บทที่ 2

สถิติทดสอบและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของสถิติทดสอบแต่ละวิธี และรายละเอียดของการแจกแจงที่สำคัญที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ รวมทั้งนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

กำหนดให้ $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$; $i = 1, 2$ คือ ตัวอย่างสุ่มขนาด n_i จำนวนสองกลุ่มที่เป็นอิสระกัน โดยที่ $E(X_{ij}) = \mu_i$ และ $Var(X_{ij}) = \sigma_i^2 = \mu_i^2 V_i^2$ ดังนั้น $V_i = \sigma_i / \mu_i$ คือ สัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation : CV) ของประชากรกลุ่มที่ i

สมมติฐานสำหรับการทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรสองกลุ่ม คือ

$$H_0 : V_1 = V_2$$

$$H_1 : V_1 \neq V_2$$

กำหนดให้

$v_i, v_{(i)}$ คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวอย่างจากประชากรกลุ่มที่ i

โดยนิยาม

$$v_i = \frac{S_i}{\overline{X}_i}$$

$$v_{(i)} = \frac{S_{(i)}}{\overline{X}_i}$$

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n_i - 1}} \quad ; \quad i = 1,2$$

$$j = 1,2,...,n_i$$

$$S_{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n_i}} \quad ; \quad i = 1,2$$

$$j = 1,2,...,n_i$$

$$\overline{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$$

n_i คือ ขนาดของตัวอย่างกลุ่มที่ i

ในการวิจัยครั้งนี้ ศึกษากรณีประชากรสองกลุ่ม ($k = 2$) และสถิติทดสอบต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดลองนี้มีข้อสมมติเบื้องต้นว่าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีรายละเอียดของสถิติทดสอบต่าง ๆ ดังนี้

2.1 สถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลง (Modified Bennett Test Statistic : MBTS)

สถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลงนี้เสนอโดย Shafer และ Sulivan (1986) โดยดัดแปลงจากตัวสถิติทดสอบเบนเนตดั้งเดิมที่เสนอโดย Bennett (1976) สถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลงนี้ใช้หลักการอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นและใช้การประมาณค่าการแจกแจงของสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวอย่างของ Mckay (1932)

สถิติทดสอบเบนเนต คือ

$$BTS = (N-k)\ln\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_i}{N-k}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\ln\left(\frac{d_i}{n_i-1}\right)$$

สถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลง คือ

$$MBTS = (N-k)\ln\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_{(i)}}{N-k}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\ln\left(\frac{d_{(i)}}{n_i-1}\right)$$

เมื่อ

$$d_i = \frac{n_i v_i^2}{v_i^2+1}$$

$$d_{(i)} = \frac{n_i v_{(i)}^2}{v_{(i)}^2+1}$$

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

โดยที่ MBTS มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ (Degree of Freedom) เท่ากับ k - 1 (Silvey, 113)

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α คือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าสถิติทดสอบเบนเนตที่คำนวณได้ มากกว่า $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$

2.2 สถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Test Statistic : LRTS)

สถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นเป็นสถิติทดสอบที่ได้รับการพัฒนาจาก Doornbos และ Dijkstra (1983) โดยใช้อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Ratio) ในการสร้างสถิติทดสอบดังนี้

ภาวะน่าจะเป็นภายใต้ H_0 คือ

$$L_0 = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_i V}\right)^{n_i}\exp\left[-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\mu_i)^2}{2\mu_i^2V^2}\right]$$

เมื่อ

V คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร

ดังนั้นจะได้สมการภาวะน่าจะเป็น คือ

$$\frac{\partial}{\partial R}\ln L_0 = -\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{V} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\mu_i)^2}{2\mu_i^2V^3} = 0 \qquad (2.2.1)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i}\ln L_0 = -\frac{n_i}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{n_i}\frac{X_{ij}(X_{ij}-\mu_i)}{\mu_i^3V^2} = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,k \qquad (2.2.2)$$

ทำการปรับสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(1+\sqrt{1+4(1+v_i^2)V^2})}{2(1+v_i^2)} - \sum_{i=1}^{k}n_i = 0 \ ; \qquad (2.2.3)$$

และ

$$\mu_i = \left[\frac{2(1+v_i^2)\overline{X}_i}{1+\sqrt{1+4(1+v_i^2)V^2}}\right] \ , \ i = 1,2,\ldots,k \qquad (2.2.4)$$

แก้สมการที่ 2.2.3 และ 2.2.4 จะได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ V และ μ_i กรณีที่ k > 2 จะไม่สามารถแก้สมการที่ 2.2.3 ได้ด้วยวิธีทางพีชคณิต ต้องอาศัยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

สถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น คือ

$$LRTS \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(\frac{\tilde{\mu}_i^2 \tilde{V}^2}{S_{(i)}^2}\right)$$

เมื่อ

$\tilde{V}$ คือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ V

$\tilde{\mu}_i$ คือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ μ_i

โดยที่ LRTS มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ (Degree of Freedom) เท่ากับ $k - 1$ (Silvey, 113)

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α คือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าสถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นที่คำนวณได้ มากกว่า $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$

2.3 สถิติทดสอบวอลด์ (Wald Test Statistic : WTS)

สถิติทดสอบวอลด์นี้เป็นสถิติทดสอบที่ Gupta และ Ma (1996) พัฒนามาจากสถิติทดสอบวอลด์สำหรับทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร 2 กลุ่มที่มีขนาดตัวอย่างเท่ากันของ Rao และ Vidya (1992)

สถิติทดสอบวอลด์ คือ

$$WTS \quad = \quad h'(\hat{\theta})\left[\hat{H}'I^{-1}(\hat{\theta})\hat{H}\right]^{-1} h(\hat{\theta})$$

เมื่อ $h(\hat{\theta})$, $\hat{H}$ และ $I^{-1}(\hat{\theta})$ คือ ค่าของ $h(\theta)$, H และ $I^{-1}(\theta)$ เมื่อแทน θ ด้วย $\hat{\theta}$

$\theta \quad = \quad [\ \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \ldots, \mu_k, \sigma_k\ ]$

$\hat{\theta}$ คือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ

$$h(\theta) = [h_1(\theta), h_2(\theta), ..., h_{k-1}(\theta)]$$

$$h_j(\theta) = \frac{\sigma_j}{\mu_j} - \frac{\sigma_{j+1}}{\mu_{j+1}}, \ j = 1, 2, ..., k-1$$

H คือ เมทริกซ์ขนาด 2k * (k-1) ซึ่งบรรจุ

$$\frac{\partial h_j(\theta)}{\partial \theta_i}, \ i = 1, 2, ..., 2k$$

$$j = 1, 2, ..., (k-1)$$

$I(\theta)$ คือ เมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ ซึ่งบรรจุ

$$E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln L\right), \quad i, j = 1, 2, ..., 2k$$

L คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

การทดสอบนี้จะเป็นการทดสอบสมมติฐานว่าง

$$H_0' : h(\theta) = [h_1(\theta), h_2(\theta), ..., h_{k-1}(\theta)]' = 0$$

ซึ่งเทียบเท่ากับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : V_1 = V_2 = ... = V_k$

<u>เมื่อ k = 2</u>

$$\hat{\theta} = [\bar{X}_1, S_{(1)}, \bar{X}_2, S_{(2)}]$$

$$h(\hat{\theta}) = [h_1(\hat{\theta})]$$

$$= \left[\frac{S_{(1)}}{\bar{X}_1} - \frac{S_{(2)}}{\bar{X}_2}\right]$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -\frac{S_{(1)}}{\bar{X}_1^2} \\ \frac{1}{\bar{X}_1} \\ \frac{S_{(2)}}{\bar{X}_2^2} \\ -\frac{1}{\bar{X}_2} \end{bmatrix}$$

$$L = \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)^{n_i} \mathbf{exp}\left[-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$$

$$I(\theta) = E\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial\mu_1\partial\mu_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_1\partial\sigma_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_1\partial\mu_2}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_1\partial\sigma_2}\ln L \\ -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1\partial\mu_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1\partial\sigma_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1\partial\mu_2}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1\partial\sigma_2}\ln L \\ -\frac{\partial^2}{\partial\mu_2\partial\mu_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_2\partial\sigma_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_2\partial\mu_2}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\mu_2\partial\sigma_2}\ln L \\ -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2\partial\mu_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2\partial\sigma_1}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2\partial\mu_2}\ln L & -\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2\partial\sigma_2}\ln L \end{bmatrix}$$

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n_1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_2}{\sigma_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n_2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

$$I(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{S_{(1)}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n_1}{S_{(1)}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_2}{S_{(2)}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n_2}{S_{(2)}^2} \end{bmatrix}$$

$$I^{-1}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{S_{(1)}^2}{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_{(1)}^2}{2n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_{(2)}^2}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_{(2)}^2}{2n_2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ สถิติทดสอบวอลด์ คือ

$$WTS = \frac{\left(\frac{S_{(1)}}{\bar{X}_1} - \frac{S_{(2)}}{\bar{X}_2}\right)^2}{\frac{S_{(1)}^2}{2n_1\bar{X}_1^2} + \frac{S_{(1)}^4}{n_1\bar{X}_1^4} + \frac{S_{(2)}^2}{2n_2\bar{X}_2^2} + \frac{S_{(2)}^4}{n_2\bar{X}_2^4}}$$

หรือ

$$WTS = \frac{(v_{(1)} - v_{(2)})^2}{\frac{v_{(1)}^2}{2n_1} + \frac{v_{(1)}^4}{n_1} + \frac{v_{(2)}^2}{2n_2} + \frac{v_{(2)}^4}{n_2}}$$

โดยที่ WTS มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ (Degree of Freedom) เท่ากับ k - 1 (Silvey, 116)

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α คือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าสถิติทดสอบวอลด์ที่คำนวณได้ มากกว่า $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$

2.4 สถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Test Statistic : ATS)

สถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับนี้เสนอโดย Miller (1991) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

สถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับ คือ

$$ATS = (LD)'(LVL')^{-1}(LD)$$

เมื่อ

$$L = [I_{k-1} \quad -1_{k-1}]$$

$$D = \left(\frac{S_1}{\overline{X}_1}, \frac{S_2}{\overline{X}_2}, \dots, \frac{S_k}{\overline{X}_k}\right)'$$

$$V = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \left[0.5 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right] \mathrm{Diag}_k\,(m_i^{-1})$$

$$\frac{\sigma}{\mu} = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{S_i}{\overline{X}_i}\right)$$

$$m_i = n_i - 1 \quad , i = 1,2,\dots,k$$

<u>เมื่อ k = 2</u>

$$L = [1 \quad -1]$$

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1}{\overline{X}_1} \\ \dfrac{S_2}{\overline{X}_2} \end{bmatrix}$$

$$V = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \left[0.5 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right] \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{m_1\left(\dfrac{S_1}{\overline{X}_1}\right) + m_2\left(\dfrac{S_2}{\overline{X}_2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$m_i = n_i - 1 \quad , i = 1,2$$

ดังนั้นจะได้ สถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับ คือ

$$ATS = \frac{\left(\dfrac{S_1}{\bar{X}_1} - \dfrac{S_2}{\bar{X}_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)^2\left[0.5 + \left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{(v_1 - v_2)^2}{\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)^2\left[0.5 + \left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]}$$

โดยที่ ATS มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ (Degree of Freedom) เท่ากับ $k - 1$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α คือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าสถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับที่คำนวณได้ มากกว่า $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$

2.5 การคำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผัน

เพื่อให้เข้าใจในขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันทั้ง 4 ตัวนั้น เราจะใช้ข้อมูลตัวอย่างสุ่ม 2 ชุด (i = 1, 2) จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับ 0.1 โดยที่ค่าเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 2 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) เท่ากับ 0.2 ขนาดของตัวอย่างสุ่มแต่ละชุดเท่ากันคือ 10 ดังตารางที่ 2.1

<u>ตารางที่ 2.1</u> **ข้อมูลตัวอย่างสุ่ม 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน**

j \ X_{ij}	X_{1j}	X_{2j}
1	1.7855	2.2202
2	2.2145	1.9727
3	1.7987	1.7678
4	1.8640	2.2673
5	2.0037	1.8950
6	2.1576	1.9320
7	2.0275	1.9115
8	1.8787	1.7814
9	2.3586	2.2197
10	1.9090	1.7439

จากข้อมูลในตารางที่ 2.1 คำนวณค่าของ $\overline{X}_i, S_i, S_{(i)}, v_i$ และ $v_{(i)}$ ดังนี้

$$\overline{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{1.7855 + 2.2145 + \ldots + 1.9090}{10}$$

$$= 1.9998$$

$$\overline{X}_2 = \frac{2.2202 + 1.9727 + \ldots + 1.7439}{10}$$

$$= 1.9712$$

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n_i - 1}}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{(1.7855-1.9998)^2 + (2.2145-1.9998)^2 + \ldots + (1.9090-1.9998)^2}{(10-1)}}$$

$$= 0.1910$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{(2.2202-1.9712)^2 + (1.9727-1.9712)^2 + \ldots + (1.7439-1.9712)^2}{(10-1)}}$$

$$= 0.1976$$

$$S_{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n_i}}$$

$$S_{(1)} = \sqrt{\frac{(1.7855-1.9998)^2 + (2.2145-1.9998)^2 + \ldots + (1.9090-1.9998)^2}{10}}$$

$$= 0.1812$$

$$S_{(2)} = \sqrt{\frac{(2.2202-1.9712)^2 + (1.9727-1.9712)^2 + \ldots + (1.7439-1.9712)^2}{10}}$$

$$= 0.1875$$

$$v_i = \frac{S_i}{\overline{X}_i}$$

$$v_1 = \frac{0.1910}{1.9998} = 0.0955$$

$$v_2 = \frac{0.1976}{1.9712} = 0.1002$$

$$v_{(i)} = \frac{S_{(i)}}{\overline{X}_i}$$

$$v_{(1)} = \frac{0.1812}{1.9998} = 0.0906$$

$$v_{(2)} = \frac{0.1875}{1.9712} = 0.0951$$

<u>ตารางที่ 2.2</u> ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวอย่างทั้ง 2 ชุด

i	$\overline{X}_i$	S_i	$S_{(i)}$	v_i	$v_{(i)}$
1	1.9998	0.1910	0.1812	0.0955	0.0906
2	1.9712	0.1976	0.1875	0.1002	0.0951

2.5.1 <u>วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลง</u>

$$MBTS = (N-k)\ln\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_{(i)}}{N-k}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln\left(\frac{d_{(i)}}{n_i - 1}\right)$$

เมื่อ

$$d_{(i)} = \frac{n_i v_{(i)}^2}{v_{(i)}^2 + 1}$$

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

จากตารางที่ 2.2 ค่า $v_{(1)} = 0.0906$ และ $v_{(2)} = 0.0951$

$$d_{(1)} = \frac{10\,(0.0906)^2}{0.0906^2 + 1}$$

$$= 0.0814$$

$$d_{(2)} = \frac{10\,(0.0951)^2}{0.0951^2+1}$$
$$= 0.0896$$

$$N = 10+10 = 20$$

$$MBTS = (20-2)\ln\left[\frac{0.0814}{(20-2)}+\frac{0.0896}{(20-2)}\right] -$$
$$\left[(10-1)\ln\left(\frac{0.0814}{(10-1)}\right)+(10-1)\ln\left(\frac{0.0896}{(10-1)}\right)\right]$$
$$= 0.0207$$

ค่าสถิติทดสอบเบนเนตที่ได้จากการคำนวณ นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางไคสแควร์ที่ α เท่ากับ 0.01 และองศาอิสระเท่ากับ 1 ซึ่งจะได้ค่า $\chi^2_{0.01,1}$ = 6.63 พบว่า ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนั้นมาจากประชากรที่มีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากัน

2.5.2 <u>วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น</u>

$$LRTS = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(\frac{\tilde{\mu}_i^2 \tilde{V}^2}{S_{(i)}^2}\right)$$

ทำการหาค่าประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ R และ μ_i โดยการแก้สมการดังต่อไปนี้

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(1+\sqrt{1+4(1+v_i^2)V^2})}{2(1+v_i^2)} - \sum_{i=1}^{k} n_i = 0 \;; \qquad (1)$$

และ

$$\mu_i = \left[\frac{2(1+v_i^2)\overline{X}_i}{1+\sqrt{1+4(1+v_i^2)V^2}}\right] \;, \; i = 1,2,\ldots,k \qquad (2)$$

จากตารางที่ 2.2 ค่า $\overline{X}_1 = 1.9998$ $S_{(1)} = 0.1812$ $\nu_{(1)} = 0.0906$

$\overline{X}_2 = 1.9712$ $S_{(2)} = 0.1875$ $\nu_{(2)} = 0.0951$

แทนค่าในสมการที่ (1) และ (2)

$$\frac{10(1+\sqrt{1+4(1+0.0906^2)\widetilde{V}^2})}{2(1+0.0906^2)}+\frac{10(1+\sqrt{1+4(1+0.0951^2)\widetilde{V}^2})}{2(1+0.0951^2)}-(10+10) = 0$$

$$\frac{10+10\sqrt{1+4.0328\widetilde{V}^2}}{2.0164}+\frac{10+10\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2}}{2.0181}-20 = 0$$

$$4.9593 + 4.9593\sqrt{1+4.0328\widetilde{V}^2} + 4.9552 + 4.9552\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2} - 20 = 0$$

$$4.9593\sqrt{1+4.0328\widetilde{V}^2} = 20-4.9593-4.9552-4.9552\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2}$$

$$4.9593\sqrt{1+4.0328\widetilde{V}^2} = 10.0855-4.9552\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2}$$

$$24.5947(1+4.0328\widetilde{V}^2) = 101.7173-99.9513\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2}+24.5540(1+4.0362\widetilde{V}^2)$$

$$99.9513\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2} = 101.7173+24.5540+99.1049\widetilde{V}^2-24.5947-99.1855\widetilde{V}^2$$

$$99.9513\sqrt{1+4.0362\widetilde{V}^2} = 101.6766-0.0806\widetilde{V}^2$$

$$9990.2624(1+4.0362\widetilde{V}^2) = 10338.131-16.3903\widetilde{V}^2+0.0065\widetilde{V}^4$$

$$9990.2624+40322.6971\widetilde{V}^2 = 10338.131-16.3903\widetilde{V}^2+0.0065\widetilde{V}^4$$

$$0.0065\widetilde{V}^4-40339.0874\widetilde{V}^2+347.8686 = 0$$

$$\widetilde{V}^2 = \frac{40339.0874\pm\sqrt{(-40339.0874)^2-4(0.0065)(347.8686)}}{2(0.0065)}$$

$$\widetilde{V}^2 = \frac{40339.0874 \pm \sqrt{(-40339.0874)^2 - 4(0.0065)(347.8686)}}{2(0.0065)}$$

$$= \frac{40339.0874 \pm \sqrt{1627241963}}{0.013}$$

$$= 6206013.438,\ 0.0088$$

$$\widetilde{V} = 2491.1872,\ \underline{0.0940}$$

แทนค่า $\widetilde{V}$ = 0.0940 ในสมการที่ (2)

$$\widetilde{\mu}_1 = \left[\frac{2(1+0.0906^2)(1.9998)}{1+\sqrt{1+4(1+0.0906^2)(0.0088)}}\right]$$

$$= 1.9986$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \left[\frac{2(1+0.0951^2)(1.9712)}{1+\sqrt{1+4(1+0.0951^2)(0.0088)}}\right]$$

$$= 1.9717$$

$$LRTS = 10\ \ln\left(\frac{(1.9986^2)(0.0088)}{0.1812^2}\right) + 10\ \ln\left(\frac{(1.9917^2)(0.0088)}{0.1875^2}\right)$$

$$= 0.4094$$

ค่าสถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นที่ได้จากการคำนวณ นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางไคสแควร์ที่ α เท่ากับ 0.01 และองศาอิสระเท่ากับ 1 ซึ่งจะได้ค่า $\chi^2_{0.01,1}$ = 6.63 พบว่า ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนั้นมาจากประชากรที่มีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากัน

2.5.3 <u>วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบวอลด์</u>

$$WTS = \frac{(v_{(1)} - v_{(2)})^2}{\frac{v_{(1)}^2}{2n_1} + \frac{v_{(1)}^4}{n_1} + \frac{v_{(2)}^2}{2n_2} + \frac{v_{(2)}^4}{n_2}}$$

จากตารางที่ 2.2 ค่า $v_{(1)} = 0.0906$ และ $v_{(2)} = 0.0951$

$$WTS = \frac{(0.0906 - 0.0951)^2}{\frac{0.0906^2}{2(10)} + \frac{0.0906^4}{10} + \frac{0.0951^2}{2(10)} + \frac{0.0951^4}{10}}$$

$$= 0.0231$$

ค่าสถิติทดสอบวอลด์ที่ได้จากการคำนวณ นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางไคสแควร์ที่ α เท่ากับ 0.01 และองศาอิสระเท่ากับ 1 ซึ่งจะได้ค่า $\chi^2_{0.01,1} = 6.63$ พบว่าค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนั้นมาจากประชากรที่มีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากัน

2.5.4 <u>วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับ</u>

$$ATS = \frac{(v_1 - v_2)^2}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\left[0.5 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]}$$

เมื่อ

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_i = n_i - 1 \quad , i = 1,2$$

จากตารางที่ 2.2 ค่า $v_1 = 0.0955$ และ $v_2 = 0.1002$

$$m_1 = 9 \quad , m_2 = 9$$

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{9(0.0955) + 9(0.1002)}{18}$$
$$= 0.0979$$

$$ATS = \frac{(0.0955 - 0.1002)^2}{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)(0.0979)^2\left[0.5 + (0.0979)^2\right]}$$

$$= 0.0204$$

ค่าสถิติทดสอบเชิงเส้นกำกับที่ได้จากการคำนวณ นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางไคสแควร์ที่ α เท่ากับ 0.01 และองศาอิสระเท่ากับ 1 ซึ่งจะได้ค่า $\chi^2_{0.01,1} = 6.63$ พบว่าค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนั้นมาจากประชากรที่มีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากัน

เนื่องจากในการวิจัยครั้งนี้สนใจที่จะศึกษาถึงอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 4 ตัวดังกล่าวข้างต้น เมื่อข้อมูลตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเดียวกัน ซึ่งการแจกแจงของประชากรที่ทำการศึกษาในครั้งนี้ คือ การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมมา และการแจกแจงแบบไวบูลล์ โดยรายละเอียดและคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการแจกแจงดังกล่าวจะนำเสนอดังต่อไปนี้

2.6 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่มีความสำคัญมากในทางสถิติ คือ ใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐาน

การแจกแจงแบบปกติค้นพบโดย อับราฮัม เดอมูวร์ (Abraham De Moivre : 1667 - 1754) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ต่อมา ปิแอร์ ลาปาส (Pierre Laplace : 1749 - 1827) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้นำมาประยุกต์ใช้ในด้านสังคมศาสตร์และวิทยาศาสตร์อย่างแพร่หลาย หลังจากนั้น คาร์ล เกาส์ (Carl Gauss : 1777 – 1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้ขยายงานออกไป โดยการนำทฤษฎีนี้ไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (Error) โดยการวัดซ้ำ ๆ ในกลุ่มที่มี

ขนาดคงเดิม และพบว่าการแจกแจงที่ได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ดังนั้น การแจกแจงปกติจึงเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าการแจกแจงของเกาส์ (Gaussian Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf) ของการแจกแจงแบบปกติ คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \; -\infty < x < \infty$$

$f(x)$ = ความสูงของโค้งที่วัดจากแกนนอน ณ. จุดใด ๆ ทุกจุด

σ^2 = ความแปรปรวนของประชากร , $\sigma^2 > 0$
เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาด (Scale Parameter) ของการแจกแจง

μ = ค่าเฉลี่ยของประชากร , $-\infty < \mu < \infty$
เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location Parameter) ของการแจกแจง

π = 3.1416

e = 2.7183

x = ค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง

โดยที่ μ และ σ เป็นพารามิเตอร์ที่บอกถึงลักษณะของประชากรว่าประชากรนั้นมีตำแหน่งศูนย์กลางอยู่ที่ใดและมีการกระจายมากน้อยเพียงใด

ความสำคัญของการแจกแจงแบบปกติอย่างหนึ่งก็คือในเรื่องของทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) ซึ่งแสดงดังต่อไปนี้

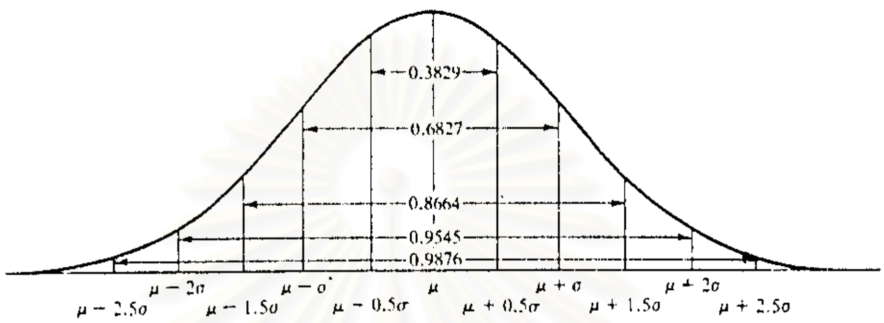
ถ้า $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน โดยมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน $\sigma^2 < \infty$ แล้ว

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

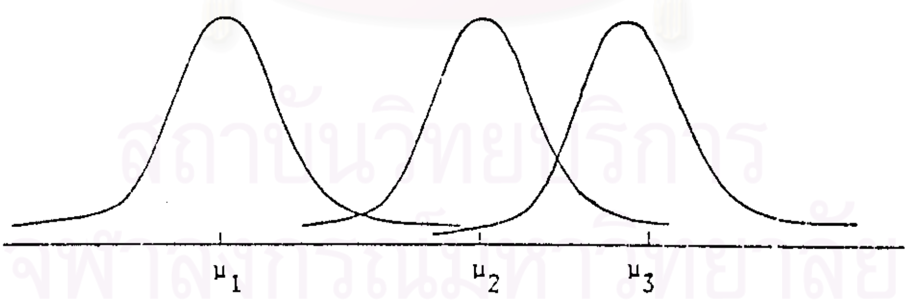
จะลู่เข้าในเชิงการแจกแจงสู่ตัวแปรสุ่มปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1 กล่าวคือ Z จะมีลิมิตการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (N(0, 1))

2.6.1 <u>คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบปกติ</u>

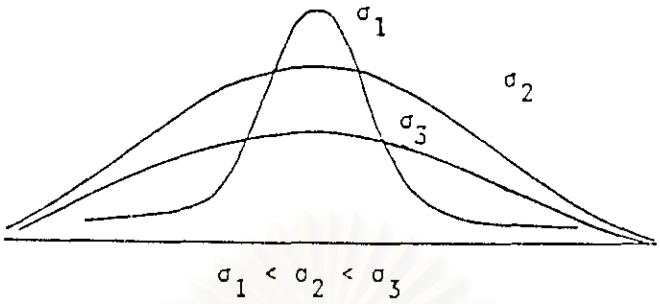
1. ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell Shap)
2. เส้นแบ่งครึ่งโค้งอยู่ที่จุดที่เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล และเส้นนี้ทำให้เส้นโค้งที่อยู่ทั้งสองข้างมีลักษณะสมมาตร (Symmetry)
3. ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมมีค่าเท่ากัน ซึ่งเท่ากับ μ
4. ค่าความโด่ง (Kurtosis) เท่ากับ 3 และจุดเปลี่ยนโค้งทั้งสองข้างอยู่ ณ ตรง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
5. ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับ 0
6. ปลายโค้งจะเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่าห่างจาก μ ออกไปแต่จะไม่ตัดกับแกนทั้งสองข้าง
7. ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากแกน x ไปยังเส้นโค้ง โดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากค่าเฉลี่ยด้านซ้ายและด้านขวาของระยะหนึ่งเท่า สองเท่าและสามเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน พื้นที่ที่ปิดกั้นด้วยเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68.27% , 95.45% และ 99.73% ของพื้นที่ทั้งหมดตามลำดับ
8. ค่าเฉลี่ย (μ) และความแปรปรวน (σ^2) เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนจะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งที่ตั้งของเส้นโค้งและลักษณะของเส้นโค้งว่าจะแบนหรือโด่งอย่างไร
9. ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_k$ คือ ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (N(0, 1)) และเป็นอิสระซึ่งกันและกันแล้ว $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$ จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระเท่ากับ k
10. ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ , $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ แล้ว e^X จะมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ นั่นคือ
$$e^X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$$
11. ถ้า $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ และ $Y \sim \chi^2_{(k)}$ โดยที่ X และ Y เป็นอิสระกันแล้ว $X/\sqrt{Y/k}$ จะมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาอิสระเท่ากับ k นั่นคือ
$$X/\sqrt{Y/k} \sim t_{(k)}$$



รูปที่ 2.1 พื้นที่โค้งของการแจกแจงแบบปกติ



รูปที่ 2.2 การแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าเฉลี่ยต่างกันแต่มีความแปรปรวนเท่ากัน



รูปที่ 2.3 การแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีความแปรปรวนต่างกันแต่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน

2.7 การแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution)

การแจกแจงแบบแกมมาเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องอีกการแจกแจงหนึ่งที่มีประโยชน์ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งการแจกแจงแกมมาเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่แสดงเวลาที่ต้องคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ n เหตุการณ์ เช่น ระยะเวลาที่ต้องใช้ในการบริการลูกค้า n คน ในร้านค้ามินิมาร์ทซึ่งเป็นแถวเดี่ยว เป็นต้น

ฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf) ของการแจกแจงแบบแกมมา คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} & ; \quad x>0, \alpha>0, \beta>0 \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ x เป็นค่าข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบแกมมา

α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape Parameter) ของการแจกแจง

β เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาด (Scale parameter) ของการแจกแจง

2.7.1 <u>คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบแกมมา</u>

1. ลักษณะของโค้งเปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์ α
2. ความแปรปรวนและค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มแกมมาขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α และ β โดยที่

   ค่าเฉลี่ย $= \alpha\beta$

   ความแปรปรวน $= \alpha\beta^2$
3. สัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรสุ่มแกมมาขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α โดยที่

   สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
4. ความเบ้ (Skewness) และความโด่ง (Kurtosis) ของตัวแปรสุ่มแกมมาขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α โดยที่

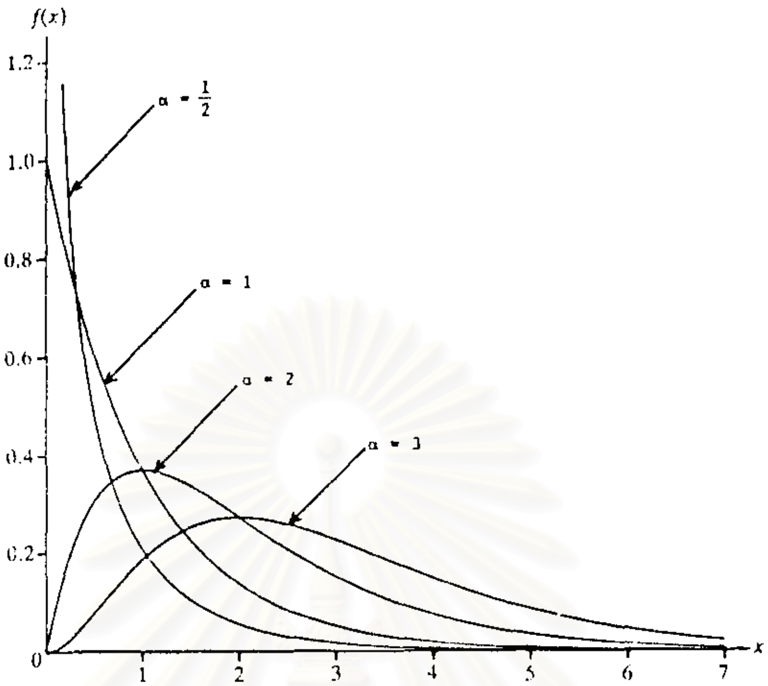
   ความเบ้ $= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$

   ความโด่ง $= 3 + \frac{6}{\alpha}$
5. การแจกแจงแกมมาที่มีค่า $\alpha = 1$ และ β เป็นค่าใด ๆ ที่มากกว่า 0 นั้นจะเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น β นั่นคือ

   Gamma (1, β) คือ exp (β)
6. การแจกแจงแกมมาที่มีค่า m เป็นจำนวนเต็มบวก และ β เป็นค่าใด ๆ ที่มากกว่า 0 นั้นจะเป็นการแจกแจงแบบเอ็มเออแลง (m-Erlang) ที่มีพารามิเตอร์เป็น β นั่นคือ

   Gamma (m, β) คือ m-Erlang (β)
7. การแจกแจงแกมมาที่มีค่า $\alpha = k/2$ และ $\beta = 2$ นั้นจะเป็นการแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-square Distribution) ที่มีองศาความเป็นอิสระ (df) เท่ากับ k

   Gamma ($k/2, 2$) คือ $\chi^2_{(k)}$



<u>รูปที่ 2.4</u> การแจกแจงแบบแกมมา เมื่อ $\alpha = 0.5, 1, 2, 3$ และ $\beta = 1$

2.8 การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

นักฟิสิกส์ชาวสวีเดนชื่อ Waloddi Weibull ได้แนะนำการแจกแจงนี้เมื่อ ค.ศ. 1939 ซึ่งเป็นการแจกแจงที่เกิดขึ้นเนื่องจากรูปแบบความเป็นจริงโดยทั่วไปสำหรับอายุการใช้งานของเครื่องจักรกลต่าง ๆ นอกจากนี้ยังมีประโยชน์มากในทางทฤษฎีความเชื่อถือได้ (Reliability)

ฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf) ของการแจกแจงแบบไวบูลล์ คือ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & ; \quad x>0, \alpha>0, \beta>0 \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ x เป็นค่าข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์

α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape Parameter) ของการแจกแจง

β เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาด (Scale parameter) ของการแจกแจง

2.8.1 <u>คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบไวบูลล์</u>

1. ลักษณะของโค้งเปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์ α
2. ความแปรปรวนและค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มไวบูลล์ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α และ β โดยที่

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\text{ความแปรปรวน} = \frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

3. สัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรสุ่มแกมมาขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α โดยที่

$$\text{สัมประสิทธิ์การแปรผัน} = \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}-1\right]$$

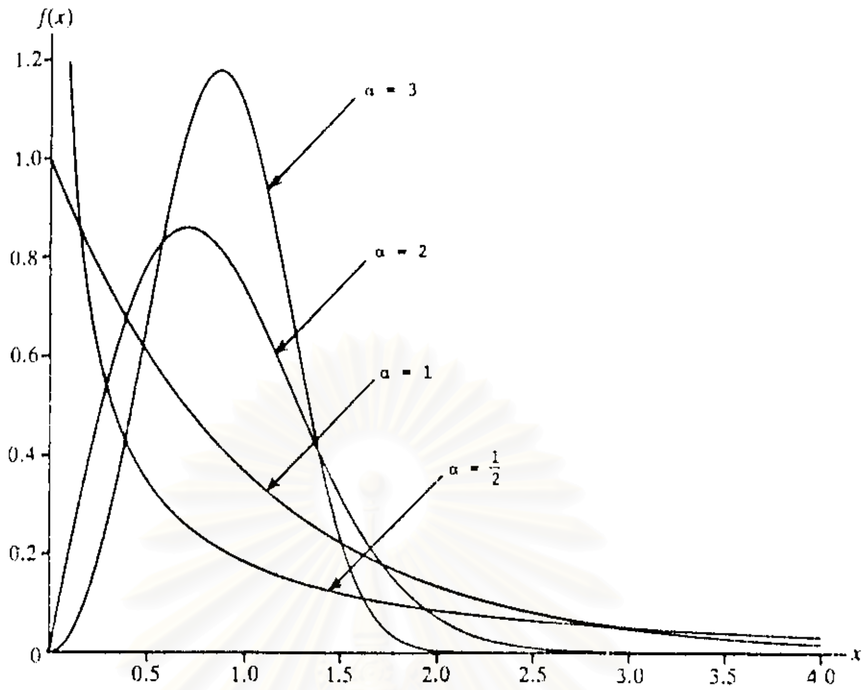
4. ความเบ้ (Skewness) และความโด่ง (Kurtosis) ของตัวแปรสุ่มไวบูลล์ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α โดยที่

$$\text{ความเบ้} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)\right]^{3/2}}$$

$$\text{ความโด่ง} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)\right]^{2}}$$

5. การแจกแจงไวบูลล์ ที่มีค่า $\alpha = 1$ และ β เป็นค่าใด ๆ ที่มากกว่า 0 นั้นจะเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์เป็น β นั่นคือ

Weibull (1, β) คือ exp (β)



<u>รูปที่ 2.5</u> การแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อ α = 0.5, 1, 2, 3 และ β = 1

2.9 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาเกี่ยวกับการทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันนั้น มีนักสถิติหลายท่านได้ทำการเสนอสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผัน รวมทั้งการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบสถิติทดสอบ โดยอาศัยความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ซึ่งส่วนใหญ่แล้วงานวิจัยนั้นจะใช้วิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Bennett (1976 : 169-171) ได้พัฒนาสถิติทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ k ประชากร ซึ่งสถิติทดสอบนี้เป็นสถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นที่ใช้การประมาณค่าการแจกแจงของสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวอย่าง ซึ่งเสนอโดย Mckay (1932)

Shafer และ Sullivan (1986 : 681-695) ได้ดัดแปลงสถิติทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันจากสถิติทดสอบ Bennett โดยอาศัยงานของ Iglewicz และ Myers (1970 : 166-169) เรียกสถิติทดสอบใหม่นี้ว่า สถิติทดสอบเบนเนตต์ดัดแปลง (Modified Bennett Test Statistic) และทำการศึกษาความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

หลังจากนั้นทำการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 2 ตัว คือ สถิติทดสอบเบนเนต และสถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลง พบว่าในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบทั้ง 2 ตัว มีความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เข้าใกล้ค่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผันอยู่ในช่วง (0, 1) และค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 2 ตัวไม่แตกต่างกันมากนักโดยที่สถิติทดสอบเบนเนตดัดแปลงมีอำนาจการทดสอบมากกว่าสถิติทดสอบเบนเนตเล็กน้อย กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบแกมมาและล็อกนอร์มอล ผลสรุปก็ไม่แตกต่างจากกรณีที่ประชากรแจกแจงแบบปกติมากนัก โดยเฉพาะเมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเล็ก เนื่องจากทั้งการแจกแจงแกมมาและล็อกนอร์มอลจะมีลักษณะโค้งรูประฆังคว่ำ (Bell Shape) แบบการแจกแจงปกติเมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเล็ก สำหรับกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม สถิติทดสอบทั้ง 2 ตัว ไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้

Doornbos และ Dijkstra (1983 : 147 : 158) ได้พัฒนาสถิติทดสอบความเท่ากันของสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ k ประชากร ขึ้น 2 ตัว ได้แก่ สถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Test Statistic) และสถิติทดสอบนอนเซ็นทรัลที (Noncentral t Test Statistic) และทำการศึกษาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ 25 จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n = 5$) สถิติทดสอบทั้ง 2 ตัว ไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ เมื่อศึกษาอำนาจการทดสอบ พบว่า สถิติทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบนอนเซ็นทรัลที