลดลงไป 10 เท่าซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ของสภาวะการไหลดังแสดงในรูปที่ 7.8



(ก) เส้นกระแสการไหล



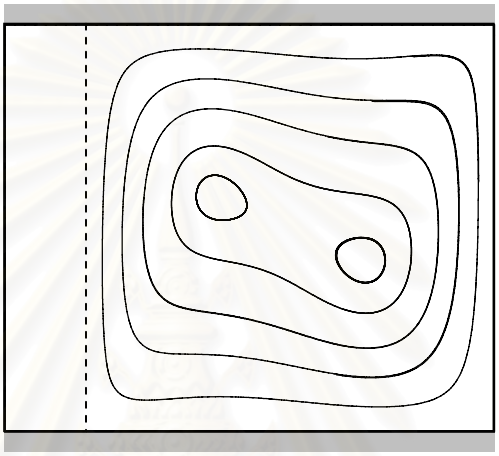
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 1



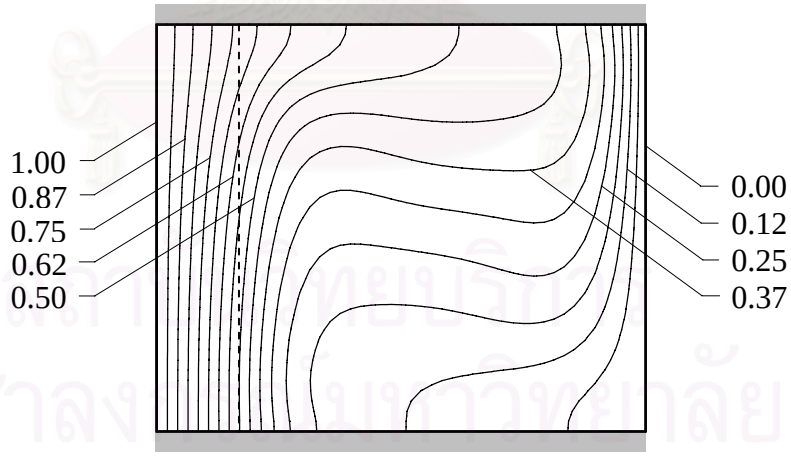
(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 10

รูปที่ 7.7 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $\mathrm{Gr} = 10^3$

ในรูปที่ 7.8 (ก) จะพบว่ามีการไหลหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกาเพิ่มขึ้นเป็น 2 วง และค่าเส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 1 และ 10 นั้นบางและแคบลง ดังแสดงในรูป 7.8 (ข-ค) จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้กับ Hriberšek & Kuhn [27] โดยจะทำการเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาณความร้อน (heat fluxes) ที่บริเวณผิวลอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล, $x = 0.2$, ตลอดแนวแกน y ที่ค่า $K_{sf} = 1, 5$ และ 10 ดังแสดงในรูปที่ 7.9 (ก-ข) ตามลำดับ

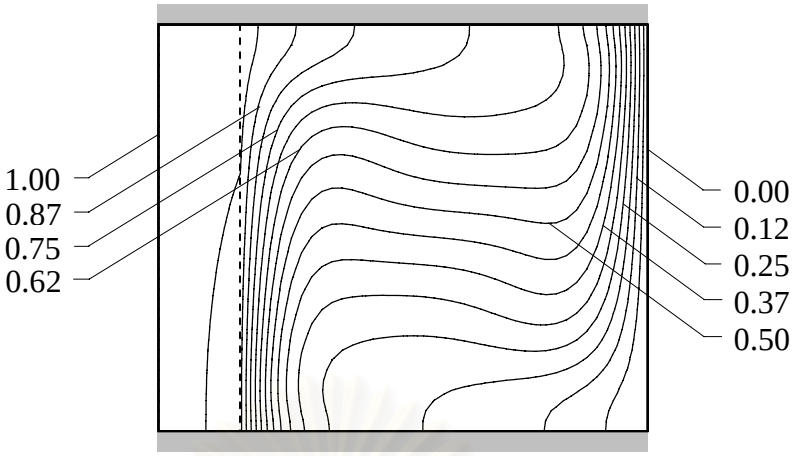


(ก) เส้นกระแสการไหล



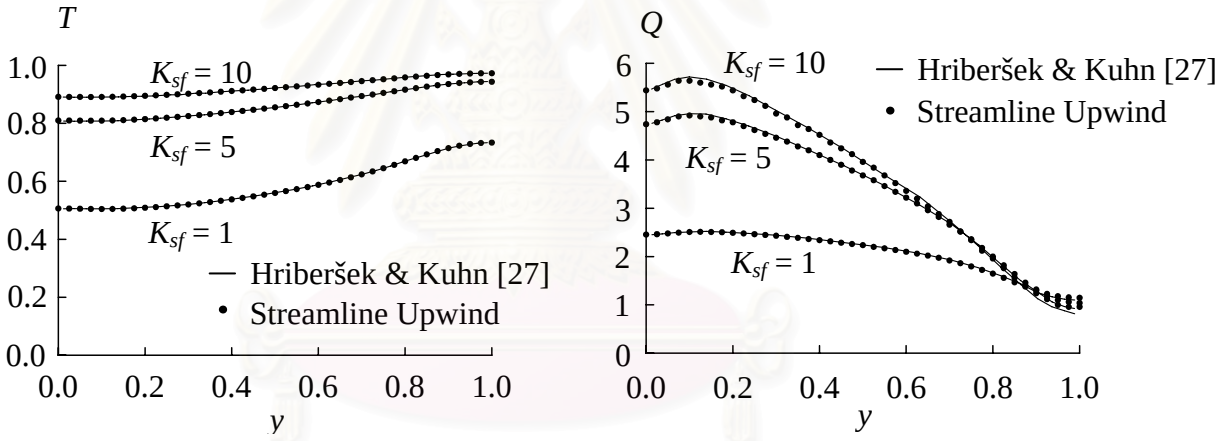
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 1

รูปที่ 7.8 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $\mathrm{Gr} = 10^5$



(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K_{sf} เท่ากับ 10

รูปที่ 7.8 (ต่อ) สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $\mathrm{Gr} = 10^5$



(ก) ค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อ (ข) ค่าปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อ

รูปที่ 7.9 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อโดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Hriberšek & Kuhn ที่ค่า K_{sf} = 1, 5 และ 10

จากตารางที่ 7.2 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล, $\overline{\mathrm{Nu}}_{x=0.2}$ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Hriberšek & Kuhn [27] ผลที่ได้ก็ให้ค่าเป็นที่น่าพอใจ

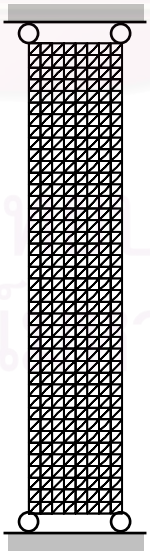
ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวรอยต่อ

Gr	conductivity ratio, K_{sf}	1	5	10
10^5	Hriberšek	2.08	3.42	3.72
10^5	Present method	2.04 (1.92%)	3.31 (3.22%)	3.60 (3.23%)

หมายเหตุ : ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวรอยต่อ (ค่าความคลาดเคลื่อน % โดยเปรียบเทียบกับ Hriberšek & Kuhn [27])

เมื่อวิเคราะห์การไหลและการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในของไหลและของแข็งเสร็จเรียบร้อยแล้ว ขั้นต่อไปก็นำค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ได้และค่าความดันมาคำนวณหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นภายในของแข็ง ซึ่งจะทำการวิเคราห์ในกรณีที่ค่า $Gr = 10^5$ และที่ค่า K_{sf} ต่าง ๆ กันเท่านั้น โดยกำหนดให้ของแข็งที่จะทำการวิเคราะห์มีค่าคุณสมบัติดังต่อไปนี้ มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น 7×10^{10} N/m^2 ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว 6×10^{-6}/°C ค่าอัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และอุณหภูมิขณะที่ไม่มีความเค้นคือที่ 0°C

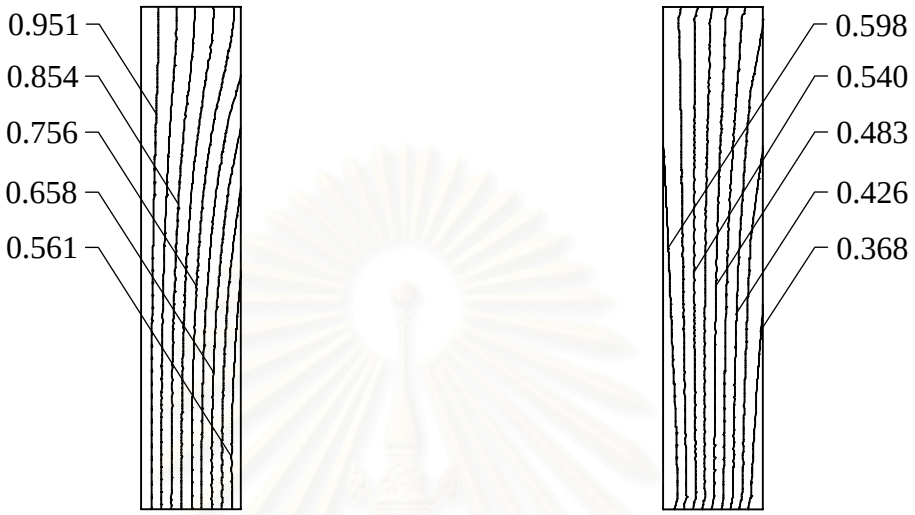
สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิสำหรับตัวอย่างนี้ได้แสดงในรูปที่ 7.10 ซึ่งประกอบไปด้วย 1377 จุดต่อ 640 เอลิเมนต์



รูปที่ 7.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน

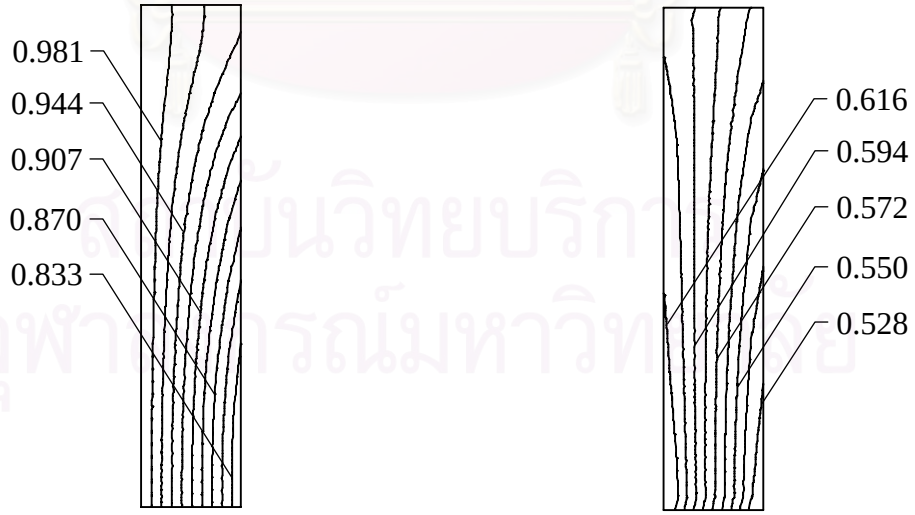
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 7.11 (ก-ข) แสดงลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ และค่าความเค้นฟอนมิสเซส (MPa) ตามลำดับ ในกรณีที่ค่า K_{sf} = 1 สำหรับลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ และค่าความเค้นฟอนมิสเซสในกรณีที่ค่า K_{sf} = 5 และ 10 ได้แสดงในรูปที่ 7.12 และ 7.13 ตามลำดับ



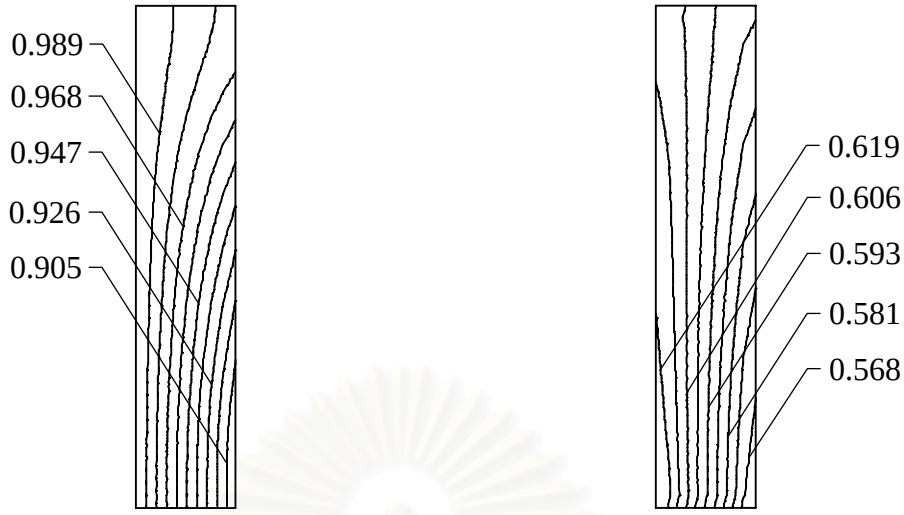
(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ (ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)

รูปที่ 7.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $\mathrm{Gr} = 10^5$ และ K_{sf} = 1



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ (ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)

รูปที่ 7.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $\mathrm{Gr} = 10^5$ และ K_{sf} = 5



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิ (ข) เส้นชั้นของความเค้นฟอนมิสเซส (MPa)

รูปที่ 7.13 การกระจายตัวของอุณหภูมิและค่าความเค้นฟอนมิสเซสภายในของแข็งของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสกรณีที่ $\mathrm{Gr} = 10^5$ และ K_{sf} = 10

ส่วนค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวนอนของของแข็งในกรณีที่ค่า K_{sf} มีค่าต่าง ๆ กันได้แสดงไว้ในตารางที่ 7.3 จะพบว่าระยะการเคลื่อนตัวมีค่าที่น้อยมาก จึงอาจกล่าวได้ว่าไม่มีผลกระทบต่อรูปแบบของการไหล

ตารางที่ 7.3 ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวนอนของของแข็งสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัส กรณีค่า K_{sf} ต่าง ๆ กัน

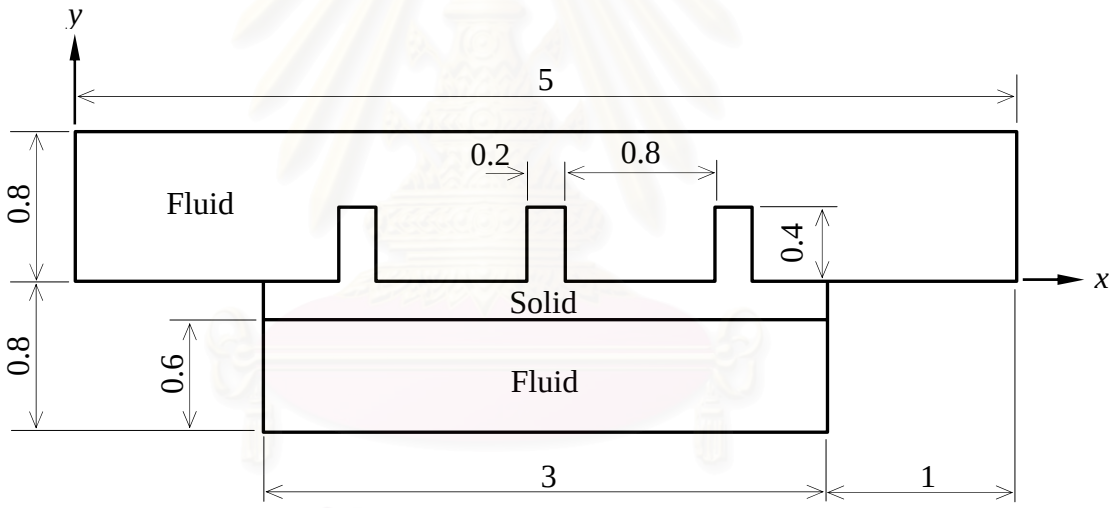
	อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน, K_{sf}		
	1	5	10
ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดในแนวนอน (mm)	8.10×10^{-4}	8.45×10^{-4}	8.51×10^{-4}

7.1.3 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน (free and forced convection in channel with fins)

ปัญหาสุดท้ายของหัวข้อนี้สร้างขึ้นมาเพื่อให้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เพราะจะรวมการวิเคราะห์ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับพร้อม ๆ กันภายในปัญหาเดียว โดยลักษณะของปัญหาประกอบไปด้วยช่องการไหล 2 ส่วนได้แก่ด้านบนและด้านล่าง โดยขั้นกลางด้วยของแข็งที่มีครีบระบายความร้อนอยู่ สำหรับรายละเอียดของขนาดต่าง ๆ ได้แสดงในรูปที่ 7.14 และการวิเคราะห์ปัญหาในตัวอย่างนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณีด้วยกัน

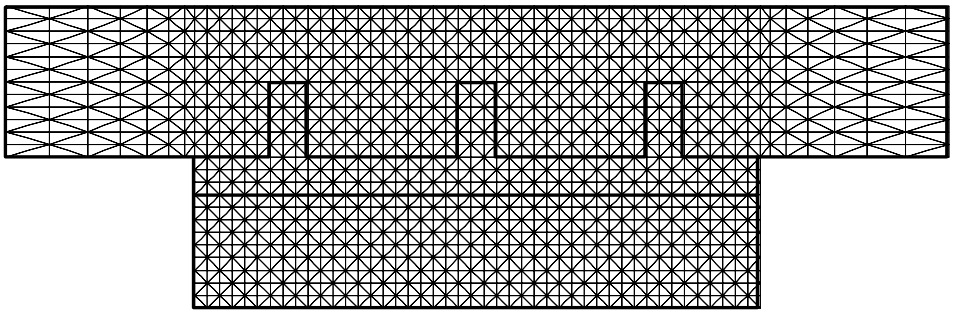
กรณีที่ 1 ของไหลในช่องการไหลทั้งสองเกิดการพาความร้อนแบบอิสระ

โดยกำหนดให้พื้นผิวล่างสุด ($y = -0.8$) มีอุณหภูมิเท่ากับ 1 และกำหนดให้พื้นผิวด้านบนสุด ($y = 0.8$) มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 ส่วนขอบด้านซ้ายและขวาของช่องการไหลทั้งด้านบนและด้านล่างรวมทั้งส่วนที่เป็นของแข็งถูกกำหนดให้เป็นผนังแบบฉนวน

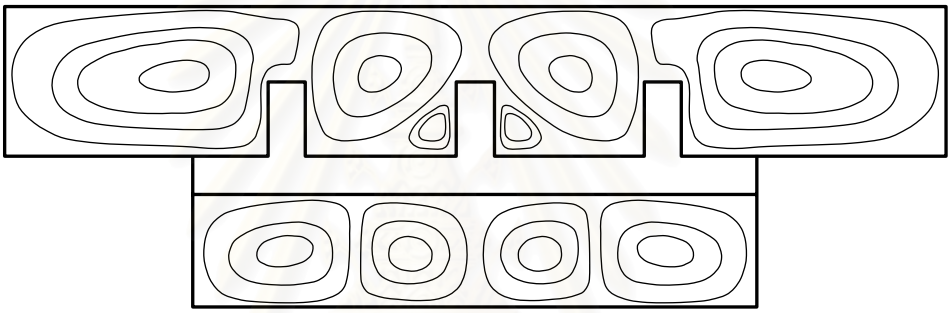


รูปที่ 7.14 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนสำหรับกรณีที่ 1

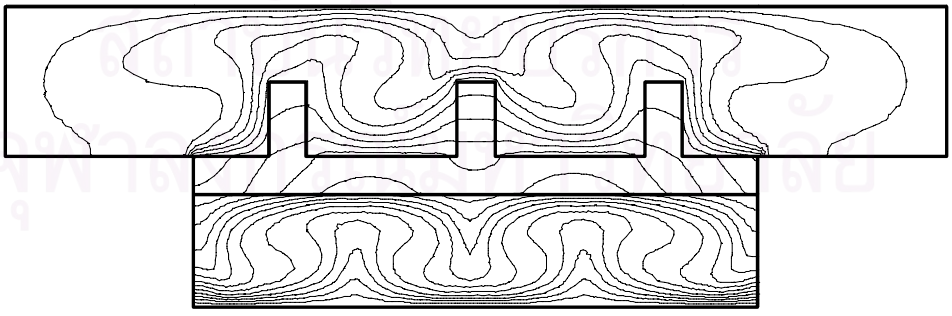
การวิเคราะห์ปัญหาในช่วงแรกจะเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.15 ซึ่งประกอบไปด้วย 5159 จุดต่อ 2496 เอลิเมนต์ แล้วทำการกำหนดคุณสมบัติของของไหลและของแข็งดังนี้ กำหนดให้ของไหลมีค่า Pr = 0.71 ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนของของไหล, $\beta = 10$ และอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็งและของไหล, $K_{sf} = 10$ โดยรูปที่ 7.16 แสดงเส้นกระแสการไหลที่ได้จากการคำนวณ ส่วนลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมินั้นได้แสดงในรูปที่ 7.17 หลังจากนั้นได้แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ไว้ในรูปที่ 7.18



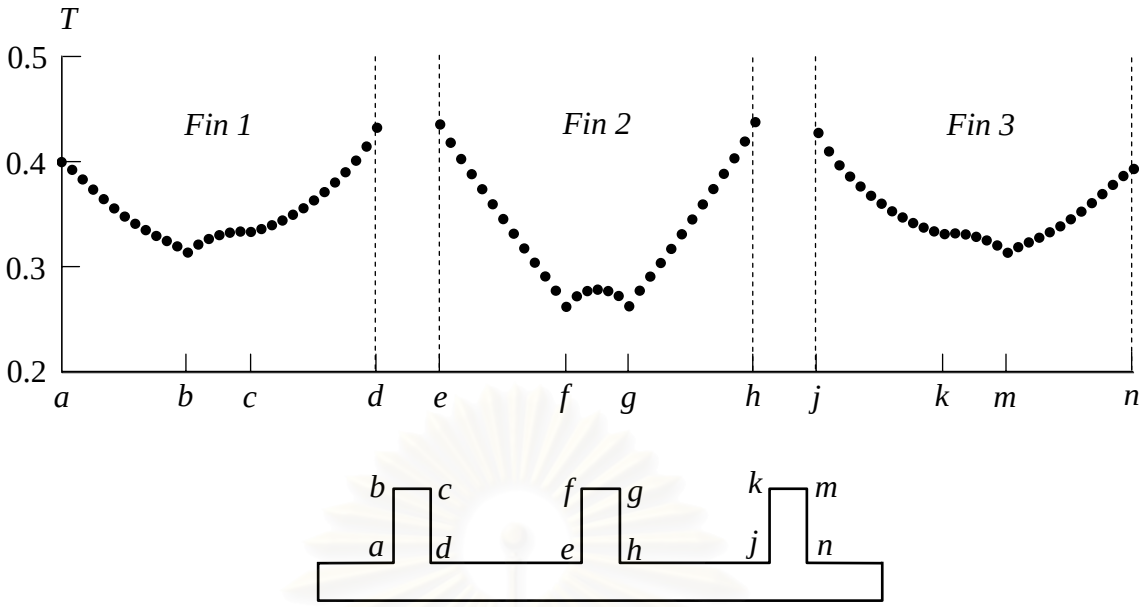
รูปที่ 7.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ
และแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน



รูปที่ 7.16 เส้นกระแสการไหลของปัญหาในกรณีที่มีการพาความร้อน
แบบอิสระเพียงอย่างเดียว



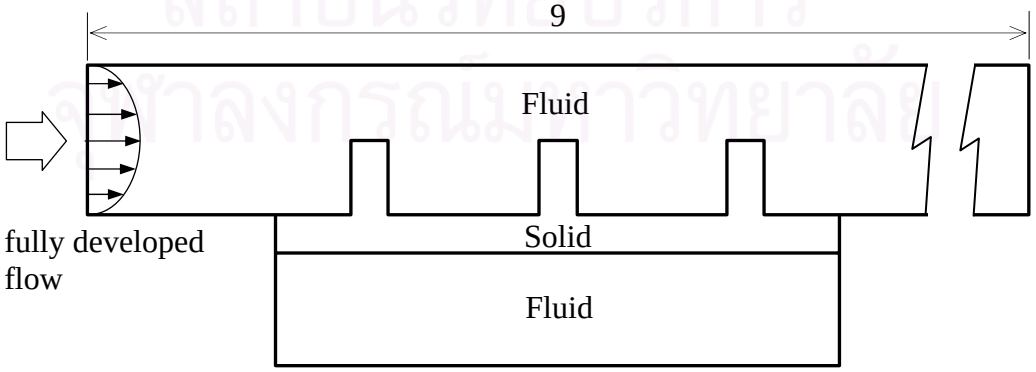
รูปที่ 7.17 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาในกรณี
ที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 7.18 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3

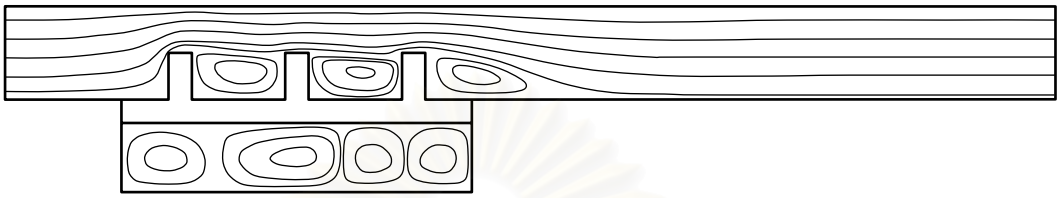
กรณีที่ 2 ของไหลในช่องการไหลด้านบนมีการพาความร้อนแบบบังคับส่วนของไหลด้านล่างเกิดการพาความร้อนแบบอิสระ

การวิเคราะห์ปัญหาในกรณีที่ 2 นี้จะทำการขยายขอบเขตของช่องการไหลในส่วนด้านบนออกไปทางด้านขวาอีก 4 หน่วยทำให้ความยาวรวมทั้งหมดของช่องการไหลด้านบนมีค่าเท่ากับ 9 หน่วย และกำหนดให้ของไหลที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 และเป็นแบบปรับตัวเต็มที่แล้ว (fully developed flow) ไหลเข้ามาทางด้านซ้ายด้วยค่า Re เท่ากับ 50, 100, 200 และ 300 ตามลำดับ (คำนวณจากขนาดของช่องการไหลเข้า) และไหลออกทางช่องด้านขวาสุด ดังแสดงในรูปที่ 7.19 ส่วนเงื่อนไขขอบเขตอื่น ๆ ถูกกำหนดในลักษณะเช่นเดียวกันกับการคำนวณในกรณีแรก

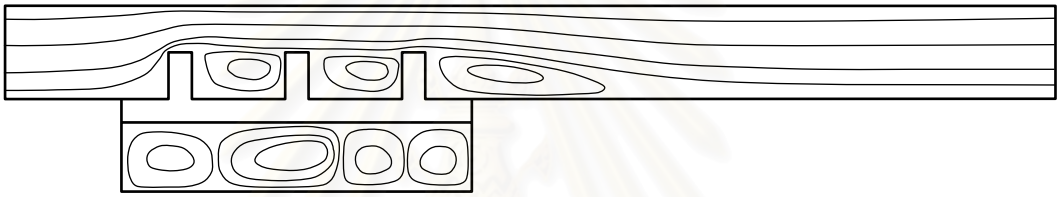


รูปที่ 7.19 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนสำหรับกรณีที่ 2

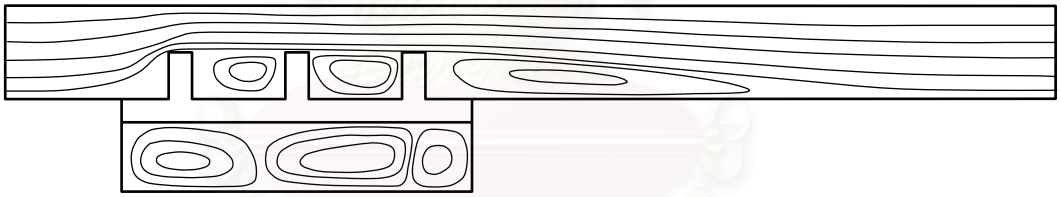
จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน ซึ่งผลการคำนวณที่ได้ก็นำมาแสดงในรูปที่ 7.20 (ก-ง) โดยรูปดังกล่าวเป็นการแสดงเส้นกระแสการไหลในกรณีที่ค่า Re มีค่าเท่ากับ 50, 100, 200 และ 300 ตามลำดับ ส่วนการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่า Re ต่าง ๆ นั้นได้แสดงในรูปที่ 7.21 (ก-ง)



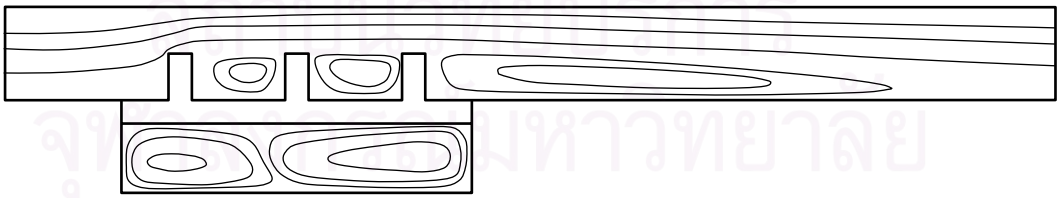
(ก) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 50



(ข) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100

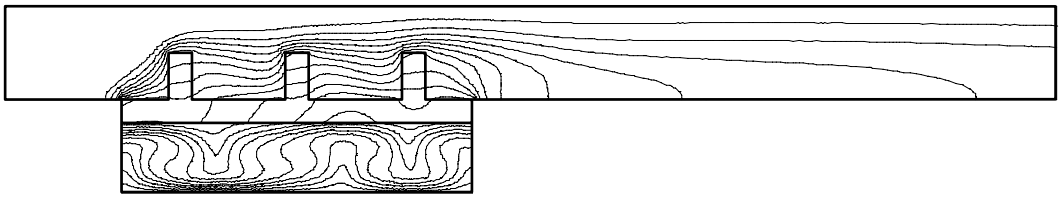


(ค) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200

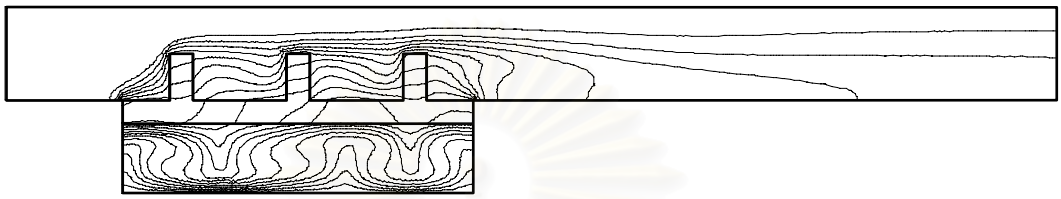


(ง) เส้นกระแสการไหลในกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300

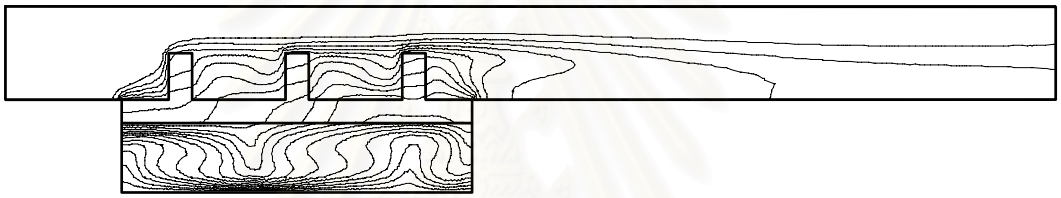
รูปที่ 7.20 ลักษณะของเส้นกระแสการไหลในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน



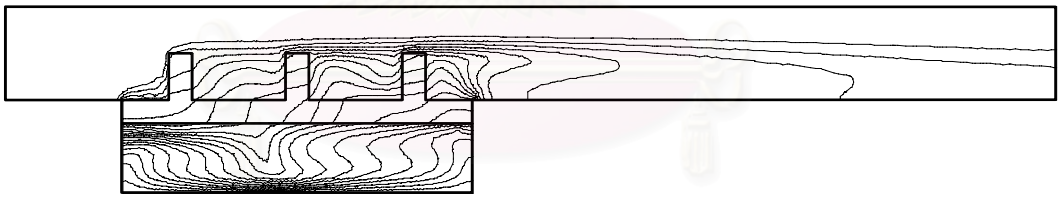
(ก) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 50



(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100



(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200

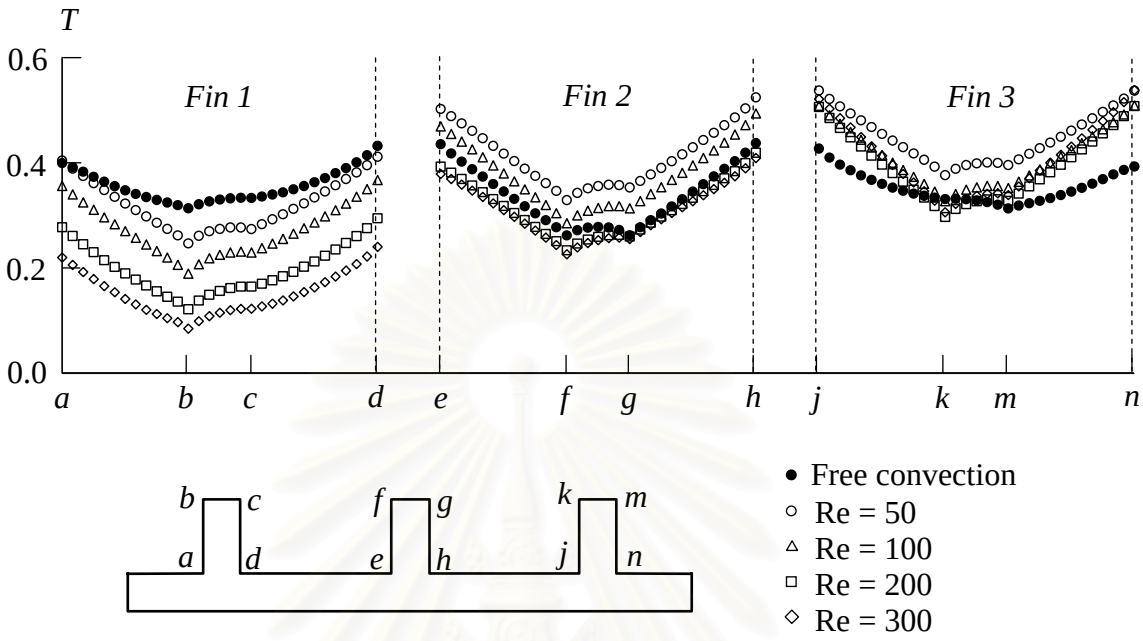


(ง) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300

รูปที่ 7.21 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน

จากรูปที่ 7.20 (ก-ง) จะเห็นว่าการไหลหมุนวนด้านหลังครีบระบายความร้อนตัวที่ 3 นั้นจะมีขนาดที่กว้างขึ้นเมื่อการไหลในช่องด้านบนมีค่า Re เพิ่มมากขึ้น ส่วนการไหลหมุนวนภายในช่องว่างระหว่างครีบระบายความร้อนนั้นจะมีลักษณะที่คล้าย ๆ กัน สำหรับการไหลหมุนวนภายในช่องการไหลด้านล่างนั้นพบว่า ในกรณีที่ค่า Re = 50 และ 100 นั้น การไหลหมุนวนจะมีลักษณะคล้าย ๆ กัน แต่จะดูเบี้ยวเล็กน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว (รูปที่ 7.16) และเมื่อการไหลด้านบนมีค่า Re = 200 ลักษณะการไหล

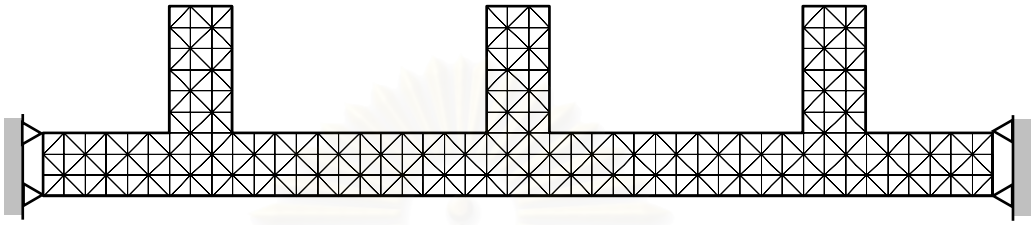
หมุนวนภายในช่องด้านล่างก็มีลักษณะที่เปลี่ยนแปลงไป จากที่มีการไหลหมุนวน 4 วง ก็ลดลงเหลือ 3 วงเท่านั้น และลดลงเหลือเพียง 2 วงเมื่อการไหลมีค่า Re = 300 ดังแสดงในรูปที่ 7.20



รูปที่ 7.22 เปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระอย่างเดียว กับกรณีที่มีการพาความร้อนแบบบังคับในช่องการไหลด้านบนที่ค่า Re ต่าง ๆ กัน

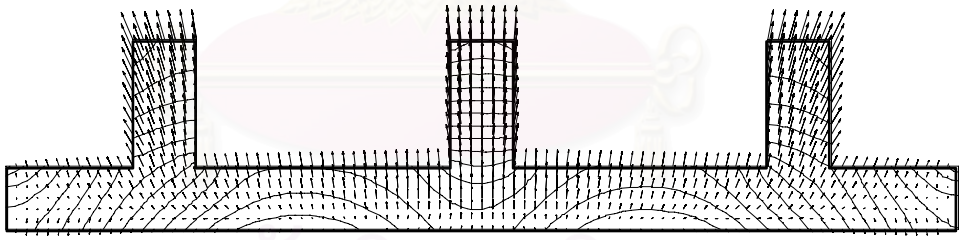
ส่วนในรูปที่ 7.22 จะเป็นการเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว กับกรณีที่ช่องการไหลด้านบนมีของไหลไหลผ่านทำให้เกิดเป็นการพาความร้อนแบบบังคับ ในขณะที่ช่องการไหลด้านล่างยังเป็นการพาความร้อนแบบอิสระอยู่ โดยทำการเปรียบเทียบในกรณีที่ของไหลไหลด้วยค่า Re ต่าง ๆ กัน 4 ค่า ได้แก่ 50, 100, 200 และ 300 ตามลำดับ จากกราฟจะพบว่าเมื่อมีการไหลในช่องการไหลด้านบน อุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนตัวแรกจะมีอุณหภูมิลดลงเมื่อเทียบกับกรณีที่ช่องการไหลด้านบนเป็นการพาความร้อนแบบอิสระ ในขณะที่ครีบระบายความร้อนตัวที่ 2 และ 3 มีอุณหภูมิสูงขึ้น ซึ่งน่าจะมีสาเหตุมาจากการไหลหมุนวนที่ไม่สะดวกเท่ากับการไหลหมุนวนกรณีที่เป็นการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างครีบระบายความร้อนตัวที่ 1 และ 2 และระหว่างครีบระบายความร้อนตัวที่ 2 และ 3 นั่นเอง จากนั้นเมื่อการไหลในช่องการไหลด้านบนมีค่า Re เพิ่มมากขึ้น อุณหภูมิที่ครีบระบายความร้อนตัวที่ 1 ยังคงมีอุณหภูมิลดลงอย่างต่อเนื่อง ส่วนอุณหภูมิของครีบระบายความร้อนตัวที่ 2 และ 3 นั้นก็เริ่มลดลงเช่นเดียวกันแต่ไม่มากนัก และเริ่มไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อการไหลในช่องการไหลด้านบนมีค่า Re = 200

สุดท้ายเป็นการนำผลลัพธ์ที่ได้มาคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวภายในครีบระบายความร้อนทั้ง 3 โดยรูปที่ 7.23 เป็นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของส่วนที่เป็นของแข็งซึ่งประกอบไปด้วย 889 จุดต่อ 378 เอลิเมนต์ และส่วนของเงื่อนไขขอบเขตนั้นกำหนดให้จุดต่อที่มุมด้านล่างทั้งสองฝั่งถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนจุดต่ออื่น ๆ ตลอดขอบด้านซ้ายและด้านขวากำหนดให้เคลื่อนตัวในแนวดิ่งเท่านั้น



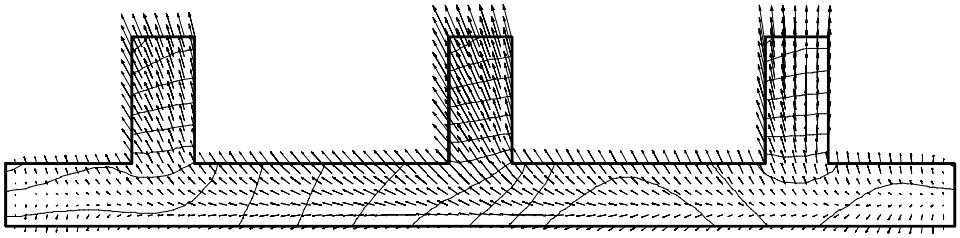
รูปที่ 7.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

รูปที่ 7.24 แสดงลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิพร้อมกับเวกเตอร์แสดงทิศทางการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อในกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว ซึ่งค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดมีค่าเท่ากับ 2.15×10^{-6} m. และค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงสุดเท่ากับ 0.313 MPa

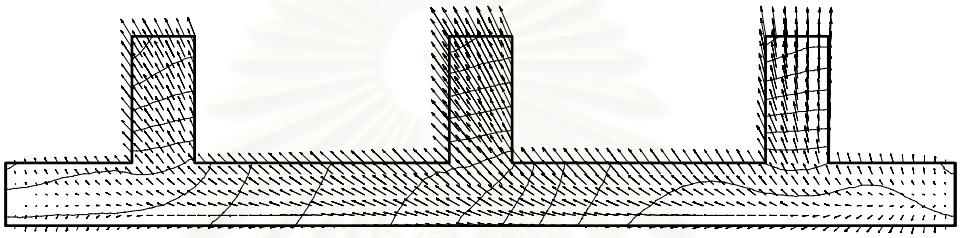


รูปที่ 7.24 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็งสำหรับกรณีที่มีการพาความร้อนแบบอิสระเพียงอย่างเดียว

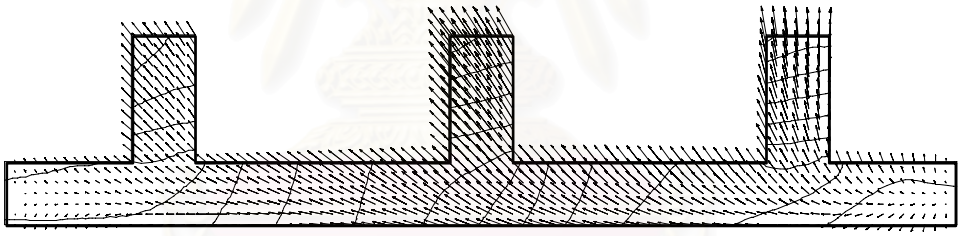
ส่วนรูปที่ 7.25 – 7.27 แสดงลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อในกรณีที่ช่องการไหลด้านบนมีของไหลไหลด้วยค่า Re = 100, 200 และ 300 ตามลำดับ ซึ่งในแต่ละกรณีมีค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดและค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงสุด ดังแสดงในตารางที่ 7.4



รูปที่ 7.25 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็ง สำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 100



รูปที่ 7.26 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็ง สำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 200



รูปที่ 7.27 การกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นภายในของแข็ง สำหรับกรณีที่การไหลในช่องด้านบนมีค่า Re = 300

ตารางที่ 7.4 ค่าการเคลื่อนตัวและค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงสุดในของแข็งสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อนในกรณีค่า Re ต่าง ๆ กัน

	ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุด (m)	ค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงสุด (MPa)
Re = 100	1.927×10^{-6}	0.343
Re = 200	1.990×10^{-6}	0.318
Re = 300	2.337×10^{-6}	0.320

จากตัวอย่างทั้ง 3 ในบทนี้ก็ได้แสดงให้เห็นถึงการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ เพื่อการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างปัญหาของไหล ของแข็ง และการถ่ายเทความร้อน ซึ่งเป็นการรวมองค์ความรู้ในหลาย ๆ ด้านมาทำการวิเคราะห์พร้อมกัน ส่วนในบทต่อไปจะกล่าวถึงเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ และตัวอย่างการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับการวิเคราะห์ปัญหา และทำให้ได้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 8
เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการแบ่งพื้นที่ภายในโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้วทำการคำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ๆ ดังนั้นถ้าเราใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กมากเท่าไร จุดต่อต่าง ๆ ที่เป็นตัวแทนของตำแหน่งที่จะทำการคำนวณก็จะอยู่ใกล้กันมากขึ้นเท่านั้น ซึ่งจะเป็นผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตลอดภายในโดเมนของปัญหาจะทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำ (RAM) จำนวนมาก และอาจทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีจำนวนหน่วยความจำที่จำกัดนั้นไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นหากเราสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมก็จะทำให้ลดจำนวนจุดต่อที่ต้องทำการคำนวณลง แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยทั่ว ๆ ไปนั้นเราไม่สามารถที่จะทราบผลเฉลยแม่นตรงได้ จึงไม่อาจทราบว่าในบริเวณใดควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กและในบริเวณใดที่สามารถใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ได้ จึงต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสม [19] โดยในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และขั้นตอนในการนำไปประยุกต์ใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ

8.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ จะทำการปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีค่าการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังกล่าวจะอาศัยแนวคิดที่กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นตรงมีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมน [9] เช่นถ้าเราสนใจค่าของตัวแปร ϕ ในโดเมนการไหลใน 1 มิติ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ตำแหน่งใด ๆ จะมีค่าดังนี้

$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อน} \;=\; h^2\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right| \;=\; \text{ค่าคงที่} \qquad (8.1)$$

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาใน 2 มิติ จะมีพจน์อนุพันธ์อันดับ 2 หลายพจน์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

ก่อนนำค่าอนุพันธ์อันดับ 2 มาใช้จะต้องปรับค่าดังกล่าว โดยอาศัยหลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็ง [11]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

โดย σ_x คือความเค้นในแนวแกน x, σ_y คือความเค้นในแนวแกน y, τ_{xy} คือความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน y, τ_{yx} คือความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน x, σ_X คือความเค้นในแนวแกนหลัก X และ σ_Y คือความเค้นในแนวแกนหลัก Y ซึ่งหากประยุกต์เข้ากับปัญหาใน 2 มิติ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} \end{bmatrix}$$

โดย

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2}$$

และมุมระหว่างแนวแกนหลัก X-Y กับแนวแกน x-y หาได้จาก

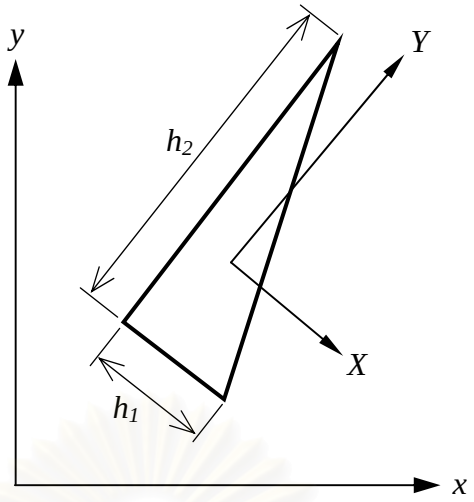
$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}\right)$$

ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของปัญหาใน 2 มิติ คือ

$$h_1^2\left|\lambda_1\right| = h_2^2\left|\lambda_2\right| = \text{ค่าคงที่} \tag{8.3}$$

โดย h_1 คือความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X, h_2 คือความยาวเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y ดังแสดงในรูปที่ 8.1 และ

$$\lambda_1 = \frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}$$



รูปที่ 8.1 แสดงการวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลักทั้งสอง *(X, Y)*

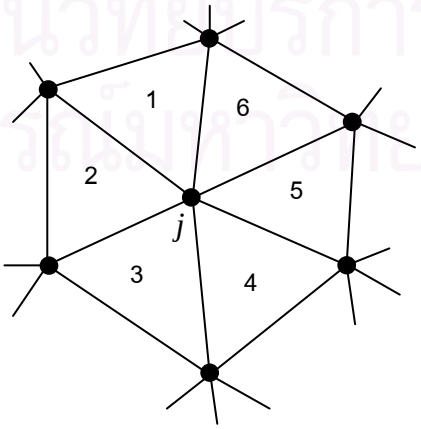
การหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของจุดต่อใด ๆ เช่น $\partial\phi/\partial x$ เป็นต้น จะหาได้จากการรวมค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น ดังแสดงในรูปที่ 8.2 การหาค่าอนุพันธ์ดันดับที่ 1 ของจุดต่อ j จะรวมค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 6 เอลิเมนต์ ดังนี้ [9]

$$\int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_j = \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e \tag{8.4}$$

โดย N_i และ N_j คือฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_j$ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของค่าตัวแปรที่พิจารณาที่จุดต่อ j

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e = \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j$$



รูปที่ 8.2 ตัวอย่างการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมล้อมจุดต่อ j ใด ๆ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หากเราประยุกต์วิธีโดยชัดแจ้ง (explicit algorithm) เข้ากับสมการ (8.4) ทำให้ $\int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$ อยู่ในรูปแบบรวมตัวที่จุดต่อ (lumped mass matrix) ดังนั้น

$$M_{ij}\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_j = \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e \tag{8.5}$$

โดย $M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$ เมื่อ $i = j$

$= 0$ เมื่อ $i \neq j$

เราสามารถประยุกต์ในทำนองเดียวกันกับค่าอนุพันธ์อันดับ 2 ได้ดังนี้

$$M_{ij}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)_j = \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)_e \tag{8.6}$$

โดย $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)_j$ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของค่าตัวแปรที่พิจารณาที่จุดต่อ j

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)_e = \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial N_j}{\partial X}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ (8.5) และ (8.6) เราจะสามารถหาค่า λ_1 ในสมการ (8.3) ได้ และในทำนองเดียวกันก็จะสามารถหาค่า λ_2 ได้เช่นกัน

$$M_{ij}\left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_j = \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_e \tag{8.7}$$

$$M_{ij}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2}\right)_j = \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2}\right)_e \tag{8.8}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของค่าความหนาแน่นที่หาได้ในสมการ (8.7) และ (8.8) จากการจัดแบ่งเอลิเมนต์ครั้งล่าสุด จะถูกนำไปใช้ต่อไปเพื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ครั้งใหม่โดยอัตโนมัติ เราจะกำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุด (h_{min}) สำหรับการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ ซึ่งจะเป็นตำแหน่งที่เกิดค่าอนุพันธ์อันดับสองสูงสุดด้วยตามข้อกำหนดที่จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากันตลอดทั้งโดเมนการไหล ดังแสดงในสมการ (8.3) ดังนั้น

$$h_{\min}^2 \left|\lambda_{\max}\right| = h_1^2 \left|\lambda_1\right| = h_2^2 \left|\lambda_2\right| = \text{ค่าคงที่} \tag{8.9}$$

โดย $$\left|\lambda_{\max}\right| = \max\left[\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right|\right]$$

และเราสามารถกำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่ยาวที่สุด ($h_{\max}$) ได้เช่นกัน หากตำแหน่งใดมีการคำนวณตามสมการ (8.9) แล้วได้ค่าความยาวเอลิเมนต์ที่ยาวกว่า $h_{\max}$ ก็จะปรับให้ค่าความยาวเอลิเมนต์มีค่าเท่ากับ $h_{\max}$ แทน

บางครั้งในการแบ่งเอลิเมนต์เราจะพบว่าเอลิเมนต์บางตำแหน่งจะได้ค่าอัตราส่วนระหว่างความยาวเอลิเมนต์ทั้งสองด้าน (stretching parameter, s_i) มีค่ามากจนเกินไป จึงควรกำหนดค่าอัตราส่วนสูงสุดไว้อย่างเหมาะสม ($S_{\max}$) หากตำแหน่งใดมีค่า s_i มากกว่า ($S_{\max}$) ก็จะถูกปรับค่าให้เท่ากับ $S_{\max}$ แทน

$$s_i = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|} \qquad (8.10)$$

8.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ จะมีโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง 3 โปรแกรมด้วยกันดังนี้

1. โปรแกรม BUILT

โปรแกรม BUILT เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งจะรับข้อมูลที่กำหนดพื้นผิวและขอบเขตของปัญหาจากผู้ใช้ รวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจากโปรแกรม SPACE

2. โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหา

เป็นโปรแกรมที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาเพื่อหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ต้องการ โดยข้อมูลของตัวแปรไม่ทราบค่าที่คำนวณได้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยโปรแกรม SPACE

3. โปรแกรม SPACE

โปรแกรม SPACE เป็นโปรแกรมที่ใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมบนโดเมนของปัญหาดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 8.1 โดยการรับข้อมูลทั้งจากผู้ใช้เป็นผู้กำหนดค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่จำเป็น และข้อมูลที่คำนวณได้จากข้อ 2 โดยผลการคำนวณจะถูกใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในโปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT และ SPACE ที่อยู่ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [20]

8.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะได้นำเสนอขั้นตอนในการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยใช้โปรแกรมทั้ง 3 ที่ได้กล่าวในหัวข้อ 8.3 ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดของเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน และกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอตลอดขอบเขตของปัญหา โดยใช้โปรแกรม BUILT
2. ใช้โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหา เพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าโดยใช้แบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนที่ 1
3. ใช้โปรแกรม SPACE ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยใช้ผลของความเร็วที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวกำหนด
4. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้งโดยใช้ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 แล้วทำการวิเคราะห์ปัญหาอีกครั้งโดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกมาแล้ว

นำผลที่ได้ในขั้นตอนที่ 4 มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในครั้งก่อนหน้าว่าค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าต่าง ๆ มีความแตกต่างหรือมีการเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเท่าไร ถ้ามีความแตกต่างกันค่อนข้างมากแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้ยังไม่เหมาะสม จะต้องนำคำตอบที่ได้ในครั้งหลังนี้ไปใช้หาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ในขั้นตอนที่ 3 ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับผลคำตอบที่ได้ครั้งก่อน

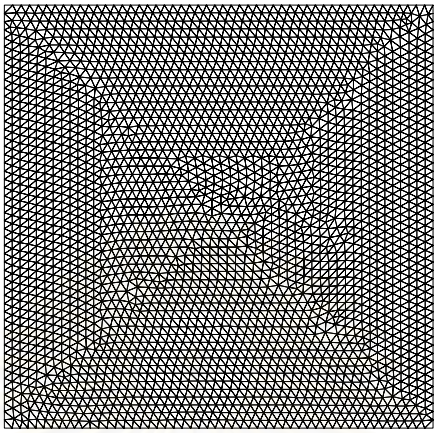
8.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการพาด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

8.4.1 ปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง (advection skew to the mesh)

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาที่มีพจน์การพา โดยจะเริ่มจากการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับการแก้ปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง ซึ่งลักษณะของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.8 ในการวิเคราะห์ปัญหาจะใช้โปรแกรมจากบทที่ 3 ร่วมกับโปรแกรม BUILT และ SPACE โดยมีขั้นตอนในการวิเคราะห์เป็นลำดับดังนี้

เริ่มต้นจากการใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ โดยรูปแบบของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT สามารถศึกษาได้

จากหนังสืออ้างอิง [20] และรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 8.3 ซึ่งประกอบไปด้วย 2782 จุดต่อ 5357 เอลิเมนต์

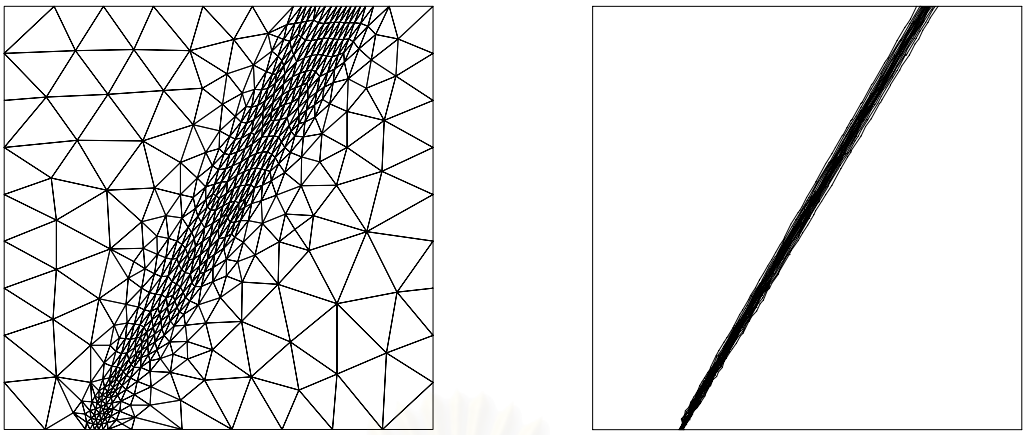


รูปที่ 8.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาการพาที่ทำมุมเอียง

จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังรูปที่ 8.3 ซึ่งผลการกระจายตัวของตัวแปรไม่ทราบค่า, ϕ ในสมการ (3.23) ได้แสดงในรูปที่ 8.4

รูปที่ 8.4 การกระจายตัวของตัวแปรไม่ทราบค่า (ϕ) สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

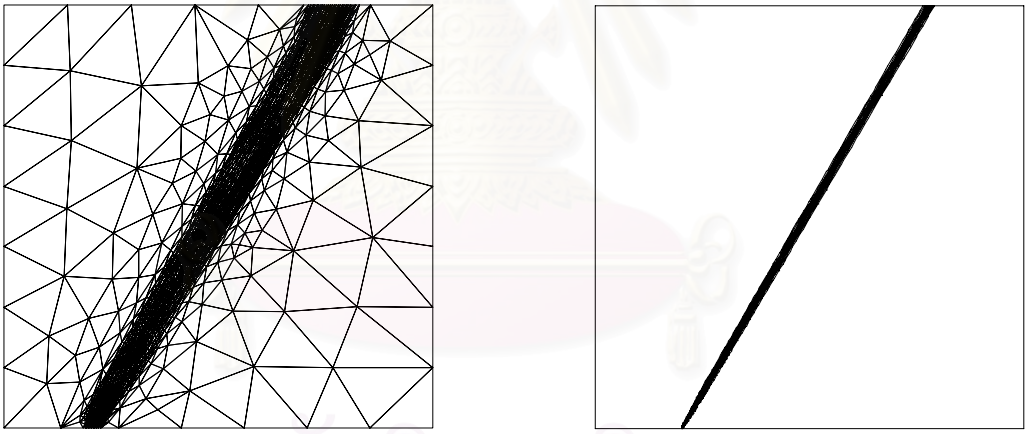
จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ไปทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม SPACE สุดท้ายทำการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วด้วยโปรแกรม BUILT อีกครั้ง โดยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 นี้ได้แสดงในรูปที่ 8.5ก ซึ่งประกอบไปด้วย 505 จุดต่อ 953 เอลิเมนต์ และผลลัพธ์จากรูปแบบจำลองนี้ได้แสดงในรูปที่ 8.5ข ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าการใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งขอบเขต



(ก) (ข)

รูปที่ 8.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้

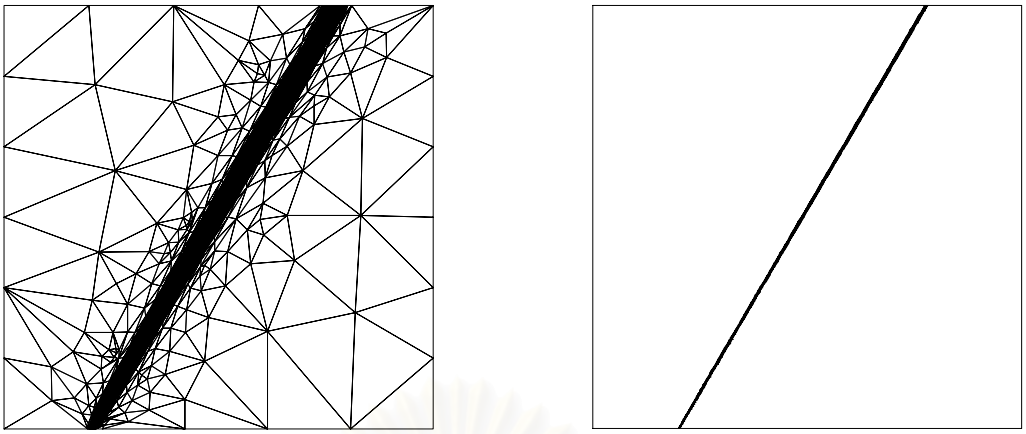
และเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 จะได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.6ก ซึ่งประกอบไปด้วย 1227 จุดต่อ 2387 เอลิเมนต์ และผลลัพธ์จากรูปแบบจำลองนี้ได้แสดงในรูปที่ 8.6ข ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น



(ก) (ข)

รูปที่ 8.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้

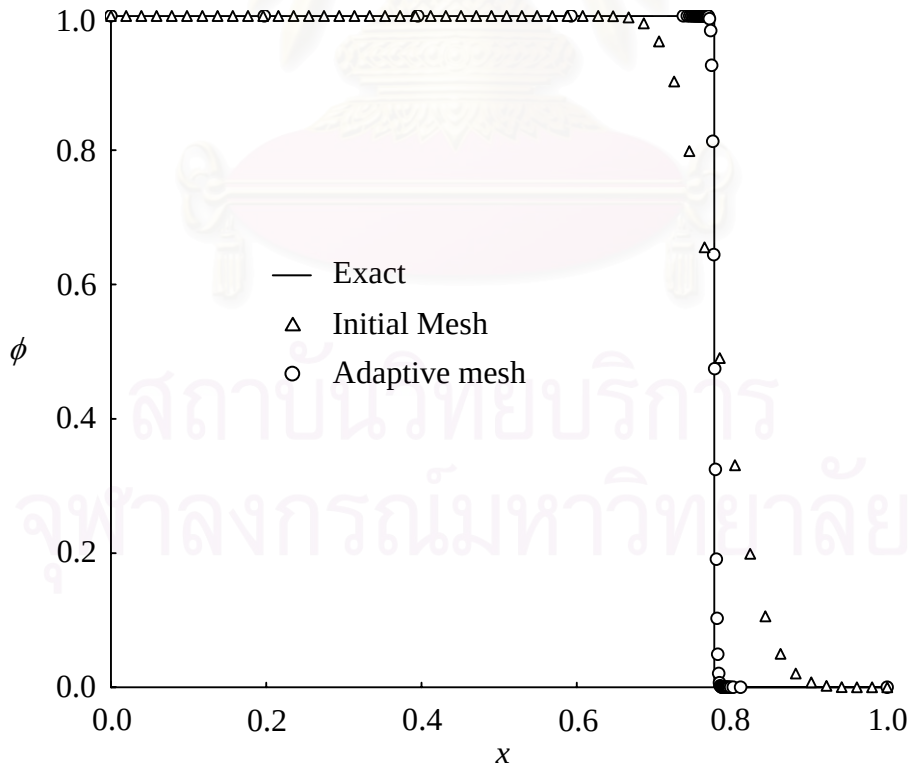
จากนั้นทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งสุดท้าย ซึ่งทำให้ได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.7ก ซึ่งประกอบไปด้วย 3733 จุดต่อ 7375 เอลิเมนต์ และผลลัพธ์จากรูปแบบจำลองนี้ได้แสดงในรูปที่ 8.7ข ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องเป็นอย่างมากเมื่อเทียบกับการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ



(ก) (ข)

รูปที่ 8.7 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3
และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่คำนวณได้

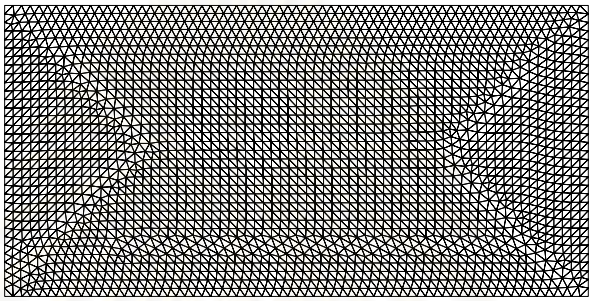
รูปที่ 8.8 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าของคำตอบที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์กับผลเฉลยแม่นตรง ที่ตำแหน่ง $y = 1$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้วมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก



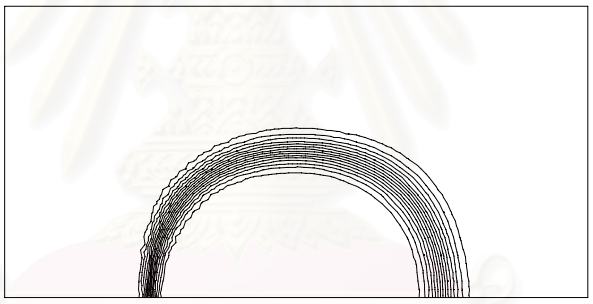
รูปที่ 8.8 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น
และจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดกับผลเฉลยแม่นตรง

8.4.2 กรณีทดสอบของสมิทธ์และฮัตตัน (Smith and Hutton test case)

ในตัวอย่างนี้เป็นการทดสอบเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาที่มีพจน์การพา โดยประยุกต์กับกรณีทดสอบของสมิทธ์และฮัตตัน ซึ่งลักษณะของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.12 สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์จะเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอดังแสดงในรูปที่ 8.9ก ส่วนลักษณะการกระจายตัวของตัวแปรไม่ทราบค่าได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.9ข



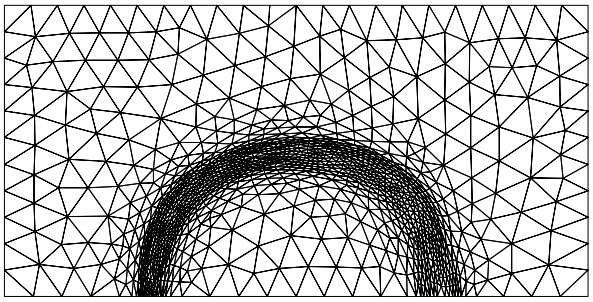
(ก)



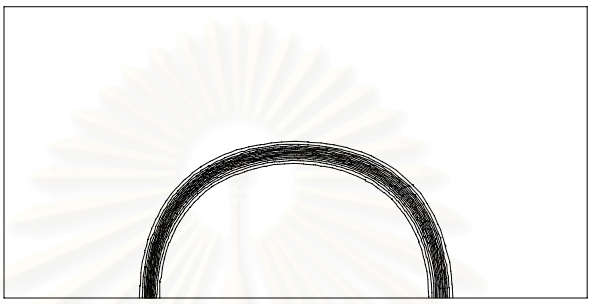
(ข)

รูปที่ 8.9 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและ
การกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

จากนั้นนำค่าที่คำนวณได้ไปทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ แสดงไว้ในรูปที่ 8.10ก ส่วนผลลัพธ์จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วแสดงไว้ในรูปที่ 8.10ข ตามลำดับ และเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้งเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์จากการวิเคราะห์สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งสุดท้ายนี้ได้แสดงในรูปที่ 8.11ก และ 8.11ข ตามลำดับ ส่วนรูปที่ 8.12 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกระหว่างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และรูปแบบการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งสุดท้าย กับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้วได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นเป็นอย่างมาก

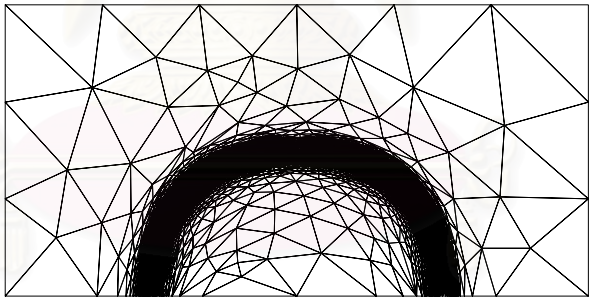


(ก)

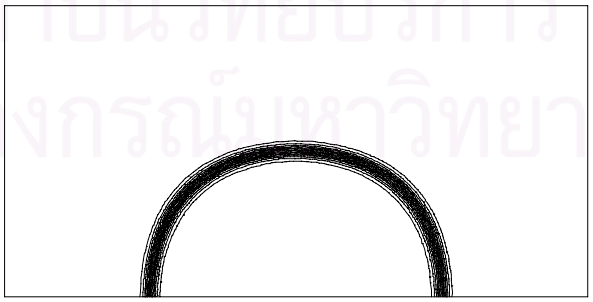


(ข)

รูปที่ 8.10 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า



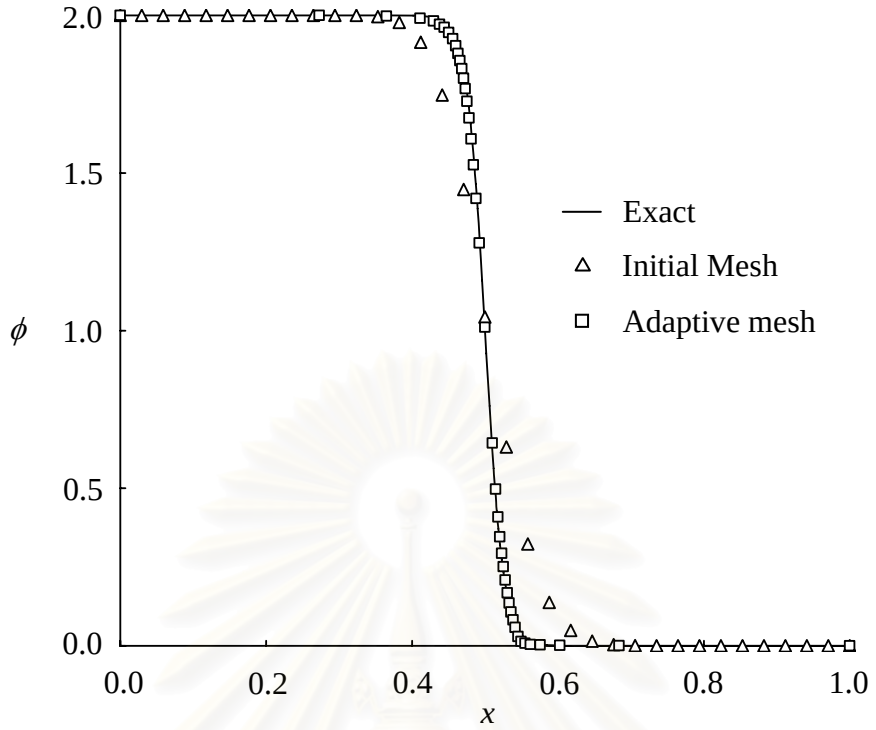
(ก)



(ข)

รูปที่ 8.11 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 8.12 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดกับผลเฉลยแม่นตรง

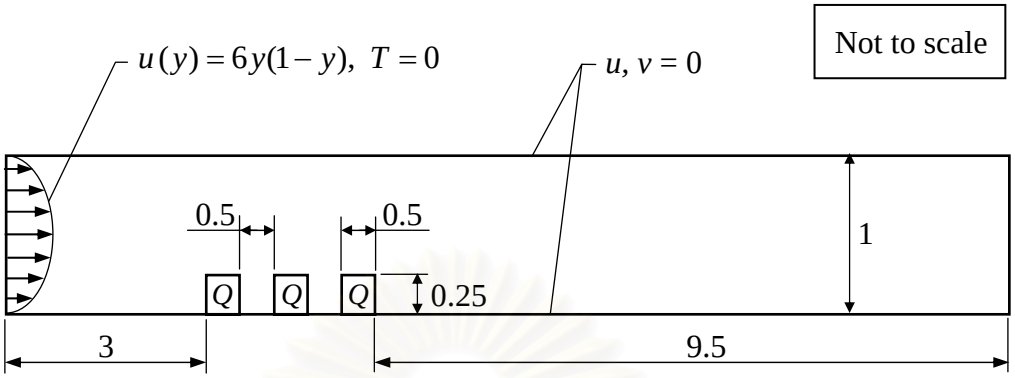
ซึ่งจากปัญหาตัวอย่างทั้ง 2 ที่ได้นำมาใช้ทดสอบนี้จะเห็นได้ว่าการผสมผสานเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์และวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพื่อใช้แก้ปัญหาพจน์การพานั้น สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจมาก โดยในส่วนถัดไปก็จะนำเทคนิคดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็ง และการถ่ายเทความร้อน

8.5 การวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหล อุณหภูมิ และโครงสร้างด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

8.5.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

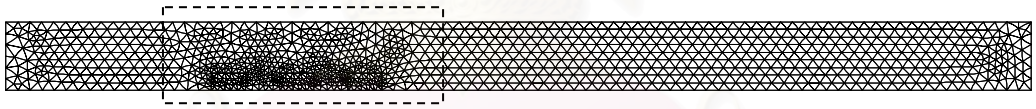
ลักษณะของปัญหาจะเป็นช่องการไหลยาวซึ่งมีของไหลที่ปรับตัวเต็มที่แล้วไหลเข้ามาทางด้านซ้าย และภายในช่องการไหลนี้จะมีครีบระบายความร้อนวางอยู่ที่ผนังด้านล่างจำนวนสามอัน โดยแต่ละอันจะมีการผลิตความร้อนขึ้นเอง ดังแสดงในรูปที่ 8.13 และรูปดังกล่าวยังแสดงขนาดพร้อมทั้งเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการวิเคราะห์ด้วย สำหรับคุณสมบัติของการไหลนั้นกำหนดให้ของไหลมีค่า Re = 100 (คำนวณเทียบกับขนาดช่องการไหลเข้า) และมีค่า Pr =

0.7 ส่วนของแข็งกำหนดให้มีการผลิตความร้อนต่อปริมาตร $Q = 1$ และอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนระหว่างของแข็งและของไหล $K_{sf} = 10$

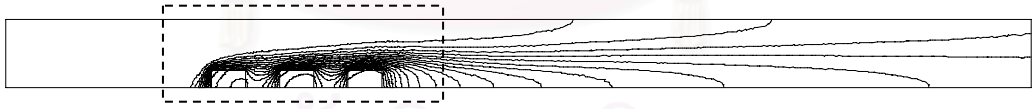


รูปที่ 8.13 ลักษณะปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นประกอบไปด้วย 4715 จุดต่อ 2260 เอลิเมนต์ ซึ่งจะเป็นเอลิเมนต์ขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอดังแสดงในรูปที่ 8.14ก. ส่วนลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่คำนวณนั้นได้แสดงในรูปที่ 8.14ข. ส่วนรูปที่ 8.15(ก-ข) จะแสดงภาพขยายบริเวณครีบระบายความร้อน หรือภายในกรอบเส้นประของรูปที่ 8.14(ก-ข)



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

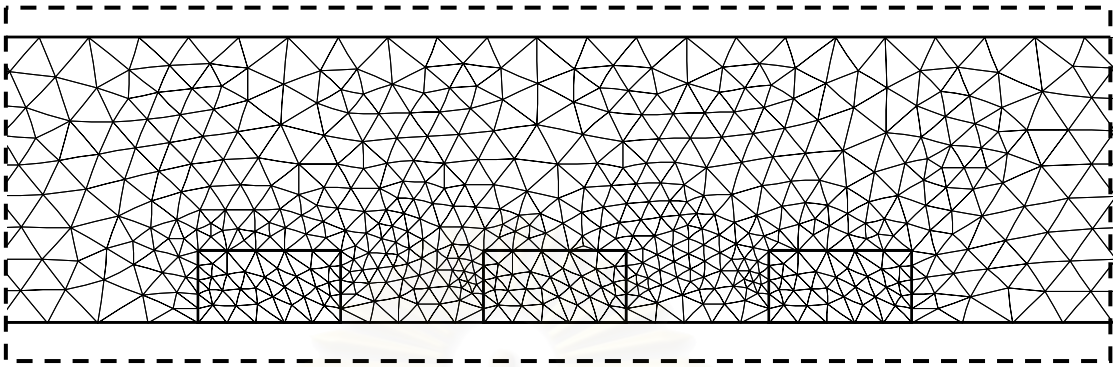


(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

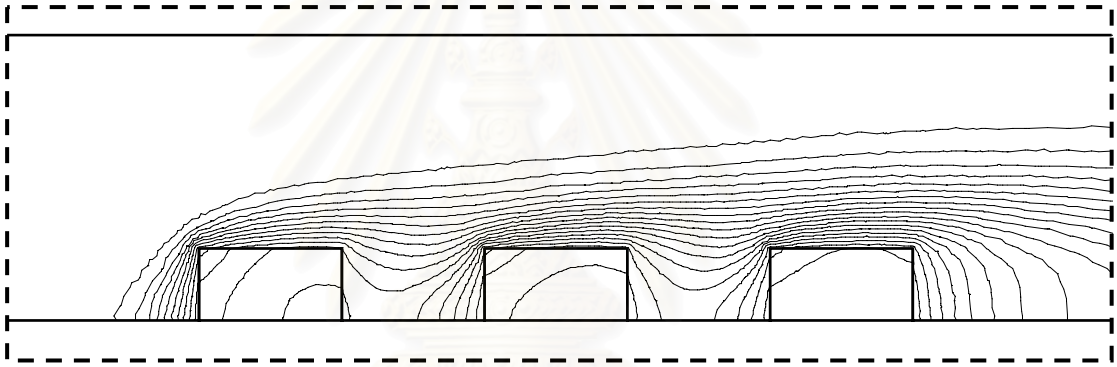
รูปที่ 8.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนติเริ่มต้นและการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

เมื่อได้ผลการวิเคราะห์มาแล้ว ก็นำเอาค่าผลลัพธ์ที่ได้มาใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดครั้งที่ 1 นี้แสดงในรูปที่ 8.16ก. ส่วนผลลัพธ์ของการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับการปรับขนาดครั้งที่ 1 นี้ได้แสดงในรูปที่ 8.16ข. จากนั้นก็ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งต่อไป โดยใช้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากครั้งก่อนหน้าเป็นเงื่อนไขใน

การปรับขนาดเอลิเมนต์ ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์การคำนวณของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และ 3 ก็ได้แสดงในรูปที่ 8.17(ก-ข) และรูปที่ 8.18(ก-ข) ตามลำดับ

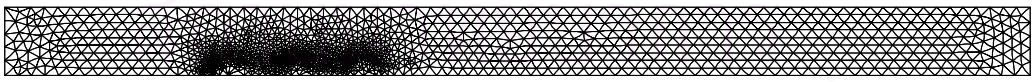


(ก) ภาพขยายรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

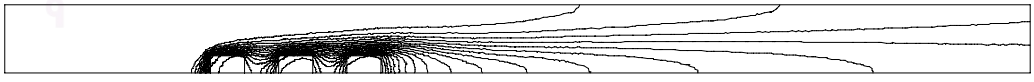


(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

รูปที่ 8.15 ภาพขยายของรูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์เริ่มต้นและการกระจายตัวของอุณหภูมิ

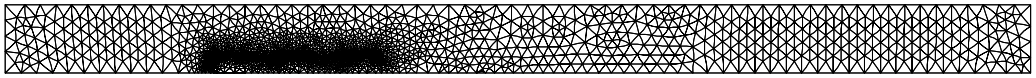


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1

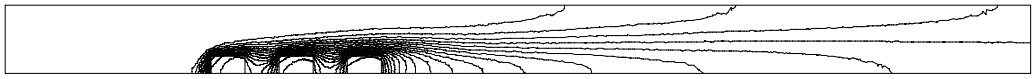


(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1

รูปที่ 8.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

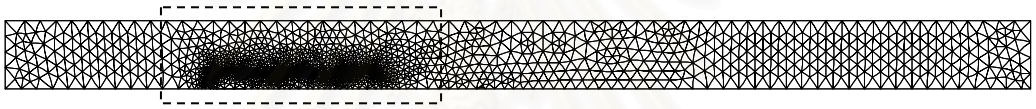


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2

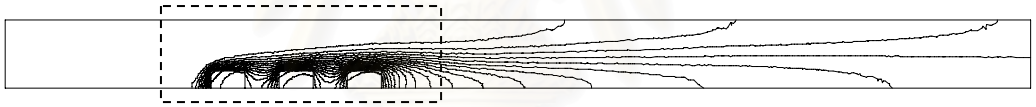


(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2

รูปที่ 8.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 2 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3

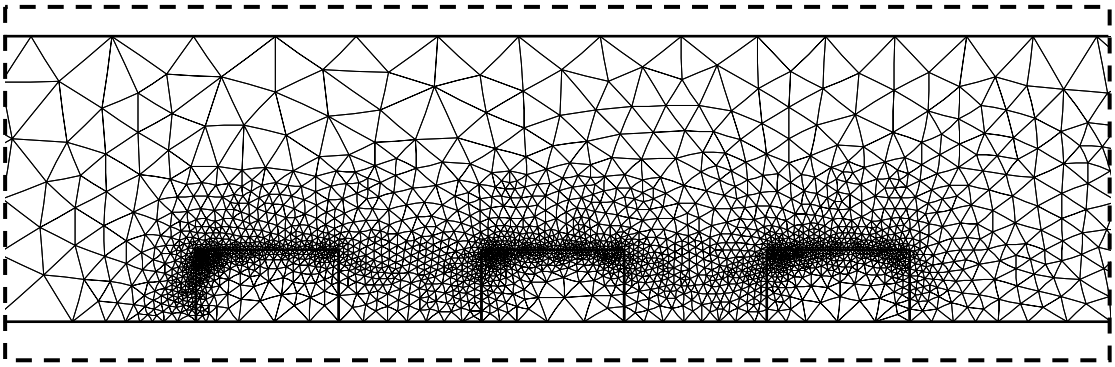


(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3

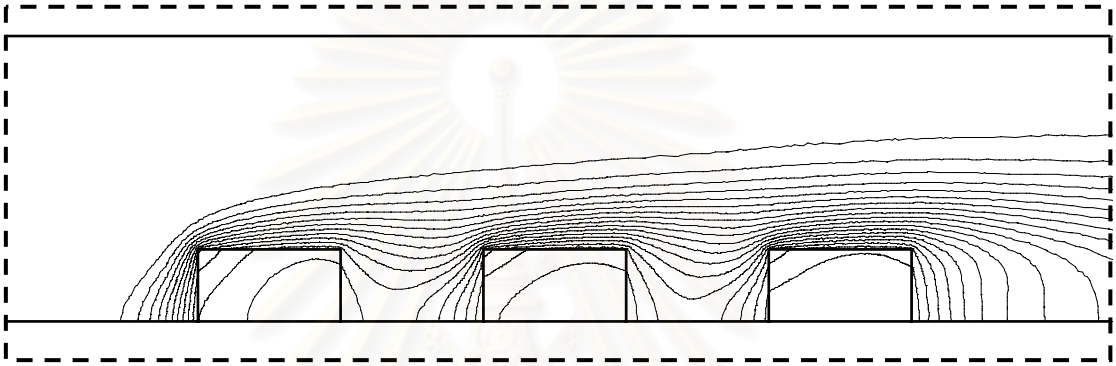
รูปที่ 8.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3 และการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

สำหรับภาพขยายภายในกรอบเส้นประของรูปที่ 8.18(ก-ข) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.19(ก-ข) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กถูกวางตัวอยู่ในบริเวณที่การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูง ส่วนเอลิเมนต์ขนาดที่ใหญ่กว่าจะถูกวางอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิต่ำ

ผลการคำนวณในตัวอย่างนี้จะได้นำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Davalath and Bayazitoglu [28] โดยจะทำการเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้งสาม ดังแสดงในรูปที่ 8.20 จากรูปที่ 8.20 จะเห็นว่าเมื่อทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับการคำนวณแล้วทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้น โดยไม่ต้องลดขนาดเอลิเมนต์ให้เล็กลงในทุก ๆ ส่วนของขอบเขตการคำนวณ ทำให้สามารถประหยัดเวลาและจำนวนหน่วยความจำที่ต้องใช้ในการคำนวณลงไปได้

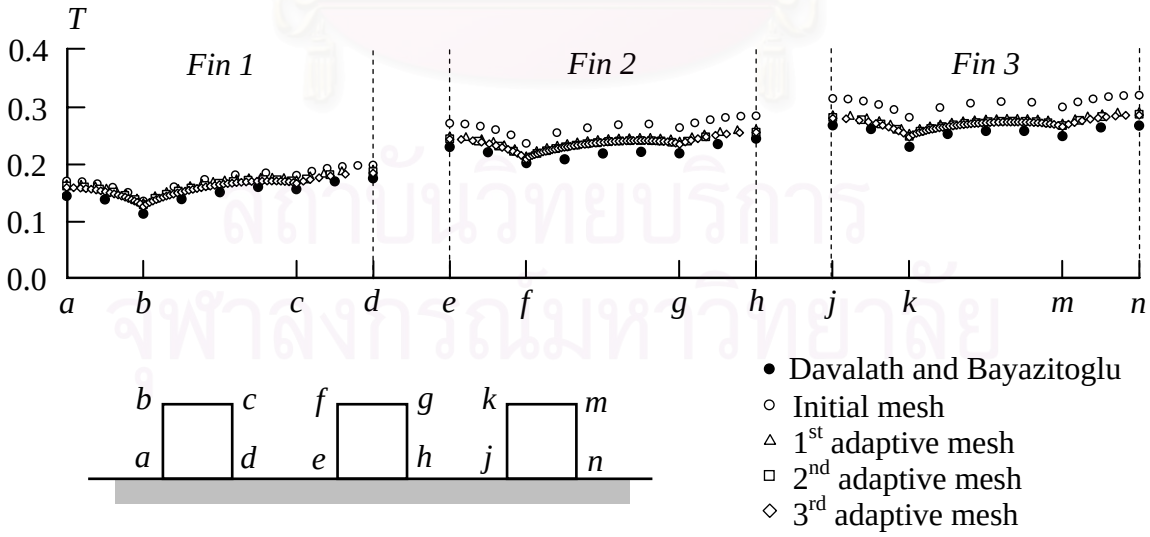


(ก) ภาพขยายรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3



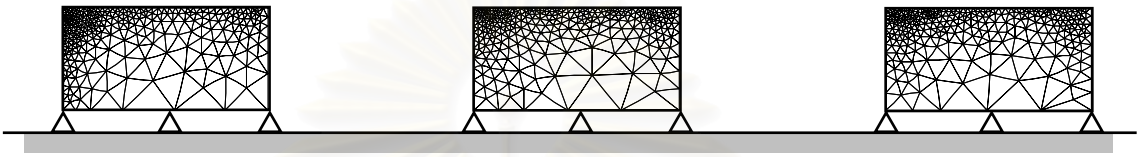
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3

รูปที่ 8.19 ภาพขยายของรูปแบบไฟไนต์เอลิมเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3 และการกระจายตัวของอุณหภูมิ



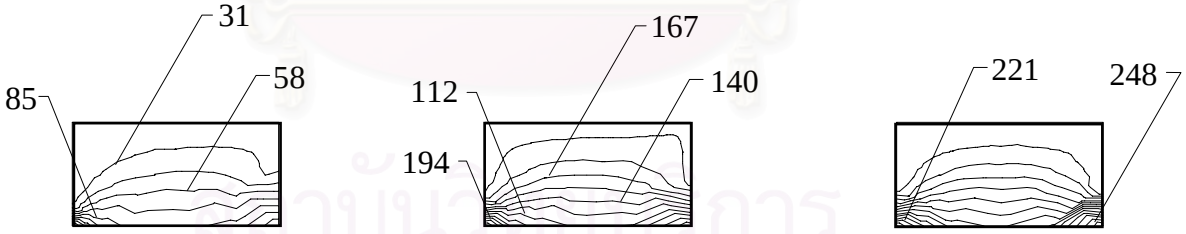
รูปที่ 8.20 เปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของครีบระบายความร้อนทั้ง 3 ระหว่างผลของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งต่าง ๆ กับผลการคำนวณของ Davalath and Bayazitoglu

สุดท้ายนำผลลัพธ์ที่ได้มาใช้เป็นเงื่อนไขขอบเขตเพื่อทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวและค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนครีบระบายความร้อนทั้งสาม โดยรูปที่ 8.21 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในส่วนที่เป็นของแข็งที่จะใช้ในการคำนวณ (ใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากการปรับขนาดครั้งที่ 3) ซึ่งประกอบไปด้วย 3523 จุดต่อ 1660 เอลิเมนต์ โดยกำหนดคุณสมบัติของของแข็งดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ 7×10^{10} N/m^2 ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว 6×10^{-6}/°C ค่าอัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และอุณหภูมิขณะที่ไม่มีความเค้นคือที่ 0°C

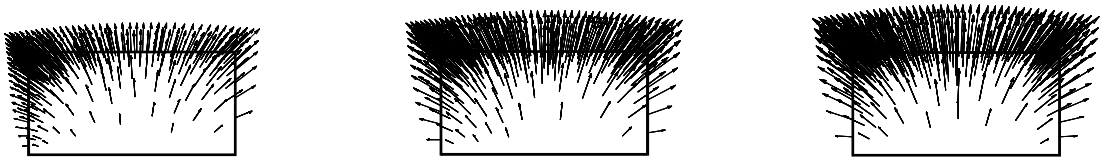


รูปที่ 8.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของครีบระบายความร้อนทั้งสามและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

จากนั้นทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัว แล้วทำการคำนวณหาค่าความเค้นตามลำดับ รูปที่ 8.22 แสดงการกระจายตัวของค่าความเค้นฟอนมิสเซสบนครีบระบายความร้อนทั้งสาม โดยมีค่าสูงสุดเท่ากับ 248 kPa ส่วนรูปที่ 8.23 นั้นแสดงเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อ โดยค่าการเคลื่อนตัวสูงสุดมีค่าเท่ากับ 5.9×10^{-7} m



รูปที่ 8.22 การกระจายตัวของค่าความเค้นฟอนมิสเซส (kPa) บนครีบระบายความร้อนทั้งสาม



รูปที่ 8.23 เวกเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อบนครีบระบายความร้อนทั้งสาม

จากตัวอย่างในบทนี้ได้แสดงจะเห็นถึงความสามารถในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ตั้งแต่การแก้ปัญหาของพจน์การพา หรือการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็ง และการถ่ายเทความร้อน ทำให้สามารถเข้าใจถึงพฤติกรรมที่มีผลเกี่ยวข้องกันของปัญหาทั้งสามสาขาได้เป็นอย่างดี อีกทั้งเมื่อมีการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาก็ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น โดยเทคนิคดังกล่าวจะจัดวางเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของคำตอบสูง และวางเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็ก ๆ ตลอดทั้งขอบเขตของปัญหาได้ ซึ่งเป็นการลดจำนวนหน่วยความจำที่ต้องใช้และเวลาในการคำนวณได้เป็นอย่างมาก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 9
บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

9.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้เน้นการสร้างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณพจน์การพา โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ และใช้วิธีดังกล่าวในการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็งและการถ่ายเทความร้อน ซึ่งในส่วนของปัญหาการไหลนั้นจะกำหนดให้เป็นการไหลแบบหนืดชนิดอัดตัวไม่ได้ในสองมิติเท่านั้น ส่วนปัญหาในของแข็งนั้นจะกำหนดให้เป็นปัญหาความเครียดระนาบเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในสองมิติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็งและการถ่ายเทความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นในบทที่ 2 จึงได้แสดงถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลในสองมิติ ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งหมด 4 สมการ ได้แก่ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y และสมการอนุรักษ์พลังงาน ตามลำดับ จากนั้นก็แสดงถึงสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อน และการหาค่าความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิภายในของแข็ง แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยทั่ว ๆ ไปนั้นมีความยุ่งยากซับซ้อนเป็นอย่างมาก ซึ่งปัญหาสำคัญประการหนึ่งที่ทำให้เกิดความยุ่งยากในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลก็คือความมีลักษณะไม่เชิงเส้นของพจน์การพาในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง ซึ่งในบทที่ 3 จะทำการอธิบายถึงรายละเอียดของวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการคำนวณพจน์การพา จากตัวอย่างที่ได้นำมาทดสอบแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีดังกล่าวไม่ทำให้เกิดการสั่นของคำตอบและให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ สำหรับบทที่ 4 จะเป็นการแสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหล พร้อมทั้งนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 3 มาใช้ในการคำนวณพจน์การพา จากนั้นได้ประยุกต์ใช้ขั้นตอนการคำนวณแบบแยกกัน (segregated method) เป็นผลทำให้ไม่ต้องทำการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่พร้อม ๆ กัน อีกทั้งระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ยังสามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากันได้ (equal-order interpolation function) ทำให้การประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์และไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถที่จะทำความเข้าใจได้โดยง่าย สำหรับเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ถูกสร้างขึ้นในบทนี้จะอยู่ในรูปแบบที่สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

ในบทที่ 5 เป็นการอธิบายโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำเสนอถึงรูปแบบของไฟล์ข้อมูลเข้าที่จะต้องเตรียมเพื่อทำการคำนวณ จากนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่

อธิบายในบทที่ 5 นี้ก็ได้รับการตรวจสอบความถูกต้องในบทที่ 6 โดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง หรือปัญหาที่มีผู้ทำการคำนวณมาก่อน โดยปัญหาที่นำมาใช้ในการตรวจสอบประกอบไปด้วยปัญหาทั้งหมด 4 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานพร้อมการถ่ายเทความร้อนกับโครงสร้าง ปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามความยาว และปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี หลังจากมีความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นแล้วจึงนำไปวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็งและการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในบทที่ 7 โดยปัญหาที่นำมาทำการวิเคราะห์มีทั้งหมด 3 ปัญหาด้วยกัน คือ ปัญหาการไหลแบบสวนทางภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน และปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีครีบระบายความร้อน

สุดท้ายในบทที่ 8 ได้นำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งจะเริ่มจากการทดสอบการใช้เทคนิคดังกล่าวมาใช้ร่วมกับวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพื่อคำนวณปัญหาที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียวซึ่งให้ผลเป็นที่น่าพอใจอย่างมาก จากนั้นจึงได้นำเทคนิคนี้ไปประยุกต์เข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาร่วมกันระหว่างของไหล ของแข็งและการถ่ายเทความร้อน โดยผลของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับการวิเคราะห์ปัญหานั้นพบว่า สามารถทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องมากขึ้นโดยไม่ต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากตลอดทั้งขอบเขตการคำนวณ ซึ่งทำให้มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ปัญหามากขึ้น

กล่าวโดยสรุปก็คือระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ได้แสดงในวิทยานิพนธ์นี้สามารถที่จะช่วยลดเวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ได้เป็นอย่างดี เมื่อเทียบกับการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อดังเช่นในอดีต

9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาสำคัญที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ก็คือ การประดิษฐ์ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อที่ใช้สำหรับคำนวณพจน์การพา ซึ่งการประดิษฐ์วิธีดังกล่าวจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นจากการไหลภายในเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ให้ครบถ้วน เพราะเป็นส่วนสำคัญที่จะทำให้การวิเคราะห์ปัญหาที่มีพจน์การพานี้มีความสะดวกมากยิ่งขึ้น เพราะระเบียบวิธีดังกล่าวจะทำให้สมการที่มีพจน์การพาใด ๆ ที่จากเดิมมีลักษณะไม่เชิงเส้น เปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นได้ ซึ่งทำให้ไม่ต้องประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตันราฟสัน ดังนั้นการทำความเข้าใจในขั้นตอนการคำนวณจะเป็นไปได้โดยสะดวกมากยิ่งขึ้น

9.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

การพัฒนางานวิจัยต่อจากวิทยานิพนธ์นี้มีอยู่ด้วยกันหลายแนวทาง ยกตัวอย่างเช่นการปรับปรุงไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะชั่วขณะได้ (transient problems) หรือในส่วนของการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างของไหลของแข็งและการถ่ายเทความร้อนนั้น อาจจะทำการวิเคราะห์โดยสมมติให้ของแข็งเกิดการเสียรูปมากขึ้นจนส่งผลต่อเนื่องไปถึงพฤติกรรมการไหล ทำให้เกิดการปฏิสัมพันธ์กันอย่างครบถ้วนระหว่างของไหล ของแข็งและการถ่ายเทความร้อน สุดท้ายถ้ามีการปรับปรุงวิธีในการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงได้จะทำให้สามารถศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีขนาดใหญ่และมีความซับซ้อนได้เพิ่มมากขึ้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R. Finite difference methods for partial differential equations. New York: Wiley, 1960.

[2] Morton, K. W. and Mayers, D. F. Numerical solution of partial differential equations. Cambridge: Cambridge university press, 2005.

[3] Anderson, J. D., Jr. Computational fluid dynamics. Singapore: McGraw-Hill, 1995.

[4] Raithby, G. D. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 9 (1976): 153-164.

[5] Hassan, Y. A., Rice, J. G. and Kim, J. H. A stable mass-flow-weighted two-dimensional skew upwind scheme. Numerical Heat Transfer 6 (1983): 395-408.

[6] Rice, J. G. and Schnipke, R. J. A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 48 (1985): 313-327.

[7] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. Streamlines upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32 (1982): 199-259.

[8] ANSYS Inc. ANSYS fluids analysis guide (ANSYS Release 9.0) [Online]. 2004. Available from: http://www1.ansys.com/customer/content/documentation/90/ansys/g_flu90.pdf

[9] Huebner, K. H., Thornton, E. A. and Byrom, T. G. The finite element method for engineers. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[10] Incropera, F. P. and De Witt, D. P. Fundamentals of heat and mass transfer. 4th ed. Singapore: John Wiley & Sons, 1996.

[11] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. Theory of elasticity. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1970.

[12] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.

[13] Thornton, E. A., Dechaumphai, P. and Pandey, A. K. Finite element thermal-structural analyses of a cable-stiffened orbiting antenna. AIAA Journal of Spacecraft and Rockets 23. 6 (1986): 620-624.

[14] Silvester, P. Higher-order polynomial triangular elements for potential problems. International Journal of Engineering Science 7. 8 (1969): 849-861.

[15] Hill, D. L. and Baskharone, E. A. A monotone streamline upwind method for quadratic finite elements. International Journal for Numerical Methods in Fluid 17 (1993): 463-475.

[16] Smith, R. M. and Hutton, A. G. The numerical treatment of advection: a performance comparison of current methods. Numerical Heat Transfer 5 (1982): 439-461.

[17] Fletcher, C. A. J. Computational techniques for fluid dynamics 1: 2-volume set, Springer series in computational physics, New York: Springer-Verlag, 1988.

[18] Brown, G. M. Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit. AIChE Journal 6 (1960): 179-183.

[19] Dechaumphai, P. and Janphaisaeng, P. Adaptive finite element technique for high-speed compressible flows. Thammasat International Journal of Science and Technology 3. 1 (1998): 55-65.

[20] สุพัฒนพงศ์ สิขาบัณฑิต. เทคนิคการปรับขนาดไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนืด. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

[21] Rice, J. G. and Schnipke, R. J. An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58 (1986): 135-149.

[22] Wansophark, N. and Dechaumphai, P. Enhancement of streamline upwind finite element solutions by adaptive meshing technique. JSME International Journal, Series B 45. 4 (2002): 770-779.

[23] Wansophark, N. and Dechaumphai, P. Combined adaptive meshing technique and segregated finite element algorithm for analysis of free and forced convection heat transfer. Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004): 645-663.

[24] White, F. M. Viscous fluid flow. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.

[25] Chen, X. and Han, P. A note on the solution of conjugate heat transfer problems using SIMPLE-like algorithms. International Journal of Heat and Fluid Flow 21 (2000): 463-467.

[26] วิโรจน์ ลิ่มตระการ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปฏิสัมพันธ์ระหว่างการไหลความเร็วสูงและโครงสร้าง. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

[27] Hriberšek, M. and Kuhn, G. Conjugate heat transfer by boundary-domain integral method. Engineering Analysis with Boundary Element 24 (2000): 297-305.

[28] Davalath, J. and Bayazitoglu, Y. Forced convection cooling across rectangular blocks. Journal of Heat Transfer 109 (1987): 321-328.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก.

รายละเอียดของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาการไหล และการถ่ายเทความร้อน

```
Program FEM

use variable
use sub

implicit none

call READ_INPUT()

!
! Start calculation
!
do iter = 1,niter

   call SOLVET()               ! Solve for temperature
   call SOLVEUV()              ! Solve for u & v - velocities
   call SOLVEP()               ! Solve pressure
   call UPDATE()               ! Update velocities
   call ERROR()                ! Compute relative error
   call BUFFER()               ! Collect result in every iteration

!
! Write output file if the solution converge
!

   if(erroru <= tol.OR.errorv <= tol.OR.errorp <= tol.OR.iter == niter) then

      call GETTIM(enhour,enminute,ensecond,enhund)
      write(6,10) sthour,stminute,stsecond,sthund
      10 format('  Start time :',3X,I2,':',I2.2,':',I2.2,':',I2.2)
      write(6,20) enhour,enminute,ensecond,enhund
      20 format('    End time :',3X,I2,':',I2.2,':',I2.2,':',I2.2)

   call WRITE_OUTPUT()         ! Write output file if meet criteria

   endif

   if(erroru <= tol.OR.errorv <= tol.OR.errorp <= tol.OR.iter == niter) stop

enddo

end program FEM


!------------------------------------------------------------------------------

SUBROUTINE READ_INPUT()

use variable

IMPLICIT NONE

real(8) :: x, y

!
! Enter input file name
!
WRITE(6,10)
10 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:',/)
READ(5,*) name1

OPEN(UNIT=7, FILE=name1, STATUS='OLD', ACTION='READ', IOSTAT=ierror)

CALL GETTIM(sthour,stminute,stsecond,sthund)

!
! Read input data
!
READ(7,*) nlines
DO i = 1,nlines
   READ(7,1) text
   1 FORMAT(20A4)
END DO
```

```
READ(7,1) text
READ(7,*) npoi, nelem, nbou, nflux, niter, tol

ALLOCATE( intmat(nelem,6),  intbou(nelem,3), coord(npoi,2)   )
ALLOCATE( sysk(npoi,npoi), intbouq(nflux,3), nodeid(nflux)   )
ALLOCATE(  ibcu(npoi),  ibcv(npoi),   ibcp(npoi),  ibct(npoi),  ibce(nelem))
ALLOCATE(     u(npoi),     v(npoi),      p(npoi),     t(npoi))
ALLOCATE(  uold(npoi),  vold(npoi),   pold(npoi),  told(npoi))
ALLOCATE(    ru(npoi),    rv(npoi),   uhat(npoi),  vhat(npoi))
ALLOCATE(    kp(npoi),  vsum(npoi), areavg(npoi),    qb(npoi))
ALLOCATE( sysrx(npoi), sysry(npoi),   sysr(npoi))
ALLOCATE(bflux(nflux), esup2(npoi+1), chke(nelem), elemq(nflux))

allocate( tbar(npoi),  digt(npoi),   pbar(npoi), digp(npoi), sysa(npoi))
allocate( unew(npoi),  vnew(npoi),   pnew(npoi),  tnew(npoi))
allocate(   EE(npoi),    PP(npoi),  EEnew(npoi), PPnew(npoi), EB(npoi))
allocate(sysrold(npoi), EKP(npoi), comb(nelem))


!
! Read fluid properties
!
READ(7,1) text
READ(7,*) den, vis, expan, spec, conds, condf, tref

!
! Read nodal coordinates, boundary conditions, their values
!
READ(7,1) text

DO ip = 1,npoi
   READ(7,*) i,ibcu(i),ibcv(i),ibcp(i),ibct(i),(coord(i,k),k=1,2),u(i),v(i),p(i),t(i)
   IF(i /= ip) WRITE(6,40) ip
   40 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5,' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ip) STOP
END DO

!
! Read element nodal connection
!
READ(7,1) text

DO ie = 1,nelem
   READ(7,*)  i, chke(i), (intmat(i,j),j=1,6)
   ibce(i) = 0
   IF(i /= ie) WRITE(6,50) ie
   50 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ie) STOP
END DO

!
! Read inflow boundary element
!
READ(7,1) text

IF(nbou /= 0.) THEN
   DO ie = 1,nbou
      READ(7,*)  i, (intbou(i,j),j=1,3)
      IF(i /= 0) ibce(i) = 1
   END DO
END IF

!
! Read boundary for compute flux
!
READ(7,1) text

IF(nflux /= 0.) THEN
   DO i = 1,nflux
      READ(7,*)  elemq(ie), (intbouq(ie,j),j=1,3)
   END DO
END IF

CLOSE(UNIT=7, STATUS='keep')

!
! Print out title
!
WRITE(6,60) npoi, nelem, NITER, tol
60 FORMAT(/,'   THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :',/,    &
            '      NUMBER OF NODES              =', I6, /,    &
            '      NUMBER OF ELEMENTS           =', I6, /,    &
            '      NUMBER OF MAX. ITERATION     =', I6, /,    &
            '      SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =', E10.5 ,/)

END SUBROUTINE READ_INPUT

!------------------------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE SOLVET()  ! Subroutine for solve Temperature

use variable
implicit none

REAL(8)                 ::   sum, error,    x, y
REAL(8), DIMENSION(6,6) :: adifx, adify, acov, A, AT
real(8), dimension(6)   :: ele, bc, tb
real(8), dimension(3,3) :: G
real(8), dimension(6,3) :: B, C, AX, AXG
real(8), dimension(3,6) :: XT, XA
integer(4)              :: it, nniter
integer(4)              :: nm, ic, ir, ieq

nniter = 10
told = t

loop : do it = 1,nniter

sysr = 0.
tbar = 0.
digt = 0.
   A = 0.

A(1,1) =  1.
A(2,2) =  1.
A(3,3) =  1.
A(4,4) =  4.
A(5,5) =  4.
A(6,6) =  4.
A(1,5) = -1.
A(1,6) = -1.
A(2,4) = -1.
A(2,6) = -1.
A(3,4) = -1.
A(3,5) = -1.

!
! Loop over the number of elements
!

element : do ie = 1,nelem

!---------------------------------
! Find element local coordinates:
!---------------------------------

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)
ll = intmat(ie,4)
mm = intmat(ie,5)
nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

if(area <= 0.) write(6,5) ie
5 format(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,           &
          ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,             &
          ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
          ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'          )
if(area <= 0.) stop

b1 = (yg2 - yg3)/(2.*area)
b2 = (yg3 - yg1)/(2.*area)
b3 = (yg1 - yg2)/(2.*area)

c1 = (xg3 - xg2)/(2.*area)
c2 = (xg1 - xg3)/(2.*area)
c3 = (xg2 - xg1)/(2.*area)

B = 0.
C = 0.

B(1,1) = 2.*b1
B(2,2) = 2.*b2
B(3,3) = 2.*b3
B(4,2) = b3
B(4,3) = b2
B(5,1) = b3
```

```
B(5,3) = b1
B(6,1) = b2
B(6,2) = b1

C(1,1) = 2.*c1
C(2,2) = 2.*c2
C(3,3) = 2.*c3
C(4,2) = c3
C(4,3) = c2
C(5,1) = c3
C(5,3) = c1
C(6,1) = c2
C(6,2) = c1

G(1,1) = area/6.
G(2,2) = area/6.
G(3,3) = area/6.
G(1,2) = area/12.
G(1,3) = area/12.
G(2,1) = area/12.
G(2,3) = area/12.
G(3,1) = area/12.
G(3,2) = area/12.

!-----------------------------------
! Setup [A] matrix: (Diffusion term)
!-----------------------------------
adifx = 0.
adify = 0.
acov  = 0.
aele  = 0.

!-------------------------!
!  Setup [adifx] Matrix:  !
!-------------------------!
AT = transpose(A)
XT = transpose(B)
AX = matmul(A,B)
XA = matmul(XT,AT)
AXG = matmul(AX,G)

adifx = matmul(AXG,XA)

!-------------------------!
!  Setup [adify] Matrix:  !
!-------------------------!
XT = transpose(C)

AX = matmul(A,C)
XA = matmul(XT,AT)
AXG = matmul(AX,G)

adify = matmul(AXG,XA)

!-----------------------------------
! Setup [A] matrix: (Convection term)
!-----------------------------------
count = 0.

call STREAM(acov)

if(count == 0.) then
   acov = 0.
else
   acov = acov / count
endif

!--------------------
! Setup [r] matrix:
!--------------------

rele = 0.

!-----------------------------------
! Setup [aele] matrix : [adif]+[acov]
!-----------------------------------

if(chke(ie) == 1) then
    cond = conds
else
    cond = condf
endif

aele = spec*acov + cond*adifx + cond*adify

!----------
! Solve T
!----------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
bc = 0.

ele(1) = t(ii)
ele(2) = t(jj)
ele(3) = t(kk)
ele(4) = t(ll)
ele(5) = t(mm)
ele(6) = t(nn)

if (ibct(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibct(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibct(kk) == 1) bc(3) = 1
if (ibct(ll) == 1) bc(4) = 1
if (ibct(mm) == 1) bc(5) = 1
if (ibct(nn) == 1) bc(6) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------
outer1: do ieq = 1,6

   if(bc(ieq) == 0) cycle outer1

      inner1: do ir = 1,6
         if(ir == ieq) cycle inner1
         rele(ir) = rele(ir) - aele(ir,ieq)*ele(ieq)
         aele(ir,ieq) = 0.
      enddo inner1

      do ic = 1,6
         aele(ieq,ic) = 0.
      enddo

   aele(ieq,ieq) = 1.
   rele(ieq) = ele(ieq)

enddo outer1

!--------------------------------
!  Element by element solutions
!--------------------------------
do i = 1,6
   sum = 0.
   do j = 1,6
      sum = sum + aele(i,j)*ele(j)
   enddo
   tb(i) = sum
enddo

!-----------
! assemble
!-----------
do i = 1,6
   nm = intmat(ie,i)
   sysr(nm) =  sysr(nm) + rele(i)
   tbar(nm) =  tbar(nm) + tb(i)
   digt(nm) =  digt(nm) + aele(i,i)
enddo

!-------------------------------------------------------------------

end do element

do i = 1,npoi
   tnew(i) = 0.8*(t(i) - ((tbar(i)-sysr(i))/digt(i))) + 0.2*t(i)
enddo

t = tnew

end do loop

end subroutine solvet

!-------------------------------------------------------------------------------

SUBROUTINE SOLVEUV()  ! Subroutine for solve u & v -velocities

use variable

IMPLICIT NONE

INTEGER(4)              ::  ieq, ic, ir, qq, oo
REAL(8)                 ::  sum, coef, sumx, sumy
REAL(8), DIMENSION(6,6) :: adif, acov, axele, ayele, SB, SBA, SC, SCA, A, AT, RG
real(8), dimension(6,6) :: adifx, adify
REAL(8), DIMENSION(6)   ::  rpy, rgy, bc, ele, fbx, fby, rpx, pele, tele
REAL(8), DIMENSION(npoi):: rpsys, fbarx, fbary, fx, fy, digx, digy, rxsys
```

```
real(8), dimension(3,3) :: G
real(8), dimension(6,3) :: B, C, AX, AXG, S
real(8), dimension(3,6) :: XT, XA

rpsys = 0.
rxsys = 0.
 sysa = 0.
   kp = 0.
 uold = u
 vold = v

loop1: do qq = 1,2

fbarx = 0.
fbary = 0.
   fx = 0.
   fy = 0.
 digx = 0.
 digy = 0.
    A = 0.
    S = 0.
   RG = 0.

A(1,1) =  1.
A(2,2) =  1.
A(3,3) =  1.
A(4,4) =  4.
A(5,5) =  4.
A(6,6) =  4.
A(1,5) = -1.
A(1,6) = -1.
A(2,4) = -1.
A(2,6) = -1.
A(3,4) = -1.
A(3,5) = -1.

RG(1,1) =  3.
RG(2,2) =  3.
RG(3,3) =  3.
RG(4,4) =  32.
RG(5,5) =  32.
RG(6,6) =  32.
RG(1,2) = -1.
RG(1,3) = -1.
RG(1,4) = -4.
RG(2,3) = -1.
RG(2,5) = -4.
RG(3,6) = -4.
RG(4,5) =  16.
RG(4,6) =  16.
RG(5,6) =  16.
RG(2,1) = RG(1,2)
RG(3,1) = RG(1,3)
RG(3,2) = RG(2,3)
RG(4,1) = RG(1,4)
RG(5,2) = RG(2,5)
RG(6,3) = RG(3,6)
RG(5,4) = RG(4,5)
RG(6,4) = RG(4,6)
RG(6,5) = RG(5,6)

!
! Loop over the number of elements
!
loop2: DO ie = 1,nelem

!---------------------------------
! Find element local coordinates:
!---------------------------------
ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)
ll = intmat(ie,4)
mm = intmat(ie,5)
nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,            &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,              &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'          )
IF(area <= 0.) STOP

b1 = (yg2 - yg3)/(2.*area)
b2 = (yg3 - yg1)/(2.*area)
b3 = (yg1 - yg2)/(2.*area)

c1 = (xg3 - xg2)/(2.*area)
c2 = (xg1 - xg3)/(2.*area)
c3 = (xg2 - xg1)/(2.*area)

B = 0.
C = 0.

B(1,1) = 2.*b1
B(2,2) = 2.*b2
B(3,3) = 2.*b3
B(4,2) = b3
B(4,3) = b2
B(5,1) = b3
B(5,3) = b1
B(6,1) = b2
B(6,2) = b1

C(1,1) = 2.*c1
C(2,2) = 2.*c2
C(3,3) = 2.*c3
C(4,2) = c3
C(4,3) = c2
C(5,1) = c3
C(5,3) = c1
C(6,1) = c2
C(6,2) = c1

G(1,1) = area/6.
G(2,2) = area/6.
G(3,3) = area/6.
G(1,2) = area/12.
G(1,3) = area/12.
G(2,1) = area/12.
G(2,3) = area/12.
G(3,1) = area/12.
G(3,2) = area/12.

S(1,1) = -area/60. * ( 2.)
S(1,2) = -area/60. * (-1.)
S(1,3) = -area/60. * (-1.)
S(2,1) = -area/60. * (-1.)
S(2,2) = -area/60. * ( 2.)
S(2,3) = -area/60. * (-1.)
S(3,1) = -area/60. * (-1.)
S(3,2) = -area/60. * (-1.)
S(3,3) = -area/60. * ( 2.)
S(4,1) = -area/60. * ( 4.)
S(4,2) = -area/60. * ( 8.)
S(4,3) = -area/60. * ( 8.)
S(5,1) = -area/60. * ( 8.)
S(5,2) = -area/60. * ( 4.)
S(5,3) = -area/60. * ( 8.)
S(6,1) = -area/60. * ( 8.)
S(6,2) = -area/60. * ( 8.)
S(6,3) = -area/60. * ( 4.)

pele(1) = p(ii)
pele(2) = p(jj)
pele(3) = p(kk)
pele(4) = p(ll)
pele(5) = p(mm)
pele(6) = p(nn)

!-------------------------------------
! Setup [A] matrix: (Diffusion term)
!-------------------------------------
adifx = 0.
adify = 0.
acov  = 0.
aele  = 0.

!-------------------------!
!  Setup [adifx] Matrix:  !
!-------------------------!
AT = transpose(A)
XT = transpose(B)
AX = matmul(A,B)
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
XA = matmul(XT,AT)
AXG = matmul(AX,G)

adifx = matmul(AXG,XA)

!-------------------------!
!  Setup [adify] Matrix:  !
!-------------------------!
XT = transpose(C)
AX = matmul(A,C)
XA = matmul(XT,AT)
AXG = matmul(AX,G)

adify = matmul(AXG,XA)

!-----------------------------------
! Setup [A] matrix: (Convection term)
!-----------------------------------
count = 0.

call STREAM(acov)

if(count == 0.) then
   acov = 0.
else
   acov = acov / count
endif

!---------------------
! Setup [rpx] matrix:
!---------------------
XT = transpose(B)

SB  = matmul(S,XT)
SBA = matmul(SB,AT)

rpx = matmul(SBA,pele)

!---------------------
! Setup [rpy] matrix:
!---------------------
XT = transpose(C)

SC  = matmul(S,XT)
SCA = matmul(SC,AT)

rpy = matmul(SCA,pele)

!--------------------
! Setup [rg] matrix:
!--------------------
coef = den*10.*area

! For Flow without g only  !--------******--------!
!coef = 0.
! For Flow without g only  !--------******--------!

tele(1) = t(ii)
tele(2) = t(jj)
tele(3) = t(kk)
tele(4) = t(ll)
tele(5) = t(mm)
tele(6) = t(nn)

   rgy = coef*expan*matmul(RG,tele)/180.

rgy(4) = rgy(4) - coef*(1.+expan*tref)/3.
rgy(5) = rgy(5) - coef*(1.+expan*tref)/3.
rgy(6) = rgy(6) - coef*(1.+expan*tref)/3.

!----------------
! Sum term in y:
!----------------
ryele = rpy + rgy
rxele = rpx

!-----------------------------------
! Setup [aele] matrix : [adif]+[acov]
!-----------------------------------
axele = acov + vis*adifx + vis*adify
ayele = axele

if(qq == 1) then
aele = axele

!----------
! Solve U
!----------
```

```
bc = 0.

ele(1) = u(ii)
ele(2) = u(jj)
ele(3) = u(kk)
ele(4) = u(ll)
ele(5) = u(mm)
ele(6) = u(nn)

if (ibcu(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcu(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcu(kk) == 1) bc(3) = 1
if (ibcu(ll) == 1) bc(4) = 1
if (ibcu(mm) == 1) bc(5) = 1
if (ibcu(nn) == 1) bc(6) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------
outer1: DO ieq = 1,6

   IF(bc(ieq) == 0) CYCLE outer1

      inner1: DO ir = 1,6
         IF(ir == ieq) CYCLE inner1
         rxele(ir) = rxele(ir) - axele(ir,ieq)*ele(ieq)
         axele(ir,ieq) = 0.
      END DO inner1

      DO ic = 1,6
         axele(ieq,ic) = 0.
      END DO

   axele(ieq,ieq) = 1.
   rxele(ieq) = ele(ieq)

END DO outer1

!----------
! Solve V
!----------
bc = 0.

ele(1) = v(ii)
ele(2) = v(jj)
ele(3) = v(kk)
ele(4) = v(ll)
ele(5) = v(mm)
ele(6) = v(nn)

if (ibcv(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcv(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcv(kk) == 1) bc(3) = 1
if (ibcv(ll) == 1) bc(4) = 1
if (ibcv(mm) == 1) bc(5) = 1
if (ibcv(nn) == 1) bc(6) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------
outer2: DO ieq = 1,6

   IF(bc(ieq) == 0) CYCLE outer2

      inner2: DO ir = 1,6
         IF(ir == ieq) CYCLE inner2
         ryele(ir) = ryele(ir) - ayele(ir,ieq)*ele(ieq)
         ayele(ir,ieq) = 0.
      END DO inner2

      DO ic = 1,6
         ayele(ieq,ic) = 0.
      END DO

   ayele(ieq,ieq) = 1.
   ryele(ieq) = ele(ieq)

END DO outer2

endif

!--------------------------------
!  Element by element solutions
!--------------------------------

do i = 1,6
   sumx = 0.
   sumy = 0.
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
   do j = 1,6
      sumx = sumx + axele(i,j)*u(intmat(ie,j))
      sumy = sumy + ayele(i,j)*v(intmat(ie,j))
   enddo
   fbx(i) = sumx
   fby(i) = sumy
enddo

!-----------
! assemble
!-----------
DO i = 1,6
   oo = intmat(ie,i)

       fx(oo) =    fx(oo) + rxele(i)
    fbarx(oo) = fbarx(oo) + fbx(i)
     digx(oo) =  digx(oo) + axele(i,i)

       fy(oo) =    fy(oo) + ryele(i)
    fbary(oo) = fbary(oo) + fby(i)
     digy(oo) =  digy(oo) + ayele(i,i)

   if(qq == 1) then

     sysa(oo) =  sysa(oo) + aele(i,i)
    rpsys(oo) = rpsys(oo) + rpy(i)
    rxsys(oo) = rxsys(oo) + rpx(i)
   endif

END DO
!-------------

if(qq == 2) then
kp(ii) = 0.                                 !
kp(jj) = 0.                                 !
kp(kk) = 0.                                 ! Setup kp
kp(ll) = kp(ll) + (area/(3.*sysa(ll)))      !
kp(mm) = kp(mm) + (area/(3.*sysa(mm)))      !
kp(nn) = kp(nn) + (area/(3.*sysa(nn)))      !
endif

END DO loop2

!-------------------------------------------------------------------

if(qq == 1 ) then

do i = 1,npoi
   unew(i) = 0.5*(u(i) - ((fbarx(i)-fx(i))/digx(i))) + 0.5*u(i)
   vnew(i) = 0.5*(v(i) - ((fbary(i)-fy(i))/digy(i))) + 0.5*v(i)
enddo

u = unew
v = vnew
endif

!-------------------------------------------------------------------

ru = fbarx - rxsys
rv = fbary - rpsys

do i = 1,npoi
   uhat(i) = (-(fbarx(i) - u(i)*sysa(i)) + ru(i))/sysa(i)
   vhat(i) = (-(fbary(i) - v(i)*sysa(i)) + rv(i))/sysa(i)
enddo

enddo loop1

END SUBROUTINE SOLVEUV

!-------------------------------------------------------------------------------

SUBROUTINE SOLVEP()  ! Subroutine for solve Temperature

use variable

implicit none

REAL(8)                 ::  sum, sumup, sumdw, error
integer(4)              :: it, nniter
real(8)                 :: a, b

 pold = p
nniter = 100
check = 1

! Step 2
call pele()
```

```
EE = sysr - pbar

! Step 3
PP = EE

loop : do it = 1,nniter

! Step 4
check = 0
call pele()

! Step 5
sumup = 0.
sumdw = 0.
do i = 1,npoi
   sumup = sumup + EE(i)*PP(i)
   sumdw = sumdw + EB(i)*PP(i)
enddo

a = sumup/sumdw

! Step 6
pnew = p + a*PP

! Step 7
EEnew = EE - a*EB

! Step 8
sumup = 0.
sumdw = 0.
do i = 1,npoi
   sumup = sumup + EEnew(i)*EEnew(i)
   sumdw = sumdw + EE(i)*EE(i)
enddo

b = sumup/sumdw

! Step 9
PPnew = EEnew + b*PP

! Step 10
PP = PPnew
EE = EEnew

!---------------------------------------
sum = 0.

do j = 1,npoi
   sum = sum + abs(p(j)-pnew(j))
enddo

error = sum/npoi
p = pnew
if(error <= 1.e-6) exit

!---------------------------------------

end do loop

do i = 1,npoi
   IF(ABS(p(i)) <= 1.E-8)  p(i) = 0.
enddo

END SUBROUTINE SOLVEP

!=====================================================================
subroutine pele()

use variable
implicit none

REAL(8)                 :: cru, crv, xb1,   xb2,  yb1,  yb2
REAL(8)                 :: unx, uny, coefp
REAL(8), DIMENSION(6,6) :: adifx, adify, A, AT
REAL(8), DIMENSION(6,3) :: B, C, AX, AXK
REAL(8), DIMENSION(6)   :: rpu, rpv, rb
REAL(8), DIMENSION(3,3) :: NK
real(8), dimension(3,6) :: XT, XA
real(8), dimension(3)   :: UHT, VHT

REAL(8)                 :: sum

real(8)                 :: uavg1, uavg2
real(8)                 :: vavg1, vavg2

real(8), dimension(6)   :: ele, bc, pb, kpele
integer(4)              :: nm, ic, ir, ieq
```

```
sysr = 0.
pold = p
pbar = 0.
digp = 0.
  EB = 0.
   A = 0.

A(1,1) =  1.
A(2,2) =  1.
A(3,3) =  1.
A(4,4) =  4.
A(5,5) =  4.
A(6,6) =  4.
A(1,5) = -1.
A(1,6) = -1.
A(2,4) = -1.
A(2,6) = -1.
A(3,4) = -1.
A(3,5) = -1.

DO ie = 1,nelem  ! Loop over the number of elements:

 rb = 0.

 ii = intmat(ie,1)
 jj = intmat(ie,2)
 kk = intmat(ie,3)
 ll = intmat(ie,4)
 mm = intmat(ie,5)
 nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,           &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,             &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'         )
IF(area <= 0.) STOP

b1 = (yg2 - yg3)/(2.*area)
b2 = (yg3 - yg1)/(2.*area)
b3 = (yg1 - yg2)/(2.*area)

c1 = (xg3 - xg2)/(2.*area)
c2 = (xg1 - xg3)/(2.*area)
c3 = (xg2 - xg1)/(2.*area)

B = 0.
C = 0.

B(1,1) = 2.*b1
B(2,2) = 2.*b2
B(3,3) = 2.*b3
B(4,2) = b3
B(4,3) = b2
B(5,1) = b3
B(5,3) = b1
B(6,1) = b2
B(6,2) = b1

C(1,1) = 2.*c1
C(2,2) = 2.*c2
C(3,3) = 2.*c3
C(4,2) = c3
C(4,3) = c2
C(5,1) = c3
C(5,3) = c1
C(6,1) = c2
C(6,2) = c1

NK(1,1) = (   kp(ll) + 3.*kp(mm) + 3.*kp(nn))*area/45.
NK(2,2) = (3.*kp(ll) +    kp(mm) + 3.*kp(nn))*area/45.
NK(3,3) = (3.*kp(ll) + 3.*kp(mm) +    kp(nn))*area/45.
NK(1,2) = (   kp(ll) +    kp(mm) + 2.*kp(nn))*area/45.
NK(1,3) = (   kp(ll) + 2.*kp(mm) +    kp(nn))*area/45.
NK(2,3) = (2.*kp(ll) +    kp(mm) +    kp(nn))*area/45.
NK(2,1) = NK(1,2)
NK(3,1) = NK(1,3)
NK(3,2) = NK(2,3)
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
UHT(1) = ( 2.*uhat(ii) - uhat(jj) - uhat(kk) + 4.*uhat(ll) + 8.*uhat(mm) + 8.*uhat(nn))*area/60.
UHT(2) = (-1.*uhat(ii) + 2.*uhat(jj) - uhat(kk) + 8.*uhat(ll) + 4.*uhat(mm) + 8.*uhat(nn))*area/60.
UHT(3) = (-1.*uhat(ii) - uhat(jj) + 2.*uhat(kk) + 8.*uhat(ll) + 8.*uhat(mm) + 4.*uhat(nn))*area/60.

VHT(1) = ( 2.*vhat(ii) - vhat(jj) - vhat(kk) + 4.*vhat(ll) + 8.*vhat(mm) + 8.*vhat(nn))*area/60.
VHT(2) = (-1.*vhat(ii) + 2.*vhat(jj) - vhat(kk) + 8.*vhat(ll) + 4.*vhat(mm) + 8.*vhat(nn))*area/60.
VHT(3) = (-1.*vhat(ii) - vhat(jj) + 2.*vhat(kk) + 8.*vhat(ll) + 8.*vhat(mm) + 4.*vhat(nn))*area/60.

!--------------------------
! Setup diffusion matrices
!--------------------------
adifx = 0.
adify = 0.
aele  = 0.

!-------------------------!
!  Setup [adifx] Matrix:  !
!-------------------------!
AT  = transpose(A)
XT  = transpose(B)
AX  = matmul(A,B)
XA  = matmul(XT,AT)
AXK = matmul(AX,NK)

adifx = matmul(AXK,XA)

!-------------------
! Setup [ru] matrix
!-------------------
  rpu = matmul(AX,UHT)

!-------------------------!
!  Setup [adify] Matrix:  !
!-------------------------!
XT = transpose(C)
AX = matmul(A,C)
XA = matmul(XT,AT)
AXK = matmul(AX,NK)

adify = matmul(AXK,XA)

!-------------------
! Setup [rv] matrix
!-------------------
  rpv = matmul(AX,VHT)

!-------------------
! Setup [rb] matrix
!-------------------
IF(ibce(ie) == 1) THEN
    ib = intbou(ie,1)
    jb = intbou(ie,2)
    kb = intbou(ie,3)

   xb1 = coord(ib,1)
   xb2 = coord(jb,1)

   yb1 = coord(ib,2)
   yb2 = coord(jb,2)

   unx = yb2 - yb1
   uny = xb1 - xb2

   uavg1 = (u(ib) + u(jb))/2.
   uavg2 = (u(jb) + u(kb))/2.

   vavg1 = (v(ib) + v(jb))/2.
   vavg2 = (v(jb) + v(kb))/2.

   IF(ib == ii) THEN
       rb(1) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2.
       rb(6) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2. + (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
       rb(2) = (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
   ENDIF

   IF(ib == jj) THEN
       rb(2) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2.
       rb(4) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2. + (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
       rb(3) = (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
   ENDIF

   IF(ib == kk) THEN
       rb(3) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2.
       rb(5) = (uavg1*unx + vavg1*uny)/2. + (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
       rb(1) = (uavg2*unx + vavg2*uny)/2.
   ENDIF

ENDIF
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
aele = adifx + adify
rele = rpu + rpv - rb

!----------
! Solve P
!----------
bc = 0.

ele(1) = p(ii)
ele(2) = p(jj)
ele(3) = p(kk)
ele(4) = p(ll)
ele(5) = p(mm)
ele(6) = p(nn)

if (ibcp(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcp(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcp(kk) == 1) bc(3) = 1
if (ibcp(ll) == 1) bc(4) = 1
if (ibcp(mm) == 1) bc(5) = 1
if (ibcp(nn) == 1) bc(6) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------
outer1: do ieq = 1,6

   if(bc(ieq) == 0) cycle outer1

      inner1: do ir = 1,6
         if(ir == ieq) cycle inner1
         rele(ir) = rele(ir) - aele(ir,ieq)*ele(ieq)
         aele(ir,ieq) = 0.
      enddo inner1

      do ic = 1,6
         aele(ieq,ic) = 0.
      enddo

   aele(ieq,ieq) = 1.
   rele(ieq) = ele(ieq)

enddo outer1

!--------------------------------
!  Element by element solutions
!--------------------------------
if(check == 1) then

   do i = 1,6
      sum = 0.
      do j = 1,6
         sum = sum + aele(i,j)*p(intmat(ie,j))
      enddo
      pb(i) = sum
   enddo

   do i = 1,6
      nm = intmat(ie,i)
      sysr(nm) = sysr(nm) + rele(i)
      pbar(nm) = pbar(nm) + pb(i)
      digp(nm) = digp(nm) + aele(i,i)
   end do

else

   do i = 1,6
      sum = 0.
      do j = 1,6
         nm = intmat(ie,j)
         sum = sum + aele(i,j)*pp(nm)
      enddo
      kpele(i) = sum
   enddo

   do i = 1,6
      nm = intmat(ie,i)
      EB(nm) = EB(nm) + kpele(i)
   end do

endif

!-------------------------------------------------------------------
end do

end subroutine pele

!-------------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE UPDATE()  ! Subroutine for update velocities

use variable
use sub
IMPLICIT NONE

REAL(8), DIMENSION(6,6) :: A, AT, SB, SBA, SC, SCA
REAL(8), DIMENSION(6,3) :: B, C, AX, S
real(8), dimension(3,6) :: XT, XA
real(8), dimension(6)   :: pele


sysrx = 0.        !
sysry = 0.        ! Reset the system of equation
! uold = u         ! and collect the old value
! vold = v         !

A = 0.
S = 0.

A(1,1) =  1.
A(2,2) =  1.
A(3,3) =  1.
A(4,4) =  4.
A(5,5) =  4.
A(6,6) =  4.
A(1,5) = -1.
A(1,6) = -1.
A(2,4) = -1.
A(2,6) = -1.
A(3,4) = -1.
A(3,5) = -1.

DO ie = 1,nelem   ! Loop over the number of elements

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)
ll = intmat(ie,4)
mm = intmat(ie,5)
nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

b1 = (yg2 - yg3)/(2.*area)
b2 = (yg3 - yg1)/(2.*area)
b3 = (yg1 - yg2)/(2.*area)

c1 = (xg3 - xg2)/(2.*area)
c2 = (xg1 - xg3)/(2.*area)
c3 = (xg2 - xg1)/(2.*area)

B = 0.
C = 0.

B(1,1) = 2.*b1
B(2,2) = 2.*b2
B(3,3) = 2.*b3
B(4,2) = b3
B(4,3) = b2
B(5,1) = b3
B(5,3) = b1
B(6,1) = b2
B(6,2) = b1

C(1,1) = 2.*c1
C(2,2) = 2.*c2
C(3,3) = 2.*c3
C(4,2) = c3
C(4,3) = c2
C(5,1) = c3
C(5,3) = c1
C(6,1) = c2
C(6,2) = c1

S(1,1) = -area/60. * ( 2.)
S(1,2) = -area/60. * (-1.)
S(1,3) = -area/60. * (-1.)
S(2,1) = -area/60. * (-1.)
S(2,2) = -area/60. * ( 2.)
S(2,3) = -area/60. * (-1.)
S(3,1) = -area/60. * (-1.)
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
S(3,2) = -area/60. * (-1.)
S(3,3) = -area/60. * ( 2.)
S(4,1) = -area/60. * ( 4.)
S(4,2) = -area/60. * ( 8.)
S(4,3) = -area/60. * ( 8.)
S(5,1) = -area/60. * ( 8.)
S(5,2) = -area/60. * ( 4.)
S(5,3) = -area/60. * ( 8.)
S(6,1) = -area/60. * ( 8.)
S(6,2) = -area/60. * ( 8.)
S(6,3) = -area/60. * ( 4.)

pele(1) = p(ii)
pele(2) = p(jj)
pele(3) = p(kk)
pele(4) = p(ll)
pele(5) = p(mm)
pele(6) = p(nn)

!---------------------
! Setup [rpx] matrix:
!---------------------
AT = transpose(A)
XT = transpose(B)
SB  = matmul(S,XT)
SBA = matmul(SB,AT)

rxele = matmul(SBA,pele)

!---------------------
! Setup [rpy] matrix:
!---------------------
XT = transpose(C)
SC  = matmul(S,XT)
SCA = matmul(SC,AT)
ryele = matmul(SCA,pele)

CALL ASSMUP()    ! Assemble element eq to form system eq

END DO

!------------------------------
! Calculate the matrix sysr(i)
!------------------------------
DO i =1,npoi
   sysrx(i) = sysrx(i)/sysa(i)
   sysry(i) = sysry(i)/sysa(i)
END DO

!-------------------------------------
! Evaluate the new value of velocities
!-------------------------------------
DO i = 1,npoi

   IF(ibcu(i) == 1) THEN
        u(i) = uold(i)
      ELSE
        u(i) = uhat(i) + sysrx(i)
   ENDIF

   IF(ABS(u(i)) <= 1.E-8)  u(i) = 0.

   IF(ibcv(i) == 1) THEN
        v(i) = vold(i)
      ELSE
        v(i) = vhat(i) + sysry(i)
   ENDIF

   IF(ABS(v(i)) <= 1.E-8)  v(i) = 0.

END DO

END SUBROUTINE UPDATE

!---------------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE ERROR()

use variable
IMPLICIT NONE

!-----------------------
! check for convergence
!-----------------------
sumu = 0.
sumv = 0.
sump = 0.
sumt = 0.

sumdu = 0.
sumdv = 0.
sumdp = 0.
sumdt = 0.

DO i = 1,npoi
   sumdu = sumdu + ABS(uold(i)-u(i))
   sumu  = sumu  + ABS(u(i))

   sumdv = sumdv + ABS(vold(i)-v(i))
   sumv  = sumv  + ABS(v(i))

   sumdp = sumdp + ABS(pold(i)-p(i))
   sump  = sump  + ABS(p(i))

   sumdt = sumdt + ABS(told(i)-t(i))
   sumt  = sumt  + ABS(t(i))
END DO

if(sumv == 0.) then
    sumv = 1.e-6
   sumdv = 1.e-6
endif

if(sump == 0.) then
    sump = 1.e-6
   sumdp = 1.e-6
endif

erroru = sumdu/sumu
errorv = sumdv/sumv
errorp = sumdp/sump
errort = sumdt/sumt

OPEN(UNIT=11, FILE='Error', STATUS='UNKNOWN')

WRITE(6,70)  iter, erroru, errorv, errorp, errort
WRITE(11,70) iter, erroru, errorv, errorp, errort
70 FORMAT('iter = ', I4, 2X, E15.9, 2X, &
          E15.9, 2X, E15.9, 2X, E15.9)

END SUBROUTINE ERROR

!---------------------------------------------------------------

SUBROUTINE BUFFER()

use variable
IMPLICIT NONE

OPEN(UNIT=12, FILE='buffer.f06', STATUS='replace')

   WRITE(12,80)
   80 FORMAT('1 MSC/NASTRAN PAGE',/)
   WRITE(12,90)
   90 FORMAT('0')
   WRITE(12,100)
   100 FORMAT('  D I S P L A C E M E N T')

   aaa = 0.

   DO i = 1,npoi
      WRITE(12,110) i, u(i), v(i), aaa, p(i), t(i), qb(i)
      110 FORMAT(I6,2X,'G', 6E12.4)
   END DO

   WRITE(12,120)
   120 FORMAT('0')

CLOSE(UNIT=12, STATUS='keep')

END SUBROUTINE BUFFER

!---------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE WRITE_OUTPUT()

use variable
IMPLICIT NONE

WRITE(6,150)
150 FORMAT(/, ' ENTER THE OUTPUT FILE NAME',/)
READ(5,'(A)') name2

OPEN(UNIT=8, FILE=name2 , STATUS='NEW', IOSTAT=ierror)

WRITE(8,160)
160 FORMAT('1 MSC/NASTRAN PAGE',/)
WRITE(8,170)
170 FORMAT('0')
WRITE(8,180)
180 FORMAT('  D I S P L A C E M E N T')

aaa = 0.

DO i = 1,npoi
   WRITE(8,190) i, u(i), v(i), aaa, p(i), t(i), aaa
   190 FORMAT(I6,2X,'G', 6E12.4)
END DO

WRITE(8,200)
200 FORMAT('0')

!
! Create data for remeshing
!
WRITE(6,210)
210 FORMAT(/, ' ENTER THE FILE NAME FOR REMESHING',/)
READ(5,'(A)') name3
READ(5,'(A)') name4

OPEN(UNIT=13, FILE=name3 , STATUS='NEW', IOSTAT=ierror)
OPEN(UNIT=14, FILE=name4 , STATUS='NEW', IOSTAT=ierror)

vsum = SQRT(u*u + v*v)

WRITE(13,220) npoi
WRITE(14,220) npoi
220 FORMAT(I5)

DO i = 1,npoi
   WRITE(13,230) i, t(i)
   WRITE(14,230) i, vsum(i)
   230 FORMAT(I5,2X,E12.5)
END DO

END SUBROUTINE WRITE_OUTPUT

!---------------------------------------------------------------


Module sub

implicit none
contains

!---------------------------------------------------------------
SUBROUTINE ASSMUP() ! Subroutine for assembling in update

use variable
IMPLICIT NONE

DO i = 1,6
   ii = intmat(ie,i)
   sysrx(ii) = sysrx(ii) + rxele(i)
   sysry(ii) = sysry(ii) + ryele(i)
END DO

END SUBROUTINE ASSMUP

!---------------------------------------------------------------

end module sub

!---------------------------------------------------------------
```

```
Module variable

implicit none

CHARACTER(len=20)                       :: name1, name2, name3, name4

INTEGER(2)                              :: sthour, stminute, stsecond, sthund   ! Collect Start time
INTEGER(2)                              :: enhour, enminute, ensecond, enhund   ! Collect End time

INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: intmat                 ! Node connection on element
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: intbou                 ! Define boundary inflow
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: intbouq                ! Define boundary heat flux
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: ibcu,   ibcv,  ibcp, ibct ! boundary condition for variable
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)  :: ibce, nodeid, chke       ! boundary condition
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: esup1, esup2, elemq       ! for elements surrounding node
INTEGER(4), DIMENSION(20)               :: text                   ! buffer for reading

REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)  :: coord                      ! Coordinate of each node
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)  :: sysk                       !
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)    :: u,     v,     p,    t      ! Primitive variable
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)    :: uold,  vold,  pold,   told  ! Primitive variable (old)

real(8), allocatable, dimension(:)      :: unew, vnew, pnew, tnew
real(8), allocatable, dimension(:)      :: EE, PP, EEnew, PPnew, EB

REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      :: ru,    rv,    areavg, qb
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      :: uhat,  vhat,  kp,     vsum
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      :: sysrx, sysry, sysr,   bflux

real(8), allocatable, dimension(:)      :: tbar, digt, pbar, digp, sysrold, EKP

real(8), allocatable, dimension(:)      :: sysa, comb

INTEGER(4)                              :: npoi,  nelem,  iter, ierror, istor
INTEGER(4)                              :: i,     j,      k,    ii,   jj,  kk, ll, mm, nn
INTEGER(4)                              :: ip,    ie,     ib,   jb,   kb,  st, ed
INTEGER(4)                              :: niter, nlines, nbou, nflux, ipoi1, check

REAL(8)                                 :: sumu,   sumv,   sump,  sumt
REAL(8)                                 :: sumdu,  sumdv,  sumdp, sumdt
REAL(8)                                 :: erroru, errorv, errorp, errort
REAL(8)                                 :: tol,    aaa,    area,  dd, cross1, cross2, cross3
REAL(8)                                 :: conds, condf,   spec,   expan, tref, den, vis, cond
REAL(8)                                 :: xg1,    xg2,    xg3,   yg1,  yg2, yg3
REAL(8)                                 :: xg4,    xg5,    xg6,   yg4,  yg5, yg6
REAL(8)                                 :: b1,     b2,     b3,    c1,   c2,  c3
REAL(8)                                 :: f1,     f2,     f3
REAL(8)                                 :: f1a,    f2a,    f3a
REAL(8)                                 :: f1b,    f2b,    f3b
REAL(8)                                 :: check1, check2, check3
REAL(8)                                 :: uj,   vj
REAL(8)                                 :: count

REAL(8), DIMENSION(6,6)                 :: aele, atele
REAL(8), DIMENSION(6)                   :: rxele,  ryele,  rele

end module variable

!-------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE STREAM(acov)  ! Subroutine for Streamline_Upwind

use variable
IMPLICIT NONE

REAL(8), DIMENSION(6,6)        :: acov

REAL(8)  :: unx1, uny1, unx2, uny2, unx3, uny3
REAL(8)  :: us, ds, fp, fn, x, y, coef

acov = 0.

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)
ll = intmat(ie,4)
mm = intmat(ie,5)
nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)
xg4 = coord(ll,1)
xg5 = coord(mm,1)
xg6 = coord(nn,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)
yg4 = coord(ll,2)
yg5 = coord(mm,2)
yg6 = coord(nn,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,            &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,              &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'          )
IF(area <= 0.) STOP

!---------------------------------------------------------------------
!  Find unit vector at each side of element
!
!  UNX1,UNY1 = Unit vector point out on the opposite side of node 1
!  UNX2,UNY2 = Unit vector point out on the opposite side of node 2
!  UNX3,UNY3 = Unit vector point out on the opposite side of node 3
!---------------------------------------------------------------------
unx1 = (yg3-yg2)*0.5
uny1 = (xg2-xg3)*0.5

unx2 = (yg1-yg3)*0.5
uny2 = (xg3-xg1)*0.5

unx3 = (yg2-yg1)*0.5
uny3 = (xg1-xg2)*0.5

!-------------------------------------------------
! Find mass flow rate past the side of element
!
!   F1 = Mass flow on the side that opposite node 1
!   F2 = Mass flow on the side that opposite node 2
!   F3 = Mass flow on the side that opposite node 3
!-------------------------------------------------
f1a = (0.5*(u(jj)+u(ll))*unx1)+(0.5*(v(jj)+v(ll))*uny1)
f1b = (0.5*(u(ll)+u(kk))*unx1)+(0.5*(v(ll)+v(kk))*uny1)

f2a = (0.5*(u(mm)+u(kk))*unx2)+(0.5*(v(mm)+v(kk))*uny2)
f2b = (0.5*(u(ii)+u(mm))*unx2)+(0.5*(v(ii)+v(mm))*uny2)

f3a = (0.5*(u(ii)+u(nn))*unx3)+(0.5*(v(ii)+v(nn))*uny3)
f3b = (0.5*(u(nn)+u(jj))*unx3)+(0.5*(v(nn)+v(jj))*uny3)

f1 = f1a + f1b
f2 = f2a + f2b
f3 = f3a + f3b

coef = 0.

!-----------------
! Check for node 1
!-----------------
uj = u(ii)
vj = v(ii)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(ii) /= 1) THEN
```

```
   check1 = -(vj*(xg1-xg3))+(uj*(yg1-yg3))
   check2 = -(vj*(xg2-xg1))+(uj*(yg2-yg1))

   IF(check1 >= 0..AND.check2 >= 0.) THEN

      IF(f1 < 0.) THEN

         if(f1a < 0. .and. f1b <0.) then

             if(abs(f1a) >= abs(f3a+f3b)) then

                fp = abs(f3/f1a)

                x = (1.-fp)*xg2 + fp*xg4
                y = (1.-fp)*yg2 + fp*yg4

                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg1)*(x-xg1)+(y-yg1)*(y-yg1))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                    acov(1,1) =          coef
                    acov(1,6) =       -1*coef
                else
                    acov(1,1) =          coef
                    acov(1,2) = -(1.-fp)*coef
                    acov(1,4) =     -fp *coef
                endif

             count = count + 1.

             elseif(abs(f1a) < abs(f3a+f3b)) then

                fp = abs(f2/f1b)

                x = (1.-fp)*xg3 + fp*xg4
                y = (1.-fp)*yg3 + fp*yg4

                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg1)*(x-xg1)+(y-yg1)*(y-yg1))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                   acov(1,1) =          coef
                   acov(1,5) =       -1*coef
                else
                   acov(1,1) =          coef
                   acov(1,3) = -(1.-fp)*coef
                   acov(1,4) =     -fp *coef
                endif

             count = count + 1.

             endif

         endif

      ENDIF
   ENDIF
ENDIF

!------------------
! Check for node 2
!------------------

uj = u(jj)
vj = v(jj)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(jj) /= 1) THEN

   check1 = -(vj*(xg2-xg1))+(uj*(yg2-yg1))
   check2 = -(vj*(xg3-xg2))+(uj*(yg3-yg2))

   IF(check1 >= 0..AND.check2 >= 0.) THEN

      IF(f2 < 0.) THEN

         if(f2a < 0. .and. f2b <0.) then

             if(abs(f2a) >= abs(f1a+f1b)) then

                fp = abs(f1/f2a)

                x = (1.-fp)*xg3 + fp*xg5
                y = (1.-fp)*yg3 + fp*yg5
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg2)*(x-xg2)+(y-yg2)*(y-yg2))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                   acov(2,2) =          coef
                   acov(2,4) =       -1*coef
                else
                   acov(2,2) =          coef
                   acov(2,3) = -(1.-fp)*coef
                   acov(2,5) =     -fp *coef
                endif

             count = count + 1.

             elseif(abs(f2a) < abs(f1a+f1b)) then

                fp = abs(f3/f2b)

                x = (1.-fp)*xg1 + fp*xg5
                y = (1.-fp)*yg1 + fp*yg5

                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg2)*(x-xg2)+(y-yg2)*(y-yg2))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                   acov(2,2) =          coef
                   acov(2,6) =       -1*coef
                else
                   acov(2,2) =          coef
                   acov(2,1) = -(1.-fp)*coef
                   acov(2,5) =     -fp *coef

                count = count + 1.

             endif

          endif

       ENDIF
    ENDIF
ENDIF

!------------------
! Check for node 3
!------------------

uj = u(kk)
vj = v(kk)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(kk) /= 1) THEN

   check1 = -(vj*(xg3-xg2))+(uj*(yg3-yg2))
   check2 = -(vj*(xg1-xg3))+(uj*(yg1-yg3))

   IF(check1 >= 0..AND.check2 >= 0.) THEN

      IF(f3 < 0.) THEN

         if(f3a < 0. .and. f3b <0.) then

             if(abs(f3a) >= abs(f2a+f2b)) then

                fp = abs(f2/f3a)

                x = (1.-fp)*xg1 + fp*xg6
                y = (1.-fp)*yg1 + fp*yg6

                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg3)*(x-xg3)+(y-yg3)*(y-yg3))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                   acov(3,3) =          coef
                   acov(3,5) =       -1*coef
                else
                   acov(3,3) =          coef
                   acov(3,1) = -(1.-fp)*coef
                   acov(3,6) =     -fp *coef
                endif

             count = count + 1.

             elseif(abs(f3a) < abs(f2a+f2b)) then
```

```
                fp = abs(f1/f3b)

                x = (1.-fp)*xg2 + fp*xg6
                y = (1.-fp)*yg2 + fp*yg6

                us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
                ds = SQRT((x-xg3)*(x-xg3)+(y-yg3)*(y-yg3))

                coef = (den*us*area)/ds

                if(fp == 0.) then
                   acov(3,3) =          coef
                   acov(3,4) =       -1*coef
                else
                   acov(3,3) =          coef
                   acov(3,2) = -(1.-fp)*coef
                   acov(3,6) =     -fp *coef
                endif

             count = count + 1.

             endif
          endif

       ENDIF
    ENDIF
ENDIF

!------------------
! Check for node 4
!------------------

uj = u(ll)
vj = v(ll)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(ll) /= 1) THEN

   check1 = unx1*uj + uny1*vj

   IF(check1 >= 0.) THEN

   check2 = 0.
   check3 = (0.5*(u(ii)+u(ll))*(yg4-yg1))+(0.5*(v(ii)+v(ll))*(xg1-xg4))

   if(check3 >= 0.) then

       if(abs(f1b) <= abs(f2a) .and. f2a /= 0.) then  ! add last condition to protect error

          fp = abs(f1b/f2a)

          x = (1.-fp)*xg3 + fp*xg5
          y = (1.-fp)*yg3 + fp*yg5

          us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
          ds = SQRT((x-xg4)*(x-xg4)+(y-yg4)*(y-yg4))

          coef = (den*us*area)/ds

          acov(4,4) =          coef
          acov(4,3) = -(1.-fp)*coef
          acov(4,5) =     -fp *coef

       count = count + 1.

       elseif( (abs(f1b)>abs(f2a)) .and. (abs(f1b)<=abs(f2)) .and. f2b /= 0.) then

          fp = (abs(f1b)-abs(f2a))/abs(f2b)

          x = (1.-fp)*xg5 + fp*xg1
          y = (1.-fp)*yg5 + fp*yg1

          us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
          ds = SQRT((x-xg4)*(x-xg4)+(y-yg4)*(y-yg4))

          coef = (den*us*area)/ds

          acov(4,4) =          coef
          acov(4,5) = -(1.-fp)*coef
          acov(4,1) =     -fp *coef

       count = count + 1.

       endif
   endif

   if(check3 <= 0.) then
```

```
      if(abs(f1a) <= abs(f3b) .and. f3b /= 0.) then  ! add last condition to protect error

         fp = abs(f1a/f3b)

         x = (1.-fp)*xg2 + fp*xg6
         y = (1.-fp)*yg2 + fp*yg6

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg4)*(x-xg4)+(y-yg4)*(y-yg4))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(4,4) =          coef
         acov(4,2) = -(1.-fp)*coef
         acov(4,6) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      elseif( (abs(f1a)>abs(f3b)) .and. (abs(f1a)<=abs(f3)) .and. f3a /= 0.) then
         fp = (abs(f1a)-abs(f3b))/abs(f3a)

         x = (1.-fp)*xg6 + fp*xg1
         y = (1.-fp)*yg6 + fp*yg1

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg4)*(x-xg4)+(y-yg4)*(y-yg4))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(4,4) =          coef
         acov(4,6) = -(1.-fp)*coef
         acov(4,1) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      endif
   endif

   ENDIF
ENDIF

!------------------
! Check for node 5
!------------------

uj = u(mm)
vj = v(mm)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(mm) /= 1) THEN

   check1 = unx2*uj + uny2*vj

   IF(check1 >= 0.) THEN

   check3 = (0.5*(u(jj)+u(mm))*(yg5-yg2))+(0.5*(v(jj)+v(mm))*(xg2-xg5))

   if(check3 >= 0.) then

      if(abs(f2b) <= abs(f3a) .and. f3a /= 0.) then  ! add last condition to protect error

         fp = abs(f2b/f3a)

         x = (1.-fp)*xg1 + fp*xg6
         y = (1.-fp)*yg1 + fp*yg6

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg5)*(x-xg5)+(y-yg5)*(y-yg5))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(5,5) =          coef
         acov(5,1) = -(1.-fp)*coef
         acov(5,6) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      elseif( (abs(f2b)>abs(f3a)) .and. (abs(f2b)<=abs(f3)) .and. f3b /= 0. ) then

         fp = (abs(f2b)-abs(f3a))/abs(f3b)

         x = (1.-fp)*xg6 + fp*xg2
         y = (1.-fp)*yg6 + fp*yg2

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg5)*(x-xg5)+(y-yg5)*(y-yg5))

         coef = (den*us*area)/ds
```

```
          acov(5,5) =          coef
          acov(5,6) = -(1.-fp)*coef
          acov(5,2) =     -fp *coef

       count = count + 1.

       endif
   endif

   if(check3 <= 0.) then


if(abs(f2a) <= abs(f1b) .and. f1b /= 0.) then  ! add last condition to protect error

          fp = abs(f2a/f1b)

          x = (1.-fp)*xg3 + fp*xg4
          y = (1.-fp)*yg3 + fp*yg4

          us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
          ds = SQRT((x-xg5)*(x-xg5)+(y-yg5)*(y-yg5))

          coef = (den*us*area)/ds

          acov(5,5) =          coef
          acov(5,3) = -(1.-fp)*coef
          acov(5,4) =     -fp *coef

       count = count + 1.

       elseif( (abs(f2a)>abs(f1b)) .and. (abs(f2a)<=abs(f1)) .and. f1a /= 0.) then

          fp = (abs(f2a)-abs(f1b))/abs(f1a)

          x = (1.-fp)*xg4 + fp*xg2
          y = (1.-fp)*yg4 + fp*yg2

          us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
          ds = SQRT((x-xg5)*(x-xg5)+(y-yg5)*(y-yg5))

          coef = (den*us*area)/ds

          acov(5,5) =          coef
          acov(5,4) = -(1.-fp)*coef
          acov(5,2) =     -fp *coef

       count = count + 1.

       endif
   endif

   ENDIF
ENDIF

!------------------
! Check for node 6
!------------------

uj = u(nn)
vj = v(nn)

IF((uj /= 0..OR.vj /= 0.) .and. ibcp(nn) /= 1) THEN

   check1 = unx3*uj + uny3*vj

   IF(check1 >= 0.) THEN

   check3 = (0.5*(u(kk)+u(nn))*(yg6-yg3))+(0.5*(v(kk)+v(nn))*(xg3-xg6))

   if(check3 >= 0.) then

       if(abs(f3b) <= abs(f1a) .and. f1a /= 0.) then ! add last condition to protect error

          fp = abs(f3b/f1a)

          x = (1.-fp)*xg2 + fp*xg4
          y = (1.-fp)*yg2 + fp*yg4

          us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
          ds = SQRT((x-xg6)*(x-xg6)+(y-yg6)*(y-yg6))

          coef = (den*us*area)/ds

          acov(6,6) =          coef
          acov(6,2) = -(1.-fp)*coef
          acov(6,4) =     -fp *coef

      count = count + 1.
```

```
      elseif( (abs(f3b)>abs(f1a)) .and. (abs(f3b)<=abs(f1)) .and. f1b /= 0.) then

         fp = (abs(f3b)-abs(f1a))/abs(f1b)

         x = (1.-fp)*xg4 + fp*xg3
         y = (1.-fp)*yg4 + fp*yg3

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg6)*(x-xg6)+(y-yg6)*(y-yg6))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(6,6) =          coef
         acov(6,4) = -(1.-fp)*coef
         acov(6,3) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      endif

   endif

   if(check3 <= 0.) then


if(abs(f3a) <= abs(f2b) .and. f2b /= 0.) then ! add last condition to protect error

         fp = abs(f3a/f2b)

         x = (1.-fp)*xg1 + fp*xg5
         y = (1.-fp)*yg1 + fp*yg5

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg6)*(x-xg6)+(y-yg6)*(y-yg6))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(6,6) =          coef
         acov(6,1) = -(1.-fp)*coef
         acov(6,5) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      elseif( (abs(f3a)>abs(f2b)) .and. (abs(f3a)<=abs(f2)) .and. f2a /= 0.) then
         fp = (abs(f3a)-abs(f2b))/abs(f2a)

         x = (1.-fp)*xg5 + fp*xg3
         y = (1.-fp)*yg5 + fp*yg3

         us = SQRT((uj*uj)+(vj*vj))
         ds = SQRT((x-xg6)*(x-xg6)+(y-yg6)*(y-yg6))

         coef = (den*us*area)/ds

         acov(6,6) =          coef
         acov(6,5) = -(1.-fp)*coef
         acov(6,3) =     -fp *coef

      count = count + 1.

      endif
   endif

   ENDIF
ENDIF

END SUBROUTINE STREAM

!-------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข.

รายละเอียดของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

```
!
!  Program Thermal Stress Analysis
!

MODULE SOLID
IMPLICIT NONE

CHARACTER(len=20)                       :: name1

INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) :: intmat      ! Node connection on element
INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)   :: ibcx, ibcy  ! boundary condition for variable
INTEGER(4), DIMENSION(20)               :: text        ! buffer for reading

REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)    :: coord                            !
Coordinate of each node
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::     p,  pnew, displx, disply
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::  sysf, sysfb, dig, temp, sxx, syy, sxy, one

INTEGER(4)                              ::    neq,  npoi, nelem, iter, ierror, ip, ie
INTEGER(4)                              ::      i,     j,     k,   ii,     jj, kk
integer(4)                              ::     ll,    mm,    nn
INTEGER(4)                              :: nlines, iline, nstep,   ic,    res,  l
integer(4)                              ::  nside, nboun

REAL(8)                                 ::  xg1, xg2,  xg3, yg1, yg2,  yg3, theta
REAL(8)                                 ::   b1,  b2,   b3,  c1,  c2,   c3
REAL(8)                                 ::   uj,  vj, zero
REAL(8)                                 :: area,   x,    y,  sum
REAL(8)                                 :: elas,  pr, tref, alpha, thick, lfa
real(8)                                 ::  c11, c12,  c21,   c22, c33


REAL(8), DIMENSION(12,12)               ::  kele
REAL(8), DIMENSION(12)                  ::  r, fbar, rsur, rtemp

integer(4)                              :: tnode, stype
integer(4), allocatable, dimension(:,:) :: number
integer(4), allocatable, dimension(:,:,:) :: acheck

real(8), allocatable, dimension(:,:)      :: sysk

CONTAINS

!-----------------------------------------------

SUBROUTINE MAIN()

use solve
IMPLICIT NONE

real(8)    :: error
integer(4) :: niter, iter

  call READ_INPUT()

  call CST()

  call sympcg(sysk, sysf, p, neq)

  call STRESS()

  call WRITE_OUTPUT()

END SUBROUTINE MAIN

!=============================================================
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE READ_INPUT()

IMPLICIT NONE

WRITE(6,10)
10 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:',/)
READ(5, '(A)') name1

OPEN(UNIT=7, FILE=name1, STATUS='OLD', ACTION='READ', IOSTAT=ierror)

!-----------------
! Read input data
!-----------------

READ(7,*) nlines

DO iline = 1,nlines
   READ(7,1) text
   1 FORMAT(20A4)
END DO

READ(7,1) text
READ(7,*) tnode, nelem, nboun, stype

!nside = (3*nelem+nboun)/2
npoi  = tnode
neq   = 2*npoi

ALLOCATE(intmat(nelem,6),   coord(npoi,2))
ALLOCATE( ibcx(npoi), ibcy(npoi), displx(npoi), disply(npoi), temp(tnode))
ALLOCATE(  sxx(npoi),  syy(npoi),    sxy(npoi),    one(npoi))
ALLOCATE(     p(neq),  pnew(neq),    sysf(neq),   sysfb(neq),  dig(neq))
ALLOCATE(    number(tnode,tnode),      acheck(tnode,tnode,2))

allocate( sysk(neq,neq))

READ(7,1) text
READ(7,*) elas,  pr, tref, alpha, thick
READ(7,1) text
DO ip = 1,tnode
   READ(7,*) i, ibcx(i), ibcy(i), (coord(i,k), k=1,2), displx(i), disply(i), sxx(i),
syy(i), temp(i)
   IF(i /= ip) WRITE(6,40) ip
   40 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5,' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ip) STOP
END DO

READ(7,1) TEXT
DO ie = 1,nelem
   READ(7,*) i, (intmat(i,j), j=1,6)
   IF(i /= ie) WRITE(6,50) ie
   50 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ie) STOP
END DO

CLOSE(UNIT=7, STATUS='keep')

WRITE(6,60) tnode, nelem
60 FORMAT(/,'   THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :',/,   &
          '      NUMBER OF TIP NODES          =', I6, /,   &
          '      NUMBER OF ELEMENTS           =', I6, /)

END SUBROUTINE READ_INPUT

!=============================================================
```

```
SUBROUTINE CST()

IMPLICIT NONE
real(8), dimension(12)     ::   tele, ibce
integer(4)                 ::   ieq, ir

 sysf = 0.
 sysk = 0.

!
!  Loop over the number of elements:
!

const: DO ie = 1,nelem

!
!  Find element local coordinates:
!

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)
ll = intmat(ie,4)
mm = intmat(ie,5)
nn = intmat(ie,6)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

b1 = (yg2 - yg3)
b2 = (yg3 - yg1)
b3 = (yg1 - yg2)

c1 = (xg3 - xg2)
c2 = (xg1 - xg3)
c3 = (xg2 - xg1)

!
!  Setup & clear matrices:
!
 kele = 0.
 ibce = 0.
 rsur = 0.
rtemp = 0.
    r = 0.

tele(1)  = p(ii)
tele(2)  = p(jj)
tele(3)  = p(kk)
tele(4)  = p(ll)
tele(5)  = p(mm)
tele(6)  = p(nn)
tele(7)  = p(ii + npoi)
tele(8)  = p(jj + npoi)
tele(9)  = p(kk + npoi)
tele(10) = p(ll + npoi)
tele(11) = p(mm + npoi)
tele(12) = p(nn + npoi)

if (ibcx(ii) == 1) ibce(1)  = 1
if (ibcx(jj) == 1) ibce(2)  = 1
if (ibcx(kk) == 1) ibce(3)  = 1
if (ibcx(ll) == 1) ibce(4)  = 1
if (ibcx(mm) == 1) ibce(5)  = 1
if (ibcx(nn) == 1) ibce(6)  = 1

if (ibcy(ii) == 1) ibce(7)  = 1
if (ibcy(jj) == 1) ibce(8)  = 1
if (ibcy(kk) == 1) ibce(9)  = 1
if (ibcy(ll) == 1) ibce(10) = 1
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
if (ibcy(mm) == 1) ibce(11) = 1
if (ibcy(nn) == 1) ibce(12) = 1

!-------------------------------------
!  Set the value for
!  the coefficient of diffusion term
!-------------------------------------

call CnK_ELE()

!---------------------
!  Compute all loads
!---------------------

call ALL_LOAD()

!---------------------
!  Assemble element
!---------------------

call asmp()

!--------------

END DO const

!-------------

call applbc()

!---------------------------------------------------------------------

END SUBROUTINE CST

!=============================================================

subroutine applbc()

implicit none
integer(4)                ::   ieq, ir, ic

outer1: do ieq = 1,npoi
          if(ibcx(ieq) == 0) cycle outer1
          inner1: do ir = 1,neq
                     if(ir == ieq) cycle inner1
                     sysk(ir,ieq) = 0.
                  enddo inner1

                do ic = 1,neq
                   sysk(ieq,ic) = 0.
                enddo

                sysk(ieq,ieq) = 1.
                sysf(ieq)     = 0.

        enddo outer1

outer: do ieq = 1,npoi
          if(ibcy(ieq) == 0) cycle outer
          inner: do ir = 1,neq
                   if(ir == ieq) cycle inner
                   sysk(ir,ieq+npoi) = 0.
                enddo inner

                do ic = 1,neq
                   sysk(ieq+npoi,ic) = 0.
                enddo

                sysk(ieq+npoi,ieq+npoi) = 1.
                sysf(ieq+npoi)          = 0.

       enddo outer

end subroutine applbc

!=============================================================
```

```
SUBROUTINE CnK_ELE()

IMPLICIT NONE

if (stype == 0) then
   c11 =            elas / (1 - pr*pr)
   c12 =      pr  * elas / (1 - pr*pr)
   c33 = (1 - pr) * elas / (1 - pr*pr)/2.
   lfa = alpha
endif

if (stype == 1) then
   c11 =    (1 - pr) * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)
   c12 =         pr  * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)
   c33 = (1 - 2.*pr) * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)/2.
   lfa = alpha*(1+pr)
endif

c33 = c33
c21 = c12
c22 = c11

!
!   upper left (quardrant 2)
!
    kele(1,1) = c11*b1*b1 + c33*c1*c1
    kele(1,2) = c11*b1*b2 + c33*c1*c2
    kele(1,3) = c11*b1*b3 + c33*c1*c3
    kele(2,1) = kele(1,2)
    kele(2,2) = c11*b2*b2 + c33*c2*c2
    kele(2,3) = c11*b2*b3 + c33*c2*c3
    kele(3,1) = kele(1,3)
    kele(3,2) = kele(2,3)
    kele(3,3) = c11*b3*b3 + c33*c3*c3

    kele(1,4) = 4.*(c11*b1*(b2+b3) + c33*c1*(c2+c3))/3.
    kele(2,4) = 4.*(c11*b2*(b2+b3) + c33*c2*(c2+c3))/3.
    kele(3,4) = 4.*(c11*b3*(b2+b3) + c33*c3*(c2+c3))/3.
    kele(1,5) = 4.*(c11*b1*(b3+b1) + c33*c1*(c3+c1))/3.
    kele(2,5) = 4.*(c11*b2*(b3+b1) + c33*c2*(c3+c1))/3.
    kele(3,5) = 4.*(c11*b3*(b3+b1) + c33*c3*(c3+c1))/3.
    kele(1,6) = 4.*(c11*b1*(b1+b2) + c33*c1*(c1+c2))/3.
    kele(2,6) = 4.*(c11*b2*(b1+b2) + c33*c2*(c1+c2))/3.
    kele(3,6) = 4.*(c11*b3*(b1+b2) + c33*c3*(c1+c2))/3.

    kele(4,1) = kele(1,4)
    kele(4,2) = kele(2,4)
    kele(4,3) = kele(3,4)
    kele(5,1) = kele(1,5)
    kele(5,2) = kele(2,5)
    kele(5,3) = kele(3,5)
    kele(6,1) = kele(1,6)
    kele(6,2) = kele(2,6)
    kele(6,3) = kele(3,6)

    kele(4,4) = 16.*(c11*(2.*b2*b2 + 2.*b2*b3 + 2.*b3*b3) + c33*(2.*c2*c2 + 2.*c2*c3 +
2.*c3*c3))/12.
    kele(5,5) = 16.*(c11*(2.*b1*b1 + 2.*b1*b3 + 2.*b3*b3) + c33*(2.*c1*c1 + 2.*c1*c3 +
2.*c3*c3))/12.
    kele(6,6) = 16.*(c11*(2.*b1*b1 + 2.*b1*b2 + 2.*b2*b2) + c33*(2.*c1*c1 + 2.*c1*c2 +
2.*c2*c2))/12.
    kele(4,5) = 16.*(c11*(b3*b3 + b1*b3 + b2*b3 + 2.*b1*b2) + c33*(c3*c3 + c1*c3 + c2*c3
+ 2.*c1*c2))/12.
    kele(4,6) = 16.*(c11*(b2*b2 + b1*b2 + b2*b3 + 2.*b1*b3) + c33*(c2*c2 + c1*c2 + c2*c3
+ 2.*c1*c3))/12.
    kele(5,6) = 16.*(c11*(b1*b1 + b1*b2 + b1*b3 + 2.*b2*b3) + c33*(c1*c1 + c1*c2 + c1*c3
+ 2.*c2*c3))/12.
    kele(5,4) = kele(4,5)
    kele(6,4) = kele(4,6)
    kele(6,5) = kele(5,6)

!
!   lower right (quardrant 4)
!
    kele(7,7) = c33*b1*b1 + c22*c1*c1
    kele(7,8) = c33*b1*b2 + c22*c1*c2
    kele(7,9) = c33*b1*b3 + c22*c1*c3
```

```
    kele(8,7) = kele(7,8)
    kele(8,8) = c33*b2*b2 + c22*c2*c2
    kele(8,9) = c33*b2*b3 + c22*c2*c3
    kele(9,7) = kele(7,9)
    kele(9,8) = kele(8,9)
    kele(9,9) = c33*b3*b3 + c22*c3*c3

    kele(7,10) = 4.*(c33*b1*(b2+b3) + c22*c1*(c2+c3))/3.
    kele(8,10) = 4.*(c33*b2*(b2+b3) + c22*c2*(c2+c3))/3.
    kele(9,10) = 4.*(c33*b3*(b2+b3) + c22*c3*(c2+c3))/3.
    kele(7,11) = 4.*(c33*b1*(b3+b1) + c22*c1*(c3+c1))/3.
    kele(8,11) = 4.*(c33*b2*(b3+b1) + c22*c2*(c3+c1))/3.
    kele(9,11) = 4.*(c33*b3*(b3+b1) + c22*c3*(c3+c1))/3.
    kele(7,12) = 4.*(c33*b1*(b1+b2) + c22*c1*(c1+c2))/3.
    kele(8,12) = 4.*(c33*b2*(b1+b2) + c22*c2*(c1+c2))/3.
    kele(9,12) = 4.*(c33*b3*(b1+b2) + c22*c3*(c1+c2))/3.

    kele(10,7) = kele(7,10)
    kele(10,8) = kele(8,10)
    kele(10,9) = kele(9,10)
    kele(11,7) = kele(7,11)
    kele(11,8) = kele(8,11)
    kele(11,9) = kele(9,11)
    kele(12,7) = kele(7,12)
    kele(12,8) = kele(8,12)
    kele(12,9) = kele(9,12)

    kele(10,10) = 16.*(c33*(2.*b2*b2 + 2.*b2*b3 + 2.*b3*b3) + c22*(2.*c2*c2 + 2.*c2*c3 +
2.*c3*c3))/12.
    kele(11,11) = 16.*(c33*(2.*b1*b1 + 2.*b1*b3 + 2.*b3*b3) + c22*(2.*c1*c1 + 2.*c1*c3 +
2.*c3*c3))/12.
    kele(12,12) = 16.*(c33*(2.*b1*b1 + 2.*b1*b2 + 2.*b2*b2) + c22*(2.*c1*c1 + 2.*c1*c2 +
2.*c2*c2))/12.
    kele(10,11) = 16.*(c33*(b3*b3 + b1*b3 + b2*b3 + 2.*b1*b2) + c22*(c3*c3 + c1*c3 +
c2*c3 + 2.*c1*c2))/12.
    kele(10,12) = 16.*(c33*(b2*b2 + b1*b2 + b2*b3 + 2.*b1*b3) + c22*(c2*c2 + c1*c2 +
c2*c3 + 2.*c1*c3))/12.
    kele(11,12) = 16.*(c33*(b1*b1 + b1*b2 + b1*b3 + 2.*b2*b3) + c22*(c1*c1 + c1*c2 +
c1*c3 + 2.*c2*c3))/12.
    kele(11,10) = kele(10,11)
    kele(12,10) = kele(10,12)
    kele(12,11) = kele(11,12)

!
!   upper right (quardrant 1)
!
    kele(1,7) = c12*b1*c1 + c33*b1*c1
    kele(2,7) = c12*b2*c1 + c33*b1*c2
    kele(3,7) = c12*b3*c1 + c33*b1*c3
    kele(1,8) = c12*b1*c2 + c33*b2*c1
    kele(2,8) = c12*b2*c2 + c33*b2*c2
    kele(3,8) = c12*b3*c2 + c33*b2*c3
    kele(1,9) = c12*b1*c3 + c33*b3*c1
    kele(2,9) = c12*b2*c3 + c33*b3*c2
    kele(3,9) = c12*b3*c3 + c33*b3*c3

    kele(1,10) = 4.*(c12*b1*(c3+c2) + c33*(b3+b2)*c1)/3.
    kele(2,10) = 4.*(c12*b2*(c3+c2) + c33*(b3+b2)*c2)/3.
    kele(3,10) = 4.*(c12*b3*(c3+c2) + c33*(b3+b2)*c3)/3.
    kele(1,11) = 4.*(c12*b1*(c1+c3) + c33*(b1+b3)*c1)/3.
    kele(2,11) = 4.*(c12*b2*(c1+c3) + c33*(b1+b3)*c2)/3.
    kele(3,11) = 4.*(c12*b3*(c1+c3) + c33*(b1+b3)*c3)/3.
    kele(1,12) = 4.*(c12*b1*(c2+c1) + c33*(b2+b1)*c1)/3.
    kele(2,12) = 4.*(c12*b2*(c2+c1) + c33*(b2+b1)*c2)/3.
    kele(3,12) = 4.*(c12*b3*(c2+c1) + c33*(b2+b1)*c3)/3.

    kele(4,7) = 4.*(c12*(b3+b2)*c1 + c33*b1*(c3+c2))/3.
    kele(5,7) = 4.*(c12*(b1+b3)*c1 + c33*b1*(c1+c3))/3.
    kele(6,7) = 4.*(c12*(b2+b1)*c1 + c33*b1*(c2+c1))/3.
    kele(4,8) = 4.*(c12*(b3+b2)*c2 + c33*b2*(c3+c2))/3.
    kele(5,8) = 4.*(c12*(b1+b3)*c2 + c33*b2*(c1+c3))/3.
    kele(6,8) = 4.*(c12*(b2+b1)*c2 + c33*b2*(c2+c1))/3.
    kele(4,9) = 4.*(c12*(b3+b2)*c3 + c33*b3*(c3+c2))/3.
    kele(5,9) = 4.*(c12*(b1+b3)*c3 + c33*b3*(c1+c3))/3.
    kele(6,9) = 4.*(c12*(b2+b1)*c3 + c33*b3*(c2+c1))/3.
```

```
       kele(4,10) = 16.*(c12*(2.*b3*c3 +    b3*c2 +    b2*c3 + 2.*b2*c2) +
c33*(2.*b3*c3 +    b3*c2 +    b2*c3 + 2.*b2*c2))/12.
    kele(5,10) = 16.*(c12*(   b1*c3 + 2.*b1*c2 +    b3*c3 +    b3*c2) + c33*(   b3*c1 +
b3*c3 + 2.*b2*c1 +    b2*c3))/12.
    kele(6,10) = 16.*(c12*(   b2*c3 +    b2*c2 + 2.*b1*c3 +    b1*c2) + c33*(   b3*c2 +
2.*b3*c1 +    b2*c2 +    b2*c1))/12.
       kele(4,11) = 16.*(c12*(   b3*c1 +    b3*c3 + 2.*b2*c1 +    b2*c3) + c33*(
b1*c3 + 2.*b1*c2 +    b3*c3 +    b3*c2))/12.
       kele(5,11) = 16.*(c12*(2.*b1*c1 +    b1*c3 +    b3*c1 + 2.*b3*c3) +
c33*(2.*b1*c1 +    b1*c3 +    b3*c1 + 2.*b3*c3))/12.
       kele(6,11) = 16.*(c12*(   b2*c1 + 2.*b2*c3 +    b1*c1 +    b1*c3) + c33*(
b1*c2 +    b1*c1 + 2.*b3*c2 +    b3*c1))/12.
       kele(4,12) = 16.*(c12*(   b3*c2 + 2.*b3*c1 +    b2*c2 +    b2*c1) + c33*(
b2*c3 +    b2*c2 + 2.*b1*c3 +    b1*c2))/12.
    kele(5,12) = 16.*(c12*(   b1*c2 +    b1*c1 + 2.*b3*c2 +    b3*c1) + c33*(   b2*c1 +
2.*b2*c3 +    b1*c1 +    b1*c3))/12.
       kele(6,12) = 16.*(c12*(2.*b2*c2 +    b2*c1 +    b1*c2 + 2.*b1*c1) +
c33*(2.*b2*c2 +    b2*c1 +    b1*c2 + 2.*b1*c1))/12.
!
!   lower left (quardrant 3)
!
    kele(7,1) = kele(1,7)
    kele(7,2) = kele(2,7)
    kele(7,3) = kele(3,7)
    kele(7,4) = kele(4,7)
    kele(7,5) = kele(5,7)
    kele(7,6) = kele(6,7)

    kele(8,1) = kele(1,8)
    kele(8,2) = kele(2,8)
    kele(8,3) = kele(3,8)
    kele(8,4) = kele(4,8)
    kele(8,5) = kele(5,8)
    kele(8,6) = kele(6,8)

    kele(9,1) = kele(1,9)
    kele(9,2) = kele(2,9)
    kele(9,3) = kele(3,9)
    kele(9,4) = kele(4,9)
    kele(9,5) = kele(5,9)
    kele(9,6) = kele(6,9)

    kele(10,1) = kele(1,10)
    kele(10,2) = kele(2,10)
    kele(10,3) = kele(3,10)
    kele(10,4) = kele(4,10)
    kele(10,5) = kele(5,10)
    kele(10,6) = kele(6,10)


    kele(11,1) = kele(1,11)
    kele(11,2) = kele(2,11)
    kele(11,3) = kele(3,11)
    kele(11,4) = kele(4,11)
    kele(11,5) = kele(5,11)
    kele(11,6) = kele(6,11)

    kele(12,1) = kele(1,12)
    kele(12,2) = kele(2,12)
    kele(12,3) = kele(3,12)
    kele(12,4) = kele(4,12)
    kele(12,5) = kele(5,12)
    kele(12,6) = kele(6,12)

    kele = kele*thick/area/4.

END SUBROUTINE CnK_ELE

!=========================================================
```

```
SUBROUTINE ASMP()

IMPLICIT NONE

!
!  Assembling system load vector
!
!  Contribution of coefficients associated with psi
!

DO i = 1,6

   do j = 1,6

      ii = intmat(ie,i)
      jj = intmat(ie,j)

      sysk(ii     ,jj     ) = sysk(ii     ,jj     ) + kele(i  ,j  )
      sysk(ii+npoi,jj     ) = sysk(ii+npoi,jj     ) + kele(i+6,j  )
      sysk(ii     ,jj+npoi) = sysk(ii     ,jj+npoi) + kele(i  ,j+6)
      sysk(ii+npoi,jj+npoi) = sysk(ii+npoi,jj+npoi) + kele(i+6,j+6)

   enddo

   sysf(ii) = sysf(ii)  + r(i)
   sysf(ii+npoi) = sysf(ii+npoi)  + r(i+6)

END DO

END SUBROUTINE ASMP


!=========================================================

SUBROUTINE WRITE_OUTPUT()

IMPLICIT NONE

INTEGER(4)           :: leng

leng = len_trim(name1) - 4

OPEN(UNIT=8,FILE=name1(1:leng)//'.f06',STATUS='unknown',IOSTAT=ierror)

WRITE(8,160)
160 FORMAT('1 MSC/NASTRAN PAGE',/)
WRITE(8,170)
170 FORMAT('0')
WRITE(8,180)
180 FORMAT('  D I S P L A C E M E N T')

zero = 0.

DO i = 1,tnode
   WRITE(8,190) i, p(i), p(i+npoi), zero, sxx(i), syy(i), temp(i)
   190 FORMAT(I6,2X,'G', 6E16.6)
END DO

WRITE(8,200)
200 FORMAT('0')

CLOSE(unit=8, status='keep')

END SUBROUTINE WRITE_OUTPUT

!=========================================================
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE ALL_LOAD()

IMPLICIT NONE

real(8)                   ::   dx, dy, dl, SL, tavg, Q
real(8), dimension(12,3)  ::   bmat
real(8), dimension( 3,3)  ::   cmat
real(8), dimension(3)     ::   lmat

!----------------
!  surface load
!----------------
   if ((sxx(ii) /= 0.) .and. (sxx(jj) /= 0.)) then

      dx = xg2 - xg1
      dy = yg2 - yg1
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)

          SL = (sxx(ii) + sxx(jj))/2.

          rsur(1) = SL*thick*dl/2.
          rsur(2) = SL*thick*dl/2.
          rsur(6) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

   if ((sxx(jj) /= 0.) .and. (sxx(kk) /= 0.)) then

      dx = xg3 - xg2
      dy = yg3 - yg2
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)
          SL = (sxx(jj) + sxx(kk))/2.
          rsur(2) = SL*thick*dl/2.
          rsur(3) = SL*thick*dl/2.
          rsur(4) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

   if ((sxx(kk) /= 0.) .and. (sxx(ii) /= 0.)) then

      dx = xg3 - xg1
      dy = yg3 - yg1
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)
          SL = (sxx(kk) + sxx(ii))/2.
          rsur(1) = SL*thick*dl/2.
          rsur(3) = SL*thick*dl/2.
          rsur(5) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

   if ((syy(ii) /= 0.) .and. (syy(jj) /= 0.)) then

      dx = xg2 - xg1
      dy = yg2 - yg1
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)
          SL = (syy(ii) + syy(jj))/2.
          rsur(7)  = SL*thick*dl/2.
          rsur(8)  = SL*thick*dl/2.
          rsur(12) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

   if ((syy(jj) /= 0.) .and. (syy(kk) /= 0.)) then

      dx = xg3 - xg2
      dy = yg3 - yg2
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)
          SL = (syy(jj) + syy(kk))/2.
          rsur(8)  = SL*thick*dl/2.
          rsur(9)  = SL*thick*dl/2.
          rsur(10) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

   if ((syy(kk) /= 0.) .and. (syy(ii) /= 0.)) then

      dx = xg3 - xg1
```

```
      dy = yg3 - yg1
      dl = sqrt(dx*dx + dy*dy)
         SL = (syy(kk) + syy(ii))/2.
         rsur(7)  = SL*thick*dl/2.
         rsur(9)  = SL*thick*dl/2.
         rsur(11) = SL*thick*dl*2./3.

   endif

!------------------------------
!  average element temperature
!------------------------------

tavg = (temp(ii) + temp(jj) + temp(kk))/3.

Q = tavg - tref

bmat = 0.
cmat = 0.
lmat = 0.

bmat(1,1)    = b1/2.
bmat(2,1)    = b2/2.
bmat(3,1)    = b3/2.
bmat(4,1)    = 2.*(b2+b3)/3.
bmat(5,1)    = 2.*(b1+b3)/3.
bmat(6,1)    = 2.*(b2+b1)/3.

bmat(7,2)    = c1/2.
bmat(8,2)    = c2/2.
bmat(9,2)    = c3/2.
bmat(10,2)   = 2.*(c2+c3)/3.
bmat(11,2)   = 2.*(c1+c3)/3.
bmat(12,2)   = 2.*(c2+c1)/3.

bmat(1,3)    = c1/2.
bmat(2,3)    = c2/2.
bmat(3,3)    = c3/2.
bmat(4,3)    = 2.*(c2+c3)/3.
bmat(5,3)    = 2.*(c1+c3)/3.
bmat(6,3)    = 2.*(c2+c1)/3.

bmat(7,3)    = b1/2.
bmat(8,3)    = b2/2.
bmat(9,3)    = b3/2.
bmat(10,3)   = 2.*(b2+b3)/3.
bmat(11,3)   = 2.*(b1+b3)/3.
bmat(12,3)   = 2.*(b2+b1)/3.

cmat(1,1)  = c11
cmat(1,2)  = c12
cmat(2,1)  = c21
cmat(2,2)  = c22
cmat(3,3)  = c33

lmat(1) = alpha
lmat(2) = alpha

!-------------
!  temp load
!-------------

rtemp = matmul(bmat,matmul(cmat,lmat))*Q*thick

!----------------------------------------
!  total load = surface load + temp load
!----------------------------------------

r = rsur + rtemp

END SUBROUTINE ALL_LOAD

!=========================================================
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
SUBROUTINE STRESS()

IMPLICIT NONE

real(8)                              :: sxxe, syye, sxye, tavg
real(8), dimension(3)                :: st
real(8), dimension(6)                :: tele
real(8), dimension(3,6)              :: b

if (stype == 0) then
   c11 =            elas / (1 - pr*pr)
   c12 =      pr  * elas / (1 - pr*pr)
   c33 = (1 - pr) * elas / (1 - pr*pr)/2.
   lfa = alpha
endif

if (stype == 1) then
   c11 =    (1 - pr) * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)
   c12 =         pr  * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)
   c33 = (1 - 2.*pr) * elas / (1 + pr) / (1 - 2.*pr)/2.
   lfa = alpha*(1+pr)
endif

c33 = c33
c21 = c12
c22 = c11

sxx = 0.
syy = 0.
sxy = 0.
one = 0.

do ie=1,nelem

   ii = intmat(ie,1)
   jj = intmat(ie,2)
   kk = intmat(ie,3)
   ll = intmat(ie,4)
   mm = intmat(ie,5)
   nn = intmat(ie,6)

   xg1 = coord(ii,1)
   xg2 = coord(jj,1)
   xg3 = coord(kk,1)

   yg1 = coord(ii,2)
   yg2 = coord(jj,2)
   yg3 = coord(kk,2)

   area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

   b1 = (yg2 - yg3)
   b2 = (yg3 - yg1)
   b3 = (yg1 - yg2)

   c1 = (xg3 - xg2)
   c2 = (xg1 - xg3)
   c3 = (xg2 - xg1)

   b = 0.

   b(1,1) = b1
   b(1,2) = b2
   b(1,3) = b3

   b(2,4)  = c1
   b(2,5)  = c2
   b(2,6)  = c3

   b(3,1)  = c1
   b(3,2)  = c2
   b(3,3)  = c3
   b(3,4)  = b1
   b(3,5)  = b2
   b(3,6)  = b3

   b = b/area/2.
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
!--------------------------------
   p(ll) = 0.5*(p(jj) + p(kk))
   p(mm) = 0.5*(p(ii) + p(kk))
   p(nn) = 0.5*(p(jj) + p(ii))

   p(ll + npoi) = 0.5*(p(jj + npoi) + p(kk + npoi))
   p(mm + npoi) = 0.5*(p(ii + npoi) + p(kk + npoi))
   p(nn + npoi) = 0.5*(p(jj + npoi) + p(ii + npoi))
!--------------------------------

   tele(1)  = p(ii)
   tele(2)  = p(jj)
   tele(3)  = p(kk)
   tele(4)  = p(ii + npoi)
   tele(5)  = p(jj + npoi)
   tele(6)  = p(kk + npoi)

   st = 0.

   do j=1,6
      st(1) = st(1) + b(1,j)*tele(j)
         st(2) = st(2) + b(2,j)*tele(j)
         st(3) = st(3) + b(3,j)*tele(j)
   enddo

   tavg = (temp(ii) + temp(jj) + temp(kk))/3.

   st(1) = st(1) - lfa*(tavg-tref)
   st(2) = st(2) - lfa*(tavg-tref)

   sxxe = c11*st(1) + c12*st(2)
   syye = c21*st(1) + c22*st(2)
   sxye = c33*st(3)

   sxx(ii) = sxx(ii) + sxxe
   sxx(jj) = sxx(jj) + sxxe
   sxx(kk) = sxx(kk) + sxxe

   syy(ii) = syy(ii) + syye
   syy(jj) = syy(jj) + syye
   syy(kk) = syy(kk) + syye

   sxy(ii) = sxy(ii) + sxye
   sxy(jj) = sxy(jj) + sxye
   sxy(kk) = sxy(kk) + sxye

   one(ii) = one(ii) + 1.
   one(jj) = one(jj) + 1.
   one(kk) = one(kk) + 1.

enddo

do ip=1,tnode
!   if (one(ip) == 0.) write(6,11) ip
!   11 format(' *** warning *** No stress contribution at node', i5)
   if (one(ip) == 0.) one(ip) = 1.
   sxx(ip) = sxx(ip) / one(ip)
   syy(ip) = syy(ip) / one(ip)
   sxy(ip) = sxy(ip) / one(ip)
enddo

do ie = 1,nelem

   ii = intmat(ie,1)
   jj = intmat(ie,2)
   kk = intmat(ie,3)
   ll = intmat(ie,4)
   mm = intmat(ie,5)
   nn = intmat(ie,6)

   sxx(ll) = 0.5*(sxx(jj) + sxx(kk))
   syy(ll) = 0.5*(syy(jj) + syy(kk))
   sxy(ll) = 0.5*(sxy(jj) + sxy(kk))

   sxx(mm) = 0.5*(sxx(ii) + sxx(kk))
   syy(mm) = 0.5*(syy(ii) + syy(kk))
```

```
   sxy(mm) = 0.5*(sxy(ii) + sxy(kk))

   sxx(nn) = 0.5*(sxx(jj) + sxx(ii))
   syy(nn) = 0.5*(syy(jj) + syy(ii))
   sxy(nn) = 0.5*(sxy(jj) + sxy(ii))

enddo

END SUBROUTINE STRESS

!============================================================

END MODULE SOLID

!-------------------------------------------------------------------

PROGRAM SOLID_STRESS

use SOLID

IMPLICIT NONE

CALL MAIN()

stop

END PROGRAM SOLID_STRESS

!-------------------------------------------------------------------
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
Module solve

implicit none
contains

!
! Subroutine preconditioned conjugate gradient method
!

subroutine unsympcg(a, b, x, n)

implicit none

integer(4)                    :: maxit, iter, count
integer(4)                    ::     i,    j,     n
real(8)                       ::   del, dnew,   tol, bottom
real(8)                       :: alpha, dold,  beta,  check, thresh
real(8), dimension(n,n)       ::     a
real(8), dimension(n)         ::     q, r, d, pre, s, x, b, ax, atb

integer(4), allocatable, dimension(:)  :: ija, ijat, ijata
real(8),    allocatable, dimension(:)  ::  sa,  sat,  sata

  iter = 1
   tol = 1.d-6
 maxit = 50000
thresh = 1.e-10

count = 1000000

write(6,*) count

allocate(  sa(count),   ija(count))
allocate( sat(count),  ijat(count))
allocate(sata(count), ijata(count))

!-----------------------------------------------
! Convert square matrix into row-indexed sparse
!-----------------------------------------------
call sprsin( a,n,n,thresh,count, sa, ija)
call sprsint(a,n,n,thresh,count,sat,ijat)

!--------------
! Compute At*A
!--------------
call sprstm(sat,ijat,sat,ijat,sata,ijata,thresh,count)

!--------------
! Compute At*b
!--------------
call sprsax(sat,ijat,b,atb,n,count)

!-------------------------------------------------------------
! Construct precondition matrix P (but this will find P inverse)
!-------------------------------------------------------------
do i = 1,n
   pre(i) = 1./abs(sata(i))
end do

!---------
! Find Ro
!---------
call sprsax(sata,ijata,x,ax,n,count)

do i = 1,n
   r(i) = atb(i) - ax(i)
end do

!---------
! Find Do
!---------
do i = 1,n
   d(i) = pre(i)*r(i)
end do
```

```
!------------
! Find D-New
!------------
dnew = 0.
do i = 1,n
   dnew = dnew + r(i)*d(i)
end do

del = dnew

do

if(iter >= maxit.OR.dnew <= (tol*tol*del)) exit

!-------------
! Find Q(i+1)
!-------------

call sprsax(sata,ijata,d,q,n,count)

!------------
! Find Alpha
!------------
bottom = 0.
do i = 1,n
   bottom = bottom + d(i)*q(i)
end do

alpha = dnew/bottom

do i = 1,n
   x(i) = x(i) + alpha*d(i)
end do

!-------------
! Find R(i+1)
!-------------
check = mod(iter,50)

if(check == 0.) then

call sprsax(sata,ijata,x,ax,n,count)

do i = 1,n
   r(i) = atb(i) - ax(i)
end do

else

   do i = 1,n
      r(i) = r(i) - alpha*q(i)
   end do

endif

!-------------
! Find S(i+1)
!-------------
do i = 1,n
   s(i) = pre(i)*r(i)
end do

!-----------
! Find beta
!-----------
dold = dnew
dnew = 0.

do i = 1,n
   dnew = dnew + r(i)*s(i)
end do

beta = dnew/dold

do i = 1,n
   d(i) = s(i) + beta*d(i)
end do
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
iter = iter + 1

end do

end subroutine unsympcg

!-----------------------------------------------------------------

subroutine sympcg(a, b, x, n)

implicit none

integer(4)                    :: maxit, iter, count
integer(4)                    ::     i,    j,     n
real(8)                       ::   del, dnew,   tol, bottom
real(8)                       :: alpha, dold,  beta,  check, thresh
real(8), dimension(n,n)       ::     a
real(8), dimension(n)         ::     q, r, d, pre, s, x, b, ax

integer(4), allocatable, dimension(:)  :: ija
real(8),    allocatable, dimension(:)  :: sa

 iter = 1
  tol = 1.d-6
maxit = 5000
thresh = 1.e-10

count = 10000000

allocate(sa(count), ija(count))

!-----------------------------------------------------------------
! Construct precondition matrix P (but this will find P inverse)
!-----------------------------------------------------------------
do i = 1,n
   pre(i) = 1./abs(a(i,i))
end do

!-----------------------------------------------
! Convert square matrix into row-indexed sparse
!-----------------------------------------------
call sprsin(a,n,n,thresh,count,sa,ija)

!---------
! Find Ro
!---------

call sprsax(sa,ija,x,ax,n,count)

do i = 1,n
   r(i) = b(i) - ax(i)
end do

!---------
! Find Do
!---------
do i = 1,n
   d(i) = pre(i)*r(i)
end do

!------------
! Find D-New
!------------
dnew = 0.
do i = 1,n
   dnew = dnew + r(i)*d(i)
end do

del = dnew

do

if(iter >= maxit.OR.dnew <= (tol*tol*del)) exit
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
!-------------
! Find Q(i+1)
!-------------

call sprsax(sa,ija,d,q,n,count)

!------------
! Find Alpha
!------------
bottom = 0.
do i = 1,n
   bottom = bottom + d(i)*q(i)
end do

alpha = dnew/bottom

do i = 1,n
   x(i) = x(i) + alpha*d(i)
end do

!-------------
! Find R(i+1)
!-------------
check = mod(iter,50)

if(check == 0.) then

call sprsax(sa,ija,x,ax,n,count)

do i = 1,n
   r(i) = b(i) - ax(i)
end do

else

   do i = 1,n
      r(i) = r(i) - alpha*q(i)
   end do

endif

!-------------
! Find S(i+1)
!-------------
do i = 1,n
   s(i) = pre(i)*r(i)
end do

!-----------
! Find beta
!-----------
dold = dnew
dnew = 0.

do i = 1,n
   dnew = dnew + r(i)*s(i)
end do

beta = dnew/dold

do i = 1,n
   d(i) = s(i) + beta*d(i)
end do

iter = iter + 1

end do

end subroutine sympcg

!---------------------------------------------------------------
```

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
subroutine sprsin(a,n,np,thresh,nmax,sa,ija)

implicit none

integer(4)                    :: n, nmax, np
integer(4)                    :: i, j, k
integer(4), dimension(nmax)   :: ija

real(8)                       :: thresh
real(8), dimension(np,np)     :: a
real(8), dimension(nmax)      :: sa

do j = 1,n
   sa(j) = a(j,j)
enddo
ija(1) = n+2
k = n+1
do i = 1,n
   do j = 1,n
      if (abs(a(i,j)) >= thresh) then
              if (i /= j) then
                      k = k+1
                          if (k > nmax) then

                              write(6,*) k, nmax !, 'nmax too small in sprsin'

                                  pause 'nmax too small in sprsin'


                          endif
                          sa(k) = a(i,j)
                          ija(k) = j
                endif
         endif
   enddo
   ija(i+1) = k+1
enddo

END subroutine sprsin

!-----------------------------------------------------------------

subroutine sprsax(sa,ija,x,b,n,nmax)

!
! Multiply a matrix in sparse storage by a vector x(1:n)
! and the result is a vector b(1:n)
!

implicit none

integer(4)                    :: n, nmax, i, k
integer(4), dimension(nmax)   :: ija

real(8), dimension(n)         :: b, x
real(8), dimension(nmax)      :: sa

if (ija(1) /= n+2) pause 'mismatched vector and matrix in sprsax'
do i = 1,n
   b(i) = sa(i) * x(i)
   do k = ija(i),ija(i+1)-1
      b(i) = b(i) + sa(k) * x(ija(k))
   enddo
enddo

END subroutine sprsax

!-----------------------------------------------------------------

subroutine sprstm(sa,ija,sb,ijb,sc,ijc,thresh,nmax)
!
! Multiply At*A
!
! Input for sa must be At
! Input for sb must be At
! output of sc will be At*A
!
```

```
implicit none

integer(4)                   :: n, nmax
integer(4)                   :: i,ijma,ijmb,j,k,ma,mb,mbb
integer(4), dimension(nmax)  :: ija, ijb, ijc
real(8)   , dimension(nmax)  ::  sa,  sb,  sc
real(8)                      :: sum, thresh

if(ija(1) /= ijb(1)) pause 'sprstm sizes do not match'
k = ija(1)
ijc(1) = k
do i = 1,ija(1)-2
   do j = 1,ijb(1)-2
      if(i==j) then
         sum = sa(i)*sb(j)
      else
         sum = 0.d0
      endif
      mb = ijb(j)
      do ma = ija(i),ija(i+1)-1
         ijma = ija(ma)
         if(ijma == j) then
            sum = sum + sa(ma)*sb(j)
         else
2           if(mb < ijb(j+1)) then
               ijmb = ijb(mb)
               if(ijmb == i) then
                  sum = sum + sa(i)*sb(mb)
                  mb = mb + 1
                  goto 2
               else if(ijmb < ijma) then
                  mb = mb + 1
                  goto 2
               else if(ijmb == ijma) then
                  sum = sum + sa(ma)*sb(mb)
                  mb = mb + 1
                  goto 2
               endif
            endif
         endif
      enddo

      do mbb = mb,ijb(j+1)-1
         if(ijb(mbb) == i) then
            sum = sum + sa(i)*sb(mbb)
         endif
      enddo

      if(i == j) then
         sc(i) = sum
      else if(abs(sum) > thresh) then
          if(k > nmax) pause 'sprstm: nmax to small'
          sc(k) = sum
          ijc(k) = j
          k = k + 1
      endif
   enddo
   ijc(i+1) = k
enddo

end subroutine sprstm

!------------------------------------------------------------------

subroutine sprsint(a,n,np,thresh,nmax,sa,ija)

implicit none

integer(4)                   :: n, nmax, np
integer(4)                   :: i, j, k
integer(4), dimension(nmax)  :: ija

real(8)                      :: thresh
real(8), dimension(np,np)    :: a
real(8), dimension(nmax)     :: sa

do j = 1,n
```

```
   sa(j) = a(j,j)
enddo
ija(1) = n+2
k = n+1
do j = 1,n
   do i = 1,n
      if (abs(a(i,j)) >= thresh) then
              if (i /= j) then
                     k = k+1
                         if (k > nmax) pause 'nmax too small in sprsin'
                         sa(k) = a(i,j)
                         ija(k) = i
                  endif
         endif
   enddo
   ija(j+1) = k+1
enddo

END subroutine sprsint

!---------------------------------------------------------------

end module solve
```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค.
รายละเอียดของเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาวิเคราะห์ความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

$$\underset{(12\times12)}{[K]}\ \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(12\times1)}{\{F_0\}} + \underset{(12\times1)}{\{F_T\}} \tag{4.42}$$

โดยที่

$$\underset{(12\times12)}{[K]} = \int_{\Omega} \underset{(12\times3)}{[B]}^{T} \underset{(3\times3)}{[C]} \underset{(3\times12)}{[B]}\, d\Omega \tag{4.43}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_0\}} = \int_{\Omega} \underset{(12\times3)}{[B]}^{T} \underset{(3\times3)}{[C]} \underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_0\}}\, d\Omega \tag{4.44}$$

$$\underset{(12\times1)}{\{F_T\}} = \int_{\Gamma} \underset{(12\times3)}{[N]}^{T} \underset{(3\times1)}{\{F\}}\, d\Gamma \tag{4.45}$$

ซึ่งรายละเอียดของเมตริกซ์ $[K]$ มีดังนี้

กำหนดเมตริกซ์ $[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$

$$K_{1,1} = C_{11}\frac{b_1^2}{4A} + C_{33}\frac{c_1^2}{4A} \qquad K_{1,2} = C_{12}\frac{b_1c_1}{4A} + C_{33}\frac{b_1c_1}{4A}$$

$$K_{2,2} = C_{22}\frac{c_1^2}{4A} + C_{33}\frac{x_1^2}{4A} \qquad K_{1,3} = C_{11}\frac{b_1b_2}{4A} + C_{33}\frac{c_1c_2}{4A}$$

$$K_{3,3} = C_{11}\frac{b_2^2}{4A} + C_{33}\frac{c_2^2}{4A} \qquad K_{1,4} = C_{12}\frac{b_1c_2}{4A} + C_{33}\frac{b_2c_1}{4A}$$

$$K_{4,4} = C_{22}\frac{c_2^2}{4A} + C_{33}\frac{b_2^2}{4A} \qquad K_{1,5} = C_{11}\frac{b_1b_3}{4A} + C_{33}\frac{c_1c_3}{4A}$$

$$K_{5,5} = C_{11}\frac{b_3^2}{4A} + C_{33}\frac{c_3^2}{4A} \qquad K_{1,6} = C_{12}\frac{b_1c_3}{4A} + C_{33}\frac{b_3c_1}{4A}$$

$$K_{6,6} = C_{22}\frac{c_3^2}{4A} + C_{33}\frac{b_3^2}{4A} \qquad K_{2,3} = C_{21}\frac{b_2c_1}{4A} + C_{33}\frac{b_1c_2}{4A}$$

$$K_{2,4} = C_{22}\frac{c_1c_2}{4A} + C_{33}\frac{b_1b_2}{4A}$$

$$K_{2,5} = C_{21}\frac{b_3c_1}{4A} + C_{33}\frac{b_1c_3}{4A}$$

$$K_{2,6} = C_{22}\frac{c_1c_3}{4A} + C_{33}\frac{b_1b_3}{4A}$$

$$K_{3,4} = C_{12}\frac{b_2c_2}{4A} + C_{33}\frac{b_2c_2}{4A}$$

$$K_{3,5} = C_{22}\frac{b_2b_3}{4A} + C_{33}\frac{c_2c_3}{4A}$$

$$K_{3,6} = C_{12}\frac{b_2c_3}{4A} + C_{33}\frac{b_3c_2}{4A}$$

$$K_{4,5} = C_{21}\frac{b_3c_2}{4A} + C_{33}\frac{b_2c_3}{4A}$$

$$K_{4,6} = C_{22}\frac{c_2c_3}{4A} + C_{33}\frac{b_2b_3}{4A}$$

$$K_{5,6} = C_{12}\frac{b_3c_3}{4A} + C_{33}\frac{b_3c_3}{4A}$$

$$K_{2,1} = K_{1,2}$$

$$K_{3,1} = K_{1,3}$$

$$K_{4,1} = K_{1,4}$$

$$K_{5,1} = K_{1,5}$$

$$K_{6,1} = K_{1,6}$$

$$K_{3,2} = K_{2,3}$$

$$K_{4,2} = K_{2,4}$$

$$K_{5,2} = K_{2,5}$$

$$K_{6,2} = K_{2,6}$$

$$K_{4,3} = K_{3,4}$$

$$K_{5,3} = K_{3,5}$$

$$K_{6,3} = K_{3,6}$$

$$K_{5,4} = K_{4,5}$$

$$K_{6,4} = K_{4,6}$$

$$K_{6,5} = K_{5,6}$$

$$K_{7,7} = \frac{2}{3A}C_{11}\left[b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2\right] + \frac{2}{3A}C_{33}\left[c_2^2 + c_2c_3 + c_3^2\right]$$

$$K_{8,8} = \frac{2}{3A}C_{22}\left[c_2^2 + c_2c_3 + c_3^2\right] + \frac{2}{3A}C_{33}\left[b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2\right]$$

$$K_{9,9} = \frac{2}{3A}C_{11}\left[b_1^2 + b_1b_3 + b_3^2\right] + \frac{2}{3A}C_{33}\left[c_1^2 + c_1c_3 + c_3^2\right]$$

$$K_{10,10} = \frac{2}{3A}C_{22}\left[c_1^2 + c_1c_3 + c_3^2\right] + \frac{2}{3A}C_{33}\left[b_1^2 + b_1b_3 + b_3^2\right]$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$K_{11,11} = \frac{2}{3A} C_{11}\left[b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2\right] + \frac{2}{3A} C_{33}\left[c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2\right]$$

$$K_{12,12} = \frac{2}{3A} C_{22}\left[c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2\right] + \frac{2}{3A} C_{33}\left[b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2\right]$$

$$K_{7,8} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[2b_2 c_2 + b_2 c_3 + b_3 c_2 + 2b_3 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_2 c_2 + b_2 c_3 + b_3 c_2 + 2b_3 c_3\right]$$

$$K_{7,9} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[2b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_3 b_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_3 c_3\right]$$

$$K_{7,10} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[2b_2 c_1 + b_2 c_3 + b_3 c_1 + b_3 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_1 c_2 + b_1 c_3 + b_3 c_2 + b_3 c_3\right]$$

$$K_{7,11} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + b_2 b_2 + b_2 b_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[c_1 c_2 + 2c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_2 c_3\right]$$

$$K_{7,12} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[b_2 c_1 + b_2 c_2 + 2b_3 c_1 + b_3 c_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1 c_2 + 2b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_2 c_3\right]$$

$$K_{8,9} = \frac{1}{3A} C_{21}\left[2b_1 c_2 + b_1 c_3 + b_3 c_2 + b_3 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_2 c_1 + b_2 c_3 + b_3 c_1 + b_3 c_3\right]$$

$$K_{8,10} = \frac{1}{3A} C_{22}\left[2c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_3 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_3 b_3\right]$$

$$K_{8,11} = \frac{1}{3A} C_{21}\left[b_1 c_2 + 2b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_2 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_2 c_1 + b_2 c_2 + 2b_3 c_1 + b_3 c_2\right]$$

$$K_{8,12} = \frac{1}{3A} C_{22}\left[c_1 c_2 + 2c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_2 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + b_2 b_2 + b_2 b_3\right]$$

$$K_{9,10} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[2b_1 c_1 + b_1 c_3 + b_3 c_1 + 2b_3 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_1 c_1 + b_1 c_3 + b_3 c_1 + 2b_3 c_3\right]$$

$$K_{9,11} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[b_1 b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + 2b_2 b_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[c_1 c_1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + 2c_2 c_3\right]$$

$$K_{9,12} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_3 c_1 + 2b_3 c_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1 c_1 + b_1 c_3 + b_2 c_1 + 2b_2 c_3\right]$$

$$K_{10,11} = \frac{1}{3A} C_{21}\left[b_1 c_1 + b_1 c_3 + b_2 c_1 + 2b_2 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_3 c_1 + 2b_3 c_2\right]$$

$$K_{10,12} = \frac{1}{3A} C_{22}\left[c_1 c_1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + 2c_2 c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1 b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + 2b_2 b_3\right]$$

$$K_{11,12} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[2b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + 2b_2c_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[2b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + 2b_2c_2\right]$$

$K_{8,7} = K_{7,8}$

$K_{9,7} = K_{7,9}$

$K_{10,7} = K_{7,10}$

$K_{11,7} = K_{7,11}$

$K_{12,7} = K_{7,12}$

$K_{9,8} = K_{8,9}$

$K_{10,8} = K_{8,10}$

$K_{11,8} = K_{8,11}$

$K_{12,8} = K_{8,12}$

$K_{10,9} = K_{9,10}$

$K_{11,9} = K_{9,11}$

$K_{12,9} = K_{9,12}$

$K_{11,10} = K_{10,11}$

$K_{12,10} = K_{10,12}$

$K_{12,11} = K_{11,12}$

$K_{1,7} = 0$

$K_{1,8} = 0$

$K_{1,9} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[b_1b_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[c_1c_3\right]$

$K_{1,10} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[b_1c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_3c_1\right]$

$K_{1,11} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[b_1b_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[c_1c_2\right]$

$K_{1,12} = \frac{1}{3A} C_{12}\left[b_1c_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_2c_1\right]$

$K_{3,7} = \frac{1}{3A} C_{11}\left[b_2b_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[c_2c_3\right]$

$K_{2,7} = 0$

$K_{2,8} = 0$

$K_{2,9} = \frac{1}{3A} C_{21}\left[b_3c_1\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1c_3\right]$

$K_{2,10} = \frac{1}{3A} C_{22}\left[c_1c_3\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1b_3\right]$

$K_{2,11} = \frac{1}{3A} C_{21}\left[b_2c_1\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1c_2\right]$

$K_{2,12} = \frac{1}{3A} C_{22}\left[c_1c_2\right] + \frac{1}{3A} C_{33}\left[b_1b_2\right]$

$$K_{3,8} = \frac{1}{3A} C_{12}[b_2 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_3 c_2]$$

$$K_{4,8} = \frac{1}{3A} C_{22}[c_2 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_2 b_3]$$

$$K_{3,9} = 0$$

$$K_{4,9} = 0$$

$$K_{3,10} = 0$$

$$K_{4,10} = 0$$

$$K_{3,11} = \frac{1}{3A} C_{11}[b_1 b_2] + \frac{1}{3A} C_{33}[c_1 c_2]$$

$$K_{4,11} = \frac{1}{3A} C_{21}[b_1 c_2] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_2 c_1]$$

$$K_{3,12} = \frac{1}{3A} C_{12}[b_2 c_1] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_1 c_2]$$

$$K_{4,12} = \frac{1}{3A} C_{22}[c_1 c_2] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_1 b_2]$$

$$K_{4,7} = \frac{1}{3A} C_{21}[b_3 c_2] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_2 c_3]$$

$$K_{5,7} = \frac{1}{3A} C_{11}[b_2 b_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[c_2 c_3]$$

$$K_{6,7} = \frac{1}{3A} C_{21}[b_2 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_3 c_2]$$

$$K_{5,8} = \frac{1}{3A} C_{12}[b_3 c_2] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_2 c_3]$$

$$K_{6,8} = \frac{1}{3A} C_{22}[c_2 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_2 b_3]$$

$$K_{5,9} = \frac{1}{3A} C_{11}[b_1 b_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[c_1 c_3]$$

$$K_{6,9} = \frac{1}{3A} C_{21}[b_1 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_3 c_1]$$

$$K_{5,10} = \frac{1}{3A} C_{12}[b_3 c_1] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_1 c_3]$$

$$K_{6,10} = \frac{1}{3A} C_{22}[c_1 c_3] + \frac{1}{3A} C_{33}[b_1 b_3]$$

$$K_{5,11} = 0$$

$$K_{6,11} = 0$$

$$K_{5,12} = 0$$

$$K_{6,12} = 0$$

$$K_{7,1} = K_{1,7}$$

$$K_{12,1} = K_{1,12}$$

$$K_{8,1} = K_{1,8}$$

$$K_{7,2} = K_{2,7}$$

$$K_{9,1} = K_{1,9}$$

$$K_{8,2} = K_{2,8}$$

$$K_{10,1} = K_{1,10}$$

$$K_{9,2} = K_{2,9}$$

$$K_{11,1} = K_{1,11}$$

$$K_{10,2} = K_{2,10}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$K_{11,2} = K_{2,11}$ $K_{12,4} = K_{4,12}$

$K_{12,2} = K_{2,12}$ $K_{7,5} = K_{5,7}$

$K_{7,3} = K_{3,7}$ $K_{8,5} = K_{5,8}$

$K_{8,3} = K_{3,8}$ $K_{9,5} = K_{5,9}$

$K_{9,3} = K_{3,9}$ $K_{10,5} = K_{5,10}$

$K_{10,3} = K_{3,10}$ $K_{11,5} = K_{5,11}$

$K_{11,3} = K_{3,11}$ $K_{12,5} = K_{5,12}$

$K_{12,3} = K_{3,12}$ $K_{7,6} = K_{6,7}$

$K_{7,4} = K_{4,7}$ $K_{8,6} = K_{6,8}$

$K_{8,4} = K_{4,8}$ $K_{9,6} = K_{6,9}$

$K_{9,4} = K_{4,9}$ $K_{10,6} = K_{6,10}$

$K_{10,4} = K_{4,10}$ $K_{11,6} = K_{6,11}$

$K_{11,4} = K_{4,11}$ $K_{12,6} = K_{6,12}$

ซึ่งรายละเอียดของเมตริกซ์ $[F_0]$ มีดังนี้

$$[F_0] = \int_{\Omega} [B]^T [C]\{\alpha\}([N]\{T\} - T_0)\, d\Omega = \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{T_0}\}$$

ถ้ากำหนดให้ $\underset{(12\times1)}{\{\varepsilon_T\}} = \underset{(12\times6)}{[E]}\ \underset{(6\times1)}{\{T\}} = \underbrace{\int_{\Omega} [B]^T [C]\{\alpha\}[N]\, d\Omega}_{[E]}\ \{T\}$

$$\underset{(12\times1)}{\{\varepsilon_{T_0}\}} = \underset{(12\times1)}{\{F\}}\ T_0 = \underbrace{\int_{\Omega} [B]^T [C]\{\alpha\} d\Omega}_{[F]}\ T_0$$

$$F_1 = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_1$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_1$$

$$F_3 = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_2$$

$$F_4 = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_2$$

$$F_5 = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_3$$

$$F_6 = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_3$$

$$F_7 = \frac{2\alpha}{3}(C_{11} + C_{12})(b_2 + b_3)$$

$$F_8 = \frac{2\alpha}{3}(C_{21} + C_{22})(c_2 + c_3)$$

$$F_9 = \frac{2\alpha}{3}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_3)$$

$$F_{10} = \frac{2\alpha}{3}(C_{21} + C_{22})(c_1 + c_3)$$

$$F_{11} = \frac{2\alpha}{3}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_2)$$

$$F_{12} = \frac{2\alpha}{3}(C_{21} + C_{22})(c_1 + c_2)$$

$$E_{1,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_1$$

$$E_{1,2} = 0$$

$$E_{1,3} = 0$$

$$E_{1,4} = \frac{-\alpha}{30}(C_{11} + C_{12})b_1$$

$$E_{1,5} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_1$$

$$E_{1,6} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_1$$

$$E_{2,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_1$$

$$E_{2,2} = 0$$

$$E_{2,3} = 0$$

$$E_{2,4} = \frac{-\alpha}{30}(C_{21} + C_{22})c_1$$

$$E_{2,5} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_1$$

$$E_{2,6} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_1$$

$$E_{3,1} = 0$$

$$E_{3,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_2$$

$$E_{3,3} = 0$$

$$E_{3,4} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_2$$

$$E_{3,5} = \frac{-\alpha}{30}(C_{11} + C_{12})b_2$$

$$E_{3,6} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_2$$

$$E_{4,1} = 0$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$E_{4,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_2$$

$$E_{4,3} = 0$$

$$E_{4,4} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_2$$

$$E_{4,5} = \frac{-\alpha}{30}(C_{21} + C_{22})c_2$$

$$E_{4,6} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_2$$

$$E_{5,1} = 0$$

$$E_{5,2} = 0$$

$$E_{5,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})b_3$$

$$E_{5,4} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_3$$

$$E_{5,5} = \frac{\alpha}{10}(C_{11} + C_{12})b_3$$

$$E_{5,6} = \frac{-\alpha}{30}(C_{11} + C_{12})b_3$$

$$E_{6,1} = 0$$

$$E_{6,2} = 0$$

$$E_{6,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{21} + C_{22})c_3$$

$$E_{6,4} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_3$$

$$E_{6,5} = \frac{\alpha}{10}(C_{21} + C_{22})c_3$$

$$E_{6,6} = \frac{-\alpha}{30}(C_{21} + C_{22})c_3$$

$$E_{7,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_2 + b_3)$$

$$E_{7,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_2 + 2b_3)$$

$$E_{7,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2b_2 + b_3)$$

$$E_{7,4} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_2 + b_3)$$

$$E_{7,5} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2b_2 + b_3)$$

$$E_{7,6} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_2 + 2b_3)$$

$$E_{8,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_2 + c_3)$$

$$E_{8,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_2 + 2c_3)$$

$$E_{8,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2c_2 + c_3)$$

$$E_{8,4} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_2 + c_3)$$

$$E_{8,5} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2c_2 + c_3)$$

$$E_{8,6} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_2 + 2c_3)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$E_{9,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_1 + 2b_3) \qquad E_{10,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_1 + 2c_3)$$

$$E_{9,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_3) \qquad E_{10,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_1 + c_3)$$

$$E_{9,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2b_1 + b_3) \qquad E_{10,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2c_1 + c_3)$$

$$E_{9,4} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2b_1 + b_3) \qquad E_{10,4} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2c_1 + c_3)$$

$$E_{9,5} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_3) \qquad E_{10,5} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_1 + c_3)$$

$$E_{9,6} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_1 + 2b_3) \qquad E_{10,6} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_1 + 2c_3)$$

$$E_{11,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_1 + 2b_2) \qquad E_{12,1} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_1 + 2c_2)$$

$$E_{11,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2b_1 + b_2) \qquad E_{12,2} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(2c_1 + c_2)$$

$$E_{11,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_2) \qquad E_{12,3} = \frac{\alpha}{6}(C_{11} + C_{12})(c_1 + c_2)$$

$$E_{11,4} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2b_1 + b_2) \qquad E_{12,4} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(2c_1 + c_2)$$

$$E_{11,5} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_1 + 2b_2) \qquad E_{12,5} = \frac{2\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_1 + 2c_2)$$

$$E_{11,6} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(b_1 + b_2) \qquad E_{12,6} = \frac{4\alpha}{15}(C_{11} + C_{12})(c_1 + c_2)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนิพนธ์ วรรณโสภาคย์ เกิดเมื่อวันที่ 31 เดือนพฤษภาคม พุทธศักราช 2518 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2539 สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2546

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย