บทที่ 5

ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชัน

ระบบสมการของค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าดังแสดงในสมการ (4.31) ในบทที่ 4 นั้นเป็นระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งตามปกติแล้วการหาผลลัพธ์ของระบบสมการดังกล่าวสามารถกระทำได้โดยการใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) แต่ระเบียบวิธีนี้ก็มีข้อเสียคือ ใช้เวลาในการหาผลลัพธ์ค่อนข้างมาก ดังนั้นในบทนี้จึงนำเสนอระเบียบวิธีที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นอีกวิธีหนึ่งคือ ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชัน (Conjugate gradient method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ใช้เวลาในการหาผลลัพธ์น้อยกว่าระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดยเริ่มจากการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์ การหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด (Steepest descent method) ซึ่งเป็นวิธีการที่เป็นรากฐานของระเบียบวิธีอื่นที่ซับซ้อนมากขึ้น อันได้แก่ ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุค (Conjugate direction method) และระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชัน ตามลำดับ

5.1 การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์

ตามปกติฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้ [18]

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x + c \tag{5.1}$$

โดย x แทนเวคเตอร์ของตัวไม่ทราบค่า

A แทนเมตริกซ์จัตุรัสของค่าคงที่

b แทนเวคเตอร์ของค่าคงที่

c แทนค่าคงที่

จากสมการ (5.1) พบว่าค่าของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์จะเป็นสเกลาร์เสมอ ซึ่งความลาดชัน (Gradient) ของฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูปแบบดังสมการ

$$f'(x) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

เมื่อแทนสมการ (5.1) ลงในสมการ (5.2) จะได้

$$f'(x) = \frac{1}{2}A^{T}x + \frac{1}{2}Ax - b \tag{5.3}$$

ถ้าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร สมการ (5.3) จะลดรูปมาเป็น

$$f'(x) = Ax - b \tag{5.4}$$

การกำหนดให้ความลาดชันมีค่าเป็นศูนย์ จะก่อให้เกิดระบบสมการเชิงเส้นออกมาดังสมการ

$$Ax = b \tag{5.5}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (5.5) ก็คือ จุดวิกฤติ (Critical point) ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งอาจจะให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้ ถ้าเมตริกซ์ A มีคุณสมบัตินิยามเชิงบวก (Positive-definite) [18] กล่าวคือ สำหรับเวคเตอร์ x ใด ๆที่ไม่เป็นศูนย์

$$x^{T}Ax > 0 \tag{5.6}$$

จะได้ว่าผลลัพธ์ของสมการ (5.5) เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้นถ้าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีคุณสมบัตินิยามเชิงบวก พื้นผิวที่ได้จากฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีรูปร่างเป็นพาราโบลอยด์หงายที่มีจุดต่ำสุดเพียงจุดเดียว และการหาผลลัพธ์ของสมการ (5.5) ก็คือ การหาจุดที่ให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

5.2 ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด

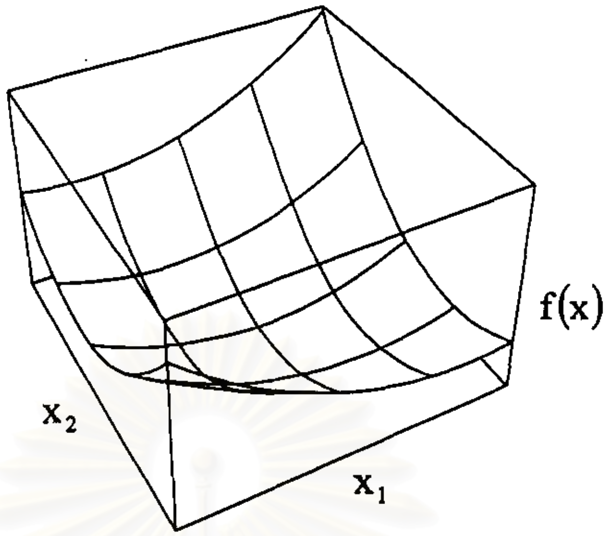
ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุดเป็นระเบียบวิธีที่เป็นรากฐานของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคและระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชัน ซึ่งง่ายต่อการทำความเข้าใจ ดังนั้นเพื่อให้เข้าใจหลักการอย่างชัดเจนก่อนที่จะกล่าวถึงอีก 2 ระเบียบวิธีในหัวข้อ 5.3 และ 5.4 จึงสมมุติตัวอย่างขึ้นมาประกอบการอธิบายดังต่อไปนี้
พิจารณาฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์ในสองมิติที่ A, b และ c มีค่าดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \tag{5.7a}$$

$$b = \begin{Bmatrix} 2 \\ -8 \end{Bmatrix} \tag{5.7b}$$

$$c = 0 \tag{5.7c}$$

หลังจากแทนสมการ (5.7a-c) ลงในสมการ (5.1) พบว่า พื้นผิวที่ได้จากฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.1 ดังนั้นการหาผลลัพธ์ของสมการ (5.5) ก็คือ การหาจุดที่ให้ค่าต่ำสุดของพื้นผิวในรูปที่ 5.1 นั่นเอง



รูปที่ 5.1 พื้นผิวของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์ในสองมิติ

ขั้นตอนแรกของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุดก็คือ เดาค่าของเวคเตอร์ x ที่เป็นผลลัพธ์ของสมการ (5.5) ซึ่งในที่นี้สมมุติว่าเป็น

$$x_{(0)} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

ขั้นตอนต่อมาเป็นการหาทิศทางที่ทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ลดลงเร็วที่สุดเมื่อเทียบจากจุดปลายของเวคเตอร์ $x_{(0)}$ ซึ่งทิศทางนั้นก็คือ ทิศทางที่ตรงข้ามกับทิศทางของความลาดชันของฟังก์ชัน $f(x_{(0)})$ [18] ดังแสดงในรูปที่ 5.2

ถ้ากำหนดให้เวคเตอร์ค่าตกค้าง $r_{(i)}$ หาได้จากสมการ

$$r_{(i)} = b - Ax_{(i)} = -f'(x_{(i)}) \tag{5.9}$$

โดย $i = 0,1,2,...$

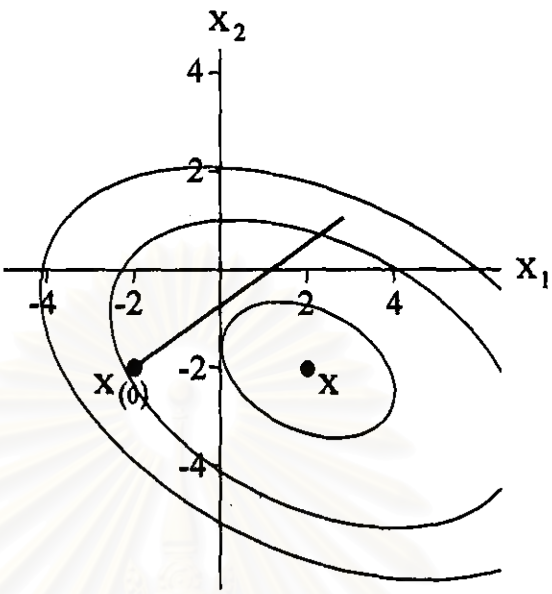
ดังนั้นทิศทางของเวคเตอร์ค่าตกค้าง $r_{(i)}$ จึงเป็นทิศทางที่ค่าของฟังก์ชัน $f(x_{(i)})$ ลดลงเร็วที่สุด

ขั้นตอนต่อมาก็คือ หาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าต่ำที่สุดในทิศทางของเวคเตอร์ค่าตกค้าง $r_{(0)}$ จากสมการ

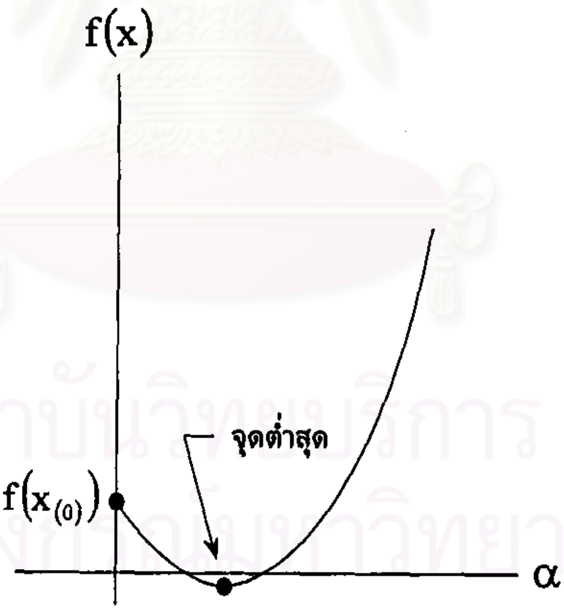
$$x_{(1)} = x_{(0)} + \alpha r_{(0)} \tag{5.10}$$

พิจารณาสมการ (5.10) พบว่า ถ้าทราบค่า α จะหาเวคเตอร์ $x_{(1)}$ได้ จากรูปที่ 5.2 เราทราบว่าเวคเตอร์ $x_{(1)}$ จะต้องมีจุดปลายซึ่งให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ ในทิศทางของเวคเตอร์ค่าตกค้าง $r_{(0)}$ อยู่บนเส้นทึบ เส้นทึบดังกล่าวนี้เกิดขึ้นจากการนำระนาบในแนวดิ่งที่ผ่านเวคเตอร์ค่าตกค้าง $r_{(0)}$ มาตัดกับพื้นผิวที่ได้จากฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งรอยตัดที่ได้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบล่า

หงายที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $f(x)$ กับ α ดังแสดงในรูปที่ 5.3 ค่า α ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าต่ำที่สุดจะถูกนำไปแทนในสมการ (5.10) เพื่อหาเวคเตอร์ $x_{(1)}$ ต่อไป



รูปที่ 5.2 การเริ่มต้นเดาผลลัพธ์ของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด



รูปที่ 5.3 รอยตัดของพื้นผิวของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์กับระนาบในแนวดิ่งและจุดต่ำสุดของรอยตัด

การหาค่า α กระทำได้โดยใช้หลักการหาค่าต่ำสุดกล่าวคือ

$$\frac{d}{dx} f(x_{(1)}) = 0 \tag{5.11}$$

โดยการใช้กฎลูกโซ่จะได้ว่า

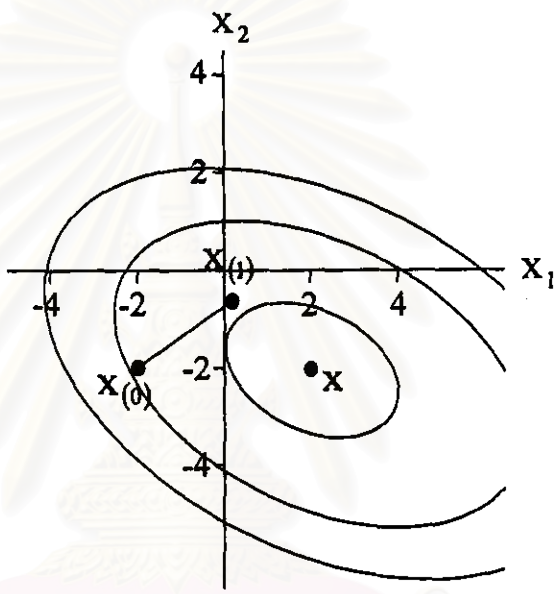
$$\frac{d}{dx}f\left(x_{(1)}\right) = f'\left(x_{(1)}\right)^T\frac{dx_{(1)}}{dx} = f'\left(x_{(1)}\right)^T r_{(0)} \tag{5.12}$$

แทนสมการ (5.12) ลงในสมการ (5.11) แล้วใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (5.9) จะได้

$$r_{(1)}^T r_{(0)} = 0 \tag{5.13}$$

แทนสมการ (5.9) และ (5.10) ลงในสมการ (5.13) แล้วจัดรูปใหม่จะได้ค่า α ดังสมการ

$$\alpha = \frac{r_{(0)}^T r_{(0)}}{r_{(0)}^T A r_{(0)}} \tag{5.14}$$



รูปที่ 5.4 จุดที่ให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองของเวคเตอร์ในทิศทางของเวคเตอร์ค่าตกค้าง ($x_{(1)}$)

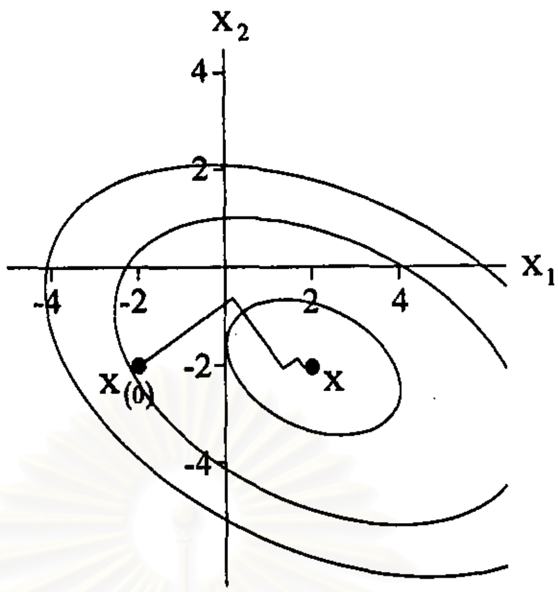
หลังจากแทนค่า α ในสมการ (5.14) ลงในสมการ (5.10) จะได้ตำแหน่งจุดปลายของเวคเตอร์ $x_{(1)}$ ดังแสดงในรูปที่ 5.4 เมื่อหาเวคเตอร์ $x_{(1)}$ ได้แล้วการคำนวณหาเวคเตอร์ $x_{(2)}$ ก็จะเป็นไปในลักษณะเดียวกัน ซึ่งสามารถเขียนเป็นขั้นตอนได้ดังนี้ [18]

$$r_{(i)} = b - Ax_{(i)} \tag{5.15a}$$

$$\alpha_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i)}^T A r_{(i)}} \tag{5.15b}$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} r_{(i)} \tag{5.15c}$$

การคำนวณตามสมการ (5.15a-c) จะดำเนินต่อไปเรื่อย ๆจนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้า (ขนาดของเวคเตอร์ค่าตกค้างมีค่าต่ำกว่าค่าที่กำหนด) ซึ่งเส้นทางการลู่เข้าของผลลัพธ์มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 การลู่เข้าของผลลัพธ์โดยระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด

ขั้นตอนการคำนวณในสมการ (5.15a-c) จะต้องทำการคูณเมตริกซ์ 2 ครั้งต่อการคำนวณหนึ่งรอบ ดังนั้นเพื่อลดจำนวนครั้งของการคูณเมตริกซ์ลง จึงดัดแปลงการคำนวณเวคเตอร์ค่าตกค้างให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} A r_{(i)} \qquad (5.16)$$

การนำระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุดไปประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นทั่วไปสามารถกระทำได้โดย ดัดแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$A^T A x = A^T b \qquad (5.17)$$

ระบบสมการดังแสดงในสมการ (5.17) จะมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีคุณสมบัตินิยามเชิงบวก ซึ่งสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยดัดแปลงสมการ (5.15a-c) และ (5.16) ให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$r_{(0)} = A^T b - A^T A x_{(0)} \qquad (5.18a)$$

$$\alpha_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i)}^T A^T A r_{(i)}} \qquad (5.18b)$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} r_{(i)} \qquad (5.18c)$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} A^T A r_{(i)} \qquad (5.18d)$$

5.3 ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุค

จากรูปที่ 5.3 จะเห็นได้ว่าการลู่เข้าของผลลัพธ์โดยระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุดยังไม่ดีนัก เนื่องจากทิศทางการลู่เข้าของผลลัพธ์จากการคำนวณในรอบที่ 1,3,5,... อยู่ในทิศทางเดียวกัน และตั้งฉากกับทิศทางการลู่เข้าของผลลัพธ์จากการคำนวณในรอบที่ 2,4,6,... เสมอ [18] ดังนั้นจึงต้องใช้จำนวนรอบในการคำนวณค่อนข้างมาก วิธีการที่ช่วยลดจำนวนรอบในการคำนวณก็คือ ทำการคำนวณในแต่ละทิศทางเพียงครั้งเดียวเท่านั้น แนวความคิดดังกล่าวก่อให้เกิดการพัฒนาระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคขึ้นมา ซึ่งสามารถหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้น n สมการได้โดยใช้การคำนวณเพียง n รอบเท่านั้น [18,19]

ในการหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคจำเป็นจะต้องทราบเวคเตอร์ทิศทางค้นหา (Search directions) ทั้งหมด n ทิศทางก่อน จึงทำการคำนวณได้ หลังจากทราบเวคเตอร์ทิศทางค้นหาทั้งหมดแล้ว การคำนวณหาผลลัพธ์ในแต่ละรอบจึงเป็นไปตามสมการ

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)} \quad , \left(i = 0,1,2,\ldots,n-1\right) \tag{5.19}$$

โดย $d_{(i)}$ แทนเวคเตอร์ทิศทางค้นหาลำดับที่ i

ในทำนองเดียวกันกับระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด เราสามารถหาค่า $\alpha_{(i)}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f\left(x_{(i)}\right)$ มีค่าต่ำสุดในทิศทางของ $d_{(i)}$ ออกมาได้ดังสมการ

$$\alpha_{(i)} = \frac{d_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \tag{5.20}$$

ปัญหาใหญ่ของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคก็คือ การหาเวคเตอร์ทิศทางค้นหาทั้ง n ทิศทาง แต่เนื่องจากการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f\left(x_{(i)}\right)$ ในทิศทางค้นหา $d_{(i)}$ สมมูลกับเงื่อนไขการเป็นสังยุค (Conjugate) กัน [18] ดังสมการ

$$d_{(i)}^T A d_{(j)} = 0 \tag{5.21}$$

ดังนั้นการหาเวคเตอร์ทิศทางค้นหาจึงกระทำได้โดยใช้ Gram-Schmidt Process [18] ดังนี้

$$d_{(i)} = u_i + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} d_{(j)} \tag{5.22}$$

โดย $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ แทนเซตของเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linearly independent) ต่อกัน

$$\beta_{ij} = -\frac{u_i^T A d_{(j)}}{d_{(j)}^T A d_{(j)}} \quad , \left(i > j \right) \tag{5.23}$$

ขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคจะเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับระเบียบวิธีการเคลื่อนลงมากที่สุด ซึ่งสามารถเขียนเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

$$r_{(0)} = b - Ax_{(0)} \tag{5.24a}$$

$$\alpha_{(i)} = \frac{d_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \tag{5.24b}$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)} \tag{5.24c}$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} A d_{(i)} \tag{5.24d}$$

อย่างไรก็ตามการหาเวคเตอร์ทิศทางค้นหาโดย Gram-Schmidt Process ก็ยังก่อให้เกิดความยากลำบากในการคำนวณตามมา เนื่องจากต้องการหน่วยความจำในการเก็บเวคเตอร์ทิศทางค้นหาทั้งหมด รวมทั้งยังใช้เวลาในการคำนวณเวคเตอร์ทิศทางค้นหามากตามไปด้วย ดังนั้นจึงไม่นิยมใช้ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นในทางปฏิบัติ จนกระทั่งได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชันขึ้นมา

5.4 ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชัน

ระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชันเป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่กล่าวถึงในหัวข้อ 5.3 [18,19] ซึ่งแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นได้โดยประดิษฐ์เวคเตอร์ทิศทางค้นหาจากเวคเตอร์ค่าตกค้าง นั่นคือกำหนดให้

$$u_i = r_{(i)} \tag{5.25}$$

เหตุผลสำคัญในการเลือกใช้เวคเตอร์ค่าตกค้างก็เพราะว่า เวคเตอร์ค่าตกค้างจะตั้งฉากกับเวคเตอร์ทิศทางค้นหาในการคำนวณรอบก่อนๆ [18] ดังเงื่อนไขตามสมการ

$$d_{(i)}^T r_{(j)} = 0 \ , \ (i < j) \tag{5.26}$$

เนื่องจากเวคเตอร์ทิศทางค้นหาประดิษฐ์ขึ้นมาจากเวคเตอร์ค่าตกค้าง ดังนั้นนอกจากเวคเตอร์ค่าตกค้างจะตั้งฉากกับเวคเตอร์ทิศทางค้นหาในการคำนวณรอบก่อนๆแล้ว ยังตั้งฉากกับเวคเตอร์ค่าตกค้างในรอบก่อนๆด้วย [18] ดังเงื่อนไขตามสมการ

$$r_{(i)}^T r_{(j)} = 0 \ , \ (i \neq j) \tag{5.27}$$

โดยการดัดแปลงสมการ (5.24d) เพื่อหาค่า $r_{(i)}^T A d_{(j)}$ แล้วนำไปแทนในสมการ (5.23) จะได้

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\alpha_{(i-1)}} \cdot \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i-1)}^T A d_{(i-1)}} \ , \ (i = j+1) \tag{5.28}$$

แทนค่า $\alpha_{(i-1)}$ จากสมการ (5.20) ลงในสมการ (5.28) จะได้

$$\beta_{i,i-1} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i-1)}^T r_{(i-1)}} \tag{5.29}$$

โดยการดัดแปลงสมการ (5.22) พบว่า

$$d_{(i)}^T r_{(i)} = u_i^T r_{(i)} = r_{(i)}^T r_{(i)} \tag{5.30}$$

ดังนั้นรูปแบบสุดท้ายของ $\beta_{i,i-1}$ คือ

$$\beta_{i,i-1} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i-1)}^T r_{(i-1)}} \tag{5.31}$$

เราสามารถนำกระบวนการคำนวณโดยระเบียบวิธีการเคลื่อนลงในทิศทางสังยุคที่สร้างจากความลาดชันมาเขียนรวมกันได้ดังนี้

$$d_{(0)} = r_{(0)} = b - Ax_{(0)} \tag{5.32a}$$

$$\alpha_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \tag{5.32b}$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)} \tag{5.32c}$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} A d_{(i)} \tag{5.32d}$$

$$\beta_{(i+1)} = \frac{r_{(i+1)}^T r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T r_{(i)}} \tag{5.32e}$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)} d_{(i)} \tag{5.32f}$$

โดย $\beta_{(i+1)}$ แทน $\beta_{i+1,i}$

ขั้นตอนการคำนวณดังแสดงในสมการ (5.32a-f) สามารถใช้ในการหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นได้ภายใน n รอบของการคำนวณ แต่การคำนวณโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์จะเกิดความคลาดเคลื่อน (Error) ขึ้นมาเสมอ ทำให้ต้องใช้จำนวนรอบในการคำนวณมากกว่า n รอบ [19] และขนาดของเวคเตอร์ค่าตกค้างจะไม่ลดลงจนเป็นศูนย์ ดังนั้นการคำนวณในทางปฏิบัติจึงต้องกำหนดเงื่อนไขในการหยุดการคำนวณและปรับปรุงขั้นตอนการคำนวณในสมการ (5.32a-f) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นโดยไม่เสียเวลามากเกินไป รายละเอียดของการกำหนดเงื่อนไขในการหยุดการคำนวณและการปรับปรุงขั้นตอนการคำนวณจะไม่นำมากล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้ (รายละเอียดเพิ่มเติมอยู่ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข 18 ถึง 20) แต่ได้ถูกนำมาใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 6