บทที่ 2

สมการพื้นฐานของการไหล

บทนี้เป็นการแสดงขั้นตอนของการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลแบบราบเรียบในสองมิติ ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) การอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentums) และการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีความสัมพันธ์กันแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่า (Unknowns) จำนวน 4 ตัว ได้แก่ ความเร็วในแนวแกน x ความเร็วในแนวแกน y อุณหภูมิ และความดัน นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมลงบนโดเมนของการไหล (Flow domain) ซึ่งจำเป็นจะต้องใช้ควบคู่กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังกล่าวในการแก้ปัญหาการไหลโดยทั่วไป

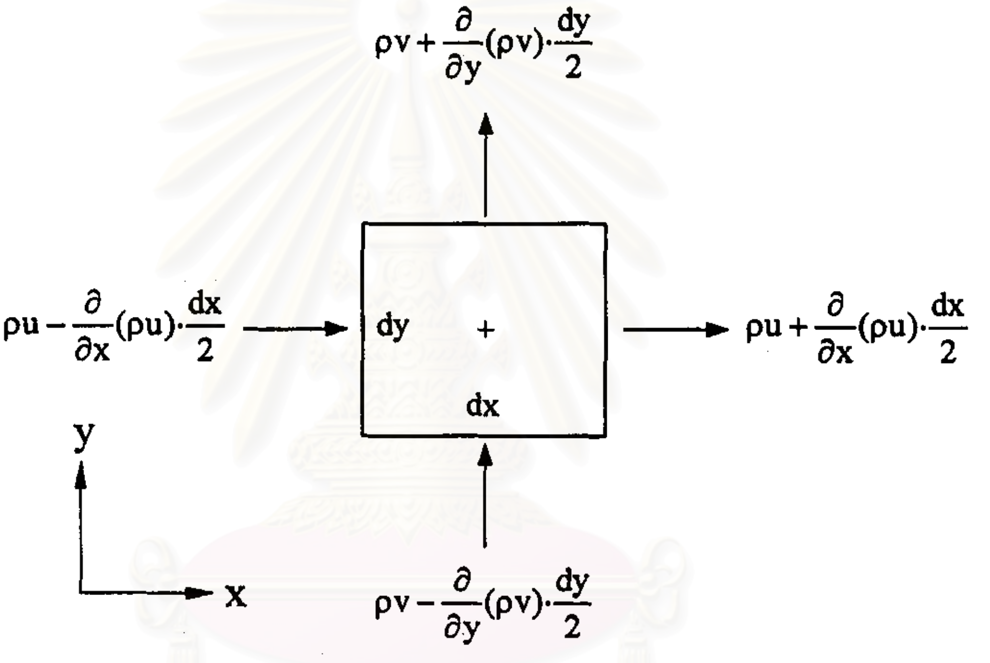
2.1 ความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับของไหล

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไป จำเป็นต้องสมมุติให้สสารที่กำลังพิจารณามีภาวะต่อเนื่อง (Continuum) โดยไม่มีช่องว่างอยู่ในสสารนั้น ทั้งนี้เพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้กฎต่าง ๆทางกลศาสตร์และเทอร์โมไดนามิคส์ได้สะดวก ดังนั้นคุณสมบัติของสสารที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์จะต้องเป็นฟังก์ชันจุด (Point function) ซึ่งเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องเทียบกับตำแหน่งและเวลา [9] และปริมาตรของสสารที่เล็กที่สุดที่นำมาวิเคราะห์ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ต้องมีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้ผลของทุกโมเลกุลรวมกัน สามารถเฉลี่ยให้ค่าคุณสมบัติของสสารที่สม่ำเสมอเหมือนกับไม่มีช่องว่างอยู่ในสสารได้ โดยทั่วไปสสารตามธรรมชาติสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ ของแข็ง (Solid) ซึ่งต้องการแรงภายนอก (External force) มากระทำเพื่อรักษาสภาพของการเสียรูป (Deformation) ให้คงอยู่ได้ และของไหล (Fluid) ซึ่งไม่ต้องการแรงภายนอกมากระทำเพื่อรักษาสภาพของการเสียรูป หรืออีกนัยหนึ่งคือ เมื่อมีแรงในแนวสัมผัส (Tangential force) มากระทำต่อของไหล ไม่ว่าจะมีขนาดเท่าไรก็ตาม ของไหลก็จะเกิดการเสียรูปอย่างต่อเนื่อง [9]

โดยทั่วไปเราอาจจำแนกประเภทของของไหล จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือน (Shear stress) ที่กระทำต่อของไหลกับอัตราการเสียรูป (Rate of deformation) ได้หลายประเภท แต่ของไหลที่จะนำมาทำการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นของไหลแบบนิวโตเนียน (Newtonian fluid) ประเภทเดียวเท่านั้น ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนที่กระทำต่อของไหลกับอัตราการเสียรูปเป็นแบบเชิงเส้น (Linear)

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลในสองมิติกระทำได้โดย นำกฎการอนุรักษ์มวลมาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุม (Control volume) ของของไหลที่มีความลึก 1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ความสมดุลของการไหลของมวลผ่านปริมาตรควบคุม

กฎการอนุรักษ์มวลกล่าวไว้ว่า มวลของสสารไม่มีการสูญหาย เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา จะกล่าวได้ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับอัตราการไหลสุทธิของมวลของของไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdy = \left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\cdot\frac{dx}{2}\right]dy + \left[\rho v - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\cdot\frac{dy}{2}\right]dx - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\cdot\frac{dx}{2}\right]dy - \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\cdot\frac{dy}{2}\right]dx \quad (2.1)$$

โดย ρ แทนความหนาแน่นของของไหล (Fluid density) u แทนความเร็วของของไหลในแนวแกน x

v แทนความเร็วของของไหลในแนวแกน y

สมการ (2.1) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{2.2}$$

ซึ่งเขียนในรูปแบบเวคเตอร์ได้ดังนี้ [10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \tag{2.3}$$

โดย

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{2.4}$$

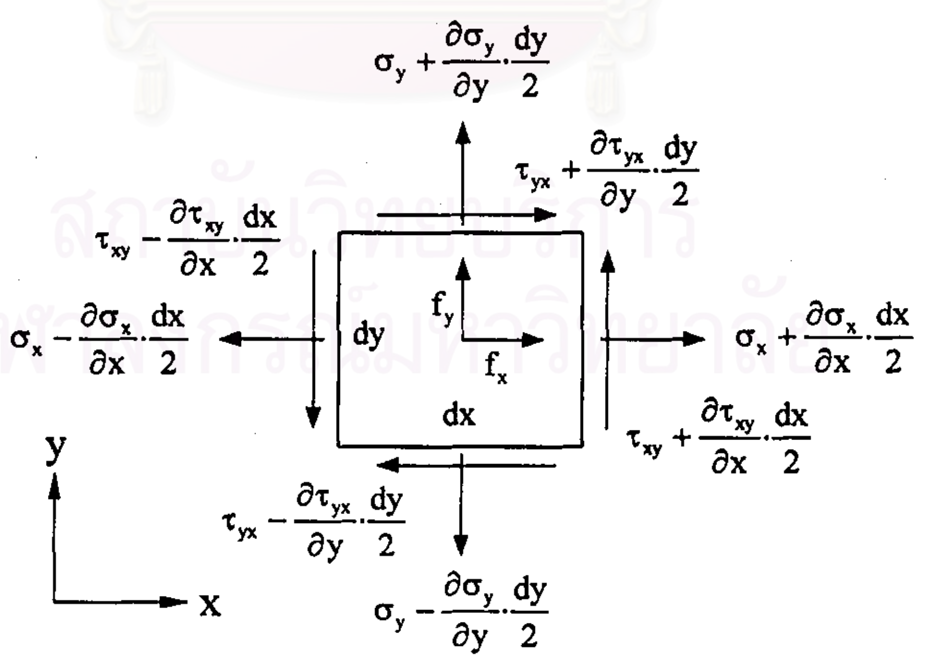
$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \tag{2.5}$$

$\hat{i}$ แทนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x

$\hat{j}$ แทนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในสองมิติกระทำได้โดย นำกฎข้อที่สองของนิวตันมาประยุกต์ใช้กับชิ้นส่วนของไหลที่มีความลึก 1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ความสมดุลของแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหล

กฎข้อที่สองของนิวตันกล่าวไว้ว่า แรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลของวัตถุนั้นกับความเร่ง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2.6)$$

โดย $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ (2.7)

F_x แทนแรงกระทำบนวัตถุในแนวแกน x

F_y แทนแรงกระทำบนวัตถุในแนวแกน y

m แทนมวลของวัตถุ

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ (2.8)

a_x แทนความเร่งของวัตถุในแนวแกน x

a_y แทนความเร่งของวัตถุในแนวแกน y

เนื่องจากสมการ (2.6) อยู่ในรูปแบบเวคเตอร์ ดังนั้นจึงกระจายให้อยู่ในรูปแบบสเกลาร์ได้เป็น

$$F_x = ma_x \qquad (2.9a)$$

$$F_y = ma_y \qquad (2.9b)$$

แรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุประกอบด้วย แรงวัตถุ (Body force) และแรงที่ผิว (Surface force) แรงวัตถุเป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุโดยไม่มีการสัมผัส ได้แก่ แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง แรงทางไฟฟ้า และแรงแม่เหล็ก ส่วนแรงที่ผิวเป็นแรงที่กระทำบนพื้นผิวของวัตถุโดยตรง ได้แก่ แรงเนื่องจากความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเฉือน เมื่อพิจารณาแรงลัพธ์ที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหลในแนวแกน x ในรูปที่ 2.2 พบว่าแรงวัตถุมีค่าเท่ากับ $\rho f_x dxdy$ แรงที่ผิวมีค่าเท่ากับ $\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy - \left(\sigma_x - \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)dx - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)dx$ เมื่อนำมารวมกันจะได้ว่า

$$F_x = \rho f_x dxdy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dxdy \qquad (2.10)$$

โดย f_x แทนแรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน x

σ_x แทนความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x

τ_{yx} แทนความเค้นเฉือนในแนวแกน x บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า คุณสมบัติของสสารที่มีภาวะต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x,y) และเวลา (t) ดังนั้นความเร็วในแนวแกน x สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$u = u(x, y, t) \qquad (2.11)$$

การหาอนุพันธ์ของความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา กระทำได้โดยการใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) ดังนี้

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (2.12)$$

เมื่อพิจารณาพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.9a) พบว่า

$$ma_x = \rho dxdy \cdot \frac{du}{dt} \qquad (2.13)$$

แทนสมการ (2.12) ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$ma_x = \rho dxdy\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2.14)$$

นำผลที่ได้จากสมการ (2.10) และ (2.14) แทนลงไปในสมการ (2.9a) แล้วจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (2.15)$$

ซึ่งสามารถเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla u\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (2.16)$$

พิจารณาพจน์ต่าง ๆทางด้านซ้ายของสมการ (2.16) พบว่า

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) - u\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (2.17)$$

$$\rho\vec{V}\cdot\nabla u = \nabla\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) - u\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) \qquad (2.18)$$

แทนสมการ (2.17) และ (2.18) ลงในสมการ (2.16) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) - u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right] + \nabla\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (2.19)$$

เนื่องจากพจน์ต่าง ๆที่ปรากฏอยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (2.19) เหมือนกับสมการ (2.3) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (2.19) จึงลดรูปมาเป็น [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (2.20)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาแรงลัพธ์ที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหลในแนวแกน y ในรูปที่ 2.2 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ได้แสดงไว้ข้างต้น จะได้ผลดังนี้

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \qquad (2.21)$$

ซึ่งสามารถเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งได้เป็น [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla\cdot\left(\rho v\vec{V}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \qquad (2.22)$$

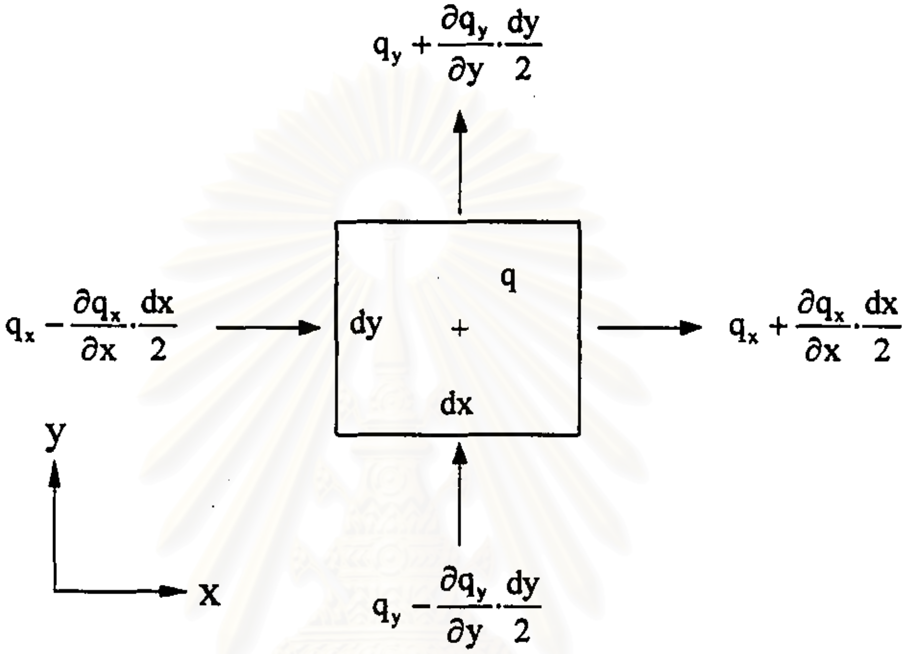
โดย f_y แทนแรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน y

σ_y แทนความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y

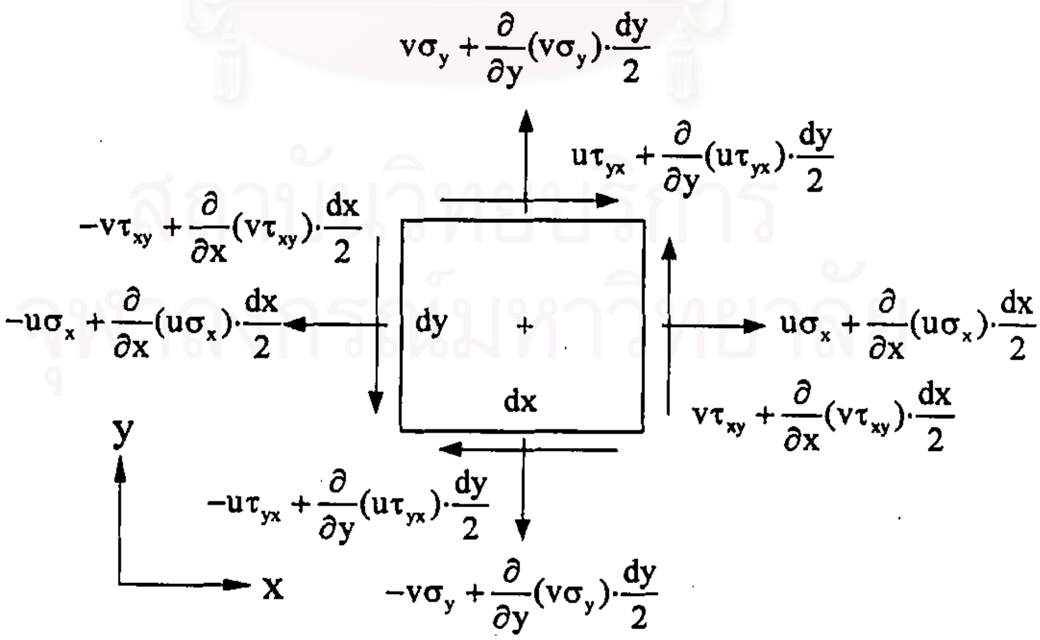
τ_{xy} แทนความเค้นเฉือนในแนวแกน y บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x

2.4 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานในสองมิติกระทำได้โดย นำกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิคส์มาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมของของไหลที่มีความลึก 1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.3 และ 2.4



รูปที่ 2.3 อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมของของไหล



รูปที่ 2.4 อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม

กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิคส์กล่าวไว้ว่า พลังงานที่เพิ่มขึ้นภายในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุมกับงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \tag{2.23}$$

โดย E_t แทนพลังงานรวมของปริมาตรควบคุม

Q แทนความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุม

W แทนงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม

พลังงานรวมของปริมาตรควบคุมประกอบไปด้วย พลังงานภายใน (Internal energy) พลังงานจลน์ (Kinetic energy) และพลังงานศักย์ (Potential energy) ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานรวมของปริมาตรควบคุมจะมีค่าดังสมการ

$$\frac{dE_t}{dt} = \rho dxdy \cdot \frac{d}{dt}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \vec{f}\cdot\vec{r}\right) \tag{2.24}$$

โดย e แทนพลังงานภายในของของไหลต่อหนึ่งหน่วยมวล

$$\vec{f} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} \tag{2.25}$$

$\vec{r}$ แทนเวคเตอร์แสดงตำแหน่งของของไหล

อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมมาจาก ความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง และการถ่ายเทความร้อนอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ จากรูปที่ 2.3 พบว่า อัตราการผลิตความร้อนมีค่าเท่ากับ $\rho q dxdy$ และอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับ $\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy + \left(q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)dx$ เมื่อนำมารวมกันจะได้ว่า

$$\frac{dQ}{dt} = \rho q dxdy + \left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)dxdy \tag{2.26}$$

โดย q แทนความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล

q_x แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน x

q_y แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน y

อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 เป็นอัตราการทำงานอันเนื่องมาจากความเค้นที่ผิวของปริมาตรควบคุม โดยอ้างอิงมาจากรูปที่ 2.2 ซึ่งมีค่าดังสมการ

$$\frac{dW}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y)\right]dxdy \tag{2.27}$$

นำผลที่ได้จากสมการ (2.24), (2.26) และ (2.27) แทนลงไปในสมการ (2.23) แล้วจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right) - \rho\vec{f}\cdot\vec{V} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) \qquad (2.28)$$

จากสมการ (2.28) ถ้ากำหนดให้ ε แทนผลรวมของพลังงานภายในและพลังงานจลน์ดังสมการ

$$\varepsilon = e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \qquad (2.29)$$

ดังนั้นสมการ (2.28) จึงเปลี่ยนรูปมาเป็น

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right) \qquad (2.30)$$

เช่นเดียวกับความเร็ว ค่า ε เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x,y) และเวลา (t) เช่นกัน ดังนั้น

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (2.31)$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (2.30) จะได้

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right) \qquad (2.32)$$

พิจารณาพจน์ต่าง ๆทางด้านซ้ายของสมการ (2.32) พบว่า

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\varepsilon\right) \qquad (2.33)$$

ในทำนองเดียวกันกับการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม เราทราบว่า

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (2.34)$$

$$\rho\vec{V}\cdot\nabla\varepsilon = \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) - \varepsilon\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) \qquad (2.35)$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (2.32) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) - \varepsilon\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right] + \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right) \qquad (2.36)$$

เนื่องจากพจน์ต่าง ๆที่ปรากฏอยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (2.36) เหมือนกับสมการ (2.3) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (2.36) จึงลดรูปมาเป็น [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y) + \rho(uf_x + vf_y) \tag{2.37}$$

จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) อัตราการถ่ายเทความร้อนของวัตถุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic material) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.38a}$$

$$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.38b}$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล (Fluid thermal conductivity)

T แทนอุณหภูมิของของไหล (Fluid temperature)

เมื่อนำสมการ (2.38a-b) แทนลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y) + \rho(uf_x + vf_y) \tag{2.39}$$

2.5 ความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหล

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและการอนุรักษ์พลังงานที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมา เกี่ยวข้องกับความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหล ดังนั้นในหัวข้อย่อยนี้จึงอธิบายความเค้นเหล่านี้ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องอื่น ๆต่อไป สำหรับการไหลในสองมิติความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหลสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ (Tensor) ได้ดังนี้ [11]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad , (i,j = 1,2) \tag{2.40}$$

$$\sigma'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad , (i,j,k = 1,2) \tag{2.41}$$

โดย p แทนความดันรวม (Total pressure) ของของไหล

δ_{ij} แทน Kronecker delta ซึ่ง $\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ และ $\delta_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

μ แทนความหนืดพลศาสตร์ของของไหล (Fluid dynamic viscosity)

λ แทน Second viscosity coefficient [10]

จากสมมุติฐานของสโตคส์ (Stokes's hypothesis) ได้กำหนดไว้ว่า [11]

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{2.42}$$

เมื่อแทนค่า λ จากสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.41) จะได้

$$\sigma'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \ (i,j,k = 1,2) \tag{2.43}$$

ถ้ากำหนดให้ $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $\sigma'_{11} = \sigma'_x$, $\sigma'_{12} = \tau'_{xy}$, $\sigma'_{21} = \tau'_{yx}$, $\sigma'_{22} = \sigma'_y$ เราสามารถเขียนสมการ (2.43) ออกมาเป็นชุดของสมการได้ดังนี้

$$\sigma'_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.44a}$$

$$\sigma'_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.44b}$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.44c}$$

ดังนั้นความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหลจึงมีค่าดังต่อไปนี้

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.45a}$$

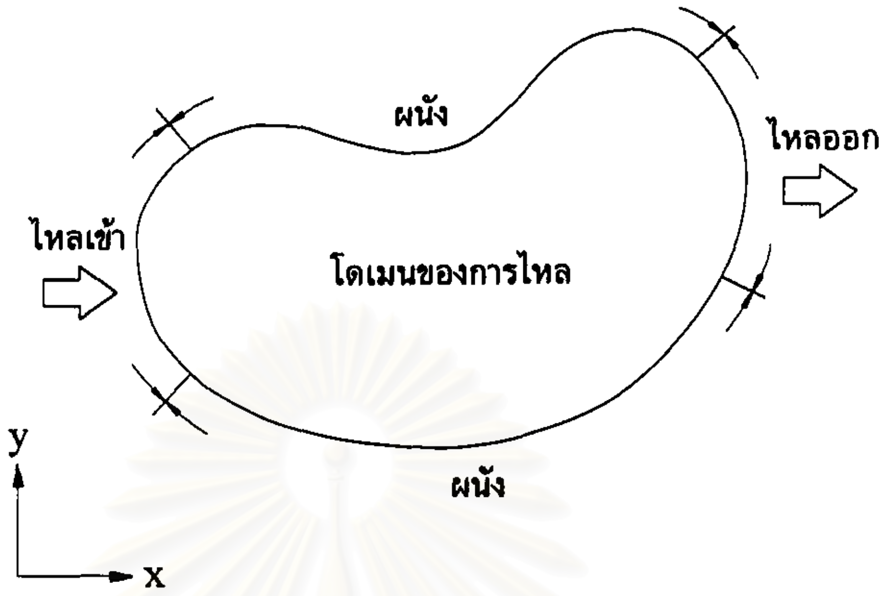
$$\sigma_y = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.45b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.45c}$$

2.6 เงื่อนไขขอบเขตของการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 2.2 ถึง 2.4 มีความสัมพันธ์กันและก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นขึ้น ซึ่งใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลได้ทุกรูปแบบ แต่สิ่งที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังกล่าวให้คำตอบที่แตกต่างกันได้ก็คือ เงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบของโดเมนของการไหล ซึ่งโดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขขอบเขตของโดเมนของการไหลดังแสดงในรูปที่ 2.5 ประกอบไปด้วย

(1) เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางที่ของไหลไหลเข้า (S_i) ซึ่งโดยปกติจะกำหนดความเร็วและอุณหภูมิของของไหลดังนี้



รูปที่ 2.5 โดเมนของการไหลและเงื่อนไขขอบเขต

$$u = u_i(x,y) \qquad (2.46a)$$
$$v = v_i(x,y) \qquad (2.46b)$$
$$T = T_i(x,y) \qquad (2.46c)$$

(2) เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางที่ของไหลไหลออก (S_o) ซึ่งโดยปกติจะกำหนดแรงที่กระทำบนขอบเขตดังนี้

$$P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m \qquad (2.47a)$$
$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \qquad (2.47b)$$

โดย P_x แทนแรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน x

P_y แทนแรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน y

l, m แทนทิศทางโคซายน์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขต

(3) เงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง (S_w) ซึ่งจะต้องกำหนดความเร็วของของไหลที่ผนัง และอุณหภูมิของของไหลที่ผนังหรือฟลักซ์ความร้อน (Heat flux) ที่ถ่ายเทเข้าสู่โดเมนของการไหลผ่านผนังดังนี้

$$u = u_w(x,y) \qquad (2.48a)$$
$$v = v_w(x,y) \qquad (2.48b)$$
$$T = T_w(x,y) \text{ หรือ } q_s = q_w(x,y) \qquad (2.48c)$$

โดย q_s แทนฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่โดเมนของการไหลผ่านผนัง

2.7 บทสรุปของสมการพื้นฐานของการไหล

หัวข้อ 2.2 ถึง 2.4 แสดงให้เห็นว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแต่ละสมการที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมา สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่ต่างกันได้หลายรูปแบบ หัวข้อย่อยนี้จึงขอสรุปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ในรูปแบบอนุรักษ์ (Conservation form) ซึ่งเป็นสมการตั้งต้นสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลทุกรูปแบบ มาเขียนรวมไว้เป็นชุดเดียวกัน เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจอย่างชัดเจนและสะดวกต่อการนำไปใช้ ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \tag{2.49}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.50a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla\cdot\left(\rho v\vec{V}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{2.50b}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right) \tag{2.51}$$

โดย

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \tag{2.52}$$

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.53a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \tag{2.53b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.53c}$$

$$\varepsilon = e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \tag{2.54}$$

$$f_x = f_x(x,y) \tag{2.55a}$$

$$f_y = f_y(x,y) \tag{2.55b}$$

$$q = q(x,y,t) \tag{2.56}$$

หลังจากแทนสมการ (2.52) ถึง (2.56) ลงในสมการ (2.49) ถึง (2.51) ปรากฏว่า ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้ง 4 สมการ มีตัวไม่ทราบค่าอยู่ทั้งหมด 8 ตัว ซึ่งได้แก่ ρ, u, v, p, T, e, μ และ k ดังนั้นจึงต้องหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวไม่ทราบค่าทั้ง 8 ตัวนี้มาอีก 4 สมการ แล้วแทนลงไปในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังกล่าว เพื่อให้เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียง 4 ตัวคือ u, v, p และ T สมการทั้ง 4 สมการนั้นได้แก่

$$\rho = \rho(p,T) \tag{2.57}$$

$$e = e(p,T) \tag{2.58}$$

$$\mu = \mu(p,T) \tag{2.59}$$

$$k = k(p,T) \tag{2.60}$$

ซึ่งเมื่อแทนสมการเหล่านี้ลงไปในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแล้ว จะต้องทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.6 เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลต่อไป