การวิเคราะห์ความคล้ายของการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควง
ในกระแสลมตามที่ไม่หมุนควง

นาย สุเมธ ไตรภพสกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-1297-7

SIMILARITY ANALYSIS OF SWIRLING LAMINAR JET
IN NONSWIRLING COFLOW

Mr. Sumeth Tripopsakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2001
ISBN 974-03-1297-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์ความคล้ายของการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ไม่หมุนควง

โดย นาย สุเมธ ไตรภพสกุล

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อศิ บุญจิตราดุลย์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ไชยะภินันท์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อศิ บุญจิตราดุลย์)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

สุเมธ ไตรภพสกุล : การวิเคราะห์ความคล้ายของการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ไม่หมุนควง
(SIMILARITY ANALYSIS OF SWIRLING LAMINAR JET IN NONSWIRLING COFLOW)
อ.ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อศิ บุญจิตราดุลย์ ; 230 หน้า
ISBN 974-03-1297-7

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาคุณลักษณะของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ไม่หมุนควง โดยศึกษาถึงผลจากการหมุนควงและกระแสลมตามที่มีต่อเจ็ต ในการศึกษาได้ใช้วิธีการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้โดยกำหนดให้ $u = u_m f(\eta) + u_1$ และ $w = w_m g(\eta)$ เพื่อใช้ในการเปลี่ยนรูประบบสมการจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและทำการแก้สมการโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและความดัน รวมทั้งความหนาและการลดลงของความเร็วเจ็ต ในการศึกษาได้แบ่งออกเป็น 3 กรณีตามสมมติฐานของระดับการหมุนควงที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ 1) ไม่หมุนควง 2) ระดับการหมุนควงต่ำ และ 3) ระดับการหมุนควงใดๆ ซึ่งระบุโดยค่าอัตราส่วนความเร็วตามแนวสัมผัสต่อความเร็วตามแนวแกน $(Sr = w_m / u_m)$ ในแต่ละกรณียังได้แบ่งการศึกษาออกเป็น 3 กรณีย่อยตามสมมติฐานของระดับความเร็วของกระแสลมตามคือ 1) ไม่มีกระแสลมตาม $(u_1 = 0)$ 2) กระแสลมตามมีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ตมาก $(u_1 >> u_m)$ และ 3) กระแสลมตามที่มีความเร็วใดๆซึ่งระบุโดยค่าอัตราส่วนความเร็วกระแสลมตามต่อความเร็วส่วนเกินเจ็ต $(\mathrm{V}r = u_1 / u_m)$

จากผลการศึกษาเจ็ตที่ไม่หมุนควง พบว่ารูปร่างการกระจายตัวความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะคล้ายแบบ Gaussian โดยจะมีการกระจายตัวที่แคบลงหรือเจ็ตบางลงเมื่อความเร็วของกระแสลมตามหรือ Vr เพิ่มขึ้น สาเหตุเนื่องจากเมื่อ Vr เพิ่มขึ้น การถ่ายเทโมเมนตัมตามแนวแกน x โดยการพาจะมากขึ้นเมื่อเทียบกับตามแนวแกน r หรืออีกนัยหนึ่ง ในขณะที่อากาศภายนอกหยุดนิ่งนั้นเจ็ตจะมีความเร็วแตกต่างจากความเร็วอากาศภายนอกจึงทำให้เกิดเป็น Shear layer ขึ้น แต่เมื่อมีกระแสลมตามจะทำให้ผลต่างของความเร็วเจ็ตกับความเร็วอากาศภายนอกมีค่าลดลง ดังนั้น Shear layer ที่เกิดขึ้นจึงมีกำลังลดลง ทำให้ความหนาเจ็ตลดลง

จากผลการศึกษาเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ พบว่ารูปร่างการกระจายตัวความเร็วตามแนวแกนจะมีลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง ส่วนรูปร่างการกระจายตัวความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ามีลักษณะของ Rankine vortex โดยรูปร่างการกระจายตัวความเร็วตามแนวสัมผัสจะแคบลงเมื่อความเร็วกระแสลมตามเพิ่มขึ้น นอกจากนั้นเมื่อพิจารณาค่าผลต่างความดันไร้มิติ $((p_\infty - p)/\rho w_m^2)$ บริเวณแกนเจ็ตพบว่ามีค่าคงที่ที่เป็นบวก แต่เนื่องจากความเร็วตามแนวสัมผัสมีการลดลงในลักษณะ $w_m \propto x^{-2}$ ดังนั้นค่าผลต่างความดัน $(p_\infty - p)$ จึงมีค่าลดลงในอัตราที่เท่ากัน หรืออีกนัยหนึ่ง ความดันมีค่าเพิ่มขึ้นตามแนวแกนเจ็ต จึงทำให้เกิด Adverse pressure gradient ตามแนวแกนเจ็ตขึ้น

จากผลการศึกษากรณีเจ็ตที่หมุนควงโดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr ซึ่งแบ่งการศึกษาออกเป็น การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นและสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยในกรณี $u_1 = 0$ เมื่อใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น พบว่ารูปร่างกระจายตัวความเร็วตามแนวแกนมีการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ที่มีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น และที่ Sr สูงนั้นพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนสูงสุดจะเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต ทำให้เกิดเป็น Wake component ที่บริเวณแกนเจ็ต สำหรับรูปร่างการกระจายตัวความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะของ Rankine vortex ที่แคบลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งเมื่อ Sr เพิ่มขึ้นทำให้แกนของ vortex รัดตัวแน่นขึ้น แต่เมื่อใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมกลับพบว่าผลที่ได้มีลักษณะแตกต่างจากผลการคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น สำหรับกรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr ในกรณีที่ใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น พบว่าเมื่อ Sr เพิ่มขึ้นจะทำให้เจ็ตมีการกระจายตัวเพิ่มขึ้นหรือเจ็ตหนาขึ้น แต่เมื่อ Vr เพิ่มขึ้นการกระจายตัวของเจ็ตจะลดลงหรือเจ็ตบางลง หรืออีกนัยหนึ่ง การหมุนควงและกระแสลมตามจะมีผลต่อการกระจายตัวของเจ็ตในทิศทางตรงข้ามกัน นอกจากนี้ยังพบว่าที่ Sr ต่ำ เมื่อค่า Vr มีค่าสูงขึ้นกระแสลมตามจะมีผลต่อการกระจายตัวของเจ็ตมากกว่าผลจากการหมุนควง ดังนั้นจึงทำให้เจ็ตมีคุณลักษณะคล้ายเจ็ตที่ไม่หมุนควง สำหรับกรณีที่คำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม พบว่าผลที่ได้มีลักษณะแตกต่างจากผลการคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต..............................

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..............................

ปีการศึกษา 2544 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม..............................

4170598721 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORD : SWIRLING JET/ SIMILARITY JET/ SWIRLING JET IN COFLOW

SUMETH TRIPOPSAKUL : SIMILARITY ANALYSIS OF SWIRLING LAMINAR JET IN NONSWIRLING COFLOW
THESIS ADVISOR : ASST. PROF. ASI BUNYAJITRADULYA, Ph.D., 230 pp.
ISBN 974-03-1297-7

Effects of swirl and coflow on the characteristics of swirling jet in nonswirling coflow were investigated. Similarity analysis with similarity transformations $u = u_m f(\eta) + u_1$ and $w = w_m g(\eta)$ was used in order to transform the system of governing partial differential equations (PDE) into the system of ordinary differential equations (ODE). The system of ODE was then solved numerically for velocity and pressure profiles, and for growth and velocity decay rates. The analysis was performed for 3 cases according to the assumption regarding swirl: 1) no swirl, 2) weak swirl, and 3) any swirl, as specified by the ratio between the tangential velocity and the axial velocity $(Sr = w_m / u_m)$. Each case is further analyzed for another 3 subcases according to the assumption regarding coflow: 1) no coflow $(u_1 = 0)$, 2) strong coflow $(u_1 >> u_m)$, and 3) any coflow, as specified by the ratio between the coflow velocity and the jet excess velocity $(\mathrm{V}r = u_1 / u_m)$.

The results for nonswirling jet showed that the axial velocity profile was similar to Gaussian curve, which became narrower as $\mathrm{V}r$ increased. This was due to the relative increase of the convection of *x*-momentum along the axial direction as opposed to that along the radial direction as $\mathrm{V}r$ increased. From another viewpoint, the velocity difference between the jet and the coflow induced shear layer. As a result, when the coflow velocity increased, the velocity difference decreased, causing a reduction in strength of the shear layer and, consequently, the thickness of the jet.

The results for weak swirling jet showed that the axial velocity profile was similar to that of nonswirling jet and the tangential velocity profile was Rankine-vortex-like. In addition, the tangential velocity profile became narrower as the coflow velocity increased. Furthermore, the dimensionless pressure difference $((p_\infty - p)/\rho w_m^2)$ on the jet axis was found to be a positive constant. Since the tangential velocity w_m decreased as x^{-2}, $(p_\infty - p)$ decreased at the same rate. This implied that the pressure along the jet axis increased in the downstream direction, creating an adverse pressure gradient along the jet axis.

In the analysis for general swirling jet, two integral constraints: linear momentum and angular momentum constraints, were alternately used. In case of no coflow, with linear integral momentum constraint, the axial velocity profile was similar to Gaussian curve, which became wider as Sr increased. At high Sr, the position of the maximum axial velocity deviated from the jet axis, resulting in a wake component at the center. In addition, the tangential velocity profile was similar to Rankine-vortex, which became narrower as Sr increased. In other words, increasing of Sr intensified the vortex core. When the angular momentum constraint was used, the solution differed from that of the linear momentum constraint. In the case of general coflow $(\mathrm{V}r)$, the results for linear momentum constraint indicated that, as Sr increased, the growth rate of the jet increased. On the contrary, as $\mathrm{V}r$ increased, the growth rate of the jet decreased. In other words, swirl and coflow had counter effect. Furthermore, at low Sr, as $\mathrm{V}r$ increased, the coflow became more influential on the growth rate of the jet than the swirl. As a result, the characteristics of the jet became similar to nonswirling jet. When the angular momentum constraint was used in this case, the solution differed from that of the linear momentum constraint.

Department .... Mechanical .... Student's signature ....
Fields of study .... Mechanical .... Advisor signature ....
Academic year .... 2001 .... Co-advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งในทุกๆด้าน จากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ของผู้วิจัย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อศิ บุญจิตราดุลย์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้ช่วยเหลือดูแลการทำงาน ให้ความรู้ และคำแนะนำต่างๆที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยตลอดจนเรื่องอื่นๆที่จะเป็นประโยชน์ในการดำเนินชีวิตของผู้วิจัยต่อไปในอนาคต

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ อาจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ ที่ได้เอื้อเฟื้อและแนะนำสิ่งต่างๆที่เป็นประโยชน์ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ในเนื้อหามากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณกลุ่มบุคคลในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์ของไหล อันประกอบไปด้วย พี่ เพื่อน และน้อง ที่มีน้ำใจ ห่วงใย และเอื้อเฟื้อเผื่อแผ่ต่อผู้วิจัยเป็นอย่างดี ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ พี่เกียรติศักดิ์ กอบกาญจนากร พี่ทศพล สถิต สุวงศ์กุล และพี่ อลงกรณ์ พิมพ์พิณ ที่ให้คำปรึกษาในทุกๆด้าน พงศ์พฤทธิ์ อุปถัมภ์นรากร วีรินทร์ หวังจิรนิรันดร์ สุทธิโชค นันทสุขเกษม ที่ได้ฝ่าฟันอุปสรรคตลอดการทำงานร่วมกันมา รวมทั้ง ปรมะ พรหมสุทธิรักษ์ ปิติพงศ์ เย็นจิตต์ ชมพิชาน์ คูหิรัญ สิทธิพงษ์ สถาพรนานนท์ สุพจน์ เทพพิพัฒน์ อีกทั้งทั้งขอขอบพระคุณบุคลากรทุกคน ซึ่งไม่สามารถยกมากล่าวได้หมดในที่นี้ ที่ได้ช่วยเหลืองานในด้านต่างๆทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี

ในท้ายที่สุด ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา พี่และน้องของข้าพเจ้า ผู้ซึ่งให้กำลังใจ ความเข้าใจ และทุนทรัพย์ รวมทั้งให้การสนับสนุนในทุกๆด้านแก่ผู้วิจัย จึงทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี

สุเมธ ไตรภพสกุล

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

รายการสัญลักษณ์

u, v, w	ความเร็วตามแนวแกน, ตามแนวรัศมี และตามแนวสัมผัสของเจ็ตในระบบพิกัดทรงกระบอก x, r, θ
$U, \bar{u}$	ความเร็วตามแนวแกนเจ็ต
$U_{m0}, u_m, u_{\max}$	ความเร็ว Maximum ตามแนวแกนเจ็ต
U_{tophat}	ความเร็ว Maximum ตามแนวแกนเจ็ตที่มีรูปร่าง Top-hat shape
$\bar{u}_0$	ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตปากทางออกเจ็ต
u_j	ความเร็วที่ทางออกของเจ็ต
u_c	ความเร็ว Centerline เจ็ต
$u_{\min}$	ความเร็ว Minimum ตามแนวแกนเจ็ต
u_0	ความเร็วตามแนวแกนเจ็ต ณ ตำแหน่ง x เท่ากับ 0
w_0	ความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ต ณ ตำแหน่ง x เท่ากับ 0
b_0	ความกว้างของเจ็ต ณ ตำแหน่ง x เท่ากับ 0
W_{m0}, w_m	ความเร็ว Maximum ตามแนวสัมผัสของเจ็ต
$U_\infty, u_1, \bar{u}_s, u_s$	ความเร็วอากาศด้านนอก
$\mathrm{v}_r, \mathrm{v}_\theta, \mathrm{v}_\lambda$	ความเร็วตามแนวแกน r, ตามแนวแกน θ และตามแนวแกน λ ในระบบพิกัดทรงกลม
p	ค่าความดันสถิต
p_m	ค่า Maximum ความดันสถิต
p_∞	ค่าความดันบรรยากาศ
D, d, d_0	เส้นผ่าศูนย์กลางปากเจ็ต
$b, r_{\frac{1}{2}m}, y_{0.5}, L_0$	ระยะตามแนวรัศมี ณ ตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่า 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum
r	ระยะตามแนวรัศมี
r_1, r_2	รัศมีภายในและภายนอกของ Mixing region
R, r_0	รัศมีปากเจ็ต
$F(\eta),\ f(\eta)$	Similarity function ความเร็วตามแนวแกนเจ็ต
$g(\eta)$	Similarity function ความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ต

Re, Re_c	เรโนลย์นัมเบอร์ (Reynolds number)
Re_0	เรโนลย์นัมเบอร์ ณ ตำแหน่ง x เท่ากับ 0.01
S	สเวิลด์นัมเบอร์ (Swirl number)
Sr	Swirl ratio
$\mathrm{V}r$	Velocity ratio
$\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)_0$	Swirl ratio ที่ตำแหน่ง x เท่ากับ 0.01
$\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)_0$	Velocity ratio ที่ตำแหน่ง x เท่ากับ 0.01
x	ระยะตามแนวแกนเจ็ต
X_c	ตัวแปรไร้มิติ (Nondimension coordinate)
x_p	ความยาวของระยะ Potential core
l	Mixing length
L	Characteristic length scale ในทิศตามแกน x
k_p	สัมประสิทธิ์การลดลงของความดันสถิต
k_u	สัมประสิทธิ์การลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ต
$k_{u_m}, k_{u_m f}$	ค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของสมการ Similarity จากความเร็ว u_m
$k_{w_m}, k_{w_m f}, k_{w_m s}$	ค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของสมการ Similarity จากความเร็ว w_m
k_b, k_{bf}, k_{bs}	ค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของสมการ Similarity จาก b
I_1, I_2, I_5	ค่าคงที่จากการอินทิเกรตในสมการโมเมนตัมเชิงเส้น
I_3, I_4	ค่าคงที่จากการอินทิเกรตในสมการโมเมนตัมเชิงเส้น

อักษรกรีก

τ_t	Turbulent viscosity
η, ξ	ตัวแปรไร้มิติ
ρ	ความหนาแน่น
ν	Kinematics viscosity
ψ	Stream function
μ, λ	Velocity ratio
α	สัมประสิทธิ์การ Entrainment
ε_r	Dissipation rate ที่ระดับอ้างอิง

ตัวห้อย

b	ระยะตามแนวรัศมี ณ ตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่า 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum
u_m	ความเร็ว Centerline ตามแนวแกนเจ็ต
w_m	ความเร็ว Maximum ตามแนวสัมผัส
u_1	ความเร็วอากาศด้านนอก
bf	ระยะตามแนวรัศมี ณ ตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่า 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่
$u_m f$	ความเร็ว Centerline ตามแนวแกนเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่
$w_m f$	ความเร็ว Maximum ตามแนวสัมผัสในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่
$u_1 f$	ความเร็วอากาศด้านนอก ในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่
bs	ระยะตามแนวรัศมี ณ ตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่า 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ในกรณีที่เปลี่ยนแปลง Sr
$w_m s$	ระยะตามแนวรัศมี ณ ตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่า 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ในกรณีที่เปลี่ยนแปลง Sr

บทที่ 1

บทนำ

1.1 บทนำ

ในอดีตที่ผ่านมาได้มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการไหลของเจ็ตอย่างแพร่หลาย เนื่องจากการไหลแบบเจ็ตนี้เป็นลักษณะการไหลที่มีการพบเห็นได้ทั่วไปและมีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในงานทางวิศวกรรม เช่น ในหัวฉีดเชื้อเพลิง หัวฉีดเพื่อการผสม หัวจ่ายในระบบปรับอากาศ ฯลฯ นอกจากนั้นลักษณะการไหลแบบเจ็ตยังพบได้ในระบบหรือส่วนที่วิศวกรและบุคคลทั่วไปอาจยังไม่ตระหนักถึงความสำคัญ ซึ่งอาจมีสาเหตุจากการที่เจ็ตเหล่านี้เป็นที่พบเห็นได้โดยทั่วไปอย่างมากจนเกิดความเคยชิน เช่น การปล่อยน้ำเสีย หรือน้ำหล่อเย็นลงสู่แม่น้ำ การปล่อยควันสู่บรรยากาศ ซึ่งการปล่อยน้ำหรืออากาศในลักษณะนี้ก็จะมีลักษณะเป็นการไหลแบบเจ็ต ซึ่งในกรณีของเจ็ตเหล่านี้เป็นที่ทราบกันดีว่ามีผลกระทบอย่างสูงต่อสิ่งแวดล้อม เนื่องจากลักษณะการไหลของเจ็ตที่เกิดขึ้นนั้นจะเป็นตัวกำหนดลักษณะของการแพร่กระจาย ระดับความเข้มข้น (Concentration) ของน้ำร้อน (น้ำที่อุณหภูมิสูงกว่าสิ่งแวดล้อม) หรือควันพิษ สู่สิ่งแวดล้อมรอบข้าง

อนึ่ง ลักษณะของเจ็ตที่ได้มีการศึกษาวิจัยในอดีตมักจะอยู่ในรูปแบบของเจ็ตที่ปล่อยสู่บรรยากาศที่หยุดนิ่งรอบข้าง (Simple or Free jet) หรือเจ็ตที่ปล่อยไปในทิศทางเดียวกับลมรอบข้าง (Jet in coflow) โดยปริมาณการศึกษาวิจัยในแต่ละลักษณะของเจ็ตมีการลดหลั่นกันไปตามลำดับ ซึ่งในการศึกษาวิจัยเหล่านี้ได้มีการศึกษาเกี่ยวกับคุณลักษณะที่สำคัญของเจ็ต คือ คุณลักษณะด้านการผสม (หัวฉีดเพื่อการผสม) และการแพร่กระจายของมลภาวะ ดังกล่าวข้างต้น โดยได้มีการอ้างอิงเปรียบเทียบลักษณะการผสมจากคุณลักษณะและปริมาณต่างๆ เช่น การแพร่กระจายของเจ็ต การลดลงของค่าความเร็วเฉลี่ย และระดับความปั่นป่วนของการไหล (Turbulence intensity)

อย่างไรก็ตาม การศึกษาลักษณะของเจ็ตแบบที่ปล่อยทิศทางเดียวกับลมรอบข้างตามที่ได้มีการศึกษากันมาบ้างแล้วนั้น ซึ่งนอกเหนือจากศักยภาพในการประยุกต์ใช้งานของเจ็ตแบบนี้ในงานทางด้านเครื่องกลและเคมีที่เกี่ยวเนื่องกับการผสมของอากาศกับเชื้อเพลิง และของสารเคมี ยังพบในงานทางด้านสิ่งแวดล้อม เช่น การปล่อยน้ำเสียลงสู่แม่น้ำและมหาสมุทรอีกด้วย

นอกจากนั้น เป็นที่ทราบกันดีว่าการไหลแบบหมุนควง (Swirling flow) มีส่วนอย่างมากในการเพิ่มประสิทธิภาพการผสม ดังจะเห็นได้จากผลการศึกษาวิจัยในอดีต (ตัวอย่างเช่น Feyedalem and Sarpkaya, 1997 และ Billant et al., 1998 เป็นต้น) และการประยุกต์ใช้การไหลแบบหมุนควงใน

งานจริงในปัจจุบันเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการผสมของอากาศกับน้ำมันเชื้อเพลิงทำให้การเผาไหม้ในเครื่องยนต์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ด้วยความรู้ความเข้าใจในเรื่องของเจ็ตที่ไหลแบบหมุนควงในกระแสลมตามมีศักยภาพของการนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์สูง การศึกษาวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่การศึกษาคุณลักษณะการผสมของเจ็ตในลักษณะนี้ โดยจะศึกษาถึงผลของความเร็วในการหมุนควงและความเร็วอากาศด้านนอก (Coflow) ต่อคุณลักษณะของเจ็ต

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อทำการศึกษาวิเคราะห์คุณลักษณะของการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควง (Laminar swirling jet) ที่มีความสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric) ทั้งในกรณีที่ไม่มีและมี Coflow ด้วยวิธีวิเคราะห์แบบซิมิลาริตี้ โดยจะศึกษาถึงผลของการหมุนควงและผลของ Coflow ต่อคุณลักษณะของเจ็ต

1.3 แนวทางของการทำวิจัย

ในการศึกษาจะทำการศึกษาโดยการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ โดยกำหนดรูปแบบของตัวแปรซิมิลาริตี้ดังนี้

$u = u_1 + u_m f$ (ความเร็วตามแนวแกน)

$w = w_m g$ (ความเร็วตามแนวสัมผัส)

และกำหนดค่า Swirl ratio และ Velocity ratio ของเจ็ตเป็น

$$\text{Swirl ratio (Sr)} = \frac{w_m}{u_m}$$

$$\text{Velocity ratio (Vr)} = \frac{u_1}{u_m}$$

โดย u_1 คือ ความเร็วของอากาศด้านนอก

u_m คือ ความเร็ว Centerline ตามแนวแกนเจ็ต

w_m คือ ความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด

จากนั้นทำการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้และแก้สมการเพื่อหารูปร่างการกระจายตัวของทั้งความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัสที่ระดับของการหมุนและอัตราส่วนความเร็วอากาศต่างๆกัน

1.4 ขอบเขตงานวิจัย

1. ทำการศึกษาโดยเริ่มพิจารณาจากสมการ Navier-Strokes ในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยทำการกำหนดสมมติฐานของการไหลของอากาศเป็นดังนี้
    - การไหลแบบอัดตัวไม่ได้
    - เป็นการไหลแบบคงตัว
    - เป็นการไหลที่มีความสมมาตรรอบแกน
    - เป็นการไหลแบบราบเรียบ
2. ทำการวิเคราะห์ Order of magnitude ของสมการ Navier-Strokes เพื่อหาขนาดประมาณของแต่ละเทอมและละทิ้งเทอมที่มีขนาดน้อยเพื่อให้สะดวกในการวิเคราะห์ Similarity ต่อไป
3. ทำการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ โดยกำหนดตัวแปรที่เหมาะสมเพื่อใช้ในการเปลี่ยนรูปสมการพื้นฐานการไหลที่เป็นสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial differential) ให้เป็นสมการอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential)
4. ทำการวิเคราะห์หา Growth rate และ Velocity decay จากเงื่อนไข Similarity
5. ทำการวิเคราะห์หา Velocity profile โดยการแก้สมการอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential) โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
6. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้

1.5 เป้าหมายของงานวิจัย

ผลการศึกษาทางทฤษฎีที่ได้จะเป็นความรู้ ความเข้าใจ และข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับผลของการหมุนควง (Swirl) และผลของ Coflow ที่มีต่อคุณลักษณะของการไหลในรูปแบบของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม (Coflow) ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยอื่นๆที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน

ข้อมูลทางทฤษฎีดังกล่าว จะเป็นแนวทางในการพัฒนาออกแบบและการปรับปรุงประสิทธิภาพของการผสมระหว่างเชื้อเพลิงกับอากาศสำหรับกระบวนการเผาไหม้ในห้องเผาไหม้ การผสมของสารเคมี ฯลฯ รวมถึงเป็นแนวทางในการควบคุมการไหล (Flow control)

บทที่ 2

งานวิจัยที่ผ่านมา

2.1 งานวิจัยที่ผ่านมา

เจ็ตที่หมุนควง (Swirling jet) เป็นการไหลที่สามารถพบได้โดยทั่วไปตามธรรมชาติ เช่น การไหลในแกนกลางของพายุทอร์นาโด และในทางวิศวกรรม เช่น การฉีดของหัวฉีดเชื้อเพลิง โดยผลของการหมุนควงของเจ็ตจะทำให้เกิดการดึงเอาอากาศจากบริเวณรอบๆด้านข้างเข้ามาผสมกับอากาศภายในเจ็ตได้ดีขึ้น สำหรับเจ็ตที่หมุนควง (Swirling jet) นั้นจะเป็นการรวมคุณลักษณะของการหมุนและปรากฏการณ์ต่างๆที่พบในเจ็ตเข้าไว้ด้วยกัน เมื่อมีการหมุนควงเกิดขึ้นกับของไหลที่ถูกฉีดออกจากหัวฉีด ของไหลที่ปรากฏจะมีความเร็วตามแนวสัมผัสเพิ่มขึ้นจากความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวรัศมีที่พบได้โดยทั่วไปในเจ็ตที่ไม่มีการหมุน และผลจากการหมุนควงนี้ยังทำให้เกิด Pressure gradient ตามแนวแกนและตามแนวรัศมีขึ้น สำหรับพารามิเตอร์สำคัญที่ใช้ในการบ่งบอกระดับการหมุน คือ Swirl number ซึ่งกำหนดให้เป็นอัตราส่วนระหว่างฟลักซ์ตามแนวแกนของโมเมนตัมตามแนวสัมผัสต่อฟลักซ์ตามแนวแกนของโมเมนตัมตามแนวแกนเจ็ต

$$Swirl\ \ number = \frac{Axial\ \ flux\ \ of\ \ Tangential\ \ momentum}{Axial\ \ flux\ \ of\ \ Axial\ \ momentum}$$

หรือ Swirl ratio ซึ่งกำหนดให้เป็นอัตราส่วนระหว่างความเร็วตามแนวสัมผัสต่อความเร็วตามแนวแกนเจ็ต

$$Swirl\ \ ratio = \frac{Tangential\ \ \ velocity}{Axial\ \ \ velocity}$$

ในการศึกษา Swirling jet ที่ผ่านมานั้นได้มีการแบ่งการศึกษาออกเป็น Weak swirling jet และ Strong swirling jet โดยในกรณีของ Strong swirling jet นั้นพบว่า Adverse pressure gradient ตามแนวแกนมีค่ามากพอซึ่งทำให้เกิดปรากฏการณ์ Vortex breakdown ซึ่งเป็นบริเวณที่มีการหมุนวนที่เรียกว่า Recirculation zone ขึ้น โดยสามารถแสดงได้ดังในรูปที่ 2.1 ซึ่งได้มาจากการทำ Flow visualization ของ swirling jet ที่ Swirl number เท่ากับ 1.42 (Billant et al., 1998)

สำหรับผลของการหมุนที่มีต่อคุณลักษณะของเจ็ตนั้นจะทำให้มุมของการแพร่กระจายของเจ็ต (Jet angle) เพิ่มมากขึ้นเมื่อค่า Swirl number ของเจ็ตเพิ่มขึ้นซึ่งสอดคล้องกับการเพิ่มขึ้นของการแพร่กระจายของเจ็ต นอกจากนี้ยังทำให้เกิดการดึงเอาอากาศบริเวณรอบๆของเจ็ตเพิ่มขึ้นด้วยเป็นเหตุให้

การลดลงของความเร็วของเจ็ตเร็วขึ้น รูปที่ 2.2 แสดงการลดลงของค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสและความเร็วตามแนวรัศมีตลอดความยาวของเจ็ตที่ค่า Swirl number ต่างๆกัน จากผลการศึกษาทางทฤษฎีของ Loitsyanski (1953) พบว่าการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวรัศมีมีการลดลงแปรผันกับ x^{-1} ความเร็วตามแนวสัมผัสมีการลดลงแปรผัน x^{-2} และความดันมีการลดลงแปรผัน x^{-4}

2.1.1 การศึกษาคุณลักษณะของเจ็ต

Schilchting (1968) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับ Laminar circular jet ที่มีความสมมาตรรอบแกน โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้เพื่อทำการลดรูปสมการ Navier-strokes ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential) โดยกำหนดให้ Stream function มีค่าเป็น $\psi = \nu x F(\eta)$ และ $\eta = y/x$ โดยที่ $F(\eta)$ เป็น Similarity function จากผลการศึกษาพบว่าการลดลงของค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตจะมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x $(b \propto x)$ นอกจากนี้ยังได้ศึกษาในกรณีที่เป็น Turbulent โดยนำทฤษฎี Prandtl's mixing length มาใช้ในการวิเคราะห์ ซึ่งกำหนดให้ $\tau_t = \rho l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial u}{\partial y}$ โดยที่ τ_t คือ Turbulent viscosity และ l คือ Mixing length จากการศึกษาพบว่าการลดลงของค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตจะมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x $(b \propto x)$ เช่นเดียวกับกรณีของ Laminar

Beer and Chigier (1972) ได้ทำการศึกษา Turbulent free jet พบว่าสามารถแบ่งลักษณะบริเวณต่างๆของ Circular jet ได้ดังรูปที่ 2.3 โดยที่ระยะใกล้ปากเจ็ตจะเกิดบริเวณที่เรียกว่า Potential core ซึ่งภายในบริเวณนี้ความเร็วของเจ็ตที่ออกมามีลักษณะสม่ำเสมอส่วนบริเวณด้านนอกจะมีการพัฒนาของ Mixing layer ซึ่งจะมีการถ่ายเทโมเมนตัมและมวลตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของการไหลของเจ็ต ในบริเวณ Fully developed region ซึ่งอยู่ถัดจาก Transition region ที่บริเวณนี้จะพบว่ามีลักษณะ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวรัศมี สำหรับความยาวของ Potential core และ Transition region มีค่าประมาณ 4-5 และ 10 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อซึ่งจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขภาวะเริ่มต้น เช่น ระดับ Turbulence ของเจ็ตที่ถูกฉีดออกจาก Nozzle นอกจากนี้ยังได้ศึกษาในกรณีของเจ็ตในกระแสลมขนาน (Parallel stream) ซึ่งพบว่าการผสมจะขึ้นอยู่กับ Velocity gradient คือ ในขณะที่ความเร็วของอากาศด้านนอกเพิ่มขึ้น

Velocity gradient และการผสมระหว่างเจ็ตกับอากาศด้านนอกจะลดลงจนกระทั่งมีค่าน้อยมากเมื่อความเร็วของเจ็ตและอากาศด้านนอกมีค่าเท่ากัน แต่เมื่อความเร็วของอากาศด้านนอกเพิ่มมากขึ้นจนมากกว่าความเร็วเจ็ตจะทำ Velocity gradient และการผสมเพิ่มขึ้น สำหรับอัตราการแพร่กระจาย (Spreading rate) และอัตราการลดลงของความเร็วของเจ็ตจะลดลงเมื่อ Velocity gradient มีค่าลดลง

Rajaratnam (1976) ได้ทำการศึกษาลักษณะของ Circular jet พบว่าสามารถแบ่งลักษณะของเจ็ตได้ 3 บริเวณ ดังรูปที่ 2.4 คือ Potential core region ซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเร็วสม่ำเสมอ Flow development region ซึ่งเป็นบริเวณที่อยู่ใกล้ทางออกของเจ็ตและเป็นบริเวณที่การไหลมีการพัฒนาของ Shear layer เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของความเร็วของเจ็ตกับอากาศด้านนอก Fully developed flow ซึ่งเป็นบริเวณที่พบว่าการไหลมีลักษณะ Similarity โดยความเร็วของเจ็ตจะมีค่ามากสุดที่แกนเจ็ต และความเร็วจะลดลงเมื่อระยะห่างจากแกนมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของ Corrsin (1946), Hinze and Zijnen (1949), Albertson et al. (1950) และAbramovich (1963)

นอกจากนี้ยังได้ทำการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยใช้การวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ซึ่งกำหนดให้ความเร็วมีค่าเป็น $u = u_m(x)f(\eta)$ โดยที่ $f(\eta)$ เป็น Similarity function พบว่าการลดลงของค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนแปรผันกับระยะตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตแปรผันกับระยะตามแนวแกน x $(b \propto x)$ นอกจาก Free circular jet แล้ว Rajaratnam ยังได้ทำการศึกษาลักษณะของ Plane และ Circular jet ที่อากาศด้านนอกมีการเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับเจ็ต โดยเรียกว่า Compound jet ซึ่งสามารถแบ่งลักษณะของเจ็ตได้เป็น 3 บริเวณเช่นเดียวกับ Free plane jet และ Free circular jet ดังรูปที่ 2.5 โดยในบริเวณ Fully developed พบการไหลมีลักษณะ Similarity ของความเร็วซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองของ Bradbury (1965) สำหรับกรณีของ Plane compound jet และ Tani and Kobashi (1951) สำหรับกรณีของ Circular compound jet เมื่อทำการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยใช้การวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ซึ่งกำหนดให้ความเร็วมีค่าเป็น $u = u_m(x)f(\eta) + u_1$ โดยที่ u_1 เป็นความเร็วของอากาศด้านนอก พบว่าในกรณี Weak jet $(u_1 > u_m)$ นั้นการลดลงของค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนแปรผันกับระยะตามแนวแกน $x^{-2/3}$ $(u_m \propto x^{-2/3})$ และความกว้างของเจ็ตแปรผันกับระยะตามแนวแกน $x^{1/3}$ $(b \propto x^{1/3})$ ส่วนในกรณี Strong jet $(u_1 < u_m)$ นั้นการลดลงของค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนแปรผันกับระยะตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตแปรผันกับระยะตามแนวแกน x $(b \propto x)$

Rankin et al. (1983) ได้ทำการทดลองศึกษาเกี่ยวกับ Laminar submerged jet โดยทดลองในระบบปิดที่ใช้ของไหลเป็นน้ำซึ่งน้ำจะถูกฉีดออกจากท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน (d) 6.35 mm และยาว (l) 2.43 m เพื่อให้ l/d มีค่าเท่ากับ 383 ซึ่งจากการศึกษาของ Langhaar (1942) พบว่าที่อัตราส่วนนี้จะทำให้รูปร่างความเร็วที่ทางออกมีลักษณะเป็นพาราโบลาที่ค่า Reynolds number ต่ำกว่า 6,600 ในการศึกษาได้ทำ Flow-visualization เพื่อหาขอบเขตของเจ็ตและใช้ Laser doppler anemometer (LDA) ในการวัดความเร็ว Center line และตำแหน่งที่มีความเร็วเป็น 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ($r_{\frac{1}{2}m}$) ที่ค่า Reynolds number (Re_c) และตำแหน่ง X_c ต่างๆ โดยกำหนดให้ $\mathrm{Re}_c = u_{\max} d/\nu$ และ $X_c = (x/d)\mathrm{Re}_c^{-1}$ และนำผลการทดลองที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของ Schlichting (1968) จากผลการทดลองพบว่าลักษณะรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตที่บริเวณใกล้ทางออกของเจ็ต X_c เท่ากับ 0.05 ที่ค่า Re_c เท่ากับ 1,000, 1,500 และ 2,000 จะมีลักษณะเป็นพาราโบลา แต่เมื่อระยะ X_c เพิ่มขึ้นเท่ากับ 0.01 ซึ่งอยู่ในบริเวณ Development region ลักษณะรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนจะมีการเปลี่ยนแปลงจากพาราโบลาเข้าใกล้ Gaussian profile จนเมื่อ X_c เท่ากับ 0.018 พบซิมิลาริตี้ของความเร็วตามแนวแกนและลักษณะรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วจะมีค่าสอดคล้องกับผลของ Schlichting นอกจากนี้ยังพบว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของเจ็ตที่ออกมาในช่วงแรกนั้นจะมีค่าลดต่ำลงกว่าในช่วงที่ออกจากปากเจ็ตแต่เมื่อระยะห่างจากปากเจ็ตมากขึ้นโมเมนตัมจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นและมีค่าคงที่ที่บริเวณ Far field

Paullay et al. (1985) ทำการศึกษาหา Similarity solution ของ Turbulent plane jet และ Radial jet โดยใช้ $k-\varepsilon$ model และการแทนค่าด้วยตัวแปรซิมิลาริตี้ (Similarity variable) ซึ่งทำให้ลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จากนั้นจึงทำการแก้สมการหาการกระจายตัวของความเร็ว Turbulent kinetic energy และ Dissipation rate นอกจากนี้ยังพิจารณาอัตราการลดลงของความเร็ว อัตราการแพร่กระจายของเจ็ต (Growth rate) และอัตราการ Entrainment ซึ่งในการคำนวณได้แบ่ง Grid คำนวณทั้งสิ้น 801 Grid จากผลการคำนวณพบว่าอัตราการลดลงของความเร็ว อัตราการแพร่กระจาย และอัตราการ Entrainment ของ Turbulent plane jet มีค่าเป็น 0.1595, 0.1080 และ 0.0567 สำหรับกรณีของ Radial jet นั้นมีค่าเป็น 0.1412, 0.0951 และ 0.0972 ตามลำดับ โดยในกรณีของ Plane jet นั้นเมื่อเปรียบเทียบอัตราการแพร่กระจายของเจ็ตที่คำนวณได้กับของ Ljuboja and Rodi (1980) ที่ใช้ Algebraic Reynolds stress model พบว่ามีค่าเป็น 0.114 ซึ่งมีค่ามากกว่าผลการคำนวณที่ได้ประมาณ 6 เปอร์เซ็นต์

Boersma et al. (1997) ได้ใช้ Direct Numerical Simulation (DNS) ในคำนวณการไหลของ Free round turbulent jet โดยทำการคำนวณที่ Reynolds number มีค่าเท่ากับ $2.4\text{x}10^3$ และได้นำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองจาก Hussein et al. (1994) และ Panchapakesan and Lumley (1993) นอกจากนี้ยังได้ทำการตรวจสอบ Universal self-similarity ซึ่งศึกษาถึงผลของ Initial condition ที่มีต่อ Self-similarity โดยการทำ Simulation ด้วยการเปลี่ยน Initial velocity profile ที่ต่างกัน 2 แบบ โดยแบบแรกเป็น Initial profile ที่มีรูปร่าง Top-hat shape ซึ่งพบได้บ่อยในการทดลอง แบบที่สองจะใช้ Initial profile ดังสมการ 2.1

$$U = U_{IN}\left[1 + 0.2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \text{ซึ่ง } U_{IN} = U_{tophat}\sqrt{\left(\frac{\int_0^R r dr}{\int_0^R \left[1+0.2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr}\right)} \tag{2.1}$$

จากการศึกษาพบว่าผลการคำนวณด้วยวิธี DNS ของ Top-hat initial velocity profile นั้นสอดคล้องกับผลการทดลองของ Panchapakesan and Lumley และ Hussein et al ได้เป็นอย่างดี และเมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากทั้งสอง Initial profile ที่ต่างกัน พบว่าผลที่ได้ไม่สนับสนุน Universal self-similarity ทำให้สรุปได้ว่า Similarity และ Similarity profile จะขึ้นอยู่กับ Initial condition

2.1.2 การศึกษาคุณลักษณะของเจ็ตในกระแสลมขนาน

Squire and Trouncer (1944) ทำการศึกษาทางทฤษฎีของเจ็ตในกระแสลมขนาน (Parallel Stream) สำหรับค่าต่างๆของ λ ซึ่งกำหนดให้เป็นอัตราส่วนของความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วของเจ็ตที่ทางออกจาก Nozzle โดยการอินทิเกรตสมการโมเมนตัมด้วยทฤษฎี Mixing length และหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข พบว่าการกระจายของความเร็วตามแนวแกนบริเวณ Mixing region แสดงได้ดังสมการ 2.2

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_0 - \bar{u}_s}{2}\left[1 - \cos\pi\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\right] \tag{2.2}$$

โดย r_1 และ r_2 เป็นรัศมีภายในและภายนอกของ Mixing region

$\bar{u}_0$ เป็นความเร็วเริ่มต้นของเจ็ตที่ออกมา

$\bar{u}_s$ เป็นความเร็วของอากาศด้านนอก

รูปที่ 2.6 แสดงการลดลงของความเร็ว Center line ตลอดแกนของ Round jet ในกระแสลมขนานโดยผลการทำนายของ Squire and Trouncer ที่ค่า λ มีค่าน้อยกว่า 1 จะเห็นได้ว่าที่ λ เท่ากับ 0 นั้นจะมีระยะ Potential core สั้นที่สุดและความยาวของระยะ Potential core จะเพิ่มขึ้นเมื่อ λ เพิ่มขึ้น

จาก 0 จนถึง 0.5 สำหรับอัตราการลดลงของความเร็ว Center line จะมีค่าลดลงเมื่อค่า λ เพิ่มขึ้นจาก 0 จนถึง 0.5 รูปที่ 2.7 แสดงเส้นความกว้างของเจ็ตที่ตำแหน่งที่ความเร็วมีค่าเท่ากับ 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum สำหรับกรณีที่ λ มีค่าน้อยกว่า 1 ซึ่งพบว่าการลดลงของมุมการแพร่กระจายของเจ็ต (Jet angle) และอัตราการแพร่กระจายของเจ็ตนั้นเป็นฟังก์ชันของ λ โดยจะมีค่าลดลงเมื่อ λ มีค่าเพิ่มขึ้น

Forstall and Shapiro (1950) ทำการทดลองตรวจสอบผลทางทฤษฎีของ Squire and Trouncer (1944) ซึ่งได้ศึกษาเจ็ตในกระแสลมขนาน โดยผลการทดลองแสดงว่าคุณสมบัติของเจ็ตในบริเวณ Mixing region เป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนของความเร็วของอากาศด้านนอกต่อความเร็วเจ็ต (λ) และแสดงผลความยาวของ Potential core (x_p) สำหรับ λ มีค่าน้อยกว่า 1 เป็นดังสมการ 2.3

$$\frac{x_p}{d_0} = 4 + 12\lambda \tag{2.3}$$

โดยที่ d_0 เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของปากเจ็ต สำหรับในบริเวณ Fully developed region การลดลงของความเร็ว Center line และการแพร่กระจายของเจ็ตมีค่าเป็นดังสมการ 2.4 และ 2.5

$$\frac{u_c - u_s}{u_j - u_s} = \frac{x_p}{x} \tag{2.4}$$

$$\frac{y_{0.5}}{r_0} = \left(\frac{x / d_0}{x_p / d_0} \right)^{1-\lambda} \tag{2.5}$$

ซึ่ง u_c เป็นความเร็ว Center line u_j เป็นความเร็วที่ทางออกของเจ็ต u_s เป็นความเร็วของอากาศด้านนอก r_0 เป็นรัศมีที่ปากทางออกของเจ็ต และ $y_{0.5}$ เป็นระยะรัศมีที่ความเร็วเท่ากับ $0.5(u_{\min} + u_{\max})$

Alpinier (1964) ได้ทำการทดลองศึกษาเจ็ตในกระแสลมขนาน (Parallel stream) กรณีที่อัตราส่วนความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วของเจ็ต (λ) มีค่ามากกว่า 1 ในการทดลองได้ใช้คาร์บอนไดออกไซด์และไฮโดรเจนเป็นเจ็ตที่ถูกฉีดเข้าไปในอากาศที่เคลื่อนที่ สำหรับคาร์บอนไดออกไซด์ในอากาศนั้นมีอัตราส่วนความหนาแน่นเท่ากับ $44/29$ และมีค่า λ เท่ากับ 1.28 1.55 และ 2.13 สำหรับกรณีไฮโดรเจนในอากาศนั้นมีอัตราส่วนความหนาแน่นเท่ากับ $2/29$ และมีค่า λ เท่ากับ 1.05 และ 1.5 ตามลำดับ จากรูปที่ 2.8 ซึ่งแสดงการลดลงของความเร็ว Center line ของ Round jet ในกระแสลมขนาน พบว่าการลดลงของความเร็ว Center line ขึ้นอยู่กับทั้งอัตราส่วนความเร็วและอัตราส่วนความหนาแน่น คือ ที่อัตราส่วนความหนาแน่น (Density ratio) ต่ำเมื่อค่า λ เพิ่มมากขึ้นความเร็วของเจ็ตจะมีการลดลงเร็วขึ้นและเร็วกว่ากรณีที่อัตราส่วนความหนาแน่น (Density ratio) มีค่าสูง

Antonia and Bilger (1973) ทำการทดลองศึกษาการไหลของเจ็ตในกระแสลมตาม โดยใช้อุโมงค์ลมที่พื้นที่หน้าตัด 3.05x3.05 m^2 เจ็ตที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 5.28 mm และใช้ Hot wire anemometer สำหรับวัดความเร็ว โดยในการทดลองได้กำหนดให้อัตราส่วนความเร็วเจ็ตต่อความเร็วอากาศด้านนอก $(\lambda = u_j/u_1)$ มีค่าเท่ากับ 2 และ 3.5 โดยที่ความเร็วอากาศด้านนอกมีค่าคงที่ 30.5 m/s จากผลการทดลองพบลักษณะซิมิลาริตี้ของ Mean velocity เมื่อ x/d มีค่าตั้งแต่ 38 $(x \approx 20\ cm)$ เป็นต้นไป สำหรับ Turbulece intensity นั้นจะพบซิมิลาริตี้ เมื่อ x/d มีค่าตั้งแต่ 152 เป็นต้นไป นอกจากนี้ยังพบซิมิลาริตี้ของ Reynolds shear stress สำหรับ λ เท่ากับ 2 และ 3.5 เมื่อ x/d มากกว่า 150 $(x \approx 80\ cm)$ และยังพบค่า Maximum ของ Reynolds shear stress ที่ตำแหน่ง $0.7L_0$ โดยที่ L_0 คือ ตำแหน่งที่มีความเร็วเป็น 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ซึ่งสอดคล้องกับผลของ Wygnanski and Fiedler (1969)

2.1.3 การศึกษาคุณลักษณะของเจ็ตที่หมุนควง

Gortler (1954) ได้ทำการศึกษาทางทฤษฎีเกี่ยวกับ Laminar swirling jet ที่เป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ โดยศึกษาในกรณีที่ความเร็วในแนวสัมผัสมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วตามแนวแกน (Weakly swirl) ซึ่งประมาณว่าเทอม Pressure gradient ในแนวรัศมีมีค่าน้อยและสามารถละทิ้งได้ จึงกำหนดให้ความดันเป็นฟังชันก์ของระยะตามแนวแกน x เพียงอย่างเดียว $p = p(x)$ ในการศึกษาได้ใช้พื้นฐานของ Boundary-layer approximation และการเปลี่ยนตัวแปร (Transformation of variable) ทำให้เปลี่ยนจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential) อันดับ 2 แล้วจึงทำการแก้สมการเพื่อหา Exact solution

Rose (1962) ทำการทดลองศึกษาเกี่ยวกับ Swirling turbulent jet ที่มีความสมมาตรรอบแกน โดยใช้ท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง (D) 17/32 นิ้ว ยาว 100D หมุนด้วยความเร็ว 9,500 รอบต่อนาที โดยมีค่า Reynolds number เท่ากับ $1.5\text{x}10^4$ และใช้ Hot-wire anemometer ในการวัดค่าความเร็วเฉลี่ยของ Swirling jet ซึ่งในการทดลองได้วัดค่าความเร็วเฉลี่ยและ Turbulence intensity ที่ตำแหน่ง x/D เท่ากับ 0.235, 1.5, 3.06, 4.5, 6.0, 9.0, และ 15.0 จากผลการทดลองพบว่าการหมุนควงจะมีผลต่อการกระจายตัวความเร็วตามแนวแกนน้อยกว่าความเร็วตามแนวรัศมีในบริเวณใกล้ทางออกของเจ็ต และพบลักษณะ Similarity ของความเร็วเฉลี่ยและ Turbulence intensity ที่ตำแหน่ง x/D ตั้งแต่ 3.06 และ 6.0 เป็นต้นไป เมื่อเปรียบกับผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของ Loitsyanskii (1953) ที่ได้ใช้พื้นฐานของ Boundary-layer approximation พบว่าการลดลงของความเร็วความเร็ว

ตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับ x^{-1} และของความเร็วความเร็วตามแนวสัมผัสจะแปรผันกับ x^{-2} ซึ่งสอดคล้องกันกับผลการทดลองที่ได้

Lee (1965) ทำการศึกษาทางทฤษฎีของ Axisymmteric turbulent swirling jet โดยนำสมมติฐาน Similarity และ Entrainment มาใช้ในการในการพิจารณาหาการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัส ในการวิเคราะห์ได้ใช้ Boundary-layer approximation และกำหนดให้ความเร็วเป็นดังสมการ 2.6 ถึง 2.8

$$u(x,r)=u(x)e^{\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)} \tag{2.6}$$

$$w(x,r)=w(x)f\left(\frac{r}{b}\right) \tag{2.7}$$

$$\mathrm{v}(x,b)=-\alpha u(x) \tag{2.8}$$

$b(x)$ คือค่ารัศมีของเจ็ตที่ตำแหน่งซึ่งความเร็วมีค่าเท่ากับ 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum และ α คือสัมประสิทธิ์ของการ Entrainment ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.08 จากผลการศึกษาพบว่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และความกว้างของเจ็ตเป็นดังสมการ 2.9 ถึง 2.11

$$\frac{u}{u_0}=\frac{G^{1/2}c^3\left(c^2X+G^{-1}\right)^2}{\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]^{3/2}} \tag{2.9}$$

$$\frac{w}{w_0}=\frac{c^3\left(c^2X+G^{-1}\right)}{G^{1/2}\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]^{3/2}} \tag{2.10}$$

$$\frac{b}{b_0}=\frac{\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]}{c^2\left(c^2X+G^{-1}\right)} \tag{2.11}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Rose (1962) โดยวัดที่ตำแหน่ง 1.5, 3.06, 4.5, 6.0, 9.0 และ 15 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ ซึ่งมีค่า u_0, w_0 และ b_0 เท่ากับ 40.6, 5.91 fps และ 0.351 in สำหรับค่าคงที่ c และ G นั้นมีค่าเท่ากับ 2.707 และ 0.134 ตามลำดับ พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันดี

Chigier and Chervinsky (1967) ทำการทดลองศึกษาเกี่ยวกับ Axisymmetric swirling jet ที่ค่า Degree of swirl (S) ต่างๆ โดยศึกษาครอบคลุมทั้ง Weak, Moderate และ Strong swirl สำหรับการกำหนดค่า Degree of swirl (S) จะถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วนของโมเมนตัมตามแนวสัมผัสต่อโมเมนตัมตามแนวแกนและรัศมีของ Orifice ซึ่ง S มีค่าเท่ากับ 0.066, 0.134, 0.234, 0.416, 0.6 และ 0.64 ในการทดลองได้วัดค่าความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสเฉลี่ย ความดันสถิต และความกว้างของเจ็ตที่ระยะ x/d เท่ากับ 0.2, 1.0, 2.0, 4.1, 6.2, 8.3, 10.0 และ

15.0 จากผลการทดลองเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวรัศมี ความเร็วตามแนวสัมผัสและค่าความดันสถิตซึ่งแสดงผลในรูปของตัวแปรไร้มิติ พบลักษณะ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสและความดันสถิต สำหรับ Weak และ Moderate swirl ที่ระยะ 4 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ ส่วน Strong swirl นั้นจะพบ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนที่ระยะ 10 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อเป็นต้นไป รูปที่ 2.9 และ 2.10 แสดงการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและค่าความดันสถิตซึ่งแสดงได้ด้วย Gaussian curve ดังสมการ 2.12 และ 2.13

$$\frac{u}{u_m} = \exp(-k_u \xi^2) \tag{2.12}$$

$$\frac{p - p_\infty}{p_m - p_\infty} = \exp(-k_p \xi^2) \tag{2.13}$$

โดยที่ k_u และ k_p คือค่าคงที่การลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความดันสถิตซึ่ง k_u และ k_p มีความสัมพันธ์ในลักษณะแปรผกผันกับค่า S รูปที่ 2.11 แสดงการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการ Polynomial อันดับสาม ดังสมการ 2.14

$$\frac{w}{w_m} = C\xi + D\xi^2 + E\xi^3 \tag{2.14}$$

สำหรับในกรณีของ Strong swirl นั้นความกว้างของเจ็ต และ Entrainment rate จะมีค่าประมาณสองเท่าของกรณีที่ไม่มีการหมุน (Nonswirling jet) เมื่อเปรียบเทียบการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยใช้ Boundary-layer approximation และการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ซึ่งกำหนดให้ความเร็ว $u(x,r) = u_m(x)u(\xi)$ และ $w(x,r) = w_m(x)w(\xi)$ พบว่าผลการทดลองและผลการศึกษาทางทฤษฎีสอดคล้องกันดี

Wygnanski (1970) ได้ทำการศึกษาหา Similarity solution ของการไหลแบบราบเรียบที่อัดตัวไม่ได้ของเจ็ตที่หมุนควง โดยมีจุดประสงค์เพื่อค้นหาผลเฉลยแบบแม่นตรง (Exact solution) จากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับทุกระดับการหมุนควง ในการศึกษาได้ใช้ระบบพิกัดทรงกลมซึ่งกำหนดให้ความเร็วและความดันเป็นดังสมการ 2.15 ถึง 2.18

$$\mathrm{v}_r = -\nu \frac{f'(\eta)}{r} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{v}_\theta = -\frac{\nu}{r} \frac{f(\eta)}{\left(1-\eta^2\right)^{1/2}} \tag{2.16}$$

$$\mathrm{v}_\lambda = -\frac{\nu}{r} \frac{H(\eta)}{\left(1-\eta^2\right)^{1/2}} \tag{2.17}$$

$$\frac{P-P_{\infty}}{\rho}=\nu^{2}\,\frac{H(\eta)}{r^{2}} \tag{2.18}$$

โดยที่ η เท่ากับ $\cos\theta$ v_r แทนความเร็วตามแนว Radial v_θ แทนความเร็วตามแนว Azimuthal v_λ แทนความเร็วตามแนว Swirl และ $H(\eta)=\int_1^\eta c_1 \exp\left(\int_1^\eta \frac{f}{1-\eta^2}d\eta\right)d\eta$ สำหรับ c_1 เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรตซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าโมเมนตัมเชิงมุม ในการคำนวณแก้สมการได้ใช้ระเบียบวิธี Rung-kutta จากผลการศึกษาพบว่าเมื่อมุมของผนังมีค่า $90^o \le \theta < 180^o$ ดังรูปที่ 2.12 ในกรณีที่ไม่มีการหมุนควงเกิดขึ้น $(c_1 = 0)$ ที่ Reynolds number $\left(\frac{\mathrm{v}_r r}{\nu}\right)_{\theta=0}$ ค่าต่ำ $(\mathrm{Re} < 100)$ ผลจากมุมของผนังที่มีต่อการลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากกว่าที่ Reynolds number มีค่าสูงๆ โดยมุมของผนังที่เพิ่มขึ้นจะทำให้อัตราการ Entrainment ของเจ็ตมีค่ามากขึ้นจึงเป็นผลให้เจ็ตมีการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและการแพร่กระจายตัวมากขึ้น สำหรับกรณีที่มีการหมุนควง $(c_1 < 15)$ ผลของการหมุนควงและผลของมุมของผนังที่มีต่อการลดลงของความเร็วตามแนวแกนจะมีมากเมื่อ Reynolds number มีค่าต่ำๆ แต่กรณีที่ Reynolds number มีค่าสูงขึ้นผลของมุมของผนังจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อระดับการหมุนควงมีค่าเพิ่มขึ้น (Strong swirl) นอกจากนี้การที่ระดับการหมุนควงเพิ่มขึ้นยังทำให้ตำแหน่งที่เกิดค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกนมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนกลางของเจ็ตเล็กน้อย

Pratte and Keffer (1972) ได้ทำการทดลองศึกษา Swirling turbulent jet ซึ่งในการทดลองได้ใช้ท่อยาว 23 นิ้ว เส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 0.493 นิ้ว หมุนด้วยความเร็ว 8,700 rpm โดยมีค่า Re เท่ากับ 2,300 ในการศึกษากำหนดให้ค่า Swirl number (S) เป็นอัตราส่วนของโมเมนตัมตามแนวสัมผัสต่อโมเมนตัมตามแนวแกนและรัศมีของท่อซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.3 จากผลการทดลองพบ Similarity ของค่าความเร็วเฉลี่ย (Mean velocity) เกิดขึ้นได้เร็วกว่า Turbulent intensity และจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยการใช้ Boundary-layer approximation และการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ซึ่งกำหนดให้ความเร็ว $u=u_0 f(\eta)$ และ $w=w_0 g(\eta)$ โดยที่ $\eta=\frac{r}{x-x_0}$ u_0 และ w_0 เป็นค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสตามลำดับ พบว่าค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสมีการเปลี่ยนแปลงเป็นฟังชันก์ของ $(x-x_0)^{-1}$ และ $(x-x_0)^{-2}$ ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีกับผลการทดลองพบว่าสอดคล้องกัน ส่วนค่าความดันสถิตเฉลี่ยสามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงได้เป็นฟังชันก์ของ $(x-x_0)^{-4}$ ซึ่งมีค่าแตกต่างจากผลการทดลองที่มีค่าเป็น $(x-x_0)^{-2}$ สำหรับ Entrainment rate และมุมการแพร่

กระจายของ Swirling turbulent jet มีค่าประมาณ 2 เท่าของกรณีเจ็ตที่ไม่มีการหมุน รูปที่ 2.13 แสดงการแพร่กระจายตามแนวรัศมีของ Swirling jet ที่ระยะ Downstream โดย $r_{\frac{1}{2}}(x)$ กำหนดให้เป็นระยะรัศมีของเจ็ตที่ตำแหน่งความเร็วมีค่าเท่ากับ 0.5 เท่าของความเร็ว Maximum ใน Fully developed swirling jet สังเกตได้ว่าการแพร่กระจายมีลักษณะเป็นเชิงเส้นและเพิ่มมากขึ้นเมื่อระดับการหมุนสูงขึ้น รูปที่ 2.14 แสดงรูปร่างการแพร่กระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเฉลี่ย โดยค่ามากที่สุดจะเกิดที่บริเวณแกนกลางเจ็ตและรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนสามารถแสดงได้เป็น Gaussian profile ดังสมการ 2.19

$$\frac{u(\eta)}{u_0} = e^{-45\eta^2} \tag{2.19}$$

รูปที่ 2.15 แสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสเฉลี่ยของ Swirling jet ซึ่ง Swirling component $w(\eta)$ ยากต่อการตรวจสอบที่ระยะ Downstream เพราะว่ามีขนาดน้อยมาก อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองพบว่ามีลักษณะของ Rakine-vortex สำหรับค่าความดันสถิตเฉลี่ยนั้น พบลักษณะ Similarity ของกระจายตัวของความดันสถิตตามแนวรัศมีที่ระยะ x/D เท่ากับ 1 และ 6 ดังรูปที่ 2.16

Leschziner and Rodi (1984) ทำการศึกษา Strong swirling circular jet ที่มีค่า Swirl number เท่ากับ 1.18 และ 1.3 ซึ่งมีค่ามากพอที่ทำให้เกิด Recirculation zone บริเวณใกล้ทางออกของเจ็ต โดยใช้ Standard $k-\varepsilon$ model และทำการเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สำหรับค่า Dissipation rate (ε) และความเร็วตามแนวรัศมี (V) ที่ทางออกของเจ็ต ซึ่งในการคำนวณได้ใช้ Finite volume ที่ประมาณ Diffusion term ด้วย Central difference และประมาณ Convection term ด้วย Upwind difference และคำนวณด้วย Nonuniform grid ที่มีขนาด 30x30 สำหรับการกำหนดขอบเขตการคำนวณเป็นดังรูปที่ 2.17 ซึ่งมีขนาด x/d เท่ากับ 16 และ r/d เท่ากับ 6 ในการศึกษาได้ทำการตรวจสอบผลของ Mean flow parameter เช่น การลดลงของความเร็ว Center line ความเร็ว Maximum ตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสต่อการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขที่ทางเข้าและผลของ Turbulence model จากผลการคำนวณโดยใช้ Standard $k-\varepsilon$ model ที่กำหนดให้ V ที่ทางออกของเจ็ตเท่ากับศูนย์เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Cutet and Darrigol (1978) ที่มีค่า Swirl number เท่ากับ 1.18 พบว่าให้ผลการแพร่กระจาย การลดลงของความเร็ว Maximum ตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตสอดคล้องกับผลการทดลองของ Cutet and Darrigol ได้ดี แต่ไม่สอดคล้องกับผลการทดลองของ Hosel (1978) ที่มีค่า Swirl number เท่ากับ 1.3 เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขที่ทางออกเจ็ตของ ε โดยการกำหนดให้

$0.5\varepsilon_r \le \varepsilon \le 2\varepsilon_r$ เมื่อ ε_r คือ Dissipation rate ที่ระดับอ้างอิง พบว่าที่ $0.5\varepsilon_r$ นั้นให้ผลการแพร่กระจาย การลดลงของความเร็ว Maximum ตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตสอดคล้องกับผลการทดลองของ Hosel จึงสรุปได้ว่า Standard $k-\varepsilon$ model สามารถทำนายผลของ Strong swirling jet ได้สอดคล้องกับผลการทดลองได้ดีในระดับหนึ่ง

Samet and Einav (1988) ได้ทำการทดลองศึกษาผลของ Turbulent swirling jet ใน Coflow stream โดยใช้ Open-circuit wind tunnel ที่มี Contraction ratio เท่ากับ 10.3 ซึ่งความเร็วที่ใช้ในการทดลองอยู่ระหว่าง 2.5 m/s และ 18 m/s โดยกำหนดพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ

Velocity ratio $$\mu = \frac{U_\infty}{U_{mo}}$$

Degree of swirl $$S = \frac{W_{mo}}{U_{mo}}$$

U_∞ คือ ความเร็วของอากาศด้านนอก

U_{mo} คือ ค่า Maximum ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตที่ทางออก nozzle

W_{mo} คือ ค่า Maximum ความเร็วตามแนวสัมผัสที่ทางออก nozzle

ในการทดลองกำหนดให้ μ มีค่าเป็น 0, 0.08, 0.2, 0.3 และกำหนดให้ S มีค่าเป็น 0, 0.12, 0.31, 0.4, 0.49 จากการศึกษาพบว่าค่า Degree of swirl และ Velocity ratio มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงการกระจายตัวของค่าความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวรัศมีเฉลี่ย

Younis et al. (1996) ได้ทำการศึกษา Turbulent jet ทั้งกรณีที่มีการหมุนและไม่มีหมุน โดยใช้ pressure strain model ของ Speziale, Sarkar and Gatski (SSG) (1991) ซึ่งเป็น quadratic model และของ Launder, Reece and Rodi (LRR) (1975) ซึ่งเป็น linear model จากการศึกษาพบว่า SSG model นั้นให้ผลการทำนายอัตราการแพร่กระจาย (Spreading rate) สำหรับ Plane jet มีค่าเป็น 0.0917 ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับการทดลองของ Patel (1970) ที่มีค่าเป็น 0.103 พบว่าต่ำกว่าผลการทดลอง 12 เปอร์เซ็นต์ สำหรับกรณี Axisymmetreic jet นั้นให้ผลการทำนายอัตราการแพร่กระจายมีค่าเป็น 0.111 ซึ่งสูงกว่าผลการทดลองของ Hussein et al. (1994) ที่มีค่าเป็น 0.094 อยู่ 17 เปอร์เซ็นต์ ในขณะที่ LRR ให้ผลการทำนายอัตราการแพร่กระจายสำหรับ Plane jet เป็น 0.121 มากกว่าผลการทดลอง 16 เปอร์เซ็นต์ และสำหรับ Axisymmetreic jet เป็น 0.143 ซึ่งมากกว่าผลการทดลอง 52 เปอร์เซ็นต์ โดยในกรณีของ Swirling jet นั้น SSG model จะสามารถให้ผลการทำนายได้ดีกว่า LRR model

Feyedelem and Sarpkaya (1997) ได้สรุปคุณลักษณะของ Swirling jet จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่า Swirling jet สามารถดึงเอาอากาศจากรอบข้างเข้ามาผสมกับเจ็ตได้ดีกว่าเจ็ตที่ไม่มี การหมุน จึงทำให้ Swirling jet มีอัตราการแพร่กระจาย (Spreading rate) อัตราการลดความเร็วตามแนวแกนมากกว่าเจ็ตที่ไม่มีการหมุน นอกจากนี้ยังพบว่า Initial tangential velocity และ Swirl number มีผลอย่างมากต่อคุณลักษณะของ Swirling jet ในบริเวณ Near field และในบริเวณ Near field นี้จะได้รับผลของ Static pressure gradient เนื่องจาก Streamline curvature ซึ่งมีผลต่ออัตราการแพร่การกระจาย (Spreading rate) มากกว่า Turbulent mixing ดังเช่นกรณี Simple jet

สำหรับรายละเอียดของงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับ Jet และ Swirling jet ได้สรุปไว้ดังแสดงในตารางที่ 2.1 -2.3 ตามลำดับ

2.2 ความเป็นมาของวิทยานิพนธ์

สำหรับวิธีการวิเคราะห์แบบ Similarity นั้นเป็นวิธีการกำหนดตัวแปร (Similarity variable) ที่เหมาะสมขึ้น เพื่อใช้ในการลดรูปสมการการเคลื่อนที่จากสมการอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการอนุพันธ์เชิงสามัญ เพื่อทำให้สะดวกต่อการแก้สมการในการคำนวณหาการแพร่กระจายตัวและการลดลงของความเร็วเจ็ต ซึ่งจากการศึกษางานวิจัยต่างๆที่ผ่านมาได้มีการศึกษาถึงคุณลักษณะของเจ็ตในอากาศที่หยุดนิ่งและเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ต ทั้งโดยวิธีทำการทดลองและการศึกษาทางทฤษฎี ดังเช่น Rajaratnam (1976) ได้ทำการศึกษาทางทฤษฎีโดยใช้พื้นฐานของ Boundary layer approximation และวิธีการวิเคราะห์ Similarity คำนวณหาความหนา และการลดลงของความเร็วเจ็ตทั้งกรณีที่อากาศภายนอกหยุดนิ่งและเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับเจ็ตนั้น พบว่าให้ผลสอดคล้องกับผลการทดลองได้ดีในระดับหนึ่ง

จากงานวิจัยต่างๆที่ผ่านมาพบว่าได้มีการศึกษาการไหลแบบเจ็ตในหลายลักษณะ เช่น การไหลของเจ็ตในอากาศที่หยุดนิ่ง การไหลของเจ็ตในอากาศที่เคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ต ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของการผสมของอากาศและเชื้อเพลิงที่หัวฉีดในห้องเผาไหม้ และการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง โดยที่เจ็ตในแต่ละลักษณะจะมีคุณลักษณะที่แตกต่างกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับผลของความเร็วอากาศด้านนอก และความเร็วของการหมุนควงที่มีต่อเจ็ต

จากการที่พบว่าการหมุนควงมีผลต่อการเพิ่มประสิทธิภาพในการผสมของเจ็ตกับอากาศภายนอก โดยการหมุนควงจะทำให้เกิดการดึงเอาอากาศจากภายนอกเข้ามาผสมกับเจ็ตได้ดีกว่าในกรณี

ของเจ็ตที่ไม่หมุนควง ซึ่งมีผลทำให้การกระจายตัวและการลดลงของความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงจากกรณีของ Free jet ดังนั้นการศึกษาถึงผลของการหมุนควง และความเร็วอากาศด้านนอกที่มีต่อเจ็ตโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ Similarity จึงมีความน่าสนใจในเชิงวิชาการและมีประโยชน์ในเชิงประยุกต์จึงเป็นที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

บทที่ 3

ทฤษฎีพื้นฐาน

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาทางทฤษฎีเกี่ยวกับการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ไม่หมุนควง โดยศึกษาถึงคุณลักษณะต่างๆ เช่น การแพร่กระจาย และการลดลงของความเร็วเจ็ต ในการศึกษาได้มีการกำหนดสมมติฐานการไหลและทำการศึกษาด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบซิมิลาริตี้ รวมถึงการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยมีรายละเอียดของทฤษฎีดังนี้

3.1 สภาวะ Similarity

ในเชิงกายภาพ สภาวะ Similarity โดยสังเขป คือ สภาวะที่การไหล ภายใต้เงื่อนไขเฉพาะเจาะจงของระบบและสิ่งแวดล้อม (boundary conditions) หนึ่ง อยู่ในสภาวะ (Local) Dynamic Equilibrium โดยที่สภาวะ Dynamic Equilibrium ในที่นี้ หมายถึง การที่ปริมาณต่างๆในการไหลพัฒนาเปลี่ยนแปลง (evolve) ไปตามทิศทางการไหลโดย 'scale' (= วัดโดยอ้างอิงกับปริมาณอ้างอิง) ไปกับ 'Local Characteristic Scale' หรือ อีกนัยหนึ่ง การที่ปริมาณต่างๆในการไหลพัฒนาเปลี่ยนแปลง (evolve) ไปตามทิศทางการไหลโดยพัฒนาเปลี่ยนแปลงไปตามและอ้างอิงกับ 'มาตรวัดคุณลักษณะ' ของปริมาณนั้นที่มีอยู่ในการไหล แน่นอนว่า 'มาตรวัดคุณลักษณะ' ของปริมาณใดก็ตาม จะต้องมีมิติ (dimension) เดียวกับปริมาณนั้นๆ เช่นนี้ ผลที่ตามมาเมื่อการไหลอยู่ในสภาวะ Similarity หรือ Dynamic Equilibrium นี้คือ เมื่อพิจารณาการพัฒนาเปลี่ยนแปลงของปริมาณนั้นๆไปในทิศทางการไหล (ตัวอย่างเช่น พิจารณาการพัฒนาเปลี่ยนแปลงการกระจายตัวของความเร็ว - velocity distribution - ไปตามทิศทางการไหล) โดยพิจารณาจากปริมาณที่มีมิตินั้นโดยตรง เราจะสังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงและความแตกต่างของรูปร่างการกระจายตัวของปริมาณนั้นที่ตำแหน่งของการไหลต่างกัน แต่เมื่อพิจารณาการพัฒนาเปลี่ยนแปลงของปริมาณนั้นโดยวัดอ้างอิงกับ 'มาตรวัดคุณลักษณะ' ของปริมาณนั้น ที่ตำแหน่งการไหลนั้นแล้ว (กล่าวคือ พิจารณาจากปริมาณไร้มิติที่เกิดจากการหารปริมาณนั้นด้วย 'มาตรวัดคุณลักษณะ' ของปริมาณนั้น ที่ตำแหน่งการไหลนั้น) เราจะพบว่า รูปร่างการกระจายตัวของปริมาณนั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามการไหล ดังนี้ การพัฒนาเปลี่ยนแปลงของการไหลเมื่อการไหลอยู่ในสภาวะ Similarity จึงขึ้นอยู่กับการพัฒนาเปลี่ยนแปลงของมาตรวัดคุณลักษณะของปริมาณต่างๆตามทิศทางการไหล และคำถามที่สำคัญในการวิเคราะห์ Similarity คือ

1. ภายใต้เงื่อนไขอะไร การไหลจึงจะอยู่ในสภาวะ Similarity

2. มาตรวัดคุณลักษณะของปริมาณต่างๆของการไหลคืออะไร

3. มาตรวัดคุณลักษณะของปริมาณต่างๆของการไหลมีการพัฒนาเปลี่ยนแปลงไปตามทิศทางการไหลอย่างไร

4. รูปร่างของการกระจายตัวหรือสภาวะของปริมาณต่างๆของการไหลเป็นเช่นไรภายใต้สภาวะ Similarity

ในเชิงคณิตศาสตร์ Similarity คือ ปรากฏการณ์ที่ระบบสมการอนุพันธ์ย่อยสามารถลดรูปเป็นระบบสมการอนุพันธ์สามัญ ภายใต้การเปลี่ยนตัวแปร (Similarity Transformation) ที่เหมาะสม ซึ่งการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสมนี้ นัยหนึ่งก็คือการหามาตรวัดคุณลักษณะของการไหลนั่นเอง สิ่งสำคัญที่พึงตระหนักประการหนึ่งคือ สภาวะ Similarity นี้จะเกิดขึ้นกับการไหลภายใต้เงื่อนไขเฉพาะของระบบและสิ่งแวดล้อมเท่านั้น กล่าวคือ ระบบการไหลหนึ่งอาจไม่มีสภาวะ Similarity ก็ได้ ในทางคณิตศาสตร์ กรณีนี้หมายถึงการที่ไม่มีการเปลี่ยนตัวแปรที่สามารถลดรูประบบสมการอนุพันธ์ย่อยลงเป็นระบบสมการอนุพันธ์สามัญและหาคำตอบได้ อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาการไหลที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ซับซ้อนนัก ดังเช่น การไหลแบบ Thin Shear Layers จะพบว่าถึงแม้ในทางคณิตศาสตร์ จะไม่สามารถหา Exact Similarity Solution ได้ แต่ผลการวัดในการไหลประเภทนี้ บ่อยครั้งพบว่าการไหลประเภทนี้ประมาณเข้าสู่สภาวะ Similarity ในทางปฏิบัติ

3.2 สมการพื้นฐานการไหล (Governing Equation)

สำหรับการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ได้กำหนดสมมติฐานการไหลเป็นดังนี้

1. เป็นการไหลแบบคงตัว $\left(\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0\right)$
2. เป็นการไหลที่มีความหนืดคงที่ (μ มีค่าคงที่)
3. เป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (ρ มีค่าคงที่)
4. เป็นการไหลที่มีความสมมาตรรอบแกน $\left(\frac{\partial(\ )}{\partial \theta} = 0\right)$
5. เป็นการไหลแบบราบเรียบ

สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)

$$\cancelto{0(1)}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathrm{V}}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}} = 0 \tag{3.1}$$

ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล

สมการโมเมนตัม (Momentum equation)

จากสมการนาเวียร์-สโตร์ค (Navier-Stokes equation) สำหรับของไหลที่เป็น Newtonian fluid

$$\rho \frac{D\vec{\mathrm{V}}}{Dt} = -\nabla P + \nabla(\lambda D_{mm}) + 2\nabla \cdot (\mu \underline{\underline{D}}) + \rho\vec{g} \tag{3.2}$$

$\vec{\mathrm{V}}$ คือ Velocity

P คือ Total pressure

λ คือ Coefficient of bulk viscosity

D_{mm} คือ Divergence ของ $\vec{\mathrm{V}}$

μ คือ Viscosity

$\underline{\underline{D}}$ คือ Deformation gradient tensor: $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

การไหลที่ความหนืดมีค่าคงที่ (μ, λ มีค่าคงที่)

$$\rho \frac{D\vec{\mathrm{V}}}{Dt} = -\nabla P + \lambda\nabla(D_{mm}) + 2\mu\nabla \cdot (D) + \rho\vec{g} \tag{3.3}$$

โดยที่

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{2}(\nabla^2\vec{\mathrm{V}} + \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}}))$$

$$D_{mm} = \nabla \cdot \vec{\mathrm{V}}$$

เมื่อแทนค่า $\nabla \cdot D$ และ D_{mm} ลงในสมการที่ (3.3) ได้เป็น

$$\rho \frac{D\vec{\mathrm{V}}}{Dt} = -\nabla P + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}}) + \mu\nabla^2\vec{\mathrm{V}} + \rho\vec{g} \tag{3.4}$$

กรณีที่เป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ เมื่อแทนค่าสมการ (3.1) ลงในสมการ (3.4) ทำให้ได้

$$\rho \frac{D\vec{\mathrm{V}}}{Dt} = -\nabla P + \mu\nabla^2\vec{\mathrm{V}} + \rho\vec{g}$$

$$\cancelto{0(1)}{\rho \frac{\partial\vec{\mathrm{V}}}{\partial t}} + \rho(\vec{\mathrm{V}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{V}} = -\nabla P + \mu\nabla^2\vec{\mathrm{V}} + \rho\vec{g}$$

กำหนดให้ $\nabla\hat{P} = \nabla P - \rho\vec{g}$ ซึ่งรวมผลของ gravity term จึงทำให้ได้สมการนาเวียร์-สโตร์คเป็นดังนี้

$$\rho(\vec{\mathrm{V}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{V}} = -\nabla\hat{P} + \mu\nabla^2\vec{\mathrm{V}}$$

หรือ

$$(\vec{\mathrm{V}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{V}} = -\frac{\nabla\hat{P}}{\rho} + \nu\nabla^2\vec{\mathrm{V}} \tag{3.5}$$

สำหรับในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถค่าของ vector operation ได้เป็น

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \cancelto{0(4)}{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial}{\partial r} + \cancelto{0(4)}{\frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}) + \cancelto{0(4)}{\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \cancelto{0(4)}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}}$$

จากสมการ (3.5) สามารถแสดงได้ในรูปของแต่ละแกนพิกัดโดยกำหนดให้ u,v,w แทนความเร็วในทิศ x,r,θ ในพิกัดทรงกระบอกได้ดังนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

สมการ x -โมเมนตัม

$$\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

สมการ r -โมเมนตัม

$$\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)\mathrm{v} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2\mathrm{v} - \frac{\mathrm{v}}{r^2} + \cancelto{0(4)}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}}\right)$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial r} + u\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2} - \frac{\mathrm{v}}{r^2}\right)$$

สมการ θ -โมเมนตัม

$$\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)w + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \cancelto{0(4)}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\theta}}\right)$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{r^2}\right)$$

หรือสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0$$

สมการ x -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

สมการ r -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}+u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-\frac{w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right)$$

สมการ θ -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mathrm{v}w}{r}=\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

3.3 การเปลี่ยนตัวแปร (Similarity Transformation)

สำหรับการเปลี่ยนตัวแปร Similarity นั้นจะทำการเปลี่ยนตัวแปรระหว่างระบบพิกัด $(x,r)\leftrightarrow(X,\eta)$

กำหนดให้

$$X(x,r)=x$$

$$\eta(x,r)=\frac{r}{b(x)}$$

$b(x)$ คือ Characteristic length scale function

ดังนั้น

$$dX(x,r)=\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial r}dr$$

$$d\eta(x,r)=\frac{\partial \eta}{\partial x}dx+\frac{\partial \eta}{\partial r}dr$$

หรือ

$$dX=dx$$

$$d\eta=-\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}dx+\frac{1}{b}dr$$

$$=-\eta\left[\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right]dx+\frac{1}{b}dr$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันภายใต้ Similarity transformation ทำได้ดังนี้

$$\frac{\partial f(X,\eta)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial X}-\left[\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right]\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 f(X,\eta)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \eta}{dx}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial X}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}-\left(2\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial X}+\left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+\left(2\frac{r}{b^3}\left(\frac{db}{dx}\right)^2-\frac{r}{b^2}\frac{d^2 b}{dx^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}-\left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial X}+\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+\left(\frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2-\frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dx^2}\right)\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial f(X,\eta)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$
$$= \left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial f}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial^2 f(X,\eta)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\left(\frac{dX}{dr}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial \eta}{dr}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial X}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

3.4 การเปลี่ยนค่าความเร็ว (Similarity transformation of velocity)

สำหรับในการเปลี่ยนค่าความเร็วนั้นกำหนดให้ความเร็วและ Characteristic scale ต่างๆของ Swirling jet เป็นดังรูปที่ 3.1

โดยที่ $$u(x,r) = u_1(x) + u_m(x) f(\eta)$$
$$w(x,r) = w_m(x) g(\eta)$$

$u(x,r)$ คือ ความเร็วตามแนวแกน (Axial velocity)

$w(x,r)$ คือ ความเร็วตามแนวสัมผัส (Tangential velocity)

$b(x)$ คือ ความกว้างของเจ็ต (Characteristic length scale)

$u_m(x)$ คือ ความเร็ว Centerline ตามแนวแกนเจ็ต (Centerline axial velocity)

$w_m(x)$ คือ ความเร็ว Maximum ตามแนวสัมผัส (Maximum tangential velocity)

$u_1(x)$ คือ ความเร็วอากาศด้านนอก (Free stream velocity in axial direction)

ดังนั้นจึงสามารถหาอนุพันธ์ของความเร็วได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + f\frac{\partial u_m}{\partial x} + u_m \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$= \frac{du_1}{dx} + f\frac{du_m}{dx} - \left[\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right]u_m f'$$
$$= \frac{du_1}{dx} + f\frac{du_m}{dx} - \left[\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right]u_m \eta f'$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_m}{dx^2} f\right) - \left(2\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\left(\frac{du_m}{dx} f'\right) + \left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)^2 u_m f'' + \left(2\frac{r}{b^3}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{r}{b^3}\frac{d^2 b}{dx^2}\right)u_m f'$$
$$= \left[\left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)^2 u_m\right] f'' + \left[\left(2\frac{r}{b^3}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{r}{b^2}\frac{d^2 b}{dx^2}\right)u_m - \left(2\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\frac{du_m}{dx}\right] f' + \left[\frac{d^2 u_m}{dx^2}\right] f + \left[\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right]$$
$$= \left[\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2 u_m\right]\eta^2 f'' + \left[\left(\frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dx^2}\right)u_m - \left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\frac{du_m}{dx}\right]\eta f' + \left[\frac{d^2 u_m}{dx^2}\right] f + \left[\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_m \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$= \frac{u_m f'}{b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u_m}{b}\frac{\partial f'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$= \frac{u_m f''}{b^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = g\frac{\partial w_m}{\partial x} + w_m \frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= g\frac{dw_m}{dx} - \left[\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right] w_m g'$$

$$= g\frac{dw_m}{dx} - \left[\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right] w_m \eta g'$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2 w_m}{dx^2} g\right) - \left(2\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\left(\frac{dw_m}{dx} g'\right) + \left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)^2 w_m g'' + \left(2\frac{r}{b^3}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{r}{b^3}\frac{d^2 b}{dx^2}\right) w_m g'$$

$$= \left[\left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)^2 w_m\right] g'' + \left[\left(2\frac{r}{b^3}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{r}{b^2}\frac{d^2 b}{dx^2}\right) w_m - \left(2\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\frac{dw_m}{dx}\right] g' + \left[\frac{d^2 w_m}{dx^2}\right] g$$

$$= \left[\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2 w_m\right] \eta^2 g'' + \left[\left(\frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dx^2}\right) w_m - \left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\frac{dw_m}{dx}\right] \eta g' + \left[\frac{d^2 w_m}{dx^2}\right] g$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = w_m \frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$= \frac{w_m g'}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{w_m}{b}\frac{\partial g'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$= \frac{u_m g''}{b^2}$$

ซึ่งทั้งหมดนี้จะถูกนำไปใช้แทนค่าในการวิเคราะห์ Order magnitude และวิเคราะห์ Similarity ต่อไปในบทที่ 4

3.5 การหาค่าอินกรัล

การหาค่าอินกรัลในงานวิจัยนี้ได้ใช้กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง (Simpson's rule) ซึ่งเป็นการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งที่อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง (Secondary order

Lagrange polynomial) สำหรับรูปแบบสมการที่ใช้ในการหาค่าอินทิกรัลในช่วงจาก a ถึง b มีลักษณะดังนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad a \le x \le b$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) \right]} \tag{3.6}$$

โดยที่ $x_i = x_0 + ih \qquad i = 0,1,2,....,n$

โดยจะแบ่งช่วงจาก a ถึง b นี้ออกเป็น n ช่วงย่อย (n มีค่าเป็นจำนวนคู่) ดังนั้นความกว้าง h ของแต่ละช่วงย่อย คือ $h = \dfrac{b-a}{n}$ สำหรับที่มาของสมการ (3.6) ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

3.6 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation)

สำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญในงานวิจัยนี้ได้ใช้ระเบียบวิธี Runge-Kutta อันดับสี่ (Fourth-order Runge-Kutta method) เนื่องจากระเบียบวิธี Runge-Kutta จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ซึ่งความเที่ยงตรงจะเพิ่มขึ้นเมื่ออันดับของระเบียบวิธีสูงขึ้น แนวความคิดที่ใช้ในการประดิษฐ์ระเบียบวิธี Runge-Kutta นี้ คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา รูปแบบของสมการ Runge-Kutta อันดับสี่ที่ใช้กันโดยทั่วไปในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ ซึ่งสามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงมีลักษณะดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

โดย

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \tag{3.7}$$

สำหรับที่มาของสมการ (3.7) ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

เนื่องจากการทำ Similarity Transformation ทำให้ลดรูปสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีอันดับสูงกว่าหนึ่ง จึงจำเป็นต้องมีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี Runge-Kutta อันดับสี่สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อันดับสูงกว่าหนึ่ง (Order N) ดังนั้นในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี Runge-Kutta อันดับสี่ในการแก้สมการสามารถทำได้โดยการแยกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ N ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งจำนวน N สมการ จากนั้นจึงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งจำนวน N สมการพร้อมกันทุกสมการโดยการแทนค่าในสมการ (3.7) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$P_1 A^{(N)}(\eta) + P_2 A^{(N-1)}(\eta) + ...P_N A(\eta) = 0 \qquad (3.8)$$

โดยที่ $P_1, P_2....P_N$ เป็นค่าคงที่ หรือเป็นฟังก์ชันของ η และ N เป็นจำนวนอันดับอนุพันธ์

จากสมการ (3.8) สามารถนำมาแยกเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง N สมการ ได้ดังนี้

$$\frac{dA}{d\eta} = B = f_1(\eta, A, B, C, ...Z)$$

$$\frac{d^2A}{d\eta^2} = \frac{dB}{d\eta} = C = f_2(\eta, A, B, C, ...Z)$$

.

.

$$\frac{d^N A}{d\eta^N} = \frac{d^{N-1}B}{d\eta^{N-1}} = \frac{d^{N-2}C}{d\eta^{N-2}} = ...Z = f_N(\eta, A, B, C, ...Z)$$

เมื่อแทนค่าในสมการ (3.7) สามารถหาค่า k ต่างๆได้เป็น

$k_{1A} = f_1(\eta_i, A_i, B_i, C_i, ...Z_i)$ $\qquad i = 0,1,2,....,n$ (n เป็นจำนวนช่วงในการคำนวณ)

$$k_{1B} = f_2(\eta_i, A_i, B_i, C_i, ...Z_i)$$

.

.

$$k_{1Z} = f_N(\eta_i, A_i, B_i, C_i, ...Z_i)$$

$$k_{2A} = f_1(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{1A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{1B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{1Z}h)$$

$$k_{2B} = f_2(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{1A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{1B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{1Z}h)$$

.

.

$$k_{2Z} = f_N(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{1A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{1B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{1Z}h)$$

$$k_{3A} = f_1(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{2A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{2B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{2Z}h)$$

$$k_{3B} = f_1(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{2A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{2B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{2Z}h)$$

.

.

$$k_{3Z} = f_N(\eta_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}k_{2A}h, B_i + \frac{1}{2}k_{2B}h, ...Z_i + \frac{1}{2}k_{2Z}h)$$

$$k_{4A} = f_1(\eta_i + h, A_i + k_{3A}h, B_i + k_{3B}h, ...Z_i + k_{3Z}h)$$

$$k_{4B} = f_2(\eta_i + h, A_i + k_{3A}h, B_i + k_{3B}h, ...Z_i + k_{3Z}h)$$

.

.

$$k_{4Z} = f_N(\eta_i + h, A_i + k_{3A}h, B_i + k_{3B}h, ...Z_i + k_{3Z}h)$$

$$A_{i+1} = A_i + \frac{h}{6}\left[k_{1A} + 2k_{2A} + 2k_{3A} + k_{4A}\right]$$

$$B_{i+1} = B_i + \frac{h}{6}\left[k_{1B} + 2k_{2B} + 2k_{3B} + k_{4B}\right]$$

.

.

$$Z_{i+1} = Z_i + \frac{h}{6}\left[k_{1Z} + 2k_{2Z} + 2k_{3Z} + k_{4Z}\right]$$

สำหรับขั้นตอนการคำนวณได้แสดงในรูปที่ 3.2 และจากรูปแบบในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญข้างต้นนี้จะถูกนำมาใช้ในการแก้สมการที่ได้จากการวิเคราะห์ Similarity ในบทต่อไป

บทที่ 4

สมการควบคุม Similarity

ในการวิเคราะห์ซิมิลารตี้ในบทนี้สามารถแบ่งออกได้ 3 ส่วน คือ

1. การวิเคราะห์ Order of magnitude
2. การทำ Similarity transformation ของ Differential governing equation
3. การทำ Similarity transformation ของ Integral governing equation

โดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1 สมการพื้นฐานการไหล (Governing equation)

สมมติฐานการไหล

1. เป็นการไหลแบบคงตัว
2. เป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้
3. เป็นการไหลที่มีความสมมาตรรอบแกน
4. เป็นการไหลแบบราบเรียบ

กำหนดให้ u, v, w แทนความเร็วในทิศ x, r, θ ตามลำดับ

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r}+\frac{\partial(ru)}{\partial x}=0 \tag{4.1a}$$

สมการ x-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{4.1b}$$

สมการ r-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}+u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-\frac{w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right) \tag{4.1c}$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mathrm{v}w}{r}=\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{4.1d}$$

4.2 Similarity Transformation ของแต่ละเทอมใน Governing Equation

สำหรับการทำ Similarity Transformation ของแต่ละเทอมใน Governing Equation นั้น จากผลของ Similarity Transformation ดังแสดงในบทที่ 3 ซึ่งทำ Transformation ได้โดย

กำหนดให้ $u = u_1 + u_m f(\eta)$ $\quad w = w_1 + w_m g(\eta)$

$$\eta = \frac{r}{b(x)} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{r}{b^2(x)}\frac{db}{dx} = -\frac{\eta}{b(x)}\frac{db}{dx}$$

สำหรับรายละเอียดของการทำ Similarity Transformation ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

จากสมการ (4.1a) พบว่า

$$\frac{\partial(r\text{v})}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0 \tag{4.1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m}{b}\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\text{v}) = \frac{u_m}{b}\left[\frac{1}{u_m \eta}\frac{\partial(\eta \text{v})}{\partial \eta}\right]$$

จากสมการ (4.1b) พบว่า

$$\text{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{4.1b}$$

$$\text{v}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{\text{v}f'}{u_m}\right]$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m} + f\right]\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right)\right]$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\text{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2 \eta^2 f'' - \left(b\frac{d^2 b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + 2\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta f' \right.$$
$$\left. + \left(\frac{b^2}{u_m}\frac{d^2 u_m}{dx^2}\right)f + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b^2}{u_1}\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right)\right]$$

$$\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) = \frac{1}{\text{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(f'' + \frac{f'}{\eta}\right)$$

จากสมการ (4.1c) พบว่า

$$\text{v}\frac{\partial \text{v}}{\partial r} + u\frac{\partial \text{v}}{\partial x} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\text{v})\right) + \frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x^2}\right) \tag{4.1c}$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{1}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right]$$

$$u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m} + f\right]\left[\frac{b}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} - \left(\frac{1}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right]$$

$$\frac{w^2}{r} = \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{w_1}{w_m} + g\right)^2\right]$$

$$\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{1}{u_m\eta}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right)$$

$$\nu\frac{\mathrm{v}}{r^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\frac{1}{\eta^2}$$

$$\nu\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{\eta^2}{u_m}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \eta^2} - \left(b\frac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\frac{\eta}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} - \right.$$

$$\left. 2\left(\frac{b}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \eta \partial x} + \frac{b^2}{u_m}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right]$$

จากสมการ (4.1d) พบว่า

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{4.1d}$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}g'\right]$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m} + f\right]\left[-\left(\frac{w_m}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta g' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{dw_m}{dx}\right)g + \left(\frac{b}{u_m}\frac{dw_1}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{v}w}{r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_1}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\right]\left[\frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{w_m}{w_1}g\right)\right]$$

$$\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[g'' + \frac{g'}{\eta}\right]$$

$$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 g'' - \left(b\frac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + 2\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta g'\right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{w_m}\left(\frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{d^2w_m}{dx^2}g\right)\right]$$

$$\nu\frac{w}{r^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\frac{w_1}{w_m}\frac{1}{\eta^2} + \frac{g}{\eta^2}\right]$$

4.3 การวิเคราะห์ Order of magnitude สำหรับ Laminar swirling jet

สำหรับผลการวิเคราะห์ Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ (4.1a)-(4.1d) ทำให้ได้ผลลัพธ์ดังสมการ (4.2a)-(4.2d) ซึ่งรายละเอียดของการวิเคราะห์ Order of magnitude ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

สมการความต่อเนื่อง

$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})}_{\frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} = 0 \tag{4.2a}$$

สมการ x-โมเมนตัม

$$\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{?} + \underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} \tag{4.2b}$$

สมการ r-โมเมนตัม

$$\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} + \underbrace{u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} - \underbrace{\frac{w^2}{r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]^2\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]^2} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}}_{?} + \underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} - \underbrace{\nu\frac{\mathrm{v}}{r^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^3\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} \tag{4.2c}$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{u\frac{\partial w}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} + \underbrace{\frac{\mathrm{v}w}{r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} = \underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]} +$$

$$\underbrace{\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} + \underbrace{\nu\frac{w}{r^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} \qquad (4.2d)$$

สำหรับในกรณีของ Thin shear layer $\left(\frac{b}{L} << 1\right)$ ซึ่งเมื่อพิจารณา Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ (4.2a) พบว่า

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)$$

โดยที่ $\mathcal{O}$ คือ ขนาด Order of magnitude ดังนั้นจึงทำให้ได้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0 \qquad (4.3a)$$

เมื่อพิจารณา Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ (4.2b) พบว่า

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{b}{L}\right)^2 \mathcal{O}\left(\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)$$

หรือ

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) << \mathcal{O}\left(\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)$$

ดังนั้นจึงทำให้ได้

สมการ x-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) \qquad (4.3b)$$

สำหรับ Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ (4.2c) พบว่า

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{b}{L}\right)^2 \mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)\right)$$

หรือ $$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right) << \mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)\right)$$

และเมื่อเปรียบเทียบ Order of magnitude ของสมการ (4.2b) กับ (4.2c) พบว่าสมการ (4.2a) มี Order of magnitude มากกว่าสมการ (4.2c) เท่ากับ $\left(\frac{b}{L}\right)$ เท่า ดังนั้นจึงทำให้ได้

สมการ r-โมเมนตัม

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{4.3c}$$

สำหรับ Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ (4.2d) พบว่า

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{b}{L}\right)^2 \mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)\right)$$

หรือ $$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) << \mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)\right)$$

ดังนั้นจึงทำให้ได้

สมการ θ-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)\right) \tag{4.3d}$$

4.4 Similarity สำหรับ Differential Governing Equation

จากผลการวิเคราะห์ Order of magnitude จึงสามารถลดรูปสมการ Governing Equation ได้ดังสมการที่ (4.3a)-(4.3d) ซึ่งสมการทั้งหมดจะเป็นสมการเริ่มต้นในการวิเคราะห์ต่อไป

สมการความต่อเนื่อง $$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} = 0$$

สมการ x-โมเมนตัม $$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

สมการ r-โมเมนตัม $$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

สมการ θ-โมเมนตัม $$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rw}{\partial r}\right)$$

สำหรับในการทำ Similarity สำหรับ Differential Governing Equation นั้นได้มีการรวมสมการความต่อเนื่องและสมการ r-โมเมนตัมเข้าไว้ในสมการ x-โมเมนตัม และสมการ θ-โมเมนตัม จึงทำ

ให้สมการที่เหลือมีเพียง 2 สมการ โดยในการทำ Similarity จะเริ่มต้นโดยการแทนค่าความเร็วซึ่งกำหนดให้

$u = u_1(x) + u_m(x) f(\eta)$ และ $w = w_1(x) + w_m g(\eta)$

โดยที่ $\eta = \dfrac{r}{b(x)}$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial r} = \dfrac{1}{b(x)}$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -\dfrac{r}{b^2(x)}\dfrac{db}{dx} = -\dfrac{\eta}{b(x)}\dfrac{db}{dx}$

ซึ่งเมื่อแทนค่าทั้งหมดแล้วจึงทำให้ได้สมการ x-โมเมนตัม และสมการ θ-โมเมนตัม เป็นดังสมการที่ (4.4a) และ (4.4b) สำหรับรายละเอียดของการทำ Similarity สำหรับ Differential Governing Equation ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

สมการ x-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
& F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2\operatorname{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G\eta - \left[\operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G'\eta^2 + \left[2\operatorname{Re}\frac{db}{dx} + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F''F}{\eta} \\
& - \left[2\operatorname{Re}\frac{db}{dx} + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F''\eta \\
& - \left[\frac{3}{2}\operatorname{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F' \\
& - \left[\operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'^2}{\eta} \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.4a}
$$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการจึงเปลี่ยนตัวแปรจาก f เป็น F โดยกำหนดให้ $F = \int_0^\eta f\eta d\eta$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
& g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} - \left(\frac{w_1}{w_m}\right)\frac{1}{\eta^2} + \left[2\operatorname{Re}\frac{db}{dx} + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta} \\
& + \left[\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta - \operatorname{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\left(\frac{w_1}{w_m}\right) \\
& - \left[\operatorname{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) - \frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g - \left[\operatorname{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right]\frac{F'}{\eta} \\
& - \left[\operatorname{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \operatorname{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2\operatorname{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right) + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right]\frac{F}{\eta^2} \\
& + \left[\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right] + \left[2\operatorname{Re}\frac{db}{dx} + \operatorname{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2} \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

สำหรับในกรณีที่ $w_1 = 0$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta$$
$$-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g - \left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta}$$
$$+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

(4.4b)

4.5 เงื่อนไขของการวิเคราะห์ Similarity

สำหรับเงื่อนไขของการวิเคราะห์ Similarity นั้นเมื่อพิจารณาจากสมการที่ (4.4a) และ (4.4b) พบว่าระบบสมการจะมี Similarity solution ก็ต่อเมื่อพารามิเตอร์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (4.4a) และ (4.4b) ไม่เป็นฟังชันของ x ในที่นี้จึงกำหนดให้

$$2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 = \text{ค่าคงที่} \quad (1)$$

$$\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 = \text{ค่าคงที่} \quad (2)$$

$$2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} = \text{ค่าคงที่} \quad (3)$$

$$\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) = \text{ค่าคงที่} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2}\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) = \text{ค่าคงที่} \quad (5)$$

$$\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} = \text{ค่าคงที่} \quad (6)$$

$$2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} = \text{ค่าคงที่} \quad (7)$$

$$\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) = \text{ค่าคงที่} \quad (8)$$

$$2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) = \text{ค่าคงที่} \quad (9)$$

$$\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \mathrm{Re}\frac{db}{dx} = \text{ค่าคงที่} \quad (10)$$

แต่จากทั้ง 10 เงื่อนไขข้างต้นพบว่าจะมี Independent parameter ทั้งหมดจริงเพียง 6 ตัว คือ $k_b = \mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}$, $k_{u_m}\ \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}$, $k_{w_m}\ \mathrm{Re}\dfrac{b}{w_m}\dfrac{dw_m}{dx}$, $k_{u_1} = \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}$, $Sr = \left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)$ และ $\mathrm{V}r = \left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$ ดังนั้นจากเงื่อนไขของการมี Similarity solution ก็ต่อเมื่อพารามิเตอร์ทั้ง 6 ตัวนี้เป็นค่าคงที่

4.6 Similarity สำหรับ Integral Governing Equation

สำหรับในการทำ Similarity สำหรับ Integral Governing Equation นั้นได้มีการรวมสมการความต่อเนื่องและสมการ r-โมเมนตัมเข้าไว้ในสมการ x-โมเมนตัม และสมการ θ-โมเมนตัมเช่นเดียวกับกรณีก่อนหน้านี้ จึงทำให้สมการที่เหลือมีเพียง 2 สมการ ดังนั้นจึงทำให้ได้สมการ x-โมเมนตัม และสมการ θ-โมเมนตัม เป็นดังสมการที่ (4.5a) และ (4.5b) สำหรับรายละเอียดของการทำ Similarity สำหรับ Integral Governing Equation ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

สมการ x-โมเมนตัม

$$I_1\left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{u_1}{u_m} + 2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m} + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right] + I_2\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]$$
$$- I_5\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right] = 0 \tag{4.5a}$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$I_3\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} + 3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right] +$$
$$I_4\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{u_1}{u_m} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m} + 3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right] = 0 \tag{4.5b}$$

โดยค่าคงที่ $I_1 = \int_0^\infty f\eta d\eta$, $I_2 = \int_0^\infty f^2\eta d\eta$, $I_3 = \int_0^\infty fg\eta^2 d\eta$, $I_4 = \int_0^\infty g\eta^2 d\eta$ และ $I_5 = \dfrac{1}{2}\int_0^\infty g^2\eta d\eta$

จากสมการ (4.5a) และ (4.5b) พบว่ามีพารามิเตอร์ทั้งหมด 6 ตัวเช่นเดียวกับที่พบในสมการที่ (4.4a) และ (4.4b) คือ $k_b = \mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}$, $k_{u_m}\ \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}$, $k_{w_m}\ \mathrm{Re}\dfrac{b}{w_m}\dfrac{dw_m}{dx}$, $k_{u1} = \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}$, $Sr = \left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)$ และ $\mathrm{V}r = \left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$

4.7 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

กำหนดให้ $u = u_m(x)f(\eta) + u_1(x)$ และ $w = w_m(x)g(\eta)$

โดยที่ $\quad F = \int_0^{\eta} f\eta d\eta, \qquad F' = f\eta, \qquad F'' = \eta f' + f$

สำหรับเงื่อนไขของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตพบว่าที่บริเวณแกนเจ็ต $\eta = 0$ นั้นค่า $f(0) = \dfrac{u - u_1}{u_m} = 1$ จึงทำให้ $f(0) = 1$ และจาก $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$ เนื่องจากเงื่อนไขความสมมาตรดังนั้นจึงได้ว่า

1. ที่ $\eta = 0 \qquad u = u_m + u_1$

$$f(0) = 1 \rightarrow F'(0) = 0$$
$$F(0) = 0$$

2. ที่ $\eta = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$

$$f'(0) = 0 \rightarrow F''(0) = 1$$

สำหรับเงื่อนไขของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่าที่บริเวณแกนเจ็ต $\eta = 0$ ค่าความเร็ว $w = 0$ และที่ตำแหน่ง $\eta_{w\max}$ มี $w = w_m$ ดังนั้นจึงได้ว่า

3. ที่ $\eta = 0 \qquad w = 0$

$$g(0) = 0$$

4. ที่ $\eta = \eta_{w\max} \quad w = w_m$

$$g(\eta_{w\max}) = 1$$

เพื่อความสะดวกในการแก้สมการสำหรับการวิเคราะห์ Similarity จึงแบ่งการศึกษาโดยคำนึงถึงผลของการหมุนควง (w_m) และผลของกระแสลมตาม (u_1) ออกได้ดังนี้

Case A กรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควง $(w_m = 0)$

- Case A1 กรณีอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$

- Case A2 กรณีกระแสลมตามมีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$
- Case A3 กรณี $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

Case B กรณีการไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$

- Case B1 กรณีอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$
- Case B2 กรณีกระแสลมตามมีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$
- Case B3 กรณี $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

Case C กรณีการไหลของเจ็ตที่หมุนควง $(w_m \sim u_m)$ **โดยเปลี่ยนแปลงค่า** Sr

- Case C1 กรณีอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$
- Case C2 กรณีกระแสลมตามมีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$
- Case C3 กรณี $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

โดยในแต่ละกรณีจะศึกษาถึงผลของความเร็วอากาศด้านนอกที่มีต่อรูปร่างการกระจายตัวของความเร็ว ความหนา และการลดลงของความเร็วเจ็ต

บทที่ 5

ผลการวิเคราะห์ระบบสมก าร

ผลการวิเคราะห์ระบบสมการแบ่งเป็น กรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควง $(w_m = 0)$ ในอากาศที่หยุดนิ่งและในกระแสลมตาม กรณีการไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ ในอากาศที่หยุดนิ่งและในกระแสลมตาม และกรณีการไหลของเจ็ต $(w_m \sim u_m)$ โดยเปลี่ยนแปลงระดับการหมุนควง (Sr) ในอากาศที่หยุดนิ่งและในกระแสลมตาม โดยมีรายละเอียดดังนี้

5.1 การวิเคราะห์ระบบสมการ

โดยในการศึกษาแต่ละกรณีนั้นจะทำการลดรูปสมการจากสมการเริ่มต้น คือ สมการ (4.4a) และ (4.4b) ซึ่งเป็นสมการ Differential Equation และใช้เงื่อนไขจากสมการ (4.5a) และ (4.5b) ซึ่งเป็นสมการ Integral Equation ในการหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ต่างๆ สำหรับรายละเอียดของการนิยามค่าคงที่ สมการ Governing equations และค่าคงที่ของการศึกษาในกรณีต่างๆได้สรุปไว้ดังตารางที่ 5.1 ถึง 5.23 สำหรับรายละเอียดผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีเป็นดังต่อไปนี้

สมการ Differential Equation

สมการ x-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
&F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G\eta - \left[\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G'\eta^2 + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F''F}{\eta} \\
&- \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F''\eta \\
&- \left[\frac{3}{2}\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F' \\
&- \left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'^2}{\eta} \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.4a}
$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
&g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta \\
&- \left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g - \left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta} \\
&+ \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2} \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.4b}
$$

สมการ Integral Equation

สมการ x-โมเมนตัม

$$I_1\left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}+2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right]+I_2\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]$$
$$-I_5\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]=0 \tag{4.5a}$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$I_3\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}+3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]+$$
$$I_4\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}+3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right]=0 \tag{4.5b}$$

จากสมการ (4.4a), (4.4b), 4.5a) และ (4.5b) เมื่อทำการลดรูปสมการโดยใช้เงื่อนไขของความเร็วตามแนวสัมผัส (w_m) และความเร็วอากาศด้านนอก (u_1) จึงแบ่งการศึกษาได้เป็นดังต่อไปนี้

Case A การไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควง ($w_m = 0$)

Case A1 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง ในอากาศหยุดนิ่ง (u_1=0)

สำหรับกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง ในอากาศหยุดนิ่ง โดยพิจารณาในกรณีที่ w_m และ u_1 เท่ากับศูนย์ จากสมการ (4.4a) และ (4.5a) จึงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0 \tag{5.1a}$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_b+2k_{u_m}\right]=0 \tag{5.1b}$$

โดยที่

$$k_b=\mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m}=\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}$$

โดยสมการ (5.1a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x และสมการ (5.1b) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.1a) มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ k_b และ k_{u_m} ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.1b) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ k_b ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้ไม่มีพารามิเตอร์อิสระ สำหรับรายละเอียดของค่า k_b และ k_{u_m} ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.3

Case A2 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ w_m เท่ากับศูนย์และ $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a) และ (4.5a) จึงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{bf} + k_{u_m f}\right]F' = 0 \qquad (5.2a)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[2k_{bf} + k_{u_m f} + 2k_{u_1 f}\right] = 0 \qquad (5.2b)$$

โดยที่

$$k_{bf} = \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \qquad k_{u_m f} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \qquad k_{u_1 f} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$$

โดยสมการ (5.2a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x และสมการ (5.2b) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยในกรณีนี้มี 3 พารามิเตอร์ที่สำคัญ คือ k_{bf}, $k_{u\,mf}$ และ k_{u1f} ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยพบว่าจากทั้ง 3 พารามิเตอร์นี้สามารถจัดรูปแบบโดยรวมพารามิเตอร์อิสระ k_{u1f} เข้าไว้ใน k_{bf} และ $k_{u\,mf}$ ให้เหลือเพียง 2 พารามิเตอร์เช่นเดียวกับกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงได้โดยกำหนดให้ $A^* = \frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}$ และ $B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$ ดังนั้นจึงได้ว่า

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + [A^*]F''\eta - [A^* + B^*]F' = 0 \qquad (5.2c)$$

สมการ Integral equation

$$I_1[2A^* + B^*] = 0 \qquad (5.2d)$$

พารามิเตอร์ ในกรณีนี้พบว่าจากสมการที่ (5.2c) มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ A^* และ B^* ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่รวมพารามิเตอร์อิสระอีก 1 ตัว คือ k_{u1f} เข้าไว้ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.2d) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ A^* ซึ่งค่า A^* นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้ไม่มีพารามิเตอร์อิสระ สำหรับรายละเอียดของค่า A^* และ B^* ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.4

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1 f} = \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงผลของ Pressure gradient ในกรณีที่มีค่าเป็นศูนย์ ทำให้จัดรูปจากสมการ (5.2a) และ (5.2b) ได้

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[k_{bf}\right]F''\eta - \left[k_{bf} + k_{u_m f}\right]F' = 0 \qquad (5.2e)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[2k_{bf} + k_{u_m f}\right] = 0 \qquad (5.2f)$$

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.2e) มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ k_{bf} และ $k_{u_m f}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.2f) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ k_{bf} ซึ่งค่า k_{bf} นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้ไม่มีพารามิเตอร์อิสระ

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1 f} \neq 0$ และ $k_{u_1 f} = 0$ พบว่ารูปแบบสมการและความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่ได้มีลักษณะเหมือนกัน

Case A3 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ w_m เท่ากับศูนย์และ $u_1 \sim u_m$ จากสมการที่ (4.4a) และ (4.5a) จึงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$\begin{aligned} &F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta \\ &- \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0 \end{aligned} \qquad (5.3a)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0 \qquad (5.3b)$$

โดยที่

$$k_b = \mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} \qquad k_{u_1} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx} \qquad \mathrm{V}r = \frac{u_1}{u_m}$$

โดยสมการ (5.3a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x และสมการ (5.3b) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.3a) มีพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ k_b, k_{u_m}, k_{u_1} และ $\mathrm{V}r$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขที่ $\mathrm{V}r = \dfrac{u_1}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ค่า $k_{u_m} = k_{u_1}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.3b) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 2 ตัวคือ k_b และ $\mathrm{V}r$ ซึ่งค่า k_b นี้จะถูก

กำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 1 ตัว คือ Vr โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Vr จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตในกรณีนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0 ซึ่งรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$ และ k_{u_1} ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.5

Case B การไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ ($w_m << u_m$)

Case B1 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$)

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$ และ u_1 เท่ากับศูนย์ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) จึงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0 \qquad (5.4a)$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_b + k_{w_m}\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0 \qquad (5.4b)$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0 \qquad (5.4c)$$

$$I_3\left[k_{w_m} + k_{u_m} + 3k_b\right] = 0 \qquad (5.4d)$$

โดยที่

$$k_b = \mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} \qquad k_{w_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}$$

โดยสมการ (5.4a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.4b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ , สมการ (5.4c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.4d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.4a) และ (5.4b) มีพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ k_b, $k_{u\,m}$ และ k_{wm} ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.4c) และ (5.4d) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ k_b ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้ไม่มีพารามิเตอร์อิสระ สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$ และ k_{wm} ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.6

Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$, $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1 f}+k_{bf}\right]F''\eta-\left[\frac{3}{2}k_{u_1 f}+k_{u_m f}+k_{bf}\right]F'=0 \qquad (5.5a)$$

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1 f}+k_{bf}\right]g'\eta-\left[k_{w_m f}-\frac{1}{2}k_{u_1 f}\right]g=0 \qquad (5.5b)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f}+2k_{u_1 f}+2k_{bf}\right]=0 \qquad (5.5c)$$

$$I_4\left[k_{w_m f}+k_{u_1 f}+3k_{bf}\right]=0 \qquad (5.5d)$$

โดยที่

$$k_{bf}=\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \quad k_{u_m f}=\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \quad k_{w_m f}=\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$$

$$k_{u_1 f}=\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$$

โดยสมการ (5.5a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.5b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ , สมการ (5.5c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.5d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยในกรณีนี้มี 4 พารามิเตอร์ที่สำคัญ คือ k_{bf}, $k_{u mf}$, k_{wmf} และ k_{u1f} ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยพบว่าจากทั้ง 4 พารามิเตอร์นี้สามารถจัดรูปแบบโดยรวมพารามิเตอร์อิสระ k_{u1f} เข้าไว้ใน k_{bf} , $k_{u mf}$ และ k_{wmf} ให้เหลือเพียง 3 พารามิเตอร์เช่นเดียวกับกรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่งได้โดยกำหนดให้ $A^*=\frac{1}{2}k_{u_1 f}+k_{bf}$, $B^*=k_{u_1 f}+k_{u_m f}$ และ $C^*=k_{w_m f}-\frac{1}{2}k_{u_1 f}$ ดังนั้นจึงได้สมการเป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+[A^*]F''\eta-[A^*+B^*]F'=0 \qquad (5.5e)$$

$$g''-\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+[A^*]g'\eta-[C^*]g=0 \qquad (5.5f)$$

สมการ Integral equation

$$I_1[2A^*+B^*]=0 \qquad (5.5g)$$

$$I_4[3A^*+C^*]=0 \qquad (5.5h)$$

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.5e) และ (5.5f) มีพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ A^*, B^* และ C^* ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยที่รวมพารามิเตอร์อิสระอีก 1 ตัว คือ k_{u1f} เข้าไว้ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ

(5.5g) และ (5.5h) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ A^* ซึ่งค่า A^* นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้ไม่มีพารามิเตอร์อิสระ สำหรับรายละเอียดของค่า A^*, B^* และ C^* ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.7

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1 f} = \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงผลของ Pressure gradient ในกรณีที่มีค่าเป็นศูนย์ ทำให้ลดรูปสมการจากสมการ (5.5a) - (5.5d) ได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[k_{bf}\right]F''\eta-\left[k_{u_m f}+k_{bf}\right]F'=0 \tag{5.5i}$$

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[k_{bf}\right]g'\eta-\left[k_{w_m f}\right]g=0 \tag{5.5j}$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f}+2k_{bf}\right]=0 \tag{5.5k}$$

$$I_4\left[k_{w_m f}+3k_{bf}\right]=0 \tag{5.5l}$$

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.5i) และ (5.5j) มีพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ k_{bf}, $k_{u\,mf}$ และ $k_{w\,mf}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.5k) และ (5.5l) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 1 ตัวคือ k_{bf} ซึ่งค่า k_{bf} นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$)

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1 f} \neq 0$ และ $k_{u_1 f} = 0$ พบว่ารูปแบบสมการและความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่ได้มีลักษณะเหมือนกัน

Case B3 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตาม $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$ และ $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$\begin{aligned}&F''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta\\&-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0\end{aligned} \tag{5.6a}$$

$$\begin{aligned}&g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g\\&-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0\end{aligned} \tag{5.6b}$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0 \qquad (5.6c)$$

$$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0 \qquad (5.6d)$$

โดยที่

$$k_b = \mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} \qquad k_{w_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}$$

$$k_{u_1} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx} \qquad \mathrm{V}r = \frac{u_1}{u_m}$$

โดยสมการ (5.6a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.6b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ, สมการ (5.6c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.6d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.6a) และ (5.6b) มีพารามิเตอร์ 5 ตัว คือ k_b, $k_{u\,m}$, $k_{w\,m}$, k_{u1} และ $\mathrm{V}r$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขที่ $\mathrm{V}r = \dfrac{u_1}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ค่า $k_{u_m} = k_{u_1}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.6c) และ (5.6d) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 2 ตัวคือ k_b และ $\mathrm{V}r$ ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 1 ตัว คือ $\mathrm{V}r$ โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$ จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตในกรณีนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$ จาก 0.0 ถึง 2.0 ซึ่งรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$, $k_{w\,m}$ และ k_{u1} ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.8

Case C การไหลของเจ็ตที่หมุนควง $(w_m \sim u_m)$

Case C1 การไหลของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m}(Sr)^2\right]G\eta - \left[k_b(Sr)^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}$$
$$- \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0 \qquad (5.7a)$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0 \qquad (5.7b)$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5(Sr)^2\left[2k_{w_m} + 2k_b\right] = 0 \qquad (5.7c)$$

$$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] = 0 \qquad (5.7d)$$

โดยที่

$$k_b = \mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} \qquad k_{w_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} \qquad \mathrm{S}r = \frac{w_m}{u_m}$$

โดยสมการ (5.7a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.7b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ, สมการ (5.7c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.7d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม สำหรับในกรณีนี้จากการที่ค่า $Sr = \frac{w_m}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า k_{u_m} เท่ากับ k_{wm} ซึ่งเมื่อพิจารณาที่สมการ (5.7c) พบว่า $k_{u_m} = k_{w_m} = -k_b$ แต่จากสมการ (5.7d) กลับพบว่า $k_{u_m} = k_{w_m} = -\frac{3}{2}k_b$ ซึ่งทั้ง 2 สมการนั้นให้ผลขัดแย้ง โดยที่ถ้าตีความหมายโดยตรงก็จะแสดงว่าไม่มี exact similarity ในกรณีที่ Sr เป็นค่าคงที่ ในที่นี้จึงผ่อนผันโดยการแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณีโดยใช้สมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น หรือสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

Case C11 การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

โดยเมื่อพิจารณาจากสมการ (5.7a), (5.7b) และ (5.7c)

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.7a) และ (5.7b) มีพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ k_b, k_{um}, k_{wm} และ Sr ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากการที่ค่า $Sr = \frac{w_m}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{u_m} = k_{w_m}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.7c) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 2 ตัวคือ k_b และ Sr ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m = 0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 1 ตัว คือ Sr โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Sr จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตโดยใช้สมการอินทิกรัลโมมเนตัมเชิงเส้นนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.0 ถึง 0.7 ซึ่งที่ค่า 0.7 นี้เป็นค่าที่มากที่สุดที่สามารถคำนวณได้ สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, k_{um} และ k_{wm} ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.9

Case C12 การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

โดยเมื่อพิจารณาจากสมการ (5.7a), (5.7b) และ (5.7d)

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.7a) และ (5.7b) มีพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ k_b, k_{um}, k_{wm} และ Sr ซึ่งเป็นค่าคงที่เช่นเดียวกับกรณี Case C11 แต่ด้วยเงื่อนไขจากการที่ค่า $Sr = \frac{w_m}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{u_m} = k_{w_m}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.7d) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนด

ค่าได้เพียง 2 ตัวคือ k_b และ Sr ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 1 ตัว คือ Sr โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Sr จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตโดยใช้สมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.1 ถึง 2.0 ซึ่งที่ค่า 2.0 นี้เป็นค่าที่มากที่สุดที่สามารถคำนวณได้ สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, k_{um} และ k_{wm} ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.10

Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs}

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$, $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m s}\right]G\eta - \left[k_{bs}\right]G'\eta^2 + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{u_m f} + k_{bf}\right]F' = 0 \quad (5.8a)$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]g'\eta - \left[k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}\right]g = 0 \quad (5.8b)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f} + 2k_{u_1 f} + 2k_{bf}\right] - I_5\left[2k_{w_m s} + 2k_{bs}\right] = 0 \quad (5.8c)$$

$$I_4\left[k_{w_m f} + k_{u_1 f} + 3k_{bf}\right] = 0 \quad (5.8d)$$

โดยที่

$$k_{bf} = \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \qquad k_{u_m f} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) \qquad k_{w_m f} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$$

$$k_{bs} = \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 \qquad k_{w_m s} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 \qquad k_{u_1 f} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$$

โดยสมการ (5.8a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.8b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ , สมการ (5.8c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.8d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม สำหรับในกรณีนี้จะกำหนดพารามิเตอร์ขึ้นมาใหม่เรียกว่า k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงระดับการหมุนควง เนื่องจากเป็นการรวมเทอม w_m/u_m เข้าไว้ในค่า k_b และ k_{w_m} เป็นค่า k_{bs} และ $k_{w_m s}$ โดยในกรณีนี้มี 6 พารามิเตอร์ที่สำคัญคือ k_{bf}, k_{umf}, k_{wmf}, k_{u1f}, k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยพบว่าจากทั้ง 6 พารามิเตอร์นี้สามารถจัดรูปแบบให้เหลือเพียง 5 พารามิเตอร์โดยรวมพารามิเตอร์อิสระ k_{u1f} เข้าไว้ใน k_{bf}, k_{umf} และ k_{wmf} ได้โดยกำหนดให้ $A^* = \frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}$, $B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$ และ $C^* = k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}$ ดังนั้นจึงได้สมการเป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m s}\right]G\eta-\left[k_{bs}\right]G'\eta^2+\left[A^*\right]F''\eta-\left[A^*+B^*\right]F'=0 \qquad (5.8e)$$

$$g''-\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[A^*\right]g'\eta-\left[C^*\right]g=0 \qquad (5.8f)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[2A^*+B^*\right]-I_5\left[2k_{w_m s}+2k_{bs}\right]=0 \qquad (5.8g)$$

$$I_4\left[3A^*+C^*\right]=0 \qquad (5.8h)$$

โดยที่รวมพารามิเตอร์อิสระอีก 1 ตัว คือ k_{u1f} เข้าไว้

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.8e) และ (5.8f) มีพารามิเตอร์ 5 ตัว คือ A^*, B^*, C^*, k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยที่รวมพารามิเตอร์อิสระอีก 1 ตัว คือ k_{u1f} เข้าไว้ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.8g) และ (5.8h) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 3 ตัวคือ A^*, k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งค่า A^* นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ($u/u_m=0.5$) จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 2 ตัว คือ k_{bs} และ $k_{w_m s}$ สำหรับความสัมพันธ์ของ k_{bs} และ $k_{w_m s}$ กำหนดให้มีค่า $k_{w_m s}=-3k_{bs}$ สาเหตุเนื่องจากเป็นค่าที่มีค่าเท่ากันกับในกรณีที่ Pressure gradient ที่มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้อธิบายต่อไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตในกรณีนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} จาก 0.01 ถึง 5.0 ซึ่งที่ค่า 5.0 นี้เป็นค่าที่มากที่สุดที่สามารถคำนวณได้ สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$ และ $k_{w\,m}$ ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.11

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1 f}=\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงผลของ Pressure gradient ในกรณีที่มีค่าเป็นศูนย์ ทำให้ลดรูปสมการจากสมการที่ (5.8a)-(5.8d) ได้

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m s}\right]G\eta-\left[k_{bs}\right]G'\eta^2+\left[k_{bf}\right]F''\eta-\left[k_{u_m f}+k_{bf}\right]F'=0 \qquad (5.8i)$$

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[k_{bf}\right]g'\eta-\left[k_{w_m f}\right]g=0 \qquad (5.8j)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f}+2k_{bf}\right]-I_5\left[2k_{w_m s}+2k_{bs}\right]=0 \qquad (5.8k)$$

$$I_4\left[k_{w_m f}+3k_{bf}\right]=0 \qquad (5.8l)$$

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.8i) และ (5.8j) มีพารามิเตอร์ 5 ตัว คือ k_{bf}, $k_{u\,mf}$, $k_{w\,mf}$, k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากสมการ (5.8k) และ (5.8l) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 3 ตัว คือ k_{bf}, k_{bs} และ $k_{w_m s}$ ซึ่งค่า k_{bf} นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

$(u/u_m = 0.5)$ ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระเพียง 2 ตัว คือ k_{bs} และ $k_{w_{ms}}$ จากพารามิเตอร์ k_{bf}, k_{wmf}, k_{bs} และ k_{wms} ทำให้ได้ว่า $k_{bf}/k_{w_mf} = k_{bs}/k_{w_ms}$ ซึ่งเมื่อพิจารณาที่สมการ (5.8l) พบว่า $k_{w_mf} = -3k_{bf}$ จึงได้ความสัมพันธ์ว่า $k_{w_ms} = -3k_{bs}$ ดังนั้นในกรณีนี้จึงมีพารามิเตอร์อิสระ 1 ตัว คือ k_{bs} พบว่า $k_{w_mf} = -3k_{bf}$ ซึ่งเมื่อ

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ $k_{u_1f} \neq 0$ และ $k_{u_1f} = 0$ พบว่ารูปแบบสมการและความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่ได้มีลักษณะเหมือนกัน

Case C3 กรณีเจ็ตที่หมุนควง $w_m \sim u_m$ ในกระแสลมตาม $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนค่า Sr และ $\mathrm{V}r$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$ และ $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) ได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta - \left[k_b Sr^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}$$
$$+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0 \qquad (5.9a)$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g$$
$$-\left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0 \qquad (5.9b)$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_bSr^2\right] = 0 \qquad (5.9c)$$

$$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0 \qquad (5.9d)$$

โดยที่

$$k_b = \mathrm{Re}\frac{db}{dx} \qquad k_{u_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} \qquad k_{w_m} = \mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}$$

$$k_{u_1} = \mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx} \qquad Sr = \frac{w_m}{u_m} \qquad \mathrm{V}r = \frac{u_1}{u_m}$$

โดยสมการ (5.9a) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน x, สมการ (5.9b) เป็นสมการโมเมนตัมตามแนวแกน θ, สมการ (5.9c) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น และสมการ (5.9d) เป็นสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

โดยในกรณีนี้เนื่องจากการที่ค่า Sr และ $\mathrm{V}r$ เป็นค่าคงที่ทำให้ได้ว่า $k_{u_m} = k_{w_m} = k_{u_1}$ ซึ่งเมื่อพิจารณาที่สมการ (5.9d) พบว่าค่า $k_{u_m} = k_{w_m} = k_{u_1} = -\frac{3}{2}k_b$ ซึ่งเมื่อแทนในสมการที่ (5.9c) แล้วนำไปคำนวณแก้สมการ พบว่าผลการคำนวณที่ได้ไม่ลู่เข้าสู่คำตอบ โดยถ้าตีความหมายโดยตรงก็จะแสดงว่าไม่มี exact similarity ในกรณีที่ Sr เป็นค่าคงที่ ในที่นี้จึงผ่อนผันโดย

การแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณีโดยใช้สมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น หรือสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

Case C31 การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

โดยเมื่อพิจารณาจากสมการ (5.9a), (5.9b) และ (5.9c)

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.9a) และ (5.9b) มีพารามิเตอร์ 6 ตัว คือ k_b, $k_{u\,m}$, $k_{w\,m}$, k_{u1}, Sr และ Vr ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากการที่ค่า $Sr = \dfrac{w_m}{u_m}$ และ $\mathrm{V}r = \dfrac{u_1}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{u_m} = k_{w_m} = k_{u_1}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.9c) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 3 ตัวคือ k_b, Sr และ Vr ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 2 ตัว คือ Sr และ Vr โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตโดยใช้สมการโมเมนตัมเชิงเส้นนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.0 ถึง 0.8 ซึ่งที่ค่า 0.8 นี้เป็นค่าที่มากที่สุดที่สามารถคำนวณได้ และค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0 สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$ และ $k_{w\,m}$ ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.12 ถึง 5.17

Case C32 การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

โดยเมื่อพิจารณาจากสมการ (5.9a), (5.9b) และ (5.9d)

พารามิเตอร์ พบว่าจากสมการที่ (5.9a) และ (5.9b) มีพารามิเตอร์ 6 ตัว คือ k_b, $k_{u\,m}$, $k_{w\,m}$, k_{u1}, Sr และ Vr ซึ่งเป็นค่าคงที่ แต่ด้วยเงื่อนไขจากการที่ค่า $Sr = \dfrac{w_m}{u_m}$ และ $\mathrm{V}r = \dfrac{u_1}{u_m}$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{u_m} = k_{w_m} = k_{u_1}$ และเงื่อนไขจากสมการ (5.9d) ทำให้เหลือพารามิเตอร์อิสระที่กำหนดค่าได้เพียง 3 ตัวคือ k_b, Sr และ Vr ซึ่งค่า k_b นี้จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขที่ว่า ความหนาเจ็ต (b) เป็นระยะรัศมีที่มีความเร็วเป็น 50% ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด $(u/u_m = 0.5)$ จึงทำให้ในกรณีนี้มีพารามิเตอร์อิสระ 2 ตัว คือ Sr และ Vr โดยเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr จะทำให้ Similarity solution ของสมการเปลี่ยนแปลงไป สำหรับในการศึกษาการไหลของเจ็ตโดยใช้สมการโมเมนตัมเชิงเส้นนี้จะเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.01 ถึง 0.8 ซึ่งที่ค่า 0.8 นี้เป็นค่าที่มากที่สุดที่สามารถคำนวณได้ และค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0 สำหรับรายละเอียดของค่า k_b, $k_{u\,m}$ และ $k_{w\,m}$ ในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5.18 ถึง 5.23

บทที่ 6

การคำนวณความหนา และการลดลงของความเร็วเจ็ต

สำหรับในการคำนวณความหนา และการลดลงของความเร็วของทั้ง 3 กรณี คือ กรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควง $(w_m = 0)$ กรณีการไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ และกรณีการไหลของเจ็ต $(w_m \sim u_m)$ ที่หมุนควงโดยเปลี่ยนแปลงค่า w_m / u_m โดยในการศึกษาแต่ละกรณีนั้นจะเริ่มต้นจากสมการ (4.4a) และ (4.4b) ซึ่งเป็นสมการ Differential Equation และใช้เงื่อนไขจากสมการ (4.5a) และ (4.5b) ซึ่งเป็นสมการ Integral Equation ในการหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ต่างๆ โดยรายละเอียดของความหนา และการลดลงของความเร็วเจ็ตที่ได้ในแต่ละกรณีได้สรุปไว้ดังตารางที่ 6.1

สมการ Differential Equation

สมการ x-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
&F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G\eta - \left[\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G'\eta^2 + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F''F}{\eta} \\
&- \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F''\eta \\
&- \left[\frac{3}{2}\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F' \\
&- \left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'^2}{\eta} \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.4a}
$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
&g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta \\
&- \left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right) - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g - \left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx} + \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta} \\
&+ \left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx} + \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2} \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.4b}
$$

สมการ Integral Equation

สมการ x-โมเมนตัม

$$I_1\left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}+2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right]+I_2\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]$$
$$-I_5\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2+2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]=0 \quad (4.5a)$$

สมการ θ-โมเมนตัม

$$I_3\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}+3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]+$$
$$I_4\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}+3\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right]=0 \quad (4.5b)$$

Case A การไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควง $(w_m=0)$

Case A1 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง $(u_1=0)$

สำหรับกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง ในอากาศหยุดนิ่ง จากสมการ (4.4a) และ (4.5a) ด้วยเงื่อนไขที่ w_m และ u_1 เท่ากับศูนย์จึงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_b+2k_{u_m}\right]=0$$

นำ k_b มาหาร k_{u_m} ได้เป็น

$$\frac{du_m}{u_m}=\left(\frac{k_{u_m}}{k_b}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_m=c_1 b^{\left(\frac{k_{u_m}}{k_b}\right)} \quad (6.1)$$

แทนค่า Re และ u_m ลงใน k_b ได้เป็น

$$k_b=\frac{u_m b}{\nu}\frac{db}{dx}=\frac{c_1 b^{\frac{k_{u_m}}{k_b}+1}}{\nu}\frac{db}{dx}$$

$$\frac{k_b \nu}{c_1} dx = b^{\frac{k_{u_m}}{k_b}+1} db$$

เมื่ออินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} (x - x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.2}$$

แทนค่า b จากสมการ (6.2) ในสมการ (6.1)

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.3}$$

แทนค่า $k_b = -k_{u_m}$ จากสมการ Integral equation ในสมการ (6.2) และ (6.3) ได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{k_b \nu}{c_1}\right](x - x_0) \tag{6.4a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{k_b \nu}{c_1}\right]^{-1} (x - x_0)^{-1} \tag{6.4b}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$ ได้เป็น

$\mathrm{Re} = \dfrac{c_1}{\nu} = \mathrm{Re}_0$ ซึ่งมีค่าคงที่

ดังนั้นหาค่า c_1 ได้เป็น

$c_1 = \mathrm{Re}_0 \nu$

จากสมการ (6.4a) และสมการ (6.4b) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \tag{6.5a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2 \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.5b}$$

.Case A2 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a) และ (4.5a) สามารถลดรูปสมการได้

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{bf} + k_{u_m f}\right]F' = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[2k_{bf} + k_{u_m f} + 2k_{u_1 f}\right] = 0$$

กำหนดให้

$$A^* = \frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}$$

$$B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$$

เมื่อแทนในสมการ Differential equation และ Integral equation จึงได้เป็น

$$F''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+[A^*]F''\eta-[A^*+B^*]F'=0$$

$$I_1[2A^*+B^*]=0$$

นำ k_{bf} มาหาร $k_{u_m f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_m}{u_m}=\left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_m = c_1 b^{\left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.6}$$

และนำ k_{bf} มาหาร $k_{u_1 f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_1}{u_1}=\left(\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_1 = c_2 b^{\left(\frac{k_{u1 f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.7}$$

แทนค่า u_1 จากสมการ (6.7) ใน k_{bf}

$$\left[\frac{k_{bf}\nu}{c_2}\right]dx = b^{\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}+1}db$$

เมื่ออินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x)=\left[\frac{(k_{u_1 f}+2k_{bf})\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f}+2k_{bf}}}(x-x_0)^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f}+2k_{bf}}}$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$b(x)=\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{2A^*}}(x-x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.8a}$$

แทน b จากสมการ (6.8a) ในสมการ (6.6) และ (6.7) ทำให้ได้

$$u_m(x)=c_1\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.8b}$$

$$u_1(x) = c_2\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_1f}}{2A^*}}(x-x_0)^{\frac{k_{u_1f}}{2A^*}} \tag{6.8c}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_mf}+k_{bf}}{2A^*}\right]}(x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_mf}+k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0(x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_mf}+k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_mf}+k_{bf}}{2A^*}\right]} \tag{6.9}$$

นำ u_m มาหาร u_1 ได้เป็น

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1f}-k_{u_mf}}{2A^*}\right]}(x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_1f}-k_{u_mf}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\frac{u_1}{u_m} = \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 (x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_1f}-k_{u_mf}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1f}-k_{u_mf}}{2A^*}\right]} \tag{6.10}$$

จากสมการ (6.9) และสมการ (6.10) ทำให้หาค่า c_1 และ c_2 ได้เป็น

$$c_1 = \frac{\mathrm{Re}_0\,\nu}{\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_mf}+k_{bf}}{2A^*}\right]}}$$

$$c_2 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0}{\left[2A^*\nu\right]^{\left[\frac{k_{u_1f}+k_{bf}}{2A^*}\right]}}\right]^{\left[\frac{2A^*}{2A^*-k_{u_1f}-k_{bf}}\right]}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (6.8a), (6.8b) และ (6.8c) จึงได้เป็น

$$b(x)=\frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.11a}$$

$$u_m(x)=\frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.11b}$$

$$u_1(x)=\frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0^2\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} \tag{6.11c}$$

Case A3 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a) และ (4.5a) สามารถลดรูปสมการได้เป็นสมการ Differential equation

$$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta$$
$$-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$$

เนื่องจาก $\mathrm{V}r$ เป็นค่าคงที่ จึงได้ว่า $k_{u_m}=k_{u_1}$ ดังนั้นจากสมการ Integral equation จึงได้ว่า

$$I_1\left[3k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$$
$$k_{u_m}\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]+k_b\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]=0$$
$$k_{u_m}=-k_b\frac{\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}$$

กำหนดให้

$$A_1=\frac{\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}$$

ดังนั้น $k_{u_m}=-A_1k_b$

นำ k_b มาหาร k_{u_m} แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x)=\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.12a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.12b}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}ru_m(x) \tag{6.12c}$$

เมื่อแทนค่า $k_{u_m} = -A_1 k_b$ ในสมการที่ (6.12a) และ (6.12b) ได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{(2 - A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1}{(2-A_1)}} (x - x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \tag{6.13a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(2 - A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} (x - x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.13b}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}rc_1\left[\frac{(2 - A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} (x - x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.13c}$$

คำนวณหาค่า $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$ โดยการแทนค่า b และ u_m

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2 - A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}} (x - x_0)^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 (x - x_0)^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2 - A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}} \tag{6.14}$$

หาค่า c_1 จากสมการ (6.14) ได้เป็น

$$c_1 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0\,\nu}{\left[(2 - A_1)k_b\nu\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}}\right]^{2-A_1}$$

ดังนั้นจากสมการ (6.13a), (6.13b) และ (6.13c) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{(2 - A_1)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \tag{6.15a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2 - A_1)k_b}\right](x - x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.15b}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}r\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2 - A_1)k_b}\right](x - x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.15c}$$

Case B การไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$

Case B1 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศที่หยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_b + k_{w_m}\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0$$

$$I_3\left[k_{w_m} + k_{u_m} + 3k_b\right] = 0$$

นำ k_b หาร k_{u_m} ได้เป็น

$$\frac{du_m}{u_m} = \left(\frac{k_{u_m}}{k_b}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_m = c_1 b^{\left(\frac{k_{u_m}}{k_b}\right)} \qquad (6.16)$$

นำ k_b หาร k_{w_m} ได้เป็น

$$\frac{dw_m}{w_m} = \left(\frac{k_{w_m}}{k_b}\right)\frac{db}{b}$$

$$w_m = c_2 b^{\left(\frac{k_{w_m}}{k_b}\right)} \qquad (6.17)$$

แทนค่า Re และ u_m จากสมการ (6.16) ลงใน k_b ได้เป็น

$$k_b = \frac{u_m b}{\nu}\frac{db}{dx} = \frac{c_1 b^{\frac{k_{u_m}}{k_b}+1}}{\nu}\frac{db}{dx}$$

$$\frac{k_b \nu}{c_1} dx = b^{\frac{k_{u_m}}{k_b}+1} db$$

เมื่ออินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} (x - x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \qquad (6.18a)$$

และแทนค่า b จากสมการ (6.18a) ในสมการ (6.16) และ (6.17) ได้เป็น

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.18b}$$

$$w_m(x) = c_2\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{w_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_{w_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.18c}$$

แทนค่า $k_{u_m} = -k_b$ และ $k_{w_m} = -2k_b$ จากสมการ Integral equation ในสมการที่ (6.18a), (6.18b) และ (6.18c) ได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{k_b\nu}{c_1}\right](x-x_0) \tag{6.19a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{k_b\nu}{c_1}\right]^{-1}(x-x_0)^{-1} \tag{6.19b}$$

$$w_m(x) = c_2\left[\frac{k_b\nu}{c_1}\right]^{-2}(x-x_0)^{-2} \tag{6.19c}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$ ทำให้ได้เป็น

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu} = \mathrm{Re}_0$$

ดังนั้นจะได้ค่า c_1

$$c_1 = \mathrm{Re}_0\,\nu$$

นำ u_m มาหาร w_m ได้เป็น

$$\frac{w_m}{u_m} = \left[\frac{c_2}{k_b\nu}\right](x-x_0)^{-1}$$

กำหนดให้

$$\frac{w_m}{u_m} = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0(x-x_0)^{-1}$$

โดยที่

$$\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 = \frac{c_2}{k_b\nu} \tag{6.20}$$

ดังนั้นหาค่า c_2 ได้จากสมการ (6.20) ได้เป็น

$$c_2 = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 k_b\nu$$

จากสมการ (6.19a), (6.19b) และสมการ (6.19c) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \tag{6.21a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2 \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.21b}$$

$$w_m(x) = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2 \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \tag{6.21c}$$

Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$, $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{u_m f} + k_{bf}\right]F' = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]g'\eta - \left[k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}\right]g = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f} + 2k_{u_1 f} + 2k_{bf}\right] = 0$$

$$I_4\left[k_{w_m f} + k_{u_1 f} + 3k_{bf}\right] = 0$$

กำหนดให้

$$A^* = \frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}$$

$$B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$$

$$C^* = k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}$$

ดังนั้นทำให้สมการ Differential equation และสมการ Integral equation ได้เป็น

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + [A^*]F''\eta - [A^* + B^*]F' = 0$$

$$g'' - \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + [A^*]g'\eta - [C^*]g = 0$$

$$I_1[2A^* + B^*] = 0$$

$$I_4[3A^* + C^*] = 0$$

และนำ k_{bf} หาร $k_{u_m f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_m}{u_m} = \left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_m = c_1 b^{\left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.22}$$

นำ k_{bf} หาร $k_{w_m f}$ ได้เป็น

$$\frac{dw_m}{w_m} = \left(\frac{k_{w_m f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$w_m = c_3 b^{\left(\frac{k_{w_m f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.23}$$

นำ k_{bf} หาร $k_{u_1 f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_1}{u_1} = \left(\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_1 = c_2 b^{\left(\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.24}$$

แทนค่า u_1 จากสมการ (6.24) ใน $k_{bf} = \mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m} = \frac{u_m b}{\nu}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}$ แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_1 f} + 2k_{bf})\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f} + 2k_{bf}}} (x - x_0)^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f} + 2k_{bf}}}$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{A^* \nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.25a}$$

แทน b ในสมการ (6.22), (6.23) และ (6.24) ทำให้ได้

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{2A^* \nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.25b}$$

$$w_m(x) = c_3\left[\frac{2A^* \nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} \tag{6.25c}$$

$$u_1(x) = c_2\left[\frac{2A^* \nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} \tag{6.25d}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \frac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^* \nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f} + k_{bf}}{2A^*}\right]} (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_m f} + k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_m f} + k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f} + k_{bf}}{2A^*}\right]} \tag{6.26}$$

นำ u_m มาหาร u_1 ได้เป็น

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]} (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_1 f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\frac{u_1}{u_m} = \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_1 f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]} \tag{6.27}$$

จากสมการ (6.26) และ (6.27) หาค่า c_1 และ c_2 ได้เป็น

$$c_1 = \frac{\mathrm{Re}_0 \nu}{\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f} + k_{bf}}{2A^*}\right]}}$$

$$c_2 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0 \nu \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0}{\left[2A^*\nu\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f} + k_{bf}}{2A^*}\right]}}\right]^{\left[\frac{2A^*}{2A^* - k_{u_1 f} - k_{bf}}\right]}$$

นำ u_m หาร w_m

$$\frac{w_m}{u_m} = \frac{c_3}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]} (x - x_0)^{\left[\frac{k_{w_m f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\frac{w_m}{u_m} = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 (x - x_0)^{\left[\frac{k_{w_m f} - k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 = \frac{c_3}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]} \tag{6.28}$$

จากสมการที่ (6.28) หาค่า c_3 ได้เป็น

$$c_3 = \frac{\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 c_1}{\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (6.25a), (6.25b), (6.25c) และ (6.25d) ได้เป็น

$$b(x) = \frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.29a}$$

$$u_m(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.29b}$$

$$w_m(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} \tag{6.29c}$$

$$u_1(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0^2\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} \tag{6.29d}$$

Case B3 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m << u_m$ และ $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta$$
$$-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g$$

$$-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$$

$$I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$$

ดังนั้นจากสมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$$

เนื่องจาก $\mathrm{V}r$ มีค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{u_m}=k_{u_1}$ ดังนั้น

$$I_1\left[3k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$$

$$k_{u_m}\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]+k_b\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]=0$$

$$k_{u_m}=-k_b\frac{\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}$$

กำหนดให้

$$A_1=\frac{\left[2I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r+2I_2\right]}$$

ดังนั้น $k_{u_m}=-A_1k_b$

นำ k_b มาหาร k_{u_m} และ k_{w_m} แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x)=\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.30a}$$

$$u_m(x)=c_1\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.30b}$$

$$w_m(x)=c_2\left[\frac{(k_{u_m}+2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{w_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_{w_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.30c}$$

$$u_1(x)=\mathrm{V}ru_m(x) \tag{6.30d}$$

เมื่อแทนค่า $k_{u_m}=-Ak_b$ และ $k_{w_m}=-\left[3-A_1\right]k_b$ ในสมการ (6.30a), (6.30b), (6.30c) และ (6.30d)

$$b(x)=\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1}{(2-A_1)}}(x-x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \tag{6.31a}$$

$$u_m(x)=c_1\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}}(x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.31b}$$

$$w_m(x) = c_2\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}}(x-x_0)^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}} \tag{6.31c}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}r\ c_1\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}}(x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.31d}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}(x-x_0)^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0(x-x_0)^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}} \tag{6.32}$$

ดังนั้นจากสมการ (6.32) หาค่า c_1 ได้เป็น

$$c_1 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0\,\nu}{\left[(2-A_1)k_b\nu\right]^{\frac{1-A_1}{2-A_1}}}\right]^{2-A_1}$$

เมื่อนำ u_m มาหาร w_m

$$\frac{w_m}{u_m} = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{(2A_1-3)}{2-A_1}}(x-x_0)^{\frac{(2A_1-3)}{2-A_1}}$$

กำหนดให้

$$\frac{w_m}{u_m} = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0(x-x_0)^{\frac{(2A_1-3)}{2-A_1}}$$

โดยที่

$$\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{(2-A)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{(2A_1-3)}{2-A_1}} \tag{6.33}$$

ดังนั้นหาค่า c_2 จากสมการ (6.33) ได้เป็น

$$c_2 = \frac{\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)_0 c_1}{\left[\dfrac{(2-A_1)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{(2A_1-3)}{2-A_1}}}$$

จากสมการ (6.31a), (6.31b), (6.31c) และ (6.31d) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{(2-A_1)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \tag{6.34a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.34b}$$

$$w_m(x) = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}} \tag{6.34c}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}r\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \tag{6.34d}$$

Case C การไหลของเจ็ตที่หมุนควง $(w_m \sim u_m)$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr

Case C1 กรณีเจ็ตที่หมุนควง $w_m \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr ในอากาศที่หยุดนิ่ง

จากเงื่อนไขการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้จึงแบ่งสมการที่ใช้การคำนวณออกได้เป็น 2 กรณี

<u>Case C11</u> การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b) และ (4.5a) สามารถลดรูปได้

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m}(Sr)^2\right]G\eta - \left[k_b(Sr)^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}$$

$$-\left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5(Sr)^2\left[2k_{w_m} + 2k_b\right] = 0$$

เมื่อนำ k_b มาหาร k_{u_m} แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}}(x-x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.35a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x - x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.35b}$$

$$w_m(x) = Sru(x) \tag{6.35c}$$

เนื่องจาก Sr เป็นค่าคงที่และจากสมการ Integral equation ดังนั้นได้ว่า $k_{w_m} = k_{u_m} = -k_b$ จึงได้

$$b(x) = \left[\frac{k_b \nu}{c_1}\right](x - x_0) \tag{6.36a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{c_1^2}{k_b \nu}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.36b}$$

$$w_m(x) = Sr\left[\frac{c_1^2}{k_b \nu}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.36c}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu} = \mathrm{Re}_0 \tag{6.37}$$

หาค่า c_1 จากสมการ (6.37) ได้เป็น

$$c_1 = \mathrm{Re}_0\,\nu$$

จากสมการ (6.36a), (6.36b) และ (6.36c) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \tag{6.38a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.38b}$$

$$w_m(x) = Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \tag{6.38c}$$

<u>Case C12</u> การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b) และ (4.5b) สามารถลดรูปได้สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right]G\eta - \left[k_b Sr^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}$$

$$-\left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

สมการ Integral equation

$I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]=0$

เนื่องจาก Sr เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจึงได้ว่า $k_{w_m}=k_{u_m}=-\frac{3}{2}k_b$ และเมื่อแทนค่าในสมการที่ (6.35a), (6.35b) และ (6.35c) จึงได้เป็น

$$b(x)=\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^2(x-x_0)^2 \tag{6.39a}$$

$$u_m(x)=c_1\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.39b}$$

$$w_m(x)=Sr\ c_1\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.39c}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re}=\frac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re}=\left[\frac{2c_1^2}{k_b\nu^2}\right](x-x_0)^{-1}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_0(x-x_0)^{-1}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0=\left[\frac{2c_1^2}{k_b\nu^2}\right] \tag{6.40}$$

หาค่า c_1 จากสมการ (6.40) ได้เป็น

$$c_1=\sqrt{\frac{k_b\nu^2\,\mathrm{Re}_{x0}}{2}}$$

ดังนั้นจากสมการ (6.39a), (6.39b) และ (6.39c) จึงได้เป็น

$$b(x)=\left[\frac{k_b}{2\,\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^2 \tag{6.41a}$$

$$u_m(x)=\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b\nu}\right](x-x_0)^{-3} \tag{6.41b}$$

$$w_m(x)=Sr\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b\nu}\right](x-x_0)^{-3} \tag{6.41c}$$

Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs}

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$, $u_1 >> u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b), (4.5a) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m s}\right]G\eta - \left[k_{bs}\right]G'\eta^2 + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{u_m f} + k_{bf}\right]F' = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]g'\eta - \left[k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}\right]g = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m f} + 2k_{u_1 f} + 2k_{bf}\right] - I_5\left[2k_{w_m s} + 2k_{bs}\right] = 0$$

$$I_4\left[k_{w_m f} + k_{u_1 f} + 3k_{bf}\right] = 0$$

กำหนดให้

$$A^* = \frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}$$

$$B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$$

$$C^* = k_{w_m f} - \frac{1}{2}k_{u_1 f}$$

ดังนั้นจะได้

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m s}\right]G\eta - \left[k_{bs}\right]G'\eta^2 + \left[A^*\right]F''\eta - \left[A^* + B^*\right]F' = 0$$

$$g'' - \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[A^*\right]g'\eta - \left[C^*\right]g = 0$$

$$I_1\left[2A^* + B^*\right] - I_5\left[2k_{w_m s} + 2k_{bs}\right] = 0$$

$$I_4\left[3A^* + C^*\right] = 0$$

นำ k_{bf} หาร $k_{u_m f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_m}{u_m} = \left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_m = c_1 b^{\left(\frac{k_{u_m f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.42}$$

นำ k_{bf} หาร $k_{w_m f}$ ได้เป็น

$$\frac{dw_m}{w_m} = \left(\frac{k_{w_m f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$w_m = c_3 b^{\left(\frac{k_{w_m f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.43}$$

นำ k_{bf} หาร $k_{u_1 f}$ ได้เป็น

$$\frac{du_1}{u_1} = \left(\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}\right)\frac{db}{b}$$

$$u_1 = c_2 b^{\left(\frac{k_{u_1 f}}{k_{bf}}\right)} \tag{6.44}$$

แทนค่า u_1 จากสมการ (6.44) ใน $k_{bf} = \mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\dfrac{u_1}{u_m} = \dfrac{u_m b}{\nu}\dfrac{db}{dx}\dfrac{u_1}{u_m}$ แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_1 f} + 2k_{bf})\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f}+2k_{bf}}} (x - x_0)^{\frac{k_{bf}}{k_{u_1 f}+2k_{bf}}}$$

สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.45a}$$

แทนค่า b ในสมการ (6.42), (6.43) และสมการ (6.44) ทำให้ได้

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.45b}$$

$$w_m(x) = c_3\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} \tag{6.45c}$$

$$u_1(x) = c_2\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} (x - x_0)^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} \tag{6.45d}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f}+k_{bf}}{2A^*}\right]} (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_m f}+k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 (x - x_0)^{\left[\frac{k_{u_m f}+k_{bf}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f}+k_{bf}}{2A^*}\right]} \tag{6.46}$$

นำ u_m มาหาร u_1 ได้เป็น

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}(x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_1 f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\frac{u_1}{u_m} = \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 (x-x_0)^{\left[\frac{k_{u_1 f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0 = \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]} \tag{6.47}$$

จากสมการ (6.46) และ (6.47) หาค่า c_1 และ c_2 ได้เป็น

$$c_1 = \frac{\mathrm{Re}_0\,\nu}{\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{u_m f}+k_{bf}}{2A^*}\right]}}$$

$$c_2 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0}{\left[2A^*\nu\right]^{\left[\frac{k_{u_1 f}+k_{bf}}{2A^*}\right]}}\right]^{\left[\frac{2A^*}{2A^*-k_{u_1 f}-k_{bf}}\right]}$$

นำ u_m มาหาร w_m ได้เป็น

$$\frac{w_m}{u_m} = \frac{c_3}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}(x-x_0)^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

กำหนดให้

$$\frac{w_m}{u_m} = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 (x-x_0)^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}$$

โดยที่

$$\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 = \frac{c_3}{c_1}\left[\frac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]} \tag{6.48}$$

หาค่า c_3 จากสมการ (6.48) ได้เป็น

$$c_3 = \frac{\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)_0 c_1}{\left[\dfrac{2A^*\nu}{c_2}\right]^{\left[\frac{k_{w_m f}-k_{u_m f}}{2A^*}\right]}}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (6.45a), (6.45b), (6.45c) และ (6.45d) จึงได้เป็น

$$b(x) = \frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{\frac{k_{bf}}{2A^*}} \tag{6.49a}$$

$$u_m(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}} \tag{6.49b}$$

$$w_m(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}} \tag{6.49c}$$

$$u_1(x) = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)_0^2\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\frac{k_{u_1 f}}{2A^*}} \tag{6.49d}$$

Case C3 กรณีเจ็ตที่หมุนควง $w_m \sim u_m$ ในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ $\mathrm{V}r$
จากเงื่อนไขการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้สามารถแบ่งสมการที่ใช้การคำนวณออกได้เป็น 2 กรณี

<u>Case C31</u> การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$, $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b) และ (4.5a) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta - \left[k_bSr^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}$$
$$+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g$$
$$-\left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

สมการ Integral equation

$$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_bSr^2\right] = 0$$

จากการที่ Sr และ $\mathrm{V}r$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{w_m} = k_{u_m} = k_{u_1}$ ดังนั้น

$$k_{u_m}I_1\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right] + k_b\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right] = 0$$

$$k_{u_m} = -k_b\frac{\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right]}$$

กำหนดให้

$$A_2 = \frac{\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5Sr^2\right]}$$

จึงได้ว่า $k_{u_m} = -A_2k_b$

เมื่อนำ k_b มาหาร k_{u_m} แล้วอินทิเกรตทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}}(x - x_0)^{\frac{k_b}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.50a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(k_{u_m} + 2k_b)\nu}{c_1}\right]^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}}(x - x_0)^{\frac{k_{u_m}}{k_{u_m}+2k_b}} \tag{6.50b}$$

$$w_m(x) = Sru_m(x) \tag{6.50c}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}ru_m(x) \tag{6.50d}$$

เมื่อแทนค่า $k_{u_m} = -A_2k_b$ ทำให้ได้

$$b(x) = \left[\frac{(2 - A_2)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1}{(2-A_2)}}(x - x_0)^{\frac{1}{(2-A_2)}} \tag{6.51a}$$

$$u_m(x) = c_1\left[\frac{(2 - A_2)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}(x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.51b}$$

$$w_m(x) = Sr\ c_1\left[\frac{(2 - A_2)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}(x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.51c}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}r\ c_1\left[\frac{(2 - A_2)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}(x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.51d}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re} = \frac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2 - A_2)k_b\nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_2}{2-A_2}}(x - x_0)^{\frac{1-A_2}{2-A_2}}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 (x - x_0)^{\frac{1-A_2}{2-A_2}}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{c_1}{\nu}\left[\frac{(2-A_2)k_b \nu}{c_1}\right]^{\frac{1-A_2}{2-A_2}} \tag{6.52}$$

หาค่า c_1 จากสมการ (6.52) ได้เป็น

$$c_1 = \left[\frac{\mathrm{Re}_0\, \nu}{\left[(2-A_2)k_b \nu\right]^{\frac{1-A_2}{2-A_2}}}\right]^{2-A_2}$$

จากสมการ (6.51a), (6.51b), (6.51c) และ (6.51d) จึงได้เป็น

$$b(x) = \left[\frac{(2-A_2)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0)^{\frac{1}{(2-A_2)}} \tag{6.53a}$$

$$u_m(x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{(2-A_2)k_b}\right](x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.53b}$$

$$w_m(x) = Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{(2-A_2)k_b}\right](x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.53c}$$

$$u_1(x) = \mathrm{V}r\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{(2-A_2)k_b}\right](x - x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}} \tag{6.53d}$$

Case C32 การคำนวณโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

โดยเป็นการพิจารณาในกรณีที่ $w_m \sim u_m$, $u_1 \sim u_m$ จากสมการ (4.4a), (4.4b) และ (4.5b) สามารถลดรูปสมการได้เป็น

สมการ Differential equation

$$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right]G\eta - \left[k_b Sr^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}$$

$$+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$$

$$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g$$

$$-\left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$$

สมการ Integral equation

$I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$

จาก Sr และ $\mathrm{V}r$ เป็นค่าคงที่จึงทำให้ได้ว่า $k_{w_m}=k_{u_m}=k_{u_1}$ ดังนั้นสมการ Integral equation

$k_{u_m}=-\dfrac{3}{2}k_b$ และเมื่อแทนในสมการ (6.50a), (6.50b), (6.50c) และ (6.50d)

$$b(x)=\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^2(x-x_0)^2 \tag{6.54a}$$

$$u_m(x)=c_1\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.54b}$$

$$w_m(x)=Sr\ c_1\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.54c}$$

$$u_1(x)=\mathrm{V}r\ c_1\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.54d}$$

คำนวณค่า Reynolds number โดยการแทนค่า b และ u_m ใน $\mathrm{Re}=\dfrac{u_m b}{\nu}$

$$\mathrm{Re}=\frac{c_1}{\nu}\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-1}(x-x_0)^{-1}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_0(x-x_0)^{-1}$$

โดยที่

$$\mathrm{Re}_0=\frac{c_1}{\nu}\left[\frac{k_b\nu}{2c_1}\right]^{-1} \tag{6.55}$$

หาค่า c_1 จากสมการ (6.55) ได้เป็น

$$c_1=\sqrt{\frac{k_b\,\mathrm{Re}_0\,\nu^2}{2}}$$

จากสมการ (6.54a), (6.54b), (6.54c) และ (6.54d) จึงได้เป็น

$$b(x)=\left[\frac{k_b}{2\,\mathrm{Re}_0}\right]^2(x-x_0)^2 \tag{6.56a}$$

$$u_m(x)=\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.56b}$$

$$w_m(x)=Sr\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.56c}$$

$$u_1(x)=\mathrm{V}r\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right]^{-3}(x-x_0)^{-3} \tag{6.56d}$$

บทที่ 7

ผลการคำนวณ

7.1 ผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดัน

สำหรับในการแสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็ว และความดันในแต่ละแนวได้แสดงเป็นค่าสเกลด้วยค่าสูงสุดของความเร็วในแต่ละแนว โดยมีรายละเอียดดังนี้

Case A1 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$

รูปที่ 7.1 แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน $\left((u-u_1)/u_m\right)$ของการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงตามแนว η ซึ่ง η นิยามเป็นอัตราส่วน r/b โดยที่ r เป็นระยะตามแนวรัศมี และ b เป็นความกว้างของเจ็ตซึ่งนิยามจากระยะตามแนวรัศมีของเจ็ต (r) ที่มีความเร็วเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด โดยผลการคำนวณดังกล่าวได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยของ Schlichting (1968) ที่เป็นการไหลแบบราบเรียบ พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian โดยที่ความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดจะเกิดที่บริเวณแกนเจ็ต $(r = 0)$ จากนั้นความเร็วจะมีลักษณะลดลงไปตามระยะรัศมีของเจ็ตจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งการลดลงของความเร็วในช่วงบริเวณใกล้แกนเจ็ตจะมีค่ามากหลังจากนั้นจะลดลงเมื่อระยะห่างจากแกนเจ็ตเพิ่มขึ้น โดยสังเกตได้จากการเปลี่ยนแปลงความชันของรูปร่างการกระจายตัวของความเร็ว

เมื่อเปรียบเทียบกับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของ Schlichting ซึ่งได้จากการศึกษาทางทฤษฎีโดยการกำหนดซิมิลาริตี้ฟังก์ชันจาก Stream function (ψ) กับผลการคำนวณที่ได้พบว่ามีค่าสอดคล้องกัน

รูปที่ 7.2 แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงเปรียบเทียบกับผลการทดลองในกรณี Laminar jet ของ Rankin et al. (1983) ซึ่งพบลักษณะ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตที่ระยะ X_c เท่ากับ 0.018, 0.025 และ 0.035 ที่ค่า Re_c เท่ากับ 1,000 และ 1,500 จากผลการเปรียบเทียบพบว่าผลการคำนวณที่ได้มีค่าสอดคล้องกับผลการทดลอง

Case A2 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

รูปที่ 7.3 แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$ และที่เคลื่อนที่ทิศทางเดียวกันกับเจ็ต (Coflow) ด้วยความเร็ว

ที่มากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$ พบว่าทั้ง 2 กรณีมีรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนใกล้เคียงกัน โดยความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมากที่สุดจะเกิดที่บริเวณแกนเจ็ตจากนั้นจึงลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อ η มีค่าประมาณ 3 สำหรับกรณีอากาศด้านนอกเคลื่อนที่ และที่ η มีค่าประมาณ 5 สำหรับกรณีอากาศด้านนอกหยุดนิ่ง

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตพบว่าทั้งกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งและเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกันกับเจ็ตมีรูปร่างกระจายตัวคล้ายแบบ Gaussian โดยในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งนั้นเจ็ตที่พุ่งออกมามีความกว้างของเจ็ตมากกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ต ที่เป็นดังนี้เนื่องจากผลการวิเคราะห์ Order of magnitude ในหัวข้อที่ 4.3 พบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่นั้นเทอม $u\dfrac{\partial u}{\partial x} >> \mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r}$ ดังนั้นเจ็ตจึงมี characteristic คล้าย wake กล่าวคือ excess momentum จะถูก convect ตามแนวแกน x มากกว่าตามแนวแกน r

Case A3 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตาม $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

รูปที่ 7.4 แสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในกรณีที่เปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วเจ็ต (Vr) จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่าในกรณีที่ Vr เท่ากับ 0.0 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ที่กว้างที่สุด เมื่อทำการเพิ่มค่า Vr ขึ้นจนถึง 2.0 จะเห็นได้ว่าความกว้างของเจ็ตมีลักษณะลดลง สาเหตุเนื่องมาจากเมื่ออากาศด้านนอกมีความเร็วมากขึ้นการถ่ายเทโมเมนตัมไปในทิศทางตามแนวรัศมีของเจ็ตจะลดลงตามการวิเคราะห์ Order of magnitude เช่นเดียวกับที่กล่าวในกรณีข้างต้น เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด พบว่าในช่วง $\eta < 1$ นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วจะไม่ต่างกันมากนักแต่ในช่วง $\eta > 1$ ซึ่งเป็นบริเวณขอบเจ็ต ผลจากอากาศด้านนอกจะทำให้รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะแตกต่างกันมาก นอกจากนี้เมื่อพิจารณากรณีเพิ่ม Vr จาก 0.1 ถึง 1.0 และ จาก 1.0 ถึง 2.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วในช่วงแรกจะเปลี่ยนแปลงมากเมื่อ Vr เพิ่มจาก 0.1 ถึง 1.0 (เพิ่ม 0.9) ในขณะที่จะเปลี่ยนแปลงน้อยกว่าเมื่อเพิ่ม Vr จาก 1.0 ถึง 2.0 (เพิ่ม 1.0) แสดงให้เห็นว่าเมื่อ Vr เพิ่มขึ้น solution จะลู่เข้าสู่กรณี Case A2

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงข้างต้น พบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่นั้นทำให้การกระจายตัวของเจ็ตลดลง แสดงให้เห็นว่า เมื่ออากาศด้านนอกเคลื่อนที่การ entrainment ของเจ็ตจะลดลง

Case B1 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$ **และ Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่** $u_1 >> u_m$

รูปที่ 7.5a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัสของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ ในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$ และที่เคลื่อนที่ทิศทางเดียวกันกับเจ็ต (Coflow) ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$ เมื่อพิจารณาที่รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ต $((u-u_1)/u_m)$ พบว่าจากทั้งกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งและเคลื่อนที่ ผลของความเร็วอากาศด้านนอกจะทำให้เจ็ตที่พุ่งออกมามีความกว้างของเจ็ตลดลงถึงแม้จะมีการหมุนควงก็ตาม และจากการที่กำหนดสมมติฐานให้ $w_m << u_m$ จึงทำให้รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนทั้ง 2 กรณีมีลักษณะใกล้เคียงกับกรณีที่ไม่มีการหมุนควง $(w_m = 0)$ เมื่อพิจารณาที่รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ต (w/w_m) พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง (เส้นทึบ) นั้นจะมีลักษณะเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีในช่วงแรกจนมีค่ามากที่สุด โดยในช่วงที่ความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีนี้เรียกว่า "forced vortex" หลังจากนั้นความเร็วจะมีค่าลดลงตามแนวรัศมี โดยในช่วงที่ความเร็วตามแนวสัมผัสลดลงตามแนวรัศมีนี้เรียกว่า "free vortex" ซึ่งรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในลักษณะดังกล่าวนี้เรียกว่า "Rankine vortex" ซึ่งเป็นลักษณะที่พบได้โดยทั่วไปสำหรับการไหลที่มีการหมุนควง สำหรับในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่นั้นจะเห็นว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะเหมือนกัน โดยที่ความเร็วตามแนวสัมผัสจะเพิ่มขึ้นในช่วงแรกจนมีค่ามากที่สุดหลังจากนั้นจึงลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะห่างจากแกนเจ็ตเพิ่มขึ้น โดยเมื่อเปรียบเทียบตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัสสูงสุด พบว่ามีค่าต่างกันโดยที่ความเร็วตามแนวแกนจะมีค่าสูงสุดที่ $\eta = 0$ แต่ความเร็วตามแนวสัมผัสสูงจะเกิดที่ $\eta \sim 1$ ซึ่งเป็นบริเวณที่ความเร็วตามแนวมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวมากที่สุด

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในแต่ละกรณี พบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งเจ็ตที่พุ่งออกมามีความกว้างของเจ็ตมากกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ต ซึ่งสังเกตได้จากรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วที่แคบกว่าของกรณีที่อากาศด้านนอกมีการเคลื่อนที่ นอกจากนี้ยังพบว่าผลจากการที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ยังทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดมีการเปลี่ยนแปลงจากตำแหน่งเดิมเล็กน้อย โดยตำแหน่งดังกล่าวเลื่อนเข้าสู่แกนกลางเจ็ตมากขึ้น

รูปที่ 7.5b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ต $((p_\infty - p)/\rho w_m^2)$ ที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ ในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$ และที่เคลื่อนที่ทิศทางเดียวกันกับเจ็ต (Coflow) ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็ว

เจ็ต $(u_1 >> u_m)$ พบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ซึ่งผลต่างความดันจะมีค่ามากที่สุดเท่ากับ 1.58 ที่บริเวณแกนเจ็ตจากนั้นจึงมีค่าลดลงเมื่อระยะห่างจากแกนเจ็ตมากขึ้น โดยเมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด จะเห็นว่าการลดลงของผลต่างความดันในช่วงแรก $(\eta < 1)$ นั้นจะมีค่ามากกว่าในช่วงหลัง $(\eta > 1)$ โดยที่ความดันที่บริเวณแกนเจ็ตจะมีค่าน้อยที่สุดและความดันจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นตามแนวรัศมีของเจ็ต นอกเหนือจากนั้นเมื่อพิจารณาความดันตามแนวแกนเจ็ต $(\eta = 0)$ จะพบว่ามีค่าคงที่เท่ากับ 1.58 แต่จากการคำนวณการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสในบทที่ 6 พบว่ามีการลดลงในลักษณะ $w_m \propto x^{-2}$ ดังนั้นค่า $(p_\infty - p)$ จึงมีค่าลดลงในอัตราที่เท่ากันคือ ประมาณ x^{-4} หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือความดันมีค่าเพิ่มขึ้นตามแนวแกนเจ็ต จึงทำให้เกิด Adverse pressure gradient ตามแนวแกนเจ็ต

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในแต่ละกรณี พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่มีลักษณะมีลักษณะใกล้เคียงกับกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง แต่ระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ 1.36 ซึ่งต่ำกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง

รูปที่ 7.6 แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแกนในกรณี Case B1 เปรียบเทียบกับ Turbulent Swirling jet ที่มีค่า Swirl number เท่ากับ 0.066, 0.134, 0.234 และ 0.416 ของ Chigier and Chervinsky (1967) พบว่ามีลักษณะ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแกน เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้ในกรณีของเจ็ตที่มีระดับการหมุนควงต่ำพบว่ามีความสอดคล้องกันในช่วงที่ $\eta < 1.3$ แต่ในช่วงที่ $\eta > 1.3$ นั้นจะมีความแตกต่างกันมากขึ้น

Case B3 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

รูปที่ 7.7a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัสของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วเจ็ต (Vr) จาก 0.0 ถึง 2.0 เมื่อพิจารณารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตพบว่ามีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ใกล้เคียงกับในกรณีของเจ็ตที่ไม่หมุนควง $(w_m = 0)$ โดยเมื่อพิจารณาที่ความกว้างของเจ็ตจะเห็นได้ว่ามีลักษณะลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 นอกจากนี้เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด พบว่าในช่วง $\eta < 1$ นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วจะไม่ต่างกันมากนักแต่ในช่วง $\eta > 1$ ซึ่งเป็น

บริเวณขอบเจ็ต ผลจากอากาศด้านนอกจะทำให้รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะแตกต่างกันมาก เมื่อพิจารณารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ามีลักษณะของ Rankine vortex เช่นเดียวกับในกรณีที่อากาศด้านนอกมีค่ามากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$ โดยที่ความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีในช่วงแรกจนถึงค่าความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุด หลังจากนั้นความเร็วจะลดลงตามแนวรัศมีจนเข้าสู่ศูนย์

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในแต่ละกรณีของค่า Vr พบว่าที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะกว้างที่สุด ซึ่งเมื่อเพิ่มค่า Vr ขึ้นจนถึง 2.0 จะสังเกตเห็นได้ว่าความกว้างของเจ็ตมีลักษณะลดลง นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อค่า Vr เพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดมีการเปลี่ยนแปลงไปจากตำแหน่งเดิม โดยจะเคลื่อนเข้าใกล้แกนเจ็ตมากขึ้น

รูปที่ 7.7b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำ $(w_m << u_m)$ ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วเจ็ต (Vr) จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่าค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณแกนเจ็ตจากนั้นจะลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะห่างจากแกน η มากขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในแต่ละกรณี พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian โดยระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดที่แกนเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ มีค่าสูงที่สุดเท่ากับ 1.58 และมีค่าเท่ากับ 1.39 ในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 2.0 ทั้งนี้เนื่องจากการที่ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้ผลของการหมุนควงลดลงจึงเป็นสาเหตุให้ความดันบริเวณแกนเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสและความดันในกรณีที่ระดับการหมุนควงต่ำต่างๆข้างต้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่าในกรณีของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำเมื่อความเร็วของอากาศด้านนอกเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้ความหนาของเจ็ตลดลงเช่นเดียวกับในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง นอกจากนี้ยังทำให้บริเวณแกนเจ็ตซึ่งมีความดันต่ำที่สุดมีค่าเพิ่มมากขึ้น อีกนัยหนึ่งความเร็วของอากาศด้านนอกที่เพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้ผลของการหมุนควงลดลง

Case C1 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งโดยเปลี่ยนแปลงค่า S*r*

<u>Case C11</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น (สมการ 4.5a)

รูปที่ 7.8a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่เปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดต่อความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต (Sr) จาก 0.0 ถึง 0.7 พบว่าในกรณีที่ไม่หมุนควง ($Sr = 0$) รูปร่างกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian โดยที่ความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าสูงสุดที่บริเวณแกนเจ็ต เมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ 0.1 และ 0.5 นั้นพบว่ารูปร่างกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนยังคงมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian แต่มีลักษณะกว้างกว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.0 สำหรับในกรณี Sr มีค่าเท่ากับ 0.7 นั้นพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแกนสูงสุดจะเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต ทำให้เกิดเป็น Wake component บริเวณตรงกลางแกนเจ็ต โดยมีค่าความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดเท่ากับ 1.27 ที่ η มีค่าเท่ากับ 0.24 เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนในแต่ละกรณีพบว่าความกว้างของเจ็ตจะมีลักษณะเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

รูปที่ 7.8b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.1 ถึง 0.7 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะของ Rankine vortex โดยที่ความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมี ในช่วงแรกจนถึงค่าสูงสุด หลังจากนั้นจากนั้นความเร็วจะลดลงจนมีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะห่างจากแกนเจ็ตเพิ่มขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในแต่ละกรณีพบว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะมีลักษณะกว้างที่สุดและจะมีลักษณะลดลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น สาเหตุเนื่องจากรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วได้แสดงในทิศทางตามแกน η ซึ่งได้นิยามเป็นอัตราส่วน r/b โดยที่ b เป็นความกว้างของเจ็ตซึ่งนิยามจากระยะตามแนวรัศมีของเจ็ต (r) ที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด ซึ่งจากการคำนวณค่า b ในบทที่ 6 พบว่าค่า b จะมีค่าสูงขึ้นเมื่อ Sr มีค่ามากขึ้น ดังนั้นในการแสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วที่สเกลค่า r ด้วย b จึงทำให้มีรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสที่แคบกว่าสำหรับในกรณีที่ Sr มีค่ามาก หรืออีกนัยหนึ่งเมื่อ Sr สูงขึ้นแกนของ vortex จะมีขนาดสัมพัทธ์เล็กลง หรือเกิดการ intensification ของ vortex core นั่นเอง นอกจากนี้เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด จะเห็นว่าเมื่อ Sr ต่ำตำแหน่งของความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดจะอยู่ห่างแกนเจ็ตมากกว่าตำแหน่งที่ความเร็วตามแนว

แกนมีค่าเป็น 50 % แต่เมื่อ Sr สูงตำแหน่งของความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดจะอยู่ใกล้แกนเจ็ตมากกว่าตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 %

รูปที่ 7.8c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในกรณีที่เปลี่ยนค่า Sr จาก 0.1 ถึง 0.7 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดัน $\left((p_\infty - p)/\rho w_m^2\right)$ ในแต่ละกรณีมีลักษณะกระจายคล้ายแบบ Gaussian ซึ่งผลต่างความดันสูงสุดจะเกิดที่บริเวณแกนเจ็ตจากนั้นผลต่างความดันจะลดลงเมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น เมื่อเพิ่มค่า Sr จาก 0.1 ถึง 0.7 พบว่าระดับค่าความดันแตกต่าง $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ ที่บริเวณแกนเจ็ตมีค่าลดลงจาก 1.92 ในกรณี Sr เท่ากับ 0.1 จนถึง 1.64 ในกรณี Sr เท่ากับ 0.7 แสดงว่าเมื่อเพิ่มระดับการหมุน (Sr) ทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด (w_m) มีค่าเพิ่มขึ้นแต่ $(p_\infty - p)$ มีค่าเพิ่มขึ้นช้ากว่า w_m^2

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และผลต่างความดันโดยใช้เงื่อนจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Sr ต่างๆข้างต้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่าเมื่อระดับการหมุนควงเพิ่มมากขึ้นทำให้ความกว้างของเจ็ตเพิ่มขึ้น แสดงว่าเจ็ตสามารถดึงเอาอากาศจากรอบข้างเข้ามาผสมได้ดีขึ้นกว่าในกรณีที่ไม่หมุนควง จึงทำให้มีการถ่ายเทโมเมนตัมจากเจ็ตสู่อากาศรอบข้างได้มากขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อระดับการหมุนควงเพิ่มขึ้น ความเร็วตามแนวแกนสูงสุดจะเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ตมากขึ้น และจะเกิดการ intensification ของแกน vortex (vortex core) มากขึ้น

<u>Case C12</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม (สมการ 4.5b)

รูปที่ 7.9a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่เปลี่ยนแปลง Sr จาก 0.1 ถึง 2.0 พบว่าในกรณี Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 และ 0.5 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนที่ได้นั้นมีความแตกต่างจากการใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก โดยรายละเอียดของความแตกต่างได้ทำการวิเคราะห์ไว้ในบทที่ 8 สำหรับในกรณีที่ Sr เพิ่มขึ้นเท่ากับ 1.5 และ 2.0 พบว่าความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดจะมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต

รูปที่ 7.9b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.1 ถึง 2.0 พบว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสที่ได้มีลักษณะลู่ออกซึ่งแตกต่างจากกรณีที่ใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นมาก แต่สำหรับในกรณี Sr เท่ากับ 0.5 ถึง 2.0 นั้นพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะของ Rankine vortex โดยที่ความเร็วตามแนว

สัมผัสจะมีลักษณะเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมี ในช่วงแรกจนถึงค่าสูงสุด หลังจากนั้นจากนั้นความเร็วจะลดลงจนมีค่าเข้าสู่ศนย์เมื่อระยะห่างจากแกนเจ็ตเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับกรณีที่ใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในแต่ละกรณีพบว่าเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.5 ถึง 2.0 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะแคบลง จากการวิเคราะห์ในบทที่ 6 พบว่าการที่ค่า Sr เพิ่มขึ้นมีผลทำให้ค่า b มีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดมีการเบี่ยงเบนจากตำแหน่งเดิม โดยจะเคลื่อนที่เข้าใกล้แกนเจ็ตมากขึ้นเมื่อค่า Sr เพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับกรณีที่ใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

รูปที่ 7.9c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในกรณีที่เปลี่ยนแปลง Sr จาก 0.1 ถึง 2.0 พบว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันที่ได้มีความแตกต่างจากกรณีที่ใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นมากเช่นเดียวกับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส แต่สำหรับกรณี Sr มีค่าเท่ากับ 0.5 ถึง 2.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันในแต่ละกรณี พบว่าค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดบริเวณแกนเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น แสดงว่าเมื่อ Sr เพิ่มขึ้นทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด (w_m) มีค่าเพิ่มขึ้นแต่ $(p_\infty - p)$ มีค่าเพิ่มขึ้นช้ากว่า w_m^2

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสและผลต่างความดันโดยใช้เงื่อนจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Sr ต่างๆข้างต้น พบว่าผลที่ได้มีลักษณะแตกต่างจากผลการคำนวณโดยใช้เงื่อนจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก แต่เมื่อพิจารณาจากผลของระดับการหมุนควง พบว่าเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดจะมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต และพบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะของ Rankine vortex เช่นเดียวกับกรณีที่ใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs}

รูปที่ 7.10a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ตด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วเจ็ต $(u_1 >> u_m)$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $k_{bs} = \mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)^2$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับของการหมุนควง

จาก 0.1 ถึง 5.0 พบว่าในกรณีที่ k_{bs} มีค่าเท่ากับ 0.1 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ซึ่งความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดจะอยู่ที่บริเวณแกนเจ็ตหลังจากนั้นจะค่อยๆลดลงจนมีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น สำหรับกรณีที่ค่า k_{bs} มีค่าเท่ากับ 1.0 นั้นรูปร่างการกระจายตัวยังคงมีลักษณะคล้ายกับกรณีที่ k_{bs} เท่ากับ 0.1 แต่เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด พบว่าความกว้างของเจ็ตจะมากกว่าในช่วงแรก ($\eta < 1$) และน้อยกว่าในช่วงท้าย ($\eta > 1$) สำหรับในกรณีที่ k_{bs} เท่ากับ 2.0 ถึง 5.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วมีลักษณะแตกต่างจากกรณี k_{bs} มีค่าเท่ากับ 0.1 และ 1.0 อย่างชัดเจน โดยตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมากที่สุดจะมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต และแนวโน้มของค่า $(u-u_1)/u_m$ สูงสุดจะเพิ่มขึ้นเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น โดยมีค่าเท่ากับ 1.07 ที่ η เท่ากับ 0.38 สำหรับ k_{bs} เท่ากับ 2.0 และเท่ากับ 1.43 ที่ η เท่ากับ 0.43 สำหรับ k_{bs} เท่ากับ 5.0 หรืออาจกล่าวได้ว่า การที่ระดับการหมุนควงมีค่าเพิ่มสูงขึ้นนั้นจะมีผลทำให้ความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดของเจ็ตนั้นเบี่ยงเบนออกจากบริเวณแกนเจ็ตมากขึ้น

รูปที่ 7.10b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ตด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วเจ็ต ($u_1 >> u_m$) โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับของการหมุนควงจาก 0.1 ถึง 5.0 พบว่าในแต่ละกรณีรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะของ Rankine vortex โดยความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีค่าเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นในช่วงแรกและลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในแต่ละกรณีจะเห็นว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะแคบลงเมื่อค่า k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น สาเหตุเนื่องจากค่า b ที่มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งเกิดการ intensification ของแกนของ vortex (vortex core) เช่นเดียวกับกรณีก่อนหน้านี้ นอกจากนี้ยังพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดขยับเข้าใกล้แกนเจ็ตมากขึ้นเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น

รูปที่ 7.10c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ตด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วเจ็ตมาก ($u_1 >> u_m$) โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับของการหมุนควงจาก 0.1 ถึง 5.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละกรณีพบว่าค่าผลต่างความดันสูงสุดบริเวณแกนเจ็ตจะมีค่า

แตกต่างกันเล็กน้อย แต่รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันจะมีลักษณะแคบลงเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และผลต่างความดันในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ทิศทางเดียวกับเจ็ตด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วเจ็ต ($u_1 >> u_m$) โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} ต่างๆข้างต้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่าเมื่อ k_{bs} ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับของการหมุนเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ความกว้างของเจ็ตเพิ่มขึ้น และระดับการหมุนควงที่เพิ่มสูงขึ้นยังทำให้ความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต และเกิดการ intensification ของแกน vortex

Case C3 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า S*r* **และ** V*r*

<u>Case C31</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น (สมการ 4.5a)

ผลจากกระแสลมตาม (Effect of coflow)

รูปที่ 7.11a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 และ 0.1 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนในแต่ละกรณีมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ซึ่งความเร็วตามแนวแกนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณแกนเจ็ตจากนั้นจึงลดลงจนมีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละกรณีของค่า V*r* พบว่าเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 จะพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วบริเวณแกนเจ็ต ($\eta < 1$) จะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก แต่บริเวณขอบเจ็ต ($\eta > 1$) จะมีลักษณะแคบลงซึ่งคล้ายคลึงกับในกรณีของเจ็ตที่ไม่หมุนควง

สำหรับในกรณีที่ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 0.3 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนโดยทั่วไปยังคงมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian เมื่อเปรียบเทียบในกรณีที่ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 จะเห็นว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะมีลักษณะแคบลง เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง η มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ความเร็วตามแนวแกนมีค่าเป็น 50 % ของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด พบว่าในช่วงที่ $\eta < 1$ เมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตกว้างขึ้น ในขณะที่ $\eta > 1$ รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะแคบลง

สำหรับในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.5 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วยังคงมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละกรณีพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในช่วงที่ $\eta < 1$ นั้นมีลักษณะแคบลงเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่ $\eta > 1$ รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตกลับมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้น

สาเหตุเนื่องจากในกรณีที่ *Sr* มีค่าเท่ากับ 0.5 ซึ่งระดับการหมุนควงมีค่าสูงพอจึงทำให้การหมุนควงเริ่มมีผลต่อการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมากกว่าผลจากความเร็วอากาศด้านนอก

สำหรับในกรณีที่ *Sr* มีค่าเท่ากับ 0.8 พบว่าในกรณีที่ V*r* มีค่าเท่ากับ 0.0 และ 0.1 การหมุนควงจะมีผลมากจึงทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต โดยมีค่าสูงสุดเท่ากับ 1.46 ที่ η เท่ากับ 0.2 และ 1.42 ที่ η เท่ากับ 0.16 ในกรณีที่ V*r* มีค่าเท่ากับ 0.0 และ 0.1 ตามลำดับ แต่เมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ 1.0 ถึง 2.0 ผลจากความเร็วอากาศด้านนอกจะกลับมีผลต่อการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตมากขึ้นจึงทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดกลับมาอยู่ที่บริเวณแกนเจ็ตเช่นเดียวกับในกรณีที่ *Sr* มีค่าต่ำๆ

รูปที่ 7.11b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตในกรณีที่ *Sr* มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีลักษณะของ Rankine vortex โดยที่ความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีในช่วงแรกจนถึงค่าสูงสุดจากนั้นจึงมีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละกรณีของค่า V*r* พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 สาเหตุเนื่องจากการวิเคราะห์ค่า b ในบทที่ 6 พบว่าเมื่อความเร็วอากาศด้านนอกมีค่ามากขึ้นทำให้ b มีค่าลดลง ดังนั้นในการแสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วที่สเกลค่า r ด้วย b จึงทำให้มีรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสที่กว้างกว่าสำหรับในกรณีที่ V*r* มีค่าเพิ่มมากขึ้น แต่ในกรณีที่ *Sr* ต่ำกลับพบว่าเมื่อ V*r* เพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 0.1 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะแคบลง แต่เมื่อ V*r* เพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 2.0 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีความกว้างเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ยังพบว่าการที่ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นมีผลทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดเคลื่อนที่ออกห่างจากแกนเจ็ตกว่ากรณีที่ V*r* มีค่าต่ำ

รูปที่ 7.11c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในกรณีที่ *Sr* มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่าในกรณีที่ *Sr* มีค่าเท่ากับ 0.01 และ 0.1 รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian โดยที่ผลต่างความดันมากที่สุดเกิดที่บริเวณแกนเจ็ตหลังจากนั้นจะลดลงเมื่อระยะ η เพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละกรณีของค่า V*r* พบว่าระดับค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดในกรณีที่ V*r* จาก 0.0 ถึง 0.1 มีค่าแตกต่างจากกรณีที่ V*r* จาก 1.0 ถึง 2.0 เนื่องจากกรณีที่ V*r* มีค่าจาก 1.0 ถึง 2.0 ผลจากความเร็วอากาศด้านนอกจะมีผลมากกว่าผลจากการหมุนควงจึงทำให้ผลต่างความดันบริเวณแกนเจ็ตมีค่าลดลง ในขณะที่ความเร็วตามแนว

สัมผัสมากที่สุดก็มีค่าลดลงในอัตราที่มากกว่าการลดลงของความดันจึงทำให้ค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงขึ้นกว่ากรณีที่ Vr มีค่าจาก 0.0 ถึง 0.1

สำหรับในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.3 ถึง 0.5 พบว่าระดับค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดจะมีค่าต่างกันมากเมื่อ Vr มีค่า เท่ากับ 0.0 และ 0.1 เนื่องจากในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 และ 0.1 นี้ผลจากการหมุนควงจะมีผลมากกว่าผลจากอากาศด้านนอกจึงทำให้ $(p_\infty - p)$ มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด (w_m) ก็มีค่าเพิ่มช้ากว่าผลต่างความดันจึงทำให้ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดมีค่าสูงขึ้นเมื่อ Vr มีค่ามากขึ้น สำหรับในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 1.0 ถึง 2.0 ผลของความเร็วอากาศด้านนอกจะมีมากกว่าผลจากการหมุนควงจึงทำให้ผลของระดับการหมุนควงไม่ต่างกันมากนัก

สำหรับในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8 พบว่าระดับค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่าต่างกันมากที่สุด เนื่องจากผลจากการหมุนควงมีมากกว่าผลจากอากาศด้านนอก

ผลจากการหมุนควง (Effect of swirl)

รูปที่ 7.12a แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.01 ถึง 0.8 พบว่าในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 และ 0.1 นั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian ใกล้เคียงกัน โดยที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.5 ความเร็วตามแนวแกนสูงสุดจะเกิดที่บริเวณแกนเจ็ต แต่ในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8 ซึ่งระดับการหมุนควงมีค่าสูงจึงทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต โดยมีค่ามากที่สุดเท่ากับ 1.46 ที่ η เท่ากับ 0.2 ในกรณี Vr เท่ากับ 0.0 และมีค่าเท่ากับ 1.42 ที่ η เท่ากับ 0.16 ในกรณีที่ Vr เท่ากับ 0.1 เมื่อเปรียบเทียบรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในแต่ละกรณี พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 1.0 และ 2.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian คล้ายคลึงกันโดยที่ความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดเกิดที่บริเวณแกนเจ็ตในทุกค่า Sr สาเหตุเนื่องจากในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 1.0 และ 2.0 นั้นความเร็วอากาศด้านนอกจะมีผลต่อรูปร่างการกระจายตัวของเจ็ตมากกว่าผลจากการหมุนควง นอกจากนี้ยังพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

รูปที่ 7.12b แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.01 ถึง 0.8 พบว่ารูป

ร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสในกรณี Vr เท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 มีลักษณะ Rankine vortex ในทุกกรณี โดยที่รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วมีลักษณะแคบลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น สาเหตุเนื่องจากการวิเคราะห์ในบทที่ 6 พบว่าเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่า b มีค่าเพิ่มขึ้นดังนั้นในการแสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วที่สเกลค่า r ด้วย b จึงทำให้มีรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสที่แคบกว่าสำหรับในกรณีที่ Sr มีค่ามาก หรืออีกนัยหนึ่งแสดงถึงการเกิด intensification ของแกน vortex (vortex core) นอกจากนี้ยังพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดนั้นจะมีการขยับเคลื่อนที่เข้าใกล้แกนเจ็ตมากขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

รูปที่ 7.12c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันบรรยากาศกับความดันเจ็ตในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.01 ถึง 0.8 พบว่าในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่าลดลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้ w_m มีค่าสูงขึ้น ในขณะที่ $(p_\infty - p)$ ก็มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตราที่ต่ำกว่าการเพิ่มของ w_m จึงทำให้ระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ มีค่าลดลงเมื่อ Sr เพิ่มขึ้น เมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 2.0 พบว่าแนวโน้มของระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลการศึกษารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และผลต่างความดันโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นโดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr และ Sr ต่างๆข้างต้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่าเมื่อระดับการหมุนควงเพิ่มมากขึ้นทำให้เจ็ตมีการกระจายตัวเพิ่มขึ้น แต่เมื่อความเร็วอากาศด้านนอกมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ผลจากการหมุนควงที่มีต่อการกระจายตัวของเจ็ตลดลง นอกจากนี้ยังพบว่าที่ระดับการหมุนควงต่ำ (Sr เท่ากับ 0.01 และ 0.1) เมื่อค่า Vr มีค่าสูงขึ้นจะทำให้ความเร็วอากาศด้านนอกมีผลต่อการกระจายตัวของเจ็ตมากกว่าผลจากการหมุนควง ดังนั้นจึงทำให้เจ็ตมีคุณลักษณะคล้ายเจ็ตที่ไม่หมุนควง

<u>Case C32</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม (สมการ 4.5b)

รูปที่ 7.13a ถึง 7.14c แสดงผลการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และผลต่างความดันเจ็ตโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตในแต่ละกรณีนั้นมีลักษณะไม่สอดคล้องกับผลการทดลองของ Chigier and Chervinsky (1967) ดังในรูปที่ 2.9 นอกจากนี้ยังพบว่ามีความแตกต่าง

จากการใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก โดยรายละเอียดจะได้นำไปกล่าวไว้ในบทที่ 8

เมื่อพิจารณาที่รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสก็พบว่าในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 และ 0.1 ที่ Vr เป็น 0.0 และ 0.1 นั้นมีลักษณะแตกต่างจากผลการทดลองของ Chigier and Chervinsky (1967) ดังในรูปที่ 2.11 นอกจากนี้ยังมีลักษณะแตกต่างจากการใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันนั้นก็พบว่ามีลักษณะแตกต่างจากการใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นเช่นเดียวกับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส

7.2 ความหนา อัตราการกระจายตัว ความเร็ว และอัตราการลดลงของความเร็วเจ็ต

Case A1 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$

ใน Case A1 จากสมการ (6.5a) และ (6.5b) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, x) \qquad = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \qquad \sim x,\ \mathrm{Re}_0^{\,-1}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0) \qquad = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right] \qquad \sim \mathrm{Re}_0^{\,-1}$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, x) \qquad = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \qquad \sim x^{-1},\ \mathrm{Re}_0^{\,2}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, x) \qquad = -\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \qquad \sim x^{-2},\ \mathrm{Re}_0^{\,2}$$

โดยที่ x_0 เป็น virtual origin และ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.3

รูปที่ 7.15a และ 7.15b แสดงความหนาของเจ็ต (b) และการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต (u_m) ในกรณีที่ไม่มีการหมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่งที่ Reynolds number (Re_0) มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 พบว่าเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้น ทำให้ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่ความเร็วและอัตราการลดลงความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลที่ได้พบว่าสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์ของ Schlichting (1968) ที่พบว่าความหนาของเจ็ตแปรผันกับระยะ x และการลดลงของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะ x^{-1}

Case A2 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

ใน Case A2 จากสมการ (6.11a) และ (6.11b) เมื่อจัดรูปสมการใหม่พบว่า

$$b = b\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{\left(\frac{2A^*-k_{u_1 f}}{4A^*}\right)}$$

$$\sim x^{\left(\frac{2A^*-k_{u_1 f}}{4A^*}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{(2A^*-k_{u_1 f})}{\left[2\,\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{-\left[\frac{2A^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{-\left[\frac{2A^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_{u_1 f},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$u_m = u_m\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{\left[(B^*-ku_1 f)\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{(2A^*)^2}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}-2A^*}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}-2A^*}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_{u_1 f},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

โดยที่ A^*, B^* เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.4 และ $\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$ เป็นอัตราส่วนความเร็วกระแสลมตามต่อความเร็วตามแนวแกนที่กำหนด

สำหรับการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ นั้นแบ่งการคำนวณโดยดูผลของ $k_{u_1 f}$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์อิสระ ที่แสดงผลของ pressure gradient ออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1) Favorable pressure gradient ซึ่งกำหนด $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $+1/2$ และกรณีที่ 2) Adverse pressure gradient ซึ่งกำหนด $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $-1/2$

รูปที่ 7.16a และ 7.16b แสดงความหนา และการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนของเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 พบว่าทั้ง 2 กรณีนั้นเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้น ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่ความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบทั้ง

2 กรณีจะเห็นได้ว่าในกรณีของ Adverse pressure gradient นั้น เจ็ตจะมีความหนาและอัตราการกระจายตัวมากกว่ากรณี Favorable pressure gradient แต่กรณีของ Favorable pressure gradient นั้นอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนจะมากกว่ากรณีของ Adverse pressure gradient

Case A3 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

ใน Case A3 จากสมการ (6.15a) และ (6.15b) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r), x) = \left[\frac{(2-A_1)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \sim x^{\frac{1}{(2-A_1)}},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b,\ A_1$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r), x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\left(\frac{-1+A_1}{2-A_1}\right)} \sim x^{\left(\frac{-1+A_1}{2-A_1}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2 \nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \sim x^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ A_1^{-1}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, \mathrm{V}r, x) = -\left[\frac{A_1 \mathrm{Re}_0^2 \nu}{(2-A_1)^2 k_b}\right](x-x_0)^{\left(\frac{-2}{2-A_1}\right)} \sim x^{\left(\frac{-2}{2-A_1}\right)}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}, A_1^{-2}$$

โดยที่ $A_1 = \dfrac{[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2]}{[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2]}$ ส่วน I_1, I_2 เป็นค่าคงที่ดังในตารางที่ 5.5 และจากตารางดังกล่าวพบว่าค่าคงที่ k_b มีค่าแปรผกผันกับค่า Vr ในแบบเชิงตัวเลข

รูปที่ 7.17a และ 7.17b แสดงความหนาและการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต ในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 พบว่าในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นเจ็ตจะมีความหนามากที่สุด แต่เมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตกลับมีค่าลดลง เนื่องจากในกรณีที่อากาศด้านนอกมีความเร็วมาก เจ็ตที่พุ่งออกมาจะมีการถ่ายเทโมเมนตัมในทิศทางตามแนวรัศมีน้อยกว่าในทิศทางตามแนวแกนเจ็ต $\left(\mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r} << u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ จึงทำให้ความหนาของเจ็ตมีค่าน้อยกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกมีความเร็วต่ำ และเมื่อเปรียบเทียบที่ค่า Vr เดียวกันพบว่าความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับค่าความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น

Case B1 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$

ใน Case B1 จากสมการ (4.26a), (4.26b) และ (4.26c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \qquad \sim x,\ \mathrm{Re}_0^{\ -1}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right] \qquad \sim \mathrm{Re}_0^{\ -1}$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \qquad \sim x^{-1},\ \mathrm{Re}_0^{\ 2}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, x) = -\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \qquad \sim x^{-2},\ \mathrm{Re}_0^{\ 2}$$

$$w_m = w_m\left(\mathrm{Re}_0, \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0, x\right) = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \qquad \sim x^{-2},\ \mathrm{Re}_0^{\ 2},\ \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}\left(\mathrm{Re}_0, \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0, x\right) = -2\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0 \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\, \nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-3} \qquad \sim x^{-3},\ \mathrm{Re}_0^{\ 2},\ \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

โดยที่ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.6 และ $\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$ เป็นอัตราส่วนความเร็วตามแนวสัมผัสต่อความเร็วตามแนวแกนที่กำหนด

รูปที่ 7.18a ถึง 7.18c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ตและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศที่หยุดนิ่งที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 พบว่าเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้ความหนาและอัตราการกระจายของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่ความเร็วและอัตราการลดลงความเร็วตามแนวแกน และตามแนวสัมผัสเจ็ตจะมีค่าเพิ่มขึ้น

Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

ใน CaseB2 จากสมการ (6.29a)- (6.29c) เมื่อจัดรูปสมการใหม่พบว่า

$$b = b\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) = \frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x - x_0)^{\left(\frac{2A^* - k_{u_1 f}}{4A^*}\right)}$$

$$\sim x^{\left(\frac{2A^* - k_{u_1 f}}{4A^*}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) = \frac{(2A^* - k_{u_1 f})}{\left[2\,\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x - x_0)^{-\left[\frac{2A^* + k_{u_1 f}}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{-\left[\frac{2A^*+k_{u_1f}}{4A^*}\right]} \quad \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_{u_1f},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, k_{u_1f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x) \qquad = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\, \nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1f}}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1f}}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_{u_1f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x) \qquad = \frac{\left[(B^*-ku_1f)\,\mathrm{Re}_0^2\, \nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{(2A^*)^2}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1f}-2A^*}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1f}-2A^*}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_{u_1f},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, k_{u_1f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0, x) \qquad = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\, \nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1f}}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1f}}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_{u_1f}, \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0, x) \quad = \frac{\left[(2C^*+k_{u_1f})\mathrm{Re}_0^2\, \nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{8A^{*2}}(x-x_0)^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1f}-4A^*}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1f}-4A^*}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_{u_1f},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,\ \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

โดยที่ A^*, B^*, C^* เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.7

สำหรับการไหลของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ นั้นแบ่งการคำนวณโดยดูผลของ k_{u_1f} ซึ่งเป็นพารามิเตอร์อิสระ ที่แสดงผลของ pressure gradient ออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1) Favorable pressure gradient ซึ่งกำหนด k_{u_1f} มีค่าเท่ากับ $+1/2$ และกรณีที่ 2) Adverse pressure gradient ซึ่งกำหนด k_{u_1f} มีค่าเท่ากับ $-1/2$

รูปที่ 7.19a ถึง 7.19c แสดงความหนาของเจ็ต การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต และความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 พบว่าทั้ง 2 กรณีความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่ความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบทั้ง 2 กรณีจะเห็นได้ว่าในกรณีของ Adverse pressure gradient นั้น เจ็ตจะมีความหนาและอัตราการกระจายตัวมากกว่ากรณี Favorable pressure gradient แต่ในกรณีของ Favorable pressure gradient นั้นอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนจะมากกว่ากรณี Adverse pressure gradient เช่นเดียวกับกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควง

สำหรับความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ามีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้น และในกรณีของ Adverse pressure gradient มีผลทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสมีอัตราการลดลงที่เร็วกว่ากรณีของ Favorable pressure gradient

Case B3 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตาม $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$

ใน Case B3 จากสมการ (6.34a), (6.34b) และ (6.34c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = \left[\frac{(2-A_1)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\frac{1}{(2-A_1)}} \sim x^{\frac{1}{(2-A_1)}},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b,\ A_1$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r)) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\left(\frac{-1+a_1}{2-A_1}\right)} \sim x^{\left(\frac{-1+A_1}{2-A_1}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}} \sim x^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}, A_1^{-1}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = -\left[\frac{A_1\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)^2 k_b}\right](x-x_0)^{\left(\frac{-2}{2-A_1}\right)} \sim x^{\left(\frac{-2}{2-A_1}\right)}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}, A_1^{-1}$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}} \sim x^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}}, \mathrm{Re}_0^2, k_b^{-1}, A_1^{-1}$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, x, k_b(\mathrm{V}r), A_1(\mathrm{V}r)) = -(3-2A_1)\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_1)^2 k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-(5-2A_1)}{(2-A_1)}}$$

$$\sim x^{\frac{-(5-2A_1)}{(2-A_1)}}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}, A_1^{-2}$$

โดยที่ $A_1 = \dfrac{[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2]}{[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2]}$ และ I_1, I_2 เป็นค่าคงที่ดังในตารางที่ 5.8 และจากตารางดังกล่าวพบว่าค่าคงที่ k_b มีค่าแปรผกผันกับ $\mathrm{V}r$ ในแบบเชิงตัวเลข

รูปที่ 7.20a ถึง 7.20c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ตและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตในกรณีที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$ จาก 0.0 ถึง 2.0 ที่ Re มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 พบว่าในกรณีที่ $\mathrm{V}r$ มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นเจ็ตจะมีความหนามากที่สุด แต่เมื่อ $\mathrm{V}r$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตกลับมีค่าลดลง เนื่องจากในกรณีที่อากาศด้านนอกมีความเร็วมากเจ็ตที่พุ่งออกมาจะมีการถ่ายเทโมเมนตัมในทิศทางตามแนวรัศมีน้อยกว่าในทิศทางตามแนวแกนเจ็ตจึงทำให้ความหนาของเจ็ตมีค่าน้อยกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกมีความเร็วต่ำ และเมื่อเปรียบเทียบที่ค่า $\mathrm{V}r$ เดียวกันพบว่าความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับค่าความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น

Case C1 การไหลของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Sr

<u>Case C11</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

.ในกรณี Case C11 จากสมการ (4.38a), (4.38b) และ (4.38c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x - x_0) \qquad \sim x,\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr)) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right] \qquad \sim \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \qquad \sim x^{-1}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) = -\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \qquad \sim x^{-2}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), Sr, x) = Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-1} \qquad \sim x^{-1}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ Sr$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), Sr, x) = -Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right](x - x_0)^{-2} \qquad \sim x^{-2}, \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ Sr$$

โดยที่ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.9

รูปที่ 7.21a ถึง 7.21b แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ตและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.1 ถึง 0.7 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 พบว่าเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง ในขณะที่เมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นความหนาและอัตราการกระจายของเจ็ตกลับมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากค่า k_b แปรผันกับ Sr แบบเชิงตัวเลขมีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตพบว่าที่ Sr เดียวกันจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้น แต่ความเร็วและอัตราการลดลงความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากค่า k_b เพิ่มขึ้น

<u>Case C12</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

ในกรณี Case C12 จากสมการ (6.41a), (6.41b) และ (6.41c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) \qquad = \left[\frac{k_b}{2\,\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^2 \qquad \sim x^2,\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) \qquad = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0) \qquad \sim x,\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) \qquad = \left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b \nu}\right](x-x_0)^{-3} \qquad \sim x^{-3},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), x) \qquad = -\left[\frac{6\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b \nu}\right](x-x_0)^{-4} \qquad \sim x^{-4},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1}$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), Sr, x) \qquad = Sr\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b \nu}\right](x-x_0)^{-3} \qquad \sim x^{-3},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ Sr$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(Sr), Sr, x) \qquad = -Sr\left[\frac{6\,\mathrm{Re}_0^2}{k_b \nu}\right](x-x_0)^{-4} \qquad \sim x^{-4},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ Sr$$

โดยที่ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.10

รูปที่ 7.22a ถึง 7.22c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกน และความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมโดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.5 ถึง 2.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 พบว่าเมื่อ Re_0 และ Sr มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่ความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจาก k_b ซึ่งแปรผกผันแบบเชิงตัวกับ Sr มีค่าลดลง

Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs}

ใน CaseC2 จากสมการ (6.49a)- (6.49c) เมื่อจัดรูปสมการใหม่พบว่า

$$b = b\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, A^*(k_{bs}), \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{2A^*}{\left[\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{\left(\frac{2A^*-k_{u_1 f}}{4A^*}\right)}$$

$$\sim x^{\left(\frac{2A^*-k_{u_1 f}}{4A^*}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ A^*,\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, A^*(k_{bs}), \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{(2A^*-k_{u_1 f})}{\left[2\,\mathrm{Re}_0\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}(x-x_0)^{-\left[\frac{2A^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]}$$

$$\sim (x-x_0)^{-\left[\frac{2A^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_{u_1 f},\ A^*,\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$u_m = u_m\left(\mathrm{Re}_0, k_{u_1 f}, A^*(k_{bs}), \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0, x\right) \qquad = \frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ A^{*-1},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{du_m}{dx}=\frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0,k_{u_1 f},A^*(k_{bs}),\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,x)\quad=\frac{\left[(B^*-ku_1 f)\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\right]}{(2A^*)^2}(x-x_0)^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}-2A^*}{2A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{B^*-k_{u_1 f}-2A^*}{2A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_{u_1 f},\ A^{*-1},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0$$

$$w_m=w_m(\mathrm{Re}_0,k_{u_1 f},A^*(k_{bs}),\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0,x)\ =\frac{\left[\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{2A^*}(x-x_0)^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1 f}}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ A^{*-1},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

$$\frac{dw_m}{dx}=\frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0,k_{u_1 f},A^*(k_{bs}),\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0,x)\ =\frac{\left[(2C^*+k_{u_1 f})\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu\left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0\left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0\right]}{8A^{*2}}(x-x_0)^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1 f}-4A^*}{4A^*}\right]}$$

$$\sim x^{\left[\frac{2C^*+k_{u_1 f}-4A^*}{4A^*}\right]},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_{u_1 f},\ A^{*-2},\ \left(\frac{u_1}{u_m}\right)_0,\ \left(\frac{w_m}{u_m}\right)_0$$

โดยที่ A^*,B^*,C^* เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.11 และจากตารางดังกล่าวพบว่าค่า A^* มีค่าแปรผกผันกับ k_{bs} ในแบบเชิงตัวเลข

สำหรับการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} นั้นแบ่งการคำนวณโดยดูผลของ $k_{u_1 f}$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์อิสระ ที่แสดงผลของ pressure gradient ออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1) Favorable pressure gradient ซึ่งกำหนด $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $+1/2$ และกรณีที่ 2) Adverse pressure gradient ซึ่งกำหนด $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $-1/2$

รูปที่ 7.23a ถึง 7.23c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกน และความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} จาก 1.0 ถึง 5.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 พบว่าทั้ง 2 กรณีนั้นความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ Re_0 มีค่าลดลง และเมื่อเปรียบเทียบทั้ง 2 กรณีจะเห็นได้ว่าในกรณีของ Adverse pressure gradient นั้น เจ็ตจะมีความหนาและอัตราการกระจายตัวมากกว่ากรณี Favorable pressure gradient

สำหรับความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ k_{bs} มีค่าลดลง เมื่อเปรียบเทียบทั้ง 2 กรณีพบว่าในกรณีของ Favorable pressure gradient นั้นการลดลงของความเร็วจะมากกว่ากรณีของ Adverse pressure gradient

สำหรับความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ Re_0 มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ k_{bs} มีค่าลดลง และพบว่าในกรณีของ Adverse pressure gradient มีผลทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสมีอัตราการลดลงที่เร็วกว่ากรณีของ Favorable pressure gradient

Case C3 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ $\mathrm{V}r$

<u>Case C31</u> โดยใช้เงื่อนไขจากอินทิกรัลสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

ในกรณี Case C31 จากสมการ (6.53a), (6.53b) และ (6.53c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, A_2(\mathrm{V}r,Sr),k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = \left[\frac{(2-A_2)k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\frac{1}{(2-A_2)}}$$

$$\sim x^{\frac{1}{(2-A_2)}},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b,\ A_2$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = \left[\frac{k_b}{\mathrm{Re}_0}\right](x-x_0)^{\left(\frac{-1+A_2}{2-A_2}\right)}$$

$$\sim x^{\left(\frac{-1+A_2}{2-A_2}\right)},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, A_2(\mathrm{V}r,Sr),k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = \left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_2)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}$$

$$\sim x^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}},\mathrm{Re}_0^2,k_b^{-1},\ A_2^{-1}$$

$$\frac{du_m}{dx} = u_m(\mathrm{Re}_0, A_2(\mathrm{V}r,Sr),k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = -\left[\frac{A_2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_2)^2 k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-2}{(2-A_2)}}$$

$$\sim x^{\frac{-2}{(2-A_2)}},\mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ A_2^{-1}$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, Sr, A_2(\mathrm{V}r,Sr),k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_2)k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}$$

$$\sim x^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}},\ \mathrm{Re}_0^2,\ k_b^{-1},\ A_2^{-1}$$

$$\frac{dw_m}{dx} = w_m(\mathrm{Re}_0, Sr, A_2(\mathrm{V}r,Sr),k_b(\mathrm{V}r,Sr),x) = -Sr\left[\frac{A_2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{(2-A_2)^2 k_b}\right](x-x_0)^{\frac{-2}{(2-A_2)}}$$

$$\sim x^{\frac{-2}{(2-A_2)}},\ \mathrm{Re}_0^{-1},\ k_b^{-1},\ A_2^{-1}$$

โดยที่ $A_2 = \frac{\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5 Sr^2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5 Sr^2\right]}$ และ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.12-5.17 และจากตารางดังกล่าวพบว่า k_b มีค่าแปรผันกับ Sr แต่แปรผกผันกับ $\mathrm{V}r$ แบบเชิงตัวเลข

รูปที่ 7.24a ถึง 7.24c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ตและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\mathrm{V}r$ จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่

Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 เมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ Sr ลดลง พบว่าความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง สำหรับความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสพบว่าจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสนั้นพบว่าจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง

<u>Case C32</u> โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม

ในกรณี Case C31 จากสมการ (6.56a), (6.56b) และ (6.56c) พบว่า

$$b = b(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = \left[\frac{k_b}{2\,\mathrm{Re}_0}\right]^2 (x - x_0)^2 \quad \sim x^2,\ \mathrm{Re}_0^{-2},\ k_b^2$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = 2\left[\frac{k_b}{2\,\mathrm{Re}_0}\right]^2 (x - x_0) \quad \sim x,\ \mathrm{Re}_0^{-2},\ k_b^2$$

$$u_m = u_m(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = \left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{.k_b}\right]^{-3} (x - x_0)^{-3} \quad \sim x^{-3},\ \mathrm{Re}_0^{-6},\ k_b^3$$

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{du_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = -3\left[\frac{2\,\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{k_b}\right]^{-3} (x - x_0)^{-4} \quad \sim x^4,\ \mathrm{Re}_0^{-6},\ k_b^3$$

$$w_m = w_m(\mathrm{Re}_0, Sr, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{2k_b}\right]^{-3} (x - x_0)^{-3} \quad \sim x^{-3},\ \mathrm{Re}_0^{-6},\ k_b^3,\ Sr$$

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{dw_m}{dx}(\mathrm{Re}_0, Sr, k_b(\mathrm{V}r, Sr), x) = -3Sr\left[\frac{\mathrm{Re}_0^2\,\nu}{2k_b}\right]^{-3} (x - x_0)^{-4} \quad \sim x^4,\ \mathrm{Re}_0^{-6},\ k_b^3,\ Sr$$

โดยที่ k_b เป็นค่าคงที่ดังตารางที่ 5.18-5.23 และจากตารางดังกล่าวพบว่า k_b มีค่าแปรผันกับ Sr แต่แปรผกผันกับ Vr แบบเชิงตัวเลข

รูปที่ 7.25a ถึง 7.25c แสดงความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ตและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 เมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr มีค่าลดลงพบว่าความหนาของเจ็ตมีค่าลดลง สำหรับความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสพบว่าจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re_0 และ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตและตามแนวสัมผัสนั้นพบว่าจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง

บทที่ 8

อภิปรายผลการทดลอง

8.1 อภิปรายผลการทดลอง

เนื่องจากผลของกระแสลมตาม (Coflow) และผลของการหมุนควงมีอิทธิพลต่อการพัฒนาตัวและคุณลักษณะของเจ็ต ดังนั้นแนวทางในการวิเคราะห์ผลการคำนวณจึงพิจารณารูปร่างของการกระจายตัวของความเร็ว และความหนาของเจ็ตที่เกิดจากผลของการหมุนควงของเจ็ตในกระแสลมตาม จากผลการศึกษาของ Rajaratnam (1976) พบว่าในกรณีของเจ็ตในอากาศหยุดนิ่งความหนาของเจ็ตจะแปรผันตาม x และความเร็วตามแนวแกนแปรผันตาม x^{-1} สำหรับกรณีของเจ็ตในกระแสลมตามความหนาของเจ็ตแปรผันตาม $x^{1/3}$ และความเร็วตามแนวแกนแปรผันตาม $x^{-2/3}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่ากรณีของเจ็ตในอากาศหยุดนิ่ง

สำหรับผลของกระแสลมตามที่ทำให้เจ็ตการกระจายตัวลดลง เนื่องจากในขณะที่เจ็ตถูกฉีดออกมา เจ็ตจะมีความเร็วแตกต่างจากอากาศภายนอกซึ่งผลจากความแตกต่างนี้จะทำให้เกิดเป็น Shear layer ขึ้นดังรูปที่ 8.1 โดย Shear layer นี้ เป็นกลไกสำคัญที่ทำให้เจ็ตเกิดการผสมกับอากาศภายนอกจึงมีการถ่ายเทโมเมนตัมจากเจ็ตสู่อากาศภายนอก ดังนั้นความเร็วของเจ็ตจึงมีค่าลดลง แต่เมื่ออากาศภายนอกมีการเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับเจ็ตทำให้ความแตกต่างระหว่างความเร็วเจ็ตกับอากาศภายนอกลดลง Shear layer ที่เกิดขึ้นจะมีกำลังลดลงจึงทำให้การถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างเจ็ตกับอากาศลดลง ดังนั้น ความหนาและการลดลงของความเร็วเจ็ตจึงมีค่าลดลง

เมื่อพิจารณาจากผลการวิเคราะห์ Order magnitude สำหรับสมการ x-โมเมนตัมซึ่งแสดงได้ดังสมการ (8.1) พบว่าเทอม $\mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r}$ และ $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ มีขนาดเป็น

$$\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{?} + \underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} \qquad (8.1)$$

ซึ่งพบว่าเมื่อ $\dfrac{u_1}{u_m}$ มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออากาศด้านนอกมีความเร็วมากขึ้นเทอม $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ จะมีขนาดมากกว่าเทอม $\mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r}$ แสดงว่าการถ่ายเทโมเมนตัมส่วนใหญ่จะมีทิศทางไปตามแนวแกน x มากกว่าแกน r จึงทำให้เจ็ตมีการกระจายตัวลดลง

จากผลการศึกษาในกรณี Case C3 โดยที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า *Sr* และ V*r* พบว่าไม่มี Exact similarity solution ในกรณีที่ *Sr* และ V*r* เป็นค่าคงที่ ในที่นี้จึงผ่อนผันโดยแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ใช้สมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น (Case C31) หรือสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม (Case C32) จากผลการคำนวณพบว่ารูปร่างการะจายตัวของความเร็วและผลต่างความดันที่ได้จากการใช้สมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมนั้นมีความแตกต่างจากผลการคำนวณที่ได้จากการใช้สมการโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก โดยเฉพาะรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสของเจ็ตในกรณีที่ *Sr* และ V*r* มีค่าต่ำ เนื่องจากในกรณีดังกล่าวนี้เชื่อว่าผลจากโมเมนตัมเชิงเส้นน่าจะมีผลต่อการไหลของเจ็ตมากกว่าผลจากโมเมนตัมเชิงมุม

จากผลการศึกษาใน Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* พบว่าเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นนั้นรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตจะมีลักษณะแคบลง ดังในรูปที่ 7.7 และเมื่อพิจารณาใน Case C31 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า *Sr* และ V*r* โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะแคบลงเช่นเดียวกับ Case B2 แต่สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ตในกรณีที่ *Sr* สูงกลับมีลักษณะกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่ *Sr* ต่ำรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ตจะมีลักษณะแคบลงเล็กน้อยก่อนที่จะเพิ่มขึ้น เมื่อ V*r* มีค่าเพิ่มขึ้นดังในรูปที่ 7.11b ซึ่งลักษณะรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ตที่แตกต่างกันของ 2 กรณีนี้อาจเป็นเพราะการศึกษาใน Case B2 นั้นเป็นกรณีที่ $w_m << u_m$ ซึ่งอาจสอดคล้องอยู่ในช่วงที่ *Sr* ต่ำกว่าใน Case C31 ดังในรูปที่ 7.11b

บทที่ 9

สรุปผลการศึกษา

9.1 สรุปผลการการศึกษา

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาวิเคราะห์คุณลักษณะของการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควง (Laminar swirling jet) ที่มีความสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric) ทั้งในกรณีที่ไม่มีและมี Coflow ด้วยวิธีวิเคราะห์แบบซิมิลาริตี้ โดยจะศึกษาถึงผลของการหมุนควงและผลของ Coflow ต่อคุณลักษณะของเจ็ต ซึ่งผลการคำนวณได้แสดงรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน $((u-u_1)/u_m)$ ความเร็วตามแนวสัมผัส (w/w_m) และผลต่างความดัน $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ รวมทั้งความหนา $b(x)$ การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต $u_m(x)$ และการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด $w_m(x)$ ของเจ็ตในสภาวะต่างๆ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

จากผลการศึกษาในกรณีของเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งและในกระแสลมตามพบว่า

1) ใน Case A1 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะการกระจายคล้ายแบบ Gaussian สำหรับความหนา (b) และการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต (u_m) พบว่าเมื่อ b มีค่าแปรผัน x ส่วน u_m มีค่าแปรผัน x^{-1} จากผลที่ได้พบว่าสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์ของ Schlichting (1968) ที่พบว่าความหนาของเจ็ตแปรผันกับระยะ x และการลดลงของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะ x^{-1}

2) ใน Case A2 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะแคบกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง เนื่องจากความหนาของเจ็ตลดลง ซึ่งจากผลการวิเคราะห์ Order of magnitude พบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกมีความเร็วสูงนั้นเทอม $u\dfrac{\partial u}{\partial x} >> \mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r}$ ซึ่งแสดงว่าอัตราการถ่ายเทโมเมนตัมไปตามแนวแกน x มากกว่าตามแนวแกน r จึงทำให้การกระจายตัวของเจ็ตลดลง

3) ใน Case A3 กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Vr พบว่าเมื่อทำการเพิ่มค่า Vr ขึ้นจนถึง 2.0 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีลักษณะแคบลง สาเหตุเนื่องมาจากเมื่ออากาศด้านนอกมีความเร็วมากขึ้นการถ่ายเทโมเมนตัมไป

ในทิศทางตามแนวรัศมีของเจ็ตจะลดลงตามการวิเคราะห์ Order of magnitude เช่นเดียวกับ Case A2 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่ออากาศด้านนอกเคลื่อนที่การ entrainment ของเจ็ตจะลดลง

สำหรับความหนา และการลดลงของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตพบว่าในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นเจ็ตจะมีความหนามากที่สุด แต่เมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตกลับมีค่าลดลง สำหรับค่าความเร็วตามแนวแกนเจ็ต มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลการศึกษาในกรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่งและในกระแสลมตามพบว่า

1) ใน Case B1 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่ง พบว่าเจ็ตมีคุณลักษณะคล้ายกับในกรณีที่ไม่มีการหมุนควง โดยความหนา (b) และการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต (u_m) พบว่า b มีค่าแปรผัน x ส่วน u_m มีค่าแปรผัน x^{-1} และสำหรับการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสเจ็ต (w_m) พบว่า w_m มีค่าแปรผัน x^{-2}

นอกเหนือจากนั้นเมื่อพิจารณาระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดแกนบนเจ็ต $(\eta = 0)$ จะพบว่ามีค่าคงที่เท่ากับ 1.58 แต่จากการคำนวณการลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัส พบว่ามีการลดลงในลักษณะ $w_m \propto x^{-2}$ ดังนั้นค่า $(p_\infty - p)$ จึงมีค่าลดลงในอัตราที่เท่ากันคือ ประมาณ x^{-2} หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือความดันมีค่าเพิ่มขึ้นตามแนวแกนเจ็ต จึงทำให้เกิด Adverse pressure gradient ตามแนวแกนเจ็ต

2) ใน Case B2 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ จากการที่กำหนดสมมติฐานให้ $w_m << u_m$ จึงทำให้รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะใกล้เคียงกับกรณีที่ไม่มีการหมุนควง โดยพบว่ารูปร่างการกระจายของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะแคบลงกว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส พบว่ามีลักษณะแคบลงกว่าในกรณีที่อากาศหยุดนิ่ง นอกจากนี้ยังพบว่าผลจากการที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่ยังทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดมีการเปลี่ยนแปลงจากตำแหน่งเดิมเล็กน้อย โดยตำแหน่งดังกล่าวเลื่อนเข้าสู่แกนกลางเจ็ตมากขึ้น

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่ง แต่ระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดบนแกนเจ็ตในกรณีที่อากาศด้านนอกเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ 1.36 ซึ่งต่ำกว่ากรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งที่มีค่าเท่ากับ 1.58

3) ใน Case B3 กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า Vr พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะแคบลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่าที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสจะมีลักษณะที่กว้างที่สุด แต่เมื่อเพิ่มค่า Vr ขึ้นจนถึง 2.0 จะสังเกตเห็นว่าความกว้างของเจ็ตมีลักษณะลดลง

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดที่แกนเจ็ตมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากการที่ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้ผลของการหมุนควงลดลงจึงเป็นสาเหตุให้ความดันบริเวณแกนเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น

ในส่วนของความหนา และการลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตพบว่าเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตมีค่าลดลง สำหรับค่าความเร็วตามแนวแกนเจ็ต และตามแนวสัมผัสมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ต และตามแนวสัมผัสจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น

จากผลการศึกษาในกรณีของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งและในกระแสลมตามพบว่า

1) ใน Case C11 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นโดยเปลี่ยนแปลง Sr พบว่ารูปร่างกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น และในกรณี Sr มีค่าเท่ากับ 0.7 นั้นพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแกนสูงสุดจะเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต ทำให้เกิดเป็น Wake component บริเวณตรงกลางแกนเจ็ต

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ามีลักษณะแคบลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งเมื่อ Sr สูงขึ้นแกนของ vortex จะมีขนาดสัมพัทธ์เล็กลง หรือเกิดการ intensification ของ vortex core นั่นเอง

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าเมื่อค่า Sr เพิ่มขึ้น ระดับค่าความดัน $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ ที่บริเวณแกนเจ็ตมีค่าลดลง แสดงว่าเมื่อเพิ่มระดับการหมุน (Sr) ทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด (w_m) มีค่าเพิ่มขึ้นแต่ $(p_\infty - p)$ มีค่าเพิ่มขึ้นช้ากว่า w_m^2

ในส่วนของความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนเจ็ต และความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตพบว่าเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้นความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตมีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับค่าความเร็วตามแนวแกน และตามแนวสัมผัสพบว่ามีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกน และตามแนวสัมผัสมากจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น

2) ใน Case C12 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่เปลี่ยนแปลง Sr พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสมีความแตกต่างจากการใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก

3) ใน Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $k_{bs} = \mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)^2$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับของการหมุนควง พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีลักษณะกว้างขึ้นเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 2.0 ถึง 5.0 พบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมากที่สุดจะมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต ทำให้เกิดเป็น Wake component บริเวณตรงกลางแกนเจ็ต

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ามีลักษณะแคบลงเมื่อค่า k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น สาเหตุเนื่องจากค่า b ที่มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งเกิดการ intensification ของแกนของ vortex (vortex core) นอกจากนี้ยังพบว่าตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดขยับเข้าใกล้แกนเจ็ตมากขึ้นเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดบริเวณแกนเจ็ตจะมีค่าแตกต่างกันเล็กน้อย แต่รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันจะมีลักษณะแคบลงเมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตพบว่า เมื่อ k_{bs} มีค่าเพิ่มขึ้น ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่ความเร็วและอัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตมีค่าลดลง

4) ใน Case C31 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น

ผลจากกระแสลมตาม

พบว่าในกรณีที่ Sr ต่ำเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตจะมีลักษณะแคบลงซึ่งคล้ายคลึงกับในกรณีของเจ็ตที่ไม่หมุนควง เมื่อระดับการหมุนควงมีค่าสูงพอจะทำให้การหมุนควงเริ่มมีผลต่อการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมากกว่าผลจากความเร็วอากาศด้านนอก ดังในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8 พบว่าเมื่อ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 และ 0.1 การหมุนควงจะมีผลมากจึงทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดมีการ

เบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต ทำให้เกิดเป็น Wake component บริเวณตรงกลางแกนเจ็ต แต่เมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ 1.0 ถึง 2.0 ผลจากความเร็วอากาศด้านนอกจะกลับมีผลต่อการกระจายตัวของความเร็วเจ็ตมากขึ้นจึงทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดกลับมาอยู่ที่บริเวณแกนเจ็ตเช่นเดียวกับในกรณีที่ Sr มีค่าต่ำๆ

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0 นอกจากนี้ยังพบว่าการที่ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นมีผลทำให้ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสสูงสุดเคลื่อนที่ออกห่างจากแกนเจ็ตมากกว่ากรณีที่ Vr มีค่าต่ำ

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าในกรณีที่ Sr ต่ำพบว่าระดับค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ สูงสุดที่บริเวณแกนเจ็ตในกรณีที่ Vr จาก 0.0 ถึง 0.1 มีค่าต่ำกว่าในกรณีที่ Vr จาก 1.0 ถึง 2.0 แต่เมื่อ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8 พบว่าระดับค่าของ $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ มีค่าต่างกันมากที่สุด โดยที่มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.0 ถึง 2.0

ผลจากการหมุนควง

พบว่าในกรณีที่ Vr ต่ำนั้น เมื่อ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01 ถึง 0.5 ความเร็วตามแนวแกนสูงสุดจะเกิดที่บริเวณแกนเจ็ต แต่ในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8 ตำแหน่งที่เกิดความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดมีการเบี่ยงเบนออกจากแกนเจ็ต แต่สำหรับในกรณีที่ Vr สูงพบว่าความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดเกิดที่บริเวณแกนเจ็ตในทุกค่า Sr นอกจากนี้ยังพบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตในทุกกรณีของ Vr โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr จาก 0.01 ถึง 0.8 พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วมีลักษณะแคบลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันพบว่าในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 นั้นระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่าลดลงเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 2.0 พบว่าแนวโน้มของระดับค่า $(p_\infty - p)/\rho w_m^2$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Sr มีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนความหนา การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกนและความเร็ตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ต พบว่าเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้น ความหนาและอัตราการกระจายตัวของเจ็ตจะมีค่าลดลง แต่จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อ Sr เพิ่มขึ้น สำหรับความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสพบว่าจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง แต่อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสนั้นพบว่าจะมีค่าลดลงเมื่อ Vr มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ Sr ลดลง

5) ใน Case C32 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่า S*r* และ V*r* โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม พบว่ารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสเจ็ตในแต่ละกรณีนั้นมีลักษณะแตกต่างจากผลที่ได้จากการใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นค่อนข้างมาก

สำหรับความสัมพันธ์ของ ความหนา (b) การลดลงของความเร็ว centerline ตามแนวแกน (u_m) และความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ต (w_m) ในกรณีต่างๆได้สรุปไว้ดังตาราง 6.1

9.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในการศึกษาการไหลแบบราบเรียบของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้นั้นเป็นการศึกษาถึงคุณลักษณะต่างๆของเจ็ต ได้แก่ รูปร่างการกระจายตัวของความเร็ว การแพร่กระจายตัว และการลดลงของความเร็วเจ็ตที่สภาวะต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปเป็นข้อมูลพื้นฐาน และบรรทัดฐานในการศึกษาการไหลในสภาวะที่เป็น Turbulence ต่อไป และจากข้อมูลที่ได้แสดงถึงผลจากการหมุนควงมีส่วนทำให้เจ็ตผสมกับอากาศภายนอกได้ดีขึ้นกว่าในกรณีที่ไม่มีการหมุนควง ซึ่งสามารถนำไปเป็นข้อมูลในการประยุกต์ใช้กับการผสมของเชื้อเพลิงกับอากาศ หรือในการผสมของสารเคมีในลักษณะของเจ็ตในกระแสลมตาม

นอกจากนี้ข้อมูลในงานวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางในการศึกษาเกี่ยวกับการควบคุมการไหล รวมทั้งเป็นแนวทางในการประยุกต์ใช้สำหรับการไหลในลักษณะอื่นๆได้อีก

ประมวลตาราง

2.1 ตารางสรุปงานวิจัยที่ผ่านมาของ Circular jet

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
1	Schilchting (1968)	● ศึกษาเกี่ยวกับ Laminar circular jet โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้เพื่อทำการลดรูปสมการ Navier-strokes โดยที่กำหนดให้ Stream function และตัวแปรไร้มิติมีค่าเป็น $\psi = \nu x F(\eta)$ และ $\eta = y/x$ ซึ่ง $F(\eta)$ เป็น Similarity function ● ศึกษาในกรณีที่เป็น Turbulent โดยนำทฤษฎี Prandtl's mixing length มาใช้ในการวิเคราะห์ซึ่ง กำหนดให้ $\tau_t = \rho l^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| \frac{\partial u}{\partial y}$ โดยที่ τ_t คือ Turbulent viscosity และ l คือ Mixing length	● ในกรณีของ Laminar jet การลดลงของความเร็วมากที่สุดตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตจะมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x $(b \propto x)$ ● สำหรับกรณี Turbulent การลดลงของความเร็วมากที่สุดตามแนวแกนมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x^{-1} $(u_m \propto x^{-1})$ และความกว้างของเจ็ตจะมีลักษณะแปรผันกับระยะทางตามแนวแกน x $(b \propto x)$ เช่นเดียวกับกรณีของ Laminar

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
2	Rajaratnam (1976)	● ทำการศึกษาลักษณะของ Turbulent circular jet โดยการวิเคราะห์ทางทฤษฎีด้วยวิธีการวิเคราะห์ซิมิลาริตี้ซึ่งกำหนดให้ความเร็ว $u = u_m(x) f(\eta)$ โดยที่ $f(\eta)$ เป็นซิมิลาริตี้ฟังก์ชัน	● พบว่าสามารถแบ่งลักษณะของเจ็ตออกได้เป็น 3 บริเวณคือ 1. Potential core region ซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเร็วสม่ำเสมอ 2. Flow development region ซึ่งเป็นบริเวณที่อยู่ใกล้ทางออกของเจ็ต โดยที่บริเวณนี้การไหลมีการพัฒนาของ shear layer เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของความเร็วของเจ็ตและอากาศด้านนอก 3. Fully developed flow ซึ่งเป็นบริเวณที่พบว่าการไหลมีลักษณะ Similarity ● พบว่าการลดลงของความเร็วมากที่สุดแปรผันกับระยะตามแนวแกน x^{-1} ($u_m \propto x^{-1}$) และความกว้างของเจ็ตแปรผันกับระยะตามแนวแกน x ($b \propto x$)

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
3	Rankin et al. (1983)	● ได้ทำการทดลองศึกษาเกี่ยวกับ Laminar submerged jet โดยทดลองในระบบปิดที่ใช้ของไหลเป็นน้ำซึ่งน้ำจะถูกฉีดออกจากท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 6.35 mm และยาว 2.43 m ● ปะ $X_c = (x/d)\mathrm{Re}_c^{-1}$ โดยทำการทดลองที่ค่า Re_c มีค่าเท่ากับ 1,000, 1,500 และ 2,000	● จากผลการทดลองพบว่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตที่บริเวณใกล้ทางออกของเจ็ต ($X_c = 0.05$) จะมีลักษณะรูปร่างการกระจายตัวเป็นพาราโบลา แต่เมื่อระยะ X_c เพิ่มขึ้นเท่ากับ 0.01 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนจะมีการเปลี่ยนแปลงเข้าใกล้ลักษณะรูปร่างการกระจายตัวความเร็วของ Schlichting (1968) จนเมื่อ X_c เท่ากับ 0.018 พบซิมิลาริตี้ของรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนซึ่งมีค่าสอดคล้องกับผลของ Schlichting

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
4	Paullay et al. (1985)	● ทำการคำนวณหา similarity solution ของ Turbulent plane jet และ Radial jet โดยใช้ $k-\varepsilon$ model และการแทนค่าด้วยตัวแปรซิมิลาริตี้ (similarity variable) แล้วจึงทำการแก้สมการหาความเร็ว turbulent kinetic energy และ dissipation rate profile นอกจากนี้ยังได้คำนวณหาอัตราการลดลงของความเร็ว entrainment rate และอัตราการแพร่กระจายของเจ็ต (growth rate)	● จากผลการคำนวณพบว่าอัตราการลดลงของความเร็ว อัตราการแพร่กระจาย และ entrainment rate ของ Turbulent plane jet มีค่าเป็น 0.1595, 0.108 และ 0.0567 ตามลำดับ ● สำหรับกรณีของ Radial jet นั้นมีค่าเป็น 0.1412, 0.0951 และ 0.0972 ตามลำดับ ● ในกรณีของ Plane jet นั้นเมื่อเปรียบเทียบอัตราการแพร่กระจายของเจ็ตที่คำนวณได้กับของ Ljuboja และ Rodi (1980) ที่ใช้ Algebraic Reynolds stress model พบว่ามีค่าเป็น 0.114 ซึ่งมีค่ามากกว่าผลการคำนวณที่ได้ประมาณ 6 เปอร์เซ็นต์

2.2 ตารางสรุปงานวิจัยที่ผ่านมาของ Circular jet in coflow

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
1	Squire and Trouncer (1944)	● ทำการศึกษาทางทฤษฎีของเจ็ตในกระแสลมขนาน (Parallel Stream) ด้วยการอินทิเกรตสมการโมเมนตัม โดยใช้ทฤษฎี Mixing length และหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับค่าต่างๆของ λ ซึ่งกำหนดให้เป็นอัตราส่วนของความเร็วอากาศด้านนอกต่อความเร็วเจ็ตที่ทางออกจาก nozzle ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.0, 0.125, 0.25 และ 0.5	● พบว่าความยาวของ Potential core สั้นที่สุดที่ λ เท่ากับ 0 ● อัตราการลดลงของความเร็วตามแนวแกนเจ็ตจะมีค่าลดลงเมื่อความเร็วของอากาศด้านนอกมีค่าสูงขึ้น (λ มีค่าเพิ่มขึ้น)
2	Alpinier (1964)	● ได้ศึกษาเจ็ตในกระแสลมขนาน (Parallel stream) กรณีที่ λ มีค่ามากกว่า 1 โดยที่ความเร็วเจ็ตมีค่าน้อยกว่าความเร็วอากาศด้านนอก	● พบว่าการลดลงของความเร็วขึ้นอยู่กับทั้งอัตราส่วนความเร็วและอัตราส่วนความหนาแน่น โดยสำหรับกรณีของไฮโดรเจนในอากาศและคาร์บอนไดออกไซด์ในอากาศมีอัตราส่วนความหนาแน่นเป็น 2/29 และ 44/29 ตามลำดับ

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
		● ได้ใช้คาร์บอนไดออกไซด์และไฮโดรเจนเป็นเจ็ตที่ถูกฉีดเข้าไปในอากาศที่เคลื่อนที่ สำหรับคาร์บอนไดออกไซด์ในอากาศนั้น λ มีค่าเท่ากับ 1.28, 1.55 และ 2.13 สำหรับกรณีไฮโดรเจนในอากาศนั้น λ มีค่าเท่ากับ 1.05 และ 1.5	ซึ่งเมื่อ λ มีค่าเพิ่มมากขึ้นและอัตราส่วนความหนาแน่น (Density ratio) ลดลงจะทำให้การลดลงของความเร็วของเจ็ตมีค่าเพิ่มมากขึ้น
3	Antonia and Bilger (1973)	● ทำการทดลองศึกษาการไหลของเจ็ตในกระแสลมตาม โดยใช้อุโมงค์ลมที่มีพื้นที่หน้าตัด 3.05x3.05 m^2 และเจ็ตที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 5.28 mm และใช้ Pitot tube และ Hot wire ในการวัดความเร็ว ● ทำการทดลองที่ $\lambda = u_j/u_1$ มีค่าเท่ากับ 3 และ 4.5 ซึ่งความเร็วอากาศด้านนอกมีค่าคงที่ 30.5 m/s และความเร็วเจ็ตมีค่า 91.3 และ 137 m/s	● จากผลการทดลองพบซิมิลาริตี้ของ Mean velocity เมื่อ x/d มีค่าตั้งแต่ 38 เป็นต้นไป ● พบซิมิลาริตี้ของ Turbulence intensity เมื่อ x/d มีค่าตั้งแต่ 152 เป็นต้นไป ● พบซิมิลาริตี้ของ Reynolds shear stress สำหรับ λ เท่ากับ 2 และ 3.5 เมื่อ x/d มากกว่า 150 และค่ามากที่สุดของ Reynolds shear stress จะเกิดที่ตำแหน่ง 0.7 L_0

2.3 ตารางสรุปงานวิจัยที่ผ่านมาของ Swirling jet

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
1	Rose (1962)	● ศึกษาเกี่ยวกับ Swirling turbulent jet โดยใช้ท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 17/32 นิ้ว ยาว 100 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางทำให้เกิดการหมุนด้วยความเร็ว 9,500 รอบต่อนาที และใช้ Hot-wire anemometer ในการวัดค่าความเร็วเฉลี่ย โดยเริ่มวัดจากทางออกของเจ็ตไปตามแนวแกนจนถึงระยะ 15 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ	● จากผลการทดลองพบว่ารูปร่างของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนมีลักษณะคล้าย Gaussian profile และพบลักษณะของ Similarity ทั้งในความเร็วตามแนวแกน และความเร็วตามแนวสัมผัส ● ผลของการหมุนจะมีผลต่อรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนน้อยกว่าความตามแนวรัศมีและที่ระยะ 15D นั้นความกว้างของเจ็ตจะเพิ่มในลักษณะเป็นเชิงเส้น

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
2	Lee (1965)	● ทำการศึกษาทางทฤษฎีเกี่ยวกับ Axisymmteric turbulent swirling jet โดยนำสมมติฐาน Similarity และ Entrainment มาใช้ในการในการพิจารณาหาการลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัส ● ในการวิเคราะห์ได้ใช้ Boundary-layer approximate และการกำหนดให้ความเร็วเป็นดังนี้ $u(x,r)=u(x)e^{\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)}$ $w(x,r)=w(x)f\left(\frac{r}{b}\right)$ $b(x)=$ ค่ารัศมีของเจ็ตที่ตำแหน่งซึ่งมีความเร็วมีค่าเป็น $u=0.5u_m$ และกำหนดให้ $\mathrm{v}(x,b)=-\alpha u(x)$ โดยที่ $\alpha=$ สัมประสิทธิ์ของการ Entrainment ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.08	● จากผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีทำให้ได้การเปลี่ยนแปลงความเร็วตามแนวแกนและตามแนวสัมผัสดังสมการ $\frac{u}{u_0}=\frac{G^{\frac{1}{2}}c^3\left(c^2X+G^{-1}\right)^2}{\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}$ $u_0=40.6$ fps $\frac{w}{w_0}=\frac{c^3\left(c^2X+G^{-1}\right)}{G^{\frac{1}{2}}\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}$ $w_0=5.91$ fps $\frac{b}{b_0}=\frac{\left[\left(c^2X+G^{-1}\right)^2-1\right]}{c^2\left(c^2X+G^{-1}\right)}$ $b_0=0.351$ in โดยที่ค่าคงที่ c และ G มีค่าเท่ากับ 2.707 และ 0.134 ตามลำดับ ● เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Rose (1962) โดยวัดที่ตำแหน่ง 1.5, 3.06, 4.5, 6.0, 9.0 และ 15 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกัน

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
3	Chigier and Chervinsky (1967)	• ทำการทดลองศึกษาเกี่ยวกับ Swirling jet ที่ค่า Degree of swirl (S) ต่างๆ โดยศึกษาครอบคลุมทั้ง Weak, Moderate และ Strong swirl ในการทดลองได้วัดค่าความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสเฉลี่ย ความดันสถิต และความกว้างของเจ็ตที่ระยะ x/d เท่ากับ 0.2, 1.0, 2.0, 4.1, 6.2, 8.3, 10.0, 15.0 โดยมี S เท่ากับ 0.066, 0.134, 0.234, 0.416, 0.6, 0.64	• จากผลการทดลองพบลักษณะ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัสและค่าความดันสถิต สำหรับ Weak และ Moderate swirl ที่ระยะ 4 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ ส่วน Strong swirl นั้นจะพบ Similarity ของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนที่ระยะ 10 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางท่อเป็นต้นไป • รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและค่าความดันสถิตของเจ็ต ซึ่งแสดงได้ด้วย Gaussian curve ดังสมการ $\frac{u}{u_m} = \exp(-k_u \xi^2)$ และ $\frac{p - p_\infty}{p_m - p_\infty} = \exp(-k_p \xi^2)$ โดยที่ k_u และ k_p คือค่าคงที่การลดลงของความเร็วตามแนวแกนและความดันสถิต

ลำดับ	ผู้วิจัย	สภาวะที่ทำการศึกษา	ผลที่ได้รับจากงานวิจัย
4	Pratte and Keffer (1972)	● ทำการทดลองศึกษา Swirling turbulent jet ในการทดลองได้ใช้ท่อยาว 23 นิ้ว เส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 0.493 นิ้ว หมุนที่ความเร็ว 8,700 rpm โดยมีค่า Reynolds number (Re) เท่ากับ 2,300 และค่า Swirl number เท่ากับ 0.3	● จากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าพบ Similarity ของค่า Mean velocity เกิดขึ้นได้เร็วกว่า Turbulent intensity ● จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยใช้ Boundary-layer approximation สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสได้เป็นฟังชันก์ของ $(x-x_0)^{-1}$ และ $(x-x_0)^{-2}$ ตามลำดับ ● สำหรับรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนสามารถแสดงได้โดย Gaussian profile ดังสมการ $\frac{u(\eta)}{u_0}=e^{-45\eta^2}$

k_b	$\mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}$
k_{bf}	$\mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$
k_{bs}	$\mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)^2$
k_{u_m}	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}$
$k_{u_m f}$	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$
k_{w_m}	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{w_m}\dfrac{dw_m}{dx}$
$k_{w_m f}$	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{w_m}\dfrac{dw_m}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$
$k_{w_m s}$	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{w_m}\dfrac{dw_m}{dx}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)^2$
k_{u_1}	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}$
$k_{u_1 f}$	$\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)$
Vr	$\dfrac{u_1}{u_m}$
Sr	$\dfrac{w_m}{u_m}$

ตารางที่ 5.1 ตารางสรุปค่าคงที่กรณีการไหลของเจ็ตในกรณีต่างๆ

ตารางที่ 5.2 ตารางสรุปสมการ Governing equations และ Parameters ของเจ็ตในกรณีต่างๆ

Case	Governing equations	Parameters
General case	สมการ Differential equation	
x -momentum	$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right]G\eta - \left[k_b Sr^2\right]G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$	
θ -momentum	$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$	
	สมการ Integral equation	
Linear momentum	$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_b Sr^2\right] = 0$	
Angular momentum	$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0$	
Case A1 กรณี $w_m = 0$ และ $u_1 = 0$	สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$ สมการ Integral equation $I_2\left[2k_b + 2k_{u_m}\right] = 0$	● มี 2 Parameter คือ k_b และ k_{u_m} ● ไม่มี Free Parameter
Case A2 กรณีที่ $w_m = 0$ และ $u_1 >> u_m$	สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1 f} + k_{bf}\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1 f} + k_{bf} + k_{u_m f}\right]F' = 0$ สมการ Integral equation $I_1\left[2k_{bf} + k_{u_m f} + 2k_{u_1 f}\right] = 0$ หรือสามารถจัดรูปสมการให้มีเพียง 2 Parameter ได้คือ สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[A^*\right]F''\eta - \left[A^* + B^*\right]F' = 0$ สมการ Integral equation $I_1\left[2A^* + B^*\right] = 0$ โดยที่ $A^* = 0.5k_{u_1 f} + k_{bf}$ และ $B^* = k_{u_1 f} + k_{u_m f}$	● มี 2 Parameter คือ A*และ B* ● ไม่มี Free Parameter

Case	Governing equations	Parameters
General case x **-momentum** θ **-momentum** **Linear momentum** **Angular momentum**	สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right] G\eta - \left[k_b Sr^2\right] G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1} \mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$ $g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_bSr^2\right] = 0$ $I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0$	
Case A3 กรณีที่ $w_m = 0$ และ $u_1 \sim u_m$ โดยที่ $u_1/u_m =$ ค่าคงที่	สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta$ $-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0$	● มี 4 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{u_1} และ $\mathrm{V}r$ ● มี Free Parameter คือ $\mathrm{V}r$
Case B1 กรณีที่ $w_m << u_m$ และ $u_1 = 0$	สมการ Differential equation $F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$ $g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} - \left[k_b + k_{w_m}\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$ สมการ Integral equation $I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] = 0$ $I_3\left[k_{w_m} + k_{u_m} + 3k_b\right] = 0$	● มี 3 Parameter คือ k_b , k_{u_m} และ k_{w_m} ● ไม่มี Free Parameter

Case	Governing equations	Parameters
General case	สมการ Differential equation	
x **−momentum**	$F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta-\left[k_b Sr^2\right]G'\eta^2+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$	
θ **−momentum**	$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$	
	สมการ Integral equation	
Linear momentum	$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]-I_5\left[2k_{w_m}Sr^2+2k_b Sr^2\right]=0$	
Angular momentum	$I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$	
Case B2 กรณีที่ $w_m << u_m$ และ $u_1 >> u_m$	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m s}\right]G\eta-\left[k_{bs}\right]G'\eta^2+\left[0.5k_{u_1 f}+k_{bf}\right]F''\eta-\left[1.5k_{u_1 f}+k_{u_m f}+k_{bf}\right]F'=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1 f}+k_{bf}\right]g'\eta-\left[k_{w_m f}-\frac{1}{2}k_{u_1 f}\right]g=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m f}+2k_{u_1 f}+2k_{bf}\right]=0$ $I_4\left[k_{w_m f}+k_{u_1 f}+3k_{bf}\right]=0$ หรือสามารถจัดรูปสมการให้มีเพียง 3 Parameter ได้คือ สมการ Differential equation $F''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[A^*\right]F''\eta-\left[A^*+B^*\right]F'=0$ $g''-\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[A^*\right]g'\eta-\left[C^*\right]g=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[2A^*+B^*\right]=0$ $I_4\left[3A^*+C^*\right]=0$ โดยที่ $A^*=0.5k_{u_1 f}+k_{bf}$, $B^*=k_{u_1 f}+k_{u_m f}$ $C^*=k_{w_m f}-0.5k_{u_1 f}$	● มี 3 Parameter คือ A*, B* และ C* ● ไม่มี Free Parameter

Case	Governing equations	Parameters
General case x **-momentum** θ **-momentum** Linear momentum Angular momentum	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta-\left[k_bSr^2\right]G'\eta^2+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]-I_5\left[2k_{w_m}Sr^2+2k_bSr^2\right]=0$ $I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$	
Case B3 กรณีที่ $w_m \ll u_m$ และ $u_1 \sim u_m$ โดยที่ $u_1/u_m =$ ค่าคงที่	สมการ Differential equation $F''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]=0$ $I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$	● มี 5 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{w_m} , k_{u_1} และ $\mathrm{V}r$ ● มี 1 Free Parameter คือ $\mathrm{V}r$
Case C11 กรณีที่ $w_m \sim u_m$ และ $u_1 = 0$ และ $w_m/u_m =$ ค่าคงที่ โดยใช้เงื่อนจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้น	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m}(Sr)^2\right]G\eta-\left[k_b(Sr)^2\right]G'\eta^2+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$ สมการ Integral equation $I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]-I_5(Sr)^2\left[2k_{w_m}+2k_b\right]=0$	● มี 4 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{w_m} และ Sr ● มี 1 Free Parameter คือ Sr

Case	Governing equations	Parameters
General case x **-momentum** θ **-momentum** **Linear momentum** **Angular momentum**	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta-\left[k_bSr^2\right]G'\eta^2+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F''\eta-\left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{u_m}\mathrm{V}r+k_b\mathrm{V}r\right]F'-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[k_b\mathrm{V}r+\frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta-\left[k_{w_m}\mathrm{V}r-\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r+2k_{u_1}\mathrm{V}r+2k_b\mathrm{V}r\right]+I_2\left[2k_{u_m}+2k_b\right]-I_5\left[2k_{w_m}Sr^2+2k_bSr^2\right]=0$ $I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]+I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r+k_{w_m}\mathrm{V}r+3k_b\mathrm{V}r\right]=0$	
Case C12 กรณีที่ $w_m \sim u_m$ และ $u_1 = 0$ **และ** $w_m/u_m =$ ค่าคงที่ โดยใช้เงื่อนจากสมการโมเมนตัมเชิงมุม	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_m}Sr^2\right]G\eta-\left[k_bSr^2\right]G'\eta^2+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta}-\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}-\left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta}=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta}-\left[k_{w_m}+k_b\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2k_b+k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2}=0$ สมการ Integral equation $I_3\left[k_{u_m}+k_{w_m}+3k_b\right]=0$	● มี 4 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{w_m} และ Sr ● มี 1 Free Parameter คือ Sr
Case C2 กรณีที่ $w_m \sim u_m$ และ $u_1 >> u_m$	สมการ Differential equation $F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2k_{w_ms}\right]G\eta-\left[k_{bs}\right]G'\eta^2+\left[\frac{1}{2}k_{u_1f}+k_{bf}\right]F''\eta-\left[1.5k_{u_1f}+k_{u_mf}+k_{bf}\right]F'=0$ $g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[\frac{1}{2}k_{u_1f}+k_{bf}\right]g'\eta-\left[k_{w_mf}-\frac{1}{2}k_{u_1f}\right]g=0$ สมการ Integral equation $I_1\left[k_{u_mf}+2k_{u_1f}+2k_{bf}\right]-I_5\left[2k_{w_ms}+2k_{bs}\right]=0$ $I_4\left[k_{w_mf}+k_{u_1f}+3k_{bf}\right]=0$ หรือสามารถจัดรูปสมการให้มีเพียง 5 Parameter ได้คือ	● มี 5 Parameter คือ A*, B*,C*, k_{bs} และ k_{w_ms} ● มี 2 Free Parameter คือ k_{bs} และ k_{w_ms}

<table>
<tr><th>Case</th><th>Governing equations</th><th>Parameters</th></tr>
<tr><td>General case</td><td colspan="2">สมการ Differential equation</td></tr>
<tr><td>x -momentum</td><td colspan="2">$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right] G\eta - \left[k_b Sr^2\right] G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2} + \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$</td></tr>
<tr><td>θ -momentum</td><td colspan="2">$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">สมการ Integral equation</td></tr>
<tr><td>Linear momentum</td><td colspan="2">$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_bSr^2\right] = 0$</td></tr>
<tr><td>Angular momentum</td><td colspan="2">$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0$</td></tr>
<tr><td>Case C31
กรณีที่ $w_m \sim u_m$ โดยที่ w_m / u_m และ $u_1 / u_m =$ ค่าคงที่ โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้น</td><td>สมการ Differential equation
$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right] G\eta - \left[k_b Sr^2\right] G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}$
$+ \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$
$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$
สมการ Integral equation
$I_1\left[k_{u_m}\mathrm{V}r + 2k_{u_1}\mathrm{V}r + 2k_b\mathrm{V}r\right] + I_2\left[2k_{u_m} + 2k_b\right] - I_5\left[2k_{w_m}Sr^2 + 2k_bSr^2\right] = 0$</td><td>● มี 6 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{w_m} , k_{u_1} , Sr และ Vr
● มี 2 Free Parameter คือ Sr และ Vr</td></tr>
<tr><td>Case C32
กรณีที่ $w_m \sim u_m$ โดยที่ w_m / u_m และ $u_1 / u_m =$ ค่าคงที่ โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุม</td><td>สมการ Differential equation
$F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} + \left[2k_{w_m} Sr^2\right] G\eta - \left[k_b Sr^2\right] G'\eta^2 + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F''F}{\eta} - \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{F'F}{\eta^2}$
$+ \left[\frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_b \mathrm{V}r\right]F''\eta - \left[\frac{3}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{u_m}\mathrm{V}r + k_b\mathrm{V}r\right]F' - \left[k_{u_m}\right]\frac{F'^2}{\eta} = 0$
$g'' + \frac{g'}{\eta} - \frac{g}{\eta^2} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg'}{\eta} + \left[k_b\mathrm{V}r + \frac{1}{2}k_{u_m}\mathrm{V}r\right]g'\eta - \left[k_{w_m}\mathrm{V}r - \frac{1}{2}k_{u_1}\mathrm{V}r\right]g - \left[k_{w_m} + k_b\right]\frac{F'g}{\eta} + \left[2k_b + k_{u_m}\right]\frac{Fg}{\eta^2} = 0$
สมการ Integral equation
$I_3\left[k_{u_m} + k_{w_m} + 3k_b\right] + I_4\left[k_{u_1}\mathrm{V}r + k_{w_m}\mathrm{V}r + 3k_b\mathrm{V}r\right] = 0$</td><td>● มี 6 Parameter คือ k_b , k_{u_m} , k_{w_m} , k_{u_1} , Sr และ Vr
● มี 2 Free Parameter คือ Sr และ Vr</td></tr>
</table>

k_b	k_{u_m}	I_2
3.316	-3.316	0.402

ตารางที่ 5.3 Case A1 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$)

$A*$	$B*$	I_1
1.368	-2.736	0.722

ตารางที่ 5.4 Case A2 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	I_1	I_2
0	3.316	-3.316	0	1.178	0.402
0.1	3.008	-2.727	-2.727	1.022	0.394
0.5	1.953	-1.545	-1.545	0.843	0.376
1.0	1.334	-0.995	-0.995	0.792	0.369
2.0	0.814	-0.580	-0.580	0.759	0.365

ตารางที่ 5.5 Case A3 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนค่า Vr

k_b	k_{u_m}	k_{w_m}	I_2	I_3
3.316	-3.316	-6.632	0.402	0.960

ตารางที่ 5.6 Case B1 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$)

$A*$	$B*$	C*	I_1	I_4
1.368	-2.736	-4.104	0.721	2.071

ตารางที่ 5.7 Case B2 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_3	I_4
0.0	3.316	-3.316	0.0	-6.632	1.178	0.401	0.959	16.000
0.1	3.008	-2.727	-2.727	-6.296	1.022	0.394	0.743	5.119
0.5	1.953	-1.545	-1.545	-4.315	0.843	0.376	0.588	2.793
1.0	1.334	-0.995	-0.995	-3.007	0.791	0.369	0.552	2.421
2.0	0.814	-0.580	-0.580	-1.862	0.759	0.366	0.529	2.224

ตารางที่ 5.8 Case B3 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr

Sr	k_b	k_{u_m}	k_{w_m}	I_2	I_5
0	3.316	-3.316	-3.316	0.402	7.532
0.01	3.319	-3.319	-3.319	0.404	7.510
0.1	3.566	-3.566	-3.566	0.754	6.207
0.2	4.579	-4.579	-4.579	1.588	4.311
0.3	9.102	-9.102	-9.102	1.795	2.112
0.4	28.388	-28.388	-28.388	1.199	0.712
0.5	44.575	-44.575	-44.575	1.182	0.428
0.6	62.006	-62.006	-62.006	1.191	0.289
0.7	81.350	-81.350	-81.350	1.199	0.207

ตารางที่ 5.9 Case C11 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง $(u_1 = 0)$ โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนค่า Sr

Sr	k_b	k_{u_m}	k_{w_m}	I_3
0.0	1.915	-2.872	-2.872	-3.261
0.1	1.961	-2.941	-2.941	-2.502
0.3	3.379	-5.069	-5.069	3.306
0.4	7.550	-11.325	-11.325	1.013
0.5	13.785	-20.677	-20.677	0.365
0.6	14.705	-22.058	-22.058	0.310
0.7	14.508	-21.762	-21.762	0.292
0.8	14.022	-21.033	-21.033	0.282
0.9	13.481	-20.222	-20.222	0.286
1.2	11.954	-17.931	-17.931	0.316
1.4	11.081	-16.622	-16.622	0.321
1.5	10.721	-16.081	-16.081	0.332
2.0	9.164	-13.746	-13.746	0.369

ตารางที่ 5.10 Case C12 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$) โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมโดยเปลี่ยน แปลงค่า Sr

A^*	B^*	C^*	k_{bs}	$k_{w_m s}$	I_1	I_4	I_5
1.398	-2.823	-4.195	0.01	-0.03	0.746	2.004	0.487
1.702	-3.581	-5.105	0.1	-0.3	0.899	1.494	0.400
2.038	-4.353	-6.115	0.2	-0.6	0.967	1.1401	0.334
2.350	-5.051	-7.050	0.3	-0.9	0.992	0.924	0.290
2.638	-5.688	-7.913	0.4	-1.2	1.001	0.775	0.259
2.902	-6.272	-8.707	0.5	-1.5	1.004	0.672	0.235
3.148	-6.812	-9.443	0.6	-1.8	1.006	0.595	0.217
3.377	-7.316	-10.132	0.7	-2.1	1.007	0.536	0.202
3.591	-7.786	-10.774	0.8	-2.4	1.008	0.489	0.190
3.794	-8.229	-11.381	0.9	-2.7	1.009	0.450	0.180
3.985	-8.641	-11.956	1	-3	1.010	0.418	0.171
4.338	-9.420	-13.015	1.2	-3.6	1.015	0.368	0.157
4.812	-10.454	-14.435	1.5	-4.5	1.024	0.316	0.142
5.231	-11.370	-15.694	1.8	-5.4	1.036	0.279	0.130
5.489	-11.932	-16.467	2	-6	1.044	0.260	0.124
6.066	-13.188	-18.197	2.5	-7.5	1.065	0.223	0.113
6.572	-14.290	-19.716	3	-9	1.088	0.198	0.104
7.027	-15.281	-21.082	3.5	-10.5	1.110	0.179	0.097
7.442	-16.182	-22.327	4	-12	1.1322	0.165	0.092
7.825	-17.013	-23.475	4.5	-13.5	1.1532	0.153	0.088
8.180	-17.785	-24.541	5	-15	1.1736	0.143	0.084

ตารางที่ 5.11 Case C2 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs}

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	3.319	-3.319	0.0	-3.319	1.339	0.404	7.880
0.1	3.040	-2.737	-2.737	-2.737	1.128	0.397	7.298
1	1.337	-0.996	-0.996	-0.996	0.802	0.369	10.668
2.0	0.815	-0.580	-0.580	-0.580	0.764	0.366	11.950

ตารางที่ 5.12 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	3.566	-3.566	0.0	-3.566	6.211	0.783	6.468
0.1	3.737	-3.063	-3.063	-3.063	4.272	0.611	6.790
1	1.487	-1.043	-1.043	-1.043	1.620	0.396	11.068
2.0	0.865	-0.593	-0.593	-0.593	1.207	0.376	12.284

ตารางที่ 5.13 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	9.114	-9.114	0.0	-9.114	10.793	1.876	2.173
0.1	8.590	-7.110	-7.110	-7.110	10.082	1.736	3.5801
1	2.036	-1.346	-1.346	-1.346	5.728	0.791	10.345
2	1.059	-0.688	-0.688	-0.688	3.808	0.538	12.252

ตารางที่ 5.14 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแป Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.3

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	28.388	-28.388	0.0	-28.388	8.427	1.245	0.729
0.1	31.281	-25.581	-25.581	-25.581	8.642	1.307	1.449
1	2.6772	-1.769	-1.769	-1.769	8.074	1.235	9.019
2	1.2159	-0.783	-0.783	-0.783	5.651	0.767	11.655

ตารางที่ 5.15 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.4

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	44.582	-44.582	0.0	-44.582	8.193	1.225	0.437
0.1	64.310	-52.742	-52.742	-52.742	7.685	1.179	0.782
1	4.738	-3.141	-3.141	-3.141	9.224	1.525	6.704
2	1.485	-0.954	-0.954	-0.954	7.573	1.113	10.651

ตารางที่ 5.16 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.5

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_1	I_2	I_5
0.0	102.436	-102.436	0.0	-102.436	9.329	1.316	0.163
0.1	201.500	-167.394	-167.394	-167.394	6.566	1.114	0.249
1	45.590	-30.745	-30.745	-30.7451	4.209	0.889	1.161
2	9.972	-6.423	-6.423	-6.423	7.960	1.209	4.252

ตารางที่ 5.17 Case C31 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้น โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0.0	1.915	-2.873	0.0	-2.873	-28.112	17.026
0.1	1.539	-2.308	-2.308	-2.308	-18.005	24.856
1	0.559	-0.839	-0.839	-0.839	-1.961	68.387
2	0.328	-0.492	-0.492	-0.492	-1.534	51.113

ตารางที่ 5.18 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.01

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0.0	1.928	-2.893	0.0	-2.893	-24.998	18.055
0.1	1.554	-2.332	-2.332	-2.332	-15.416	26.390
1	0.566	-0.849	-0.849	-0.849	-1.609	66.063
2	0.330	-0.495	-0.495	-0.495	-1.408	50.415

ตารางที่ 5.19 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0.0	2.670	-4.001	0.0	-4.001	5.142	18.409
0.1	2.365	-3.547	-3.547	-3.547	4.660	28.793
1	0.631	-0.946	-0.946	-0.946	0.398	50.382
2	0.350	-0.525	-0.525	-0.525	-0.508	44.905

ตารางที่ 5.20 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.3

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0.0	5.650	-8.475	0.0	-8.475	-2.667	8.202
0.1	3.775	-5.663	-5.663	-5.663	2.097	8.757
1	0.670	-1.049	-1.049	-1.049	1.351	39.648
2	0.370	-0.555	-0.555	-0.555	0.115	40.449

ตารางที่ 5.21 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.4

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0.0	4.672	-7.007	0.0	-7.007	1.213	2.154
0.1	3.426	-5.139	-5.139	-5.139	1.642	3.618
1	0.813	-1.219	-1.219	-1.219	1.864	28.998
2	0.398	-0.598	-0.598	-0.598	0.724	35.215

ตารางที่ 5.22 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.5

Vr	k_b	k_{u_m}	k_{u_1}	k_{w_m}	I_3	I_4
0	-	-	-	-	-	-
0.1	-	-	-	-	-	-
1	2.282	-3.422	-3.422	-3.422	0.813	4.671
2	0.594	-0.891	-0.891	-0.891	1.600	1.739

ตารางที่ 5.23 Case C32 ค่าคงที่กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุม โดยเปลี่ยนแปลง ที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.8

Case	$b(x)$	$u_m(x)$	$w_m(x)$
A1	x	x^{-1}	-
A2	$x^{\frac{k_{bf}}{2A^*}}$	$x^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}}$	-
A3	$x^{\frac{1}{(2-A_1)}}$	$x^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}}$	-
B1	x	x^{-1}	x^{-2}
B2	$x^{\frac{k_{bf}}{2A^*}}$	$x^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}}$	$x^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}}$
B3	$x^{\frac{1}{(2-A_1)}}$	$x^{\frac{-A_1}{(2-A_1)}}$	$x^{\frac{-(3-A_1)}{(2-A_1)}}$
C11	x	x^{-1}	x^{-1}
C12	x^2	x^{-3}	x^{-3}
C2	$x^{\frac{k_{bf}}{2A^*}}$	$x^{\frac{k_{u_m f}}{2A^*}}$	$x^{\frac{k_{w_m f}}{2A^*}}$
C31	$x^{\frac{1}{(2-A_2)}}$	$x^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}$	$x^{\frac{-A_2}{(2-A_2)}}$
C32	x^2	x^{-3}	x^{-3}

โดยที่

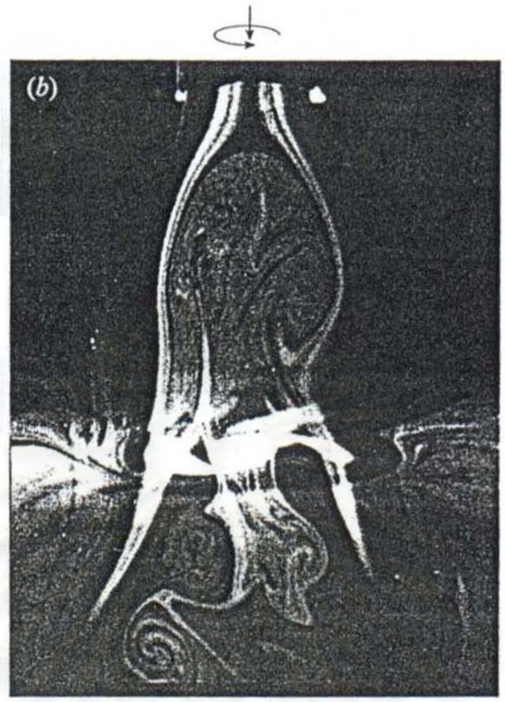
$$A^* = 0.5k_{u_1 f} + k_{bf}$$

$$A_1 = \frac{\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2\right]}$$

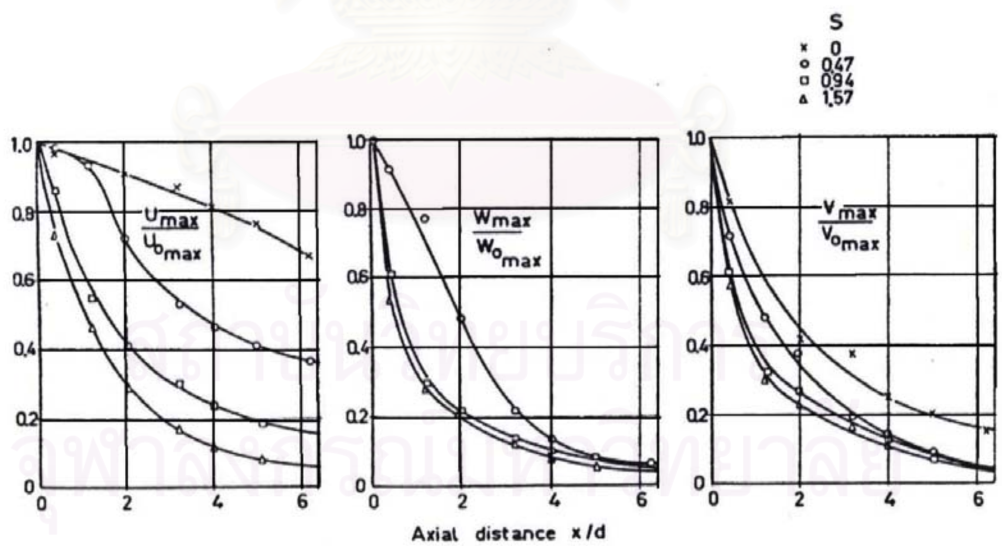
$$A_2 = \frac{\left[2I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5 Sr^2\right]}{\left[3I_1\mathrm{V}r + 2I_2 - 2I_5 Sr^2\right]}$$

ตารางที่ 6.1 ตารางสรุปความสัมพันธ์ของความหนาและการลดลงของความเร็วเจ็ตในกรณีต่างๆ

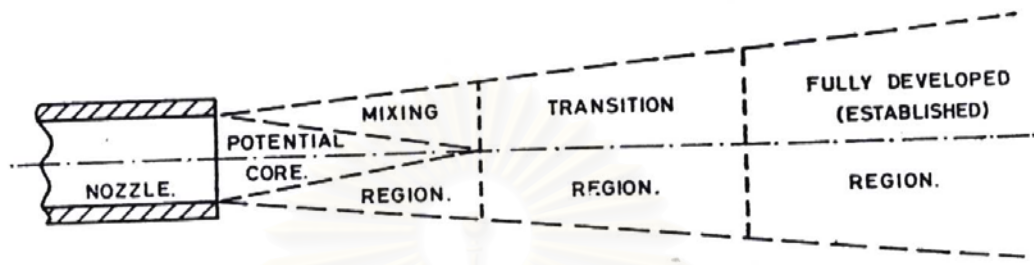
ประมาวลรูปภาพ



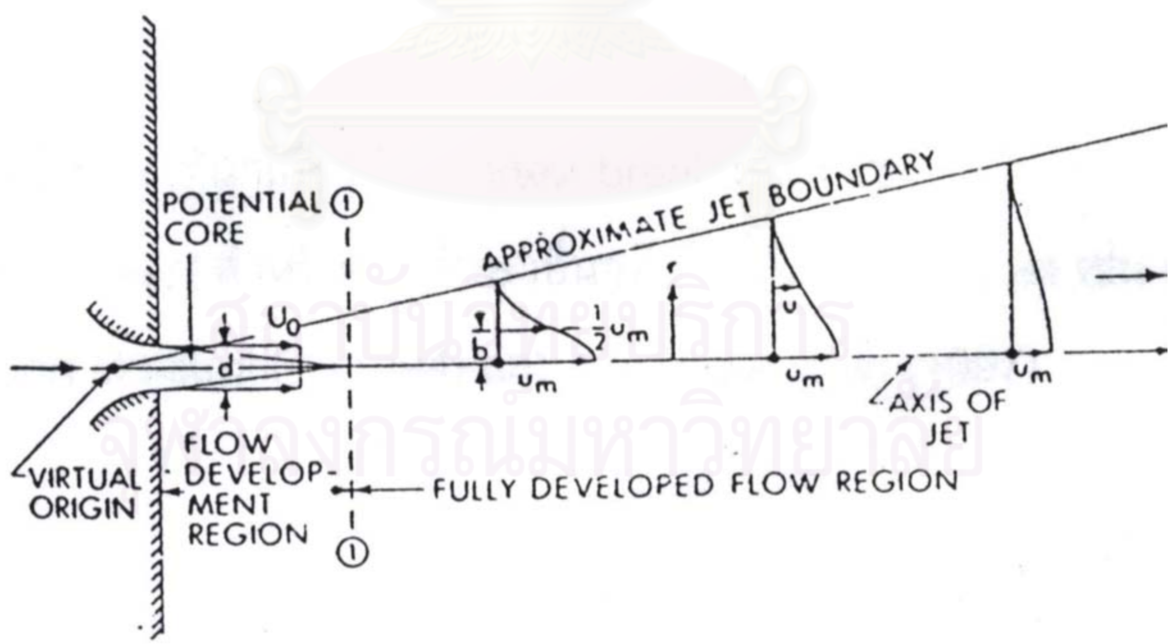
รูปที่ 2.1 ลักษณะของ Recirculation ใน Swirling jet ที่ Re=606, *S*=1.42 (Billant et al., 1998)



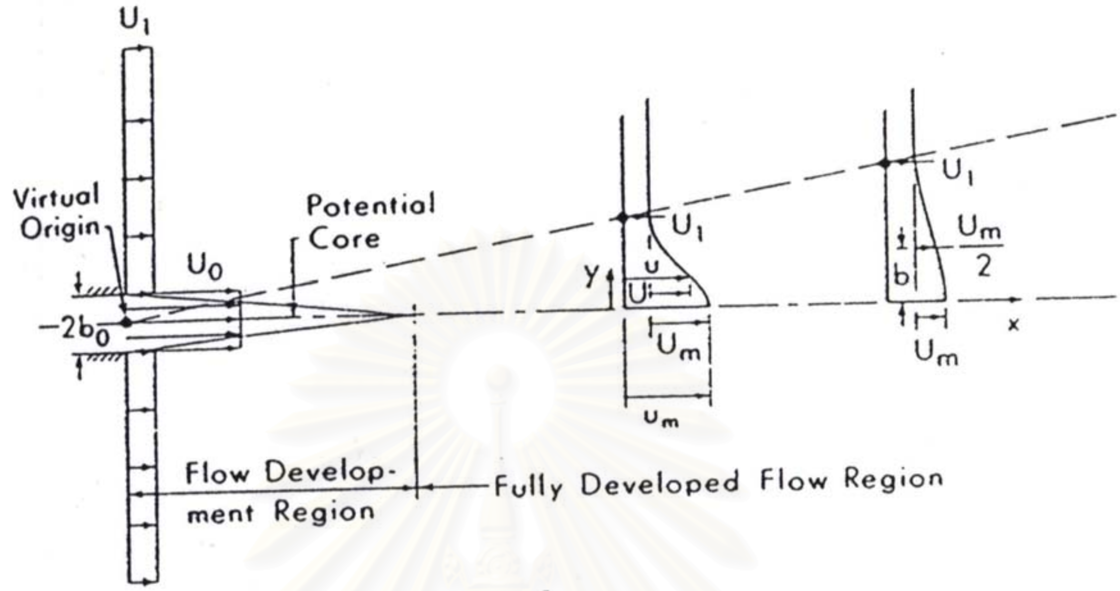
รูปที่ 2.2 ลักษณะการลดลงของค่า Maximum ของความเร็วตามแนวแกน, ความเร็วตามแนวสัมผัส และความเร็วตามแนวรัศมีตลอดความยาวของเจ็ต (Beer and Chigier, 1972)



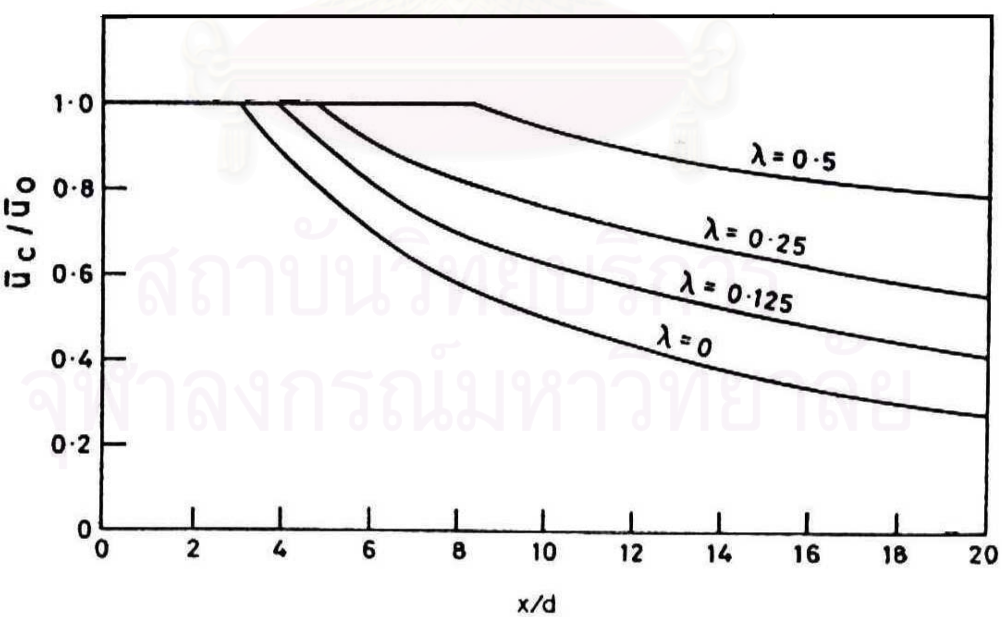
รูปที่ 2.3 ลักษณะการแบ่งบริเวณเจ็ต (Beer and Chigier, 1972)



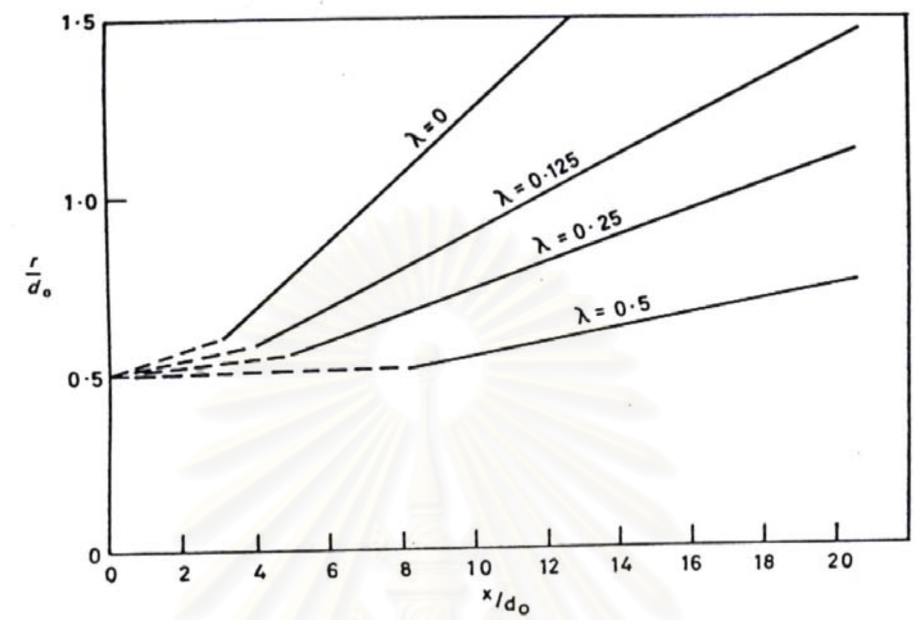
รูปที่ 2.4 ลักษณะของ Circular turbulent jet (Rajaratnam, 1976)



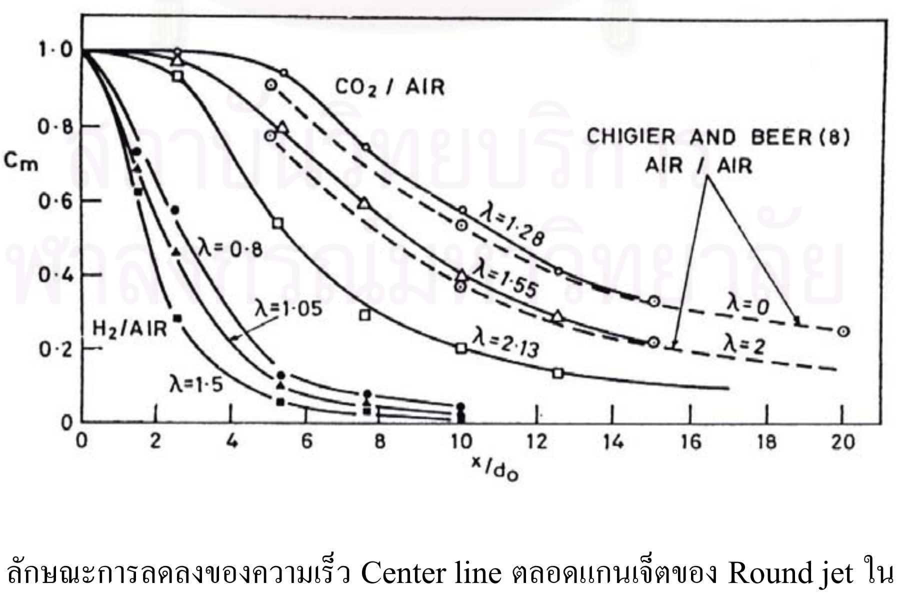
รูปที่ 2.5 ลักษณะของ Circular compound jet (Rajaratnam, 1976)



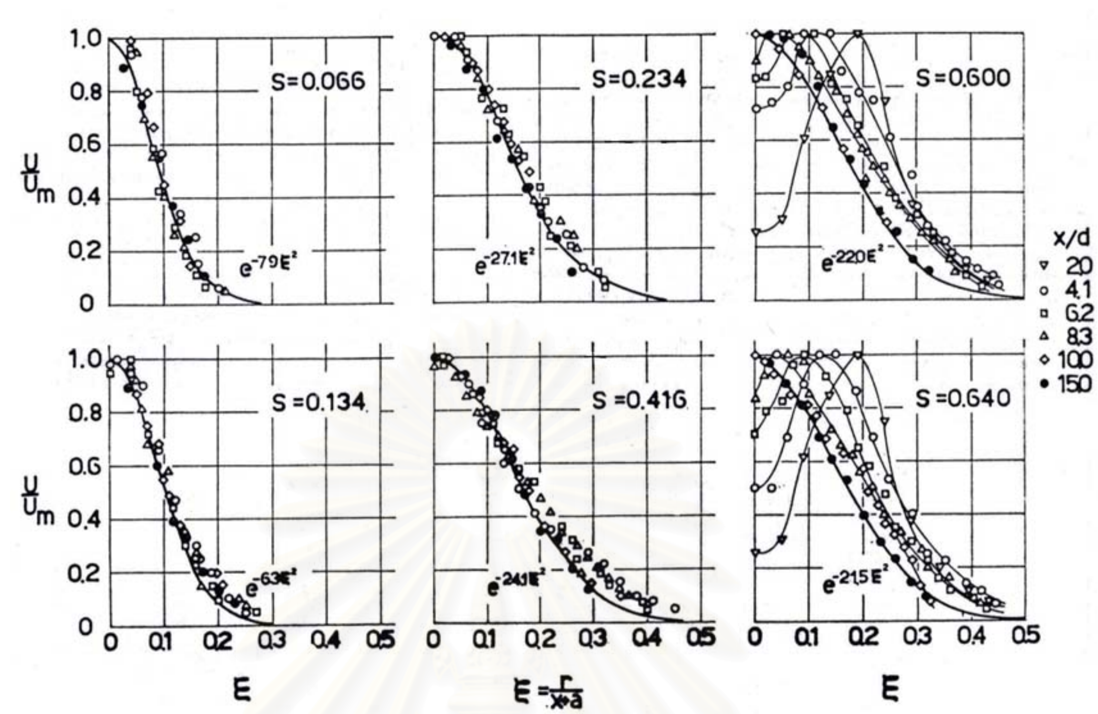
รูปที่ 2.6 ลักษณะการลดลงของความเร็ว Center line ตลอดแกนของ Round jet ใน Co-current stream (Squire and Trouncer, 1944)



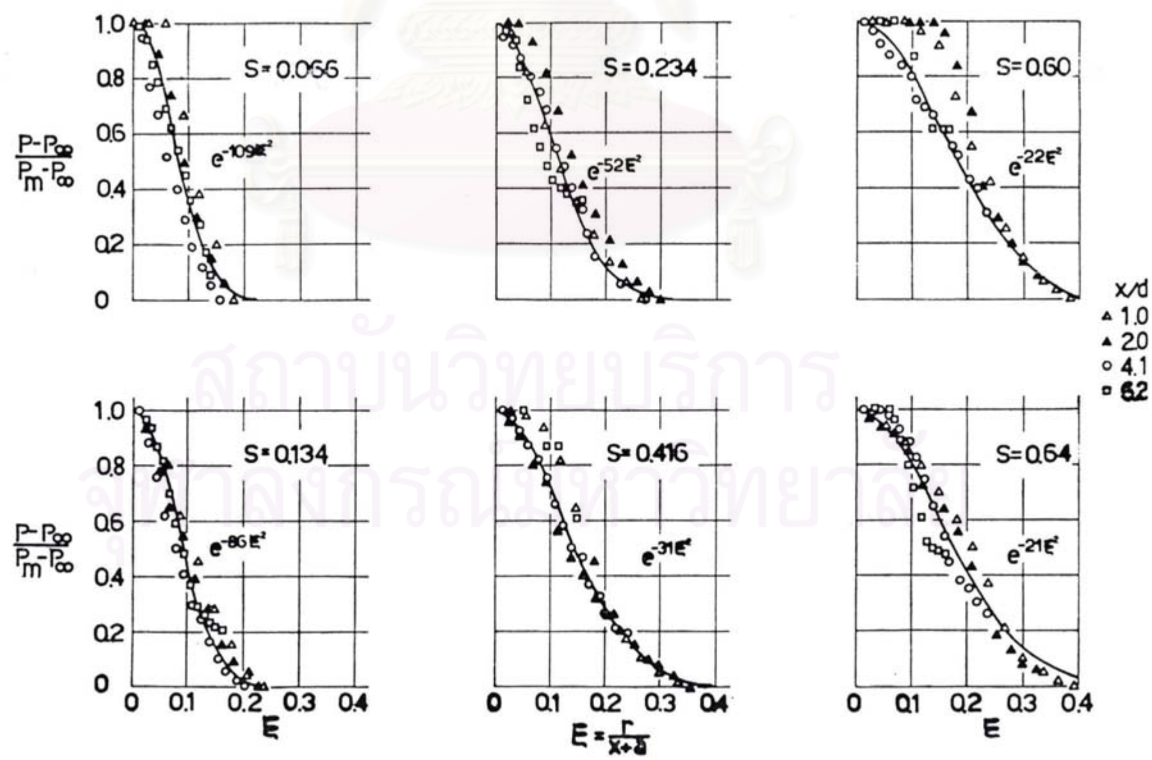
รูปที่ 2.7 เส้นความกว้างที่ตำแหน่ง $u/u_m = 0.5$ ของ Round jet ใน Co-current stream (Squire and Trouncer, 1944)



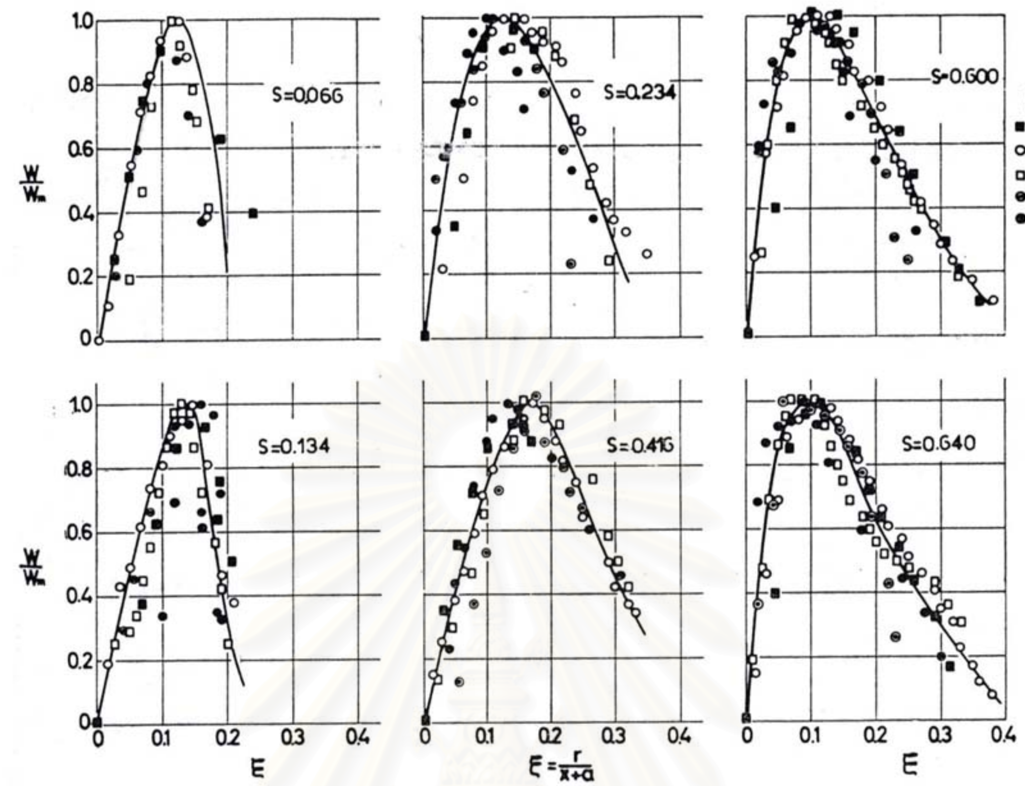
รูปที่ 2.8 ลักษณะการลดลงของความเร็ว Center line ตลอดแกนเจ็ตของ Round jet ใน Co-current stream (Alpinier, 1964)



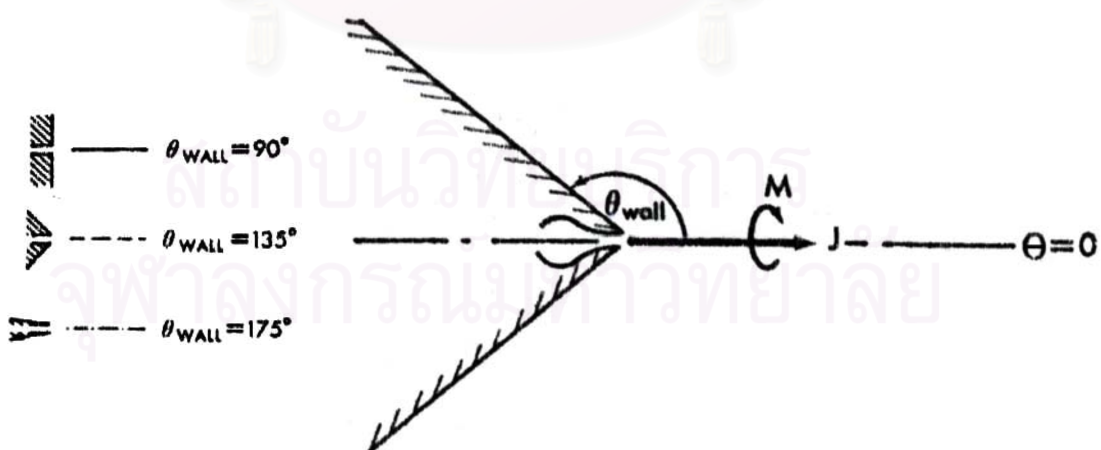
รูปที่ 2.9 ลักษณะการกระจายตัวตามแนวรัศมีของความเร็วตามแนวแกนของ Swirling jet (Chigier and Chervinsky, 1967)



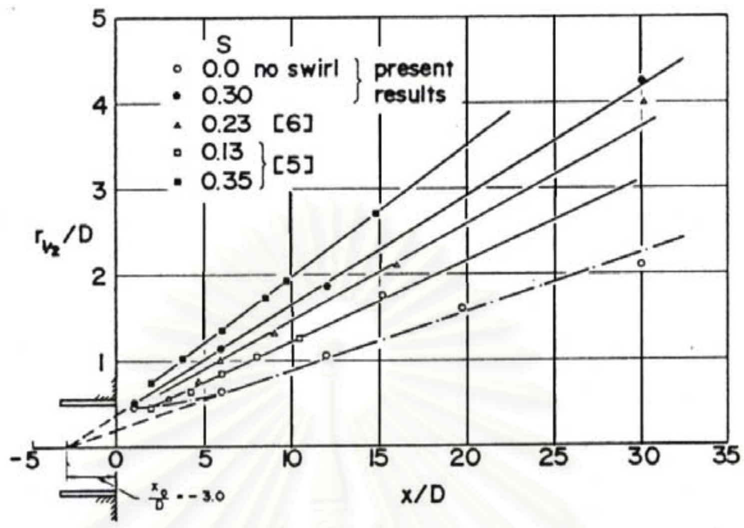
รูปที่ 2.10 ลักษณะการกระจายตัวตามแนวรัศมีของความดันสถิตของ Swirling jet (Chigier and Chervinsky, 1967)



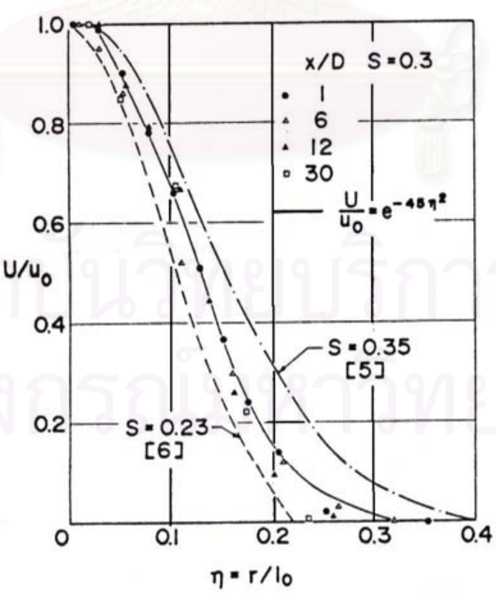
รูปที่ 2.11 ลักษณะการกระจายตัวตามแนวรัศมีของความเร็วตามแนวสัมผัสของ Swirling jet (Chigier and Chervinsky, 1967)



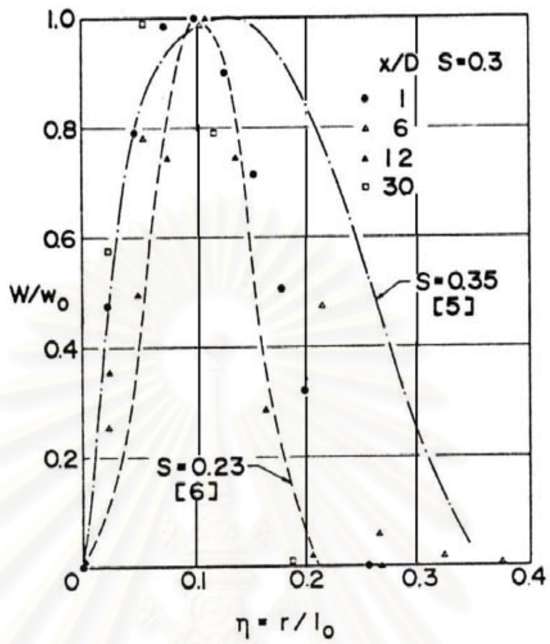
รูปที่ 2.12 ลักษณะมุมและรูปร่างของ Swirling jet (Wygnanski, 1970)



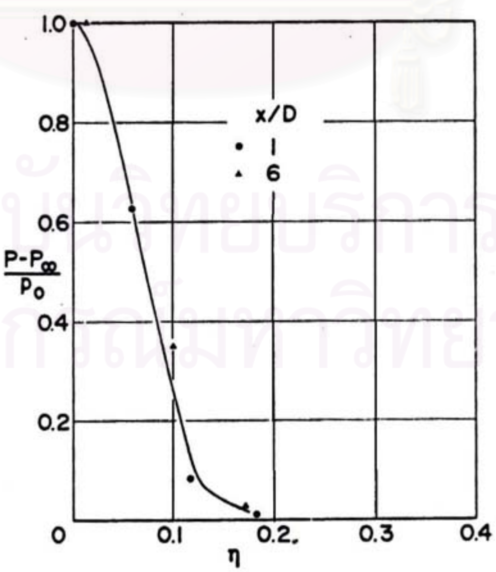
รูปที่ 2.13 ลักษณะการแพร่กระจายของ Swirling turbulent jet (Pratte and Keffer, 1972)



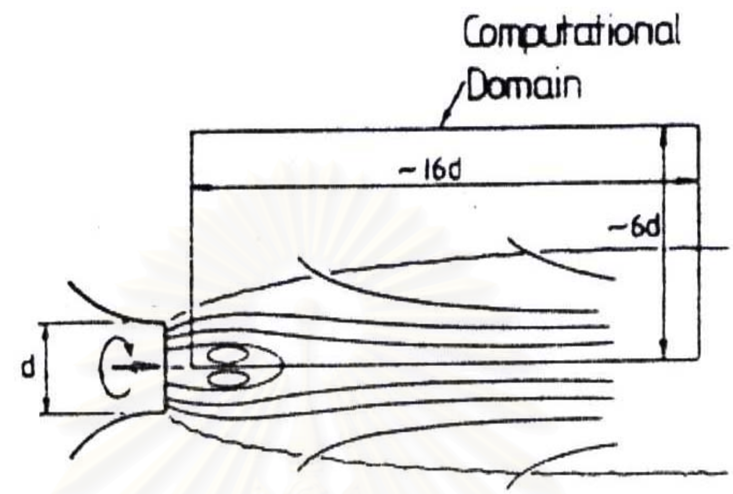
รูปที่ 2.14 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนเฉลี่ยของ Swirling turbulent jet (Pratte and Keffer, 1972)



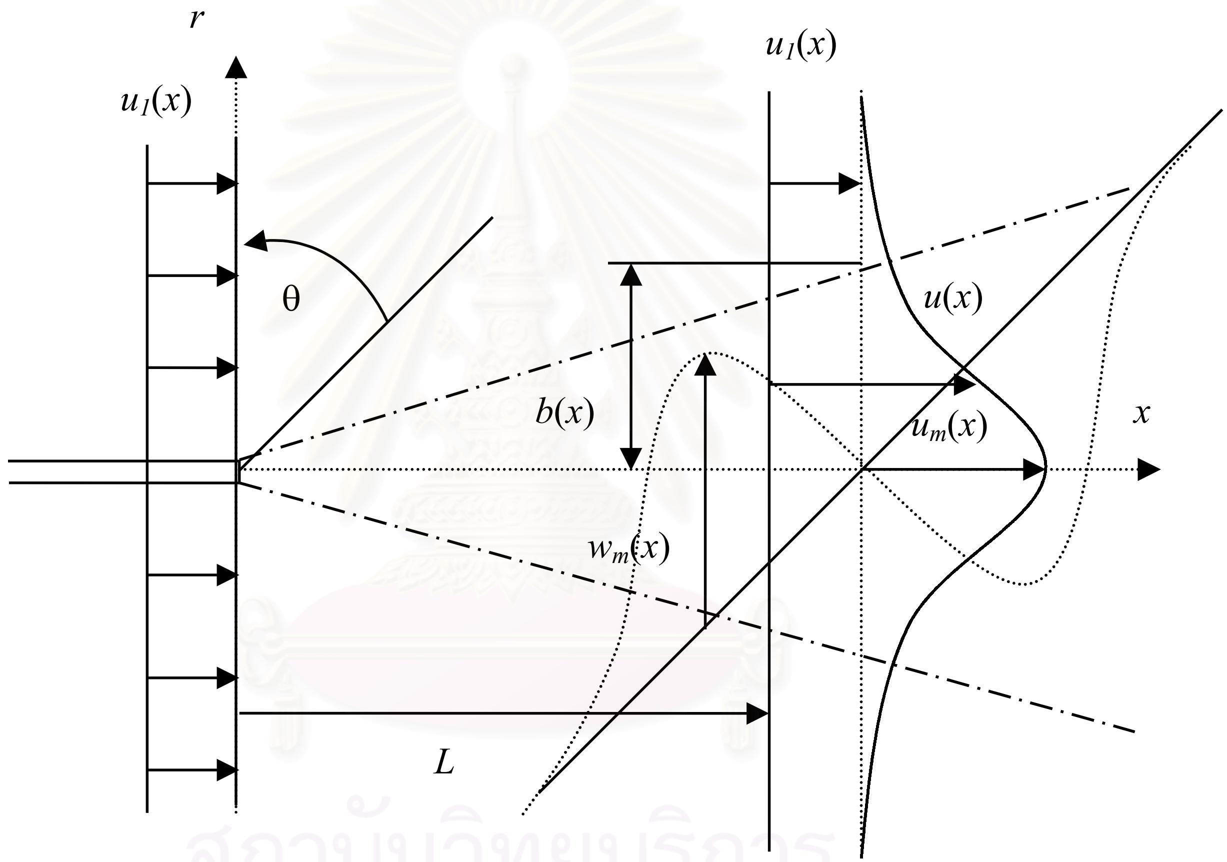
รูปที่ 2.15 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสเฉลี่ยของ Swirling turbulent jet (Pratte and Keffer, 1972)



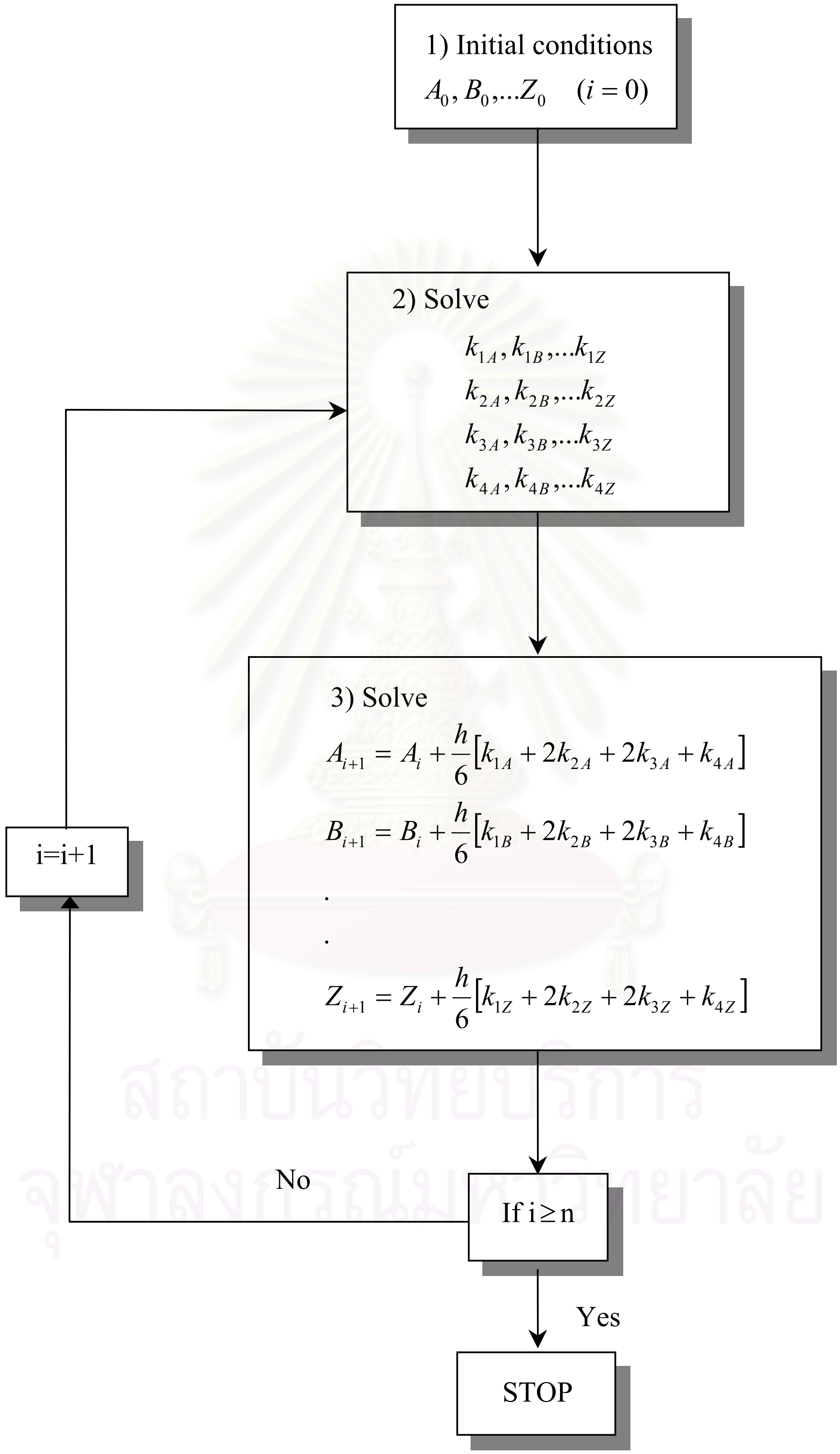
รูปที่ 2.16 รูปร่างการกระจายตัวของความดันสถิตเฉลี่ยของ Swirling turbulent jet (Pratte and Keffer, 1972)



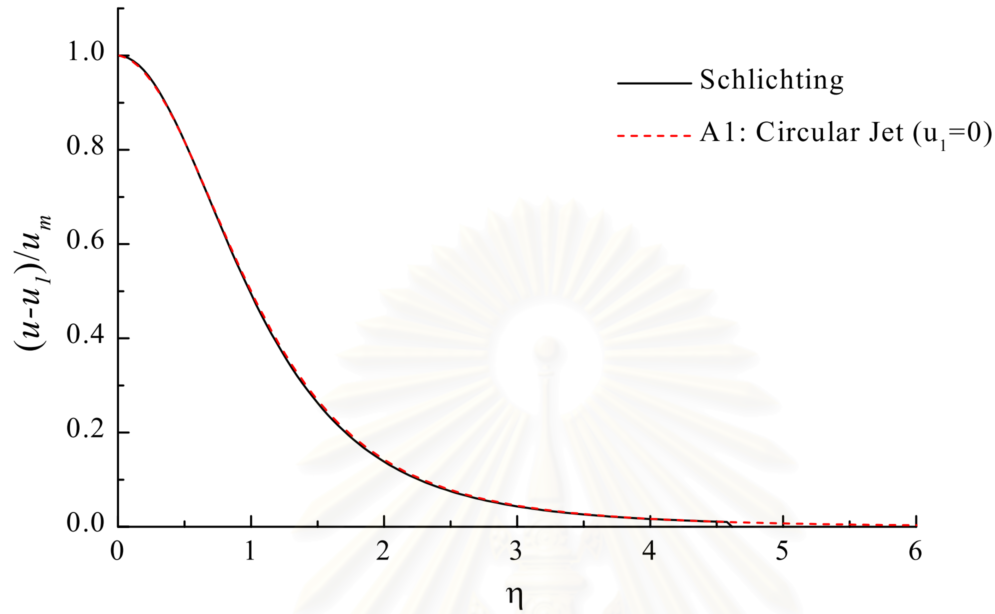
รูปที่ 2.17 ลักษณะรูปร่างและ Computational domain ของ Swirling jet (Leschziner and Rodi, 1984)



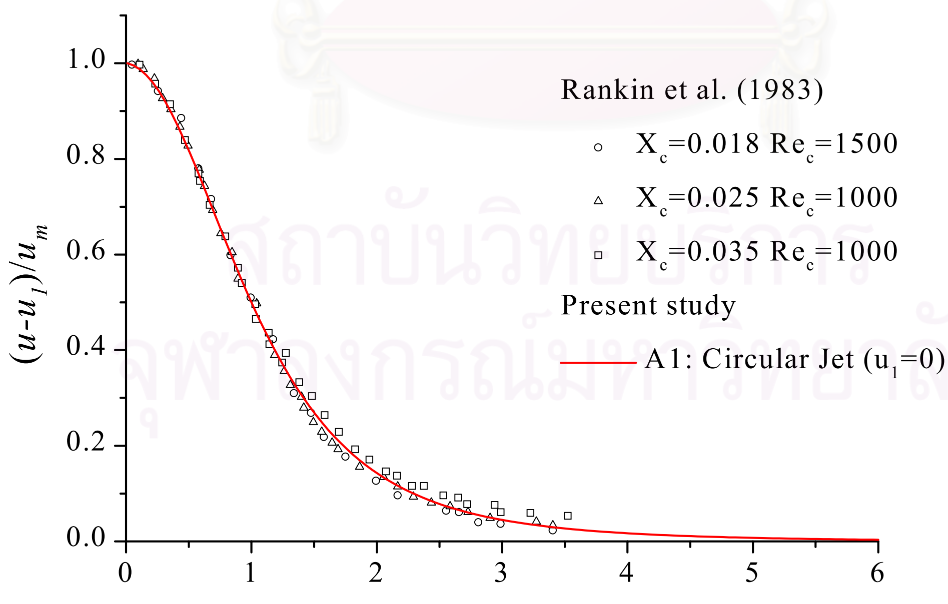
รูปที่ 3.1 การกำหนดตัวแปรต่างๆที่ทำการศึกษา



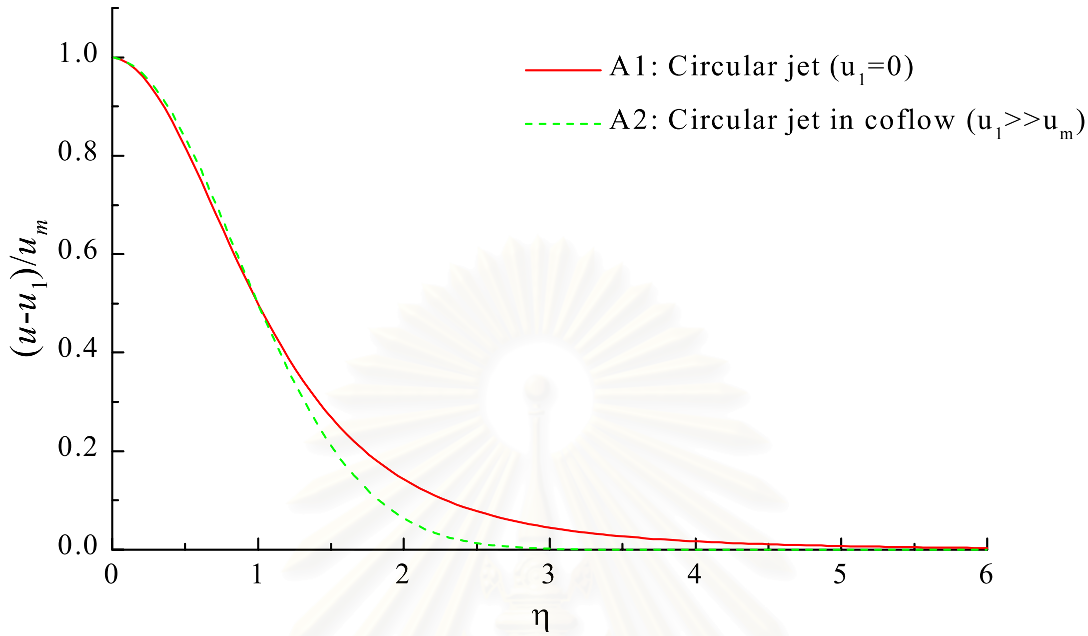
รูปที่ 3.2 ขั้นตอนการคำนวณการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี Rung Kutta อันดับสี่สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อันดับสูงกว่าหนึ่ง



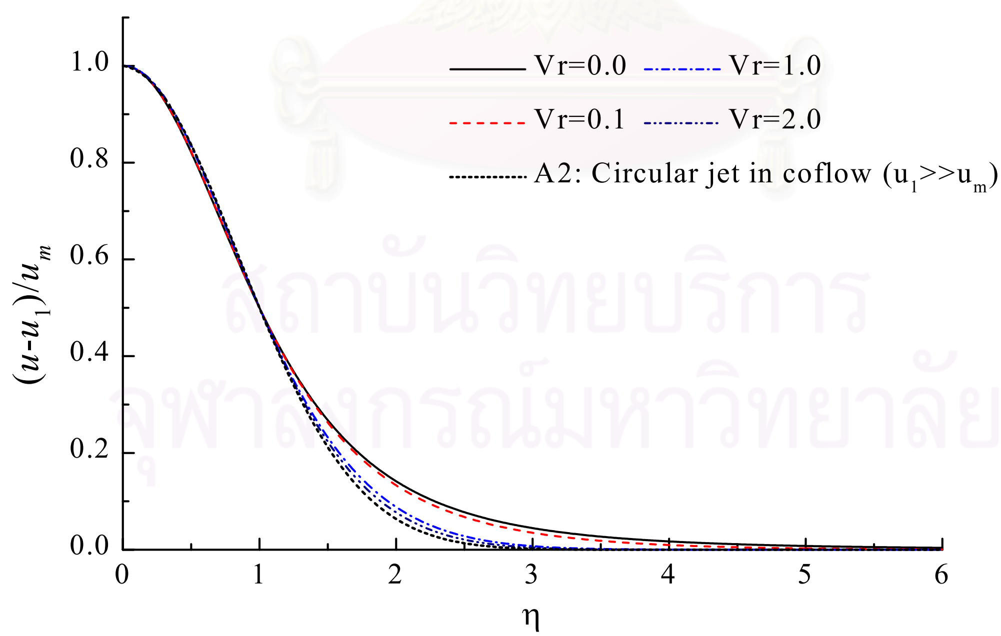
รูปที่ 7.1 Case A1: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่ไม่หมุนควง ($u_1 = 0$) เปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Schlichting (1968)



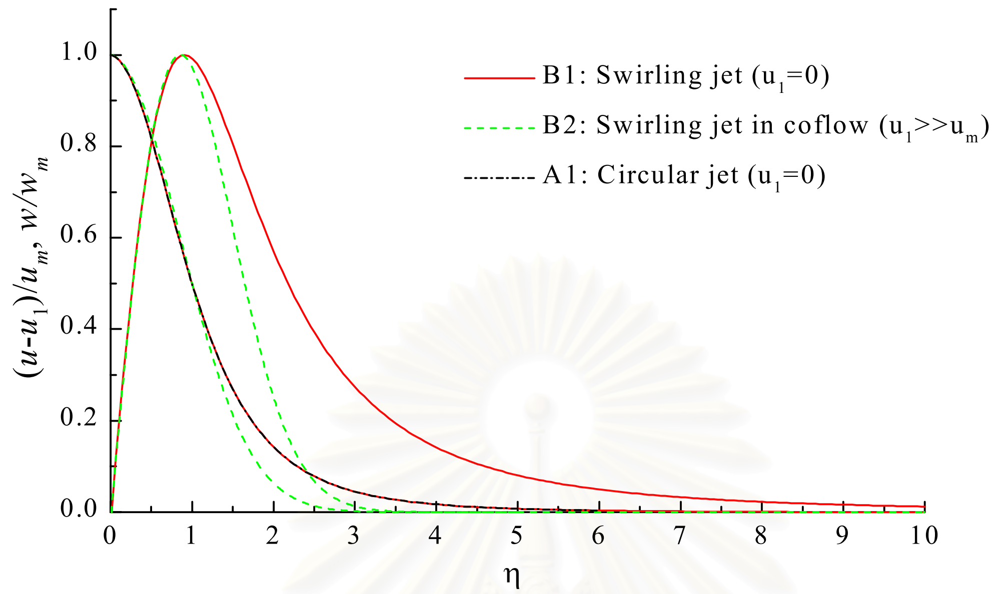
รูปที่ 7.2 Case A1: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่ไม่หมุนควง ($u_1 = 0$) เปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Laminar jet ของ Rankin et al. (1983)



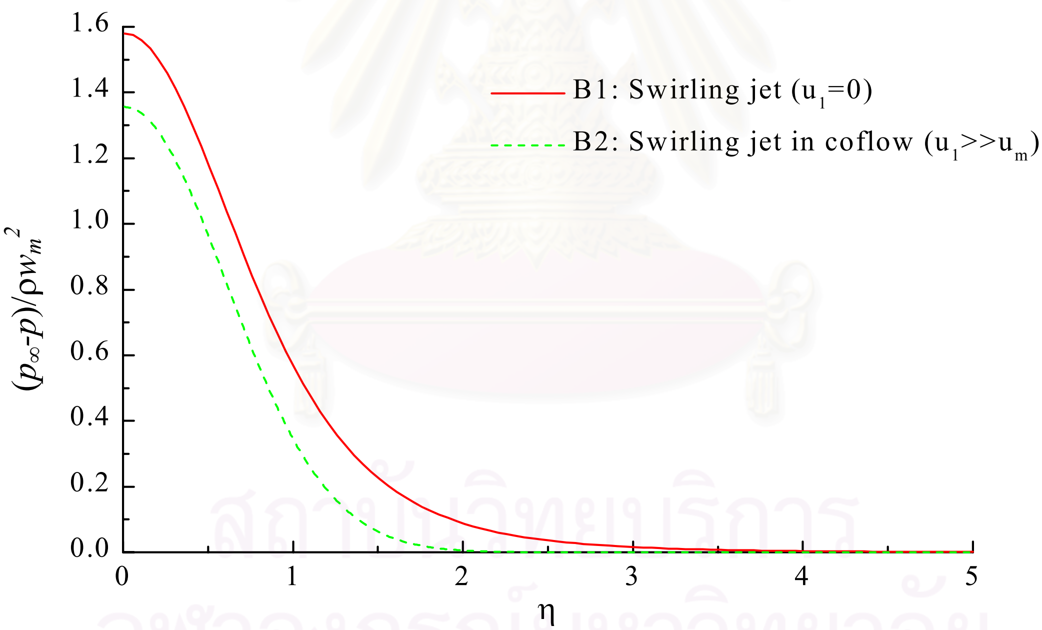
รูปที่ 7.3 รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของ Case A1: เจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$) และ Case A2: เจ็ตในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ตมาก ($u_1 >> u_m$)



รูปที่ 7.4 Case A3: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0

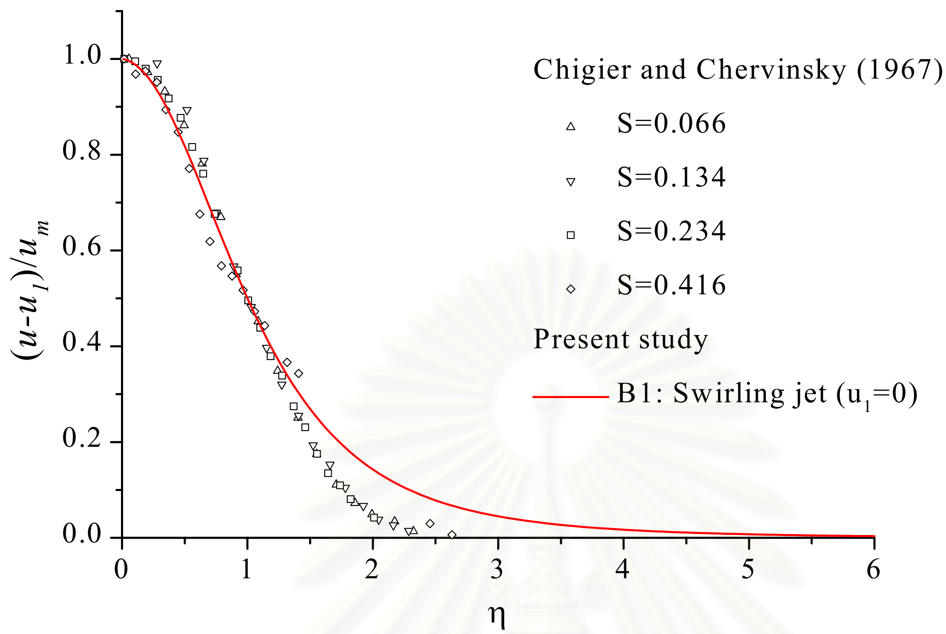


(a)

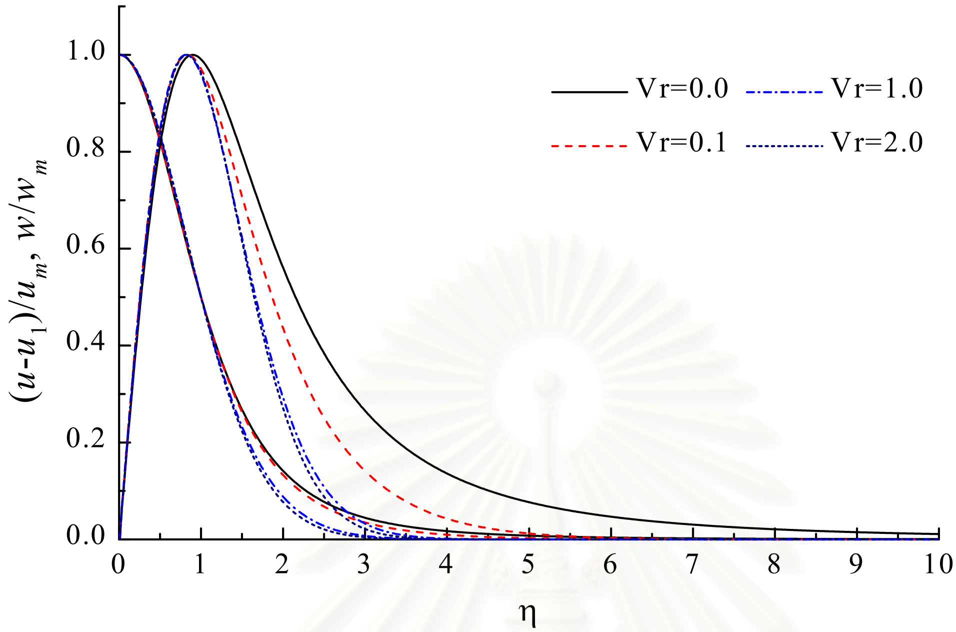


(b)

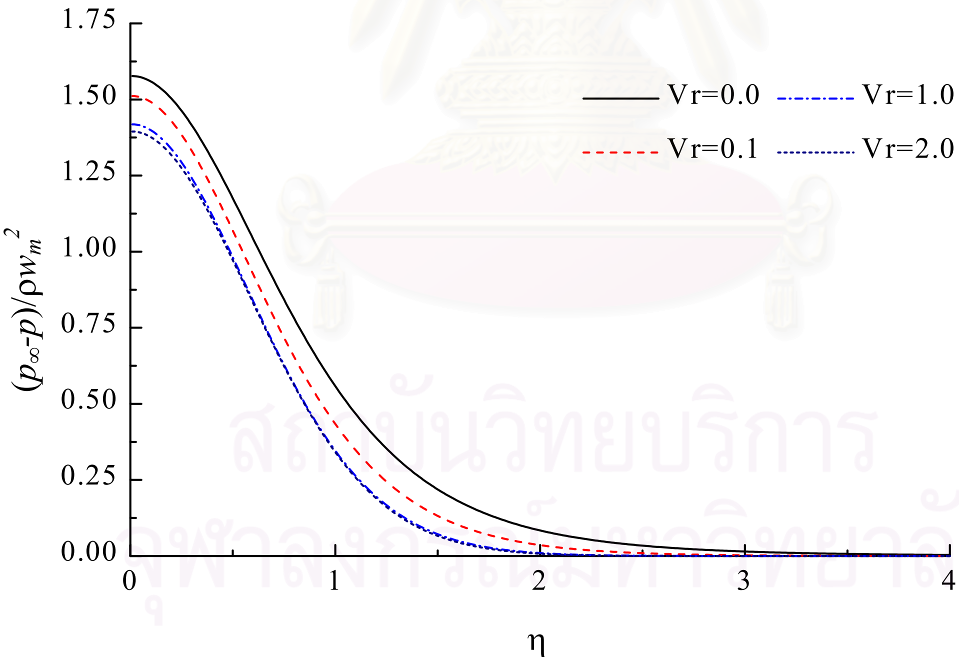
รูปที่ 7.5 Case B1: เจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำระดับการหมุนควงต่ำในอากาศที่หยุดนิ่ง ($u_1 = 0$)
และ Case B2: เจ็ตในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต ($u_1 >> u_m$)
(a) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัสของเจ็ต
(b) รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันของเจ็ต



รูปที่ 7.6 Case B1: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง ($u_1 = 0$) เปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Chigier and Chervinsky (1967)



(a)

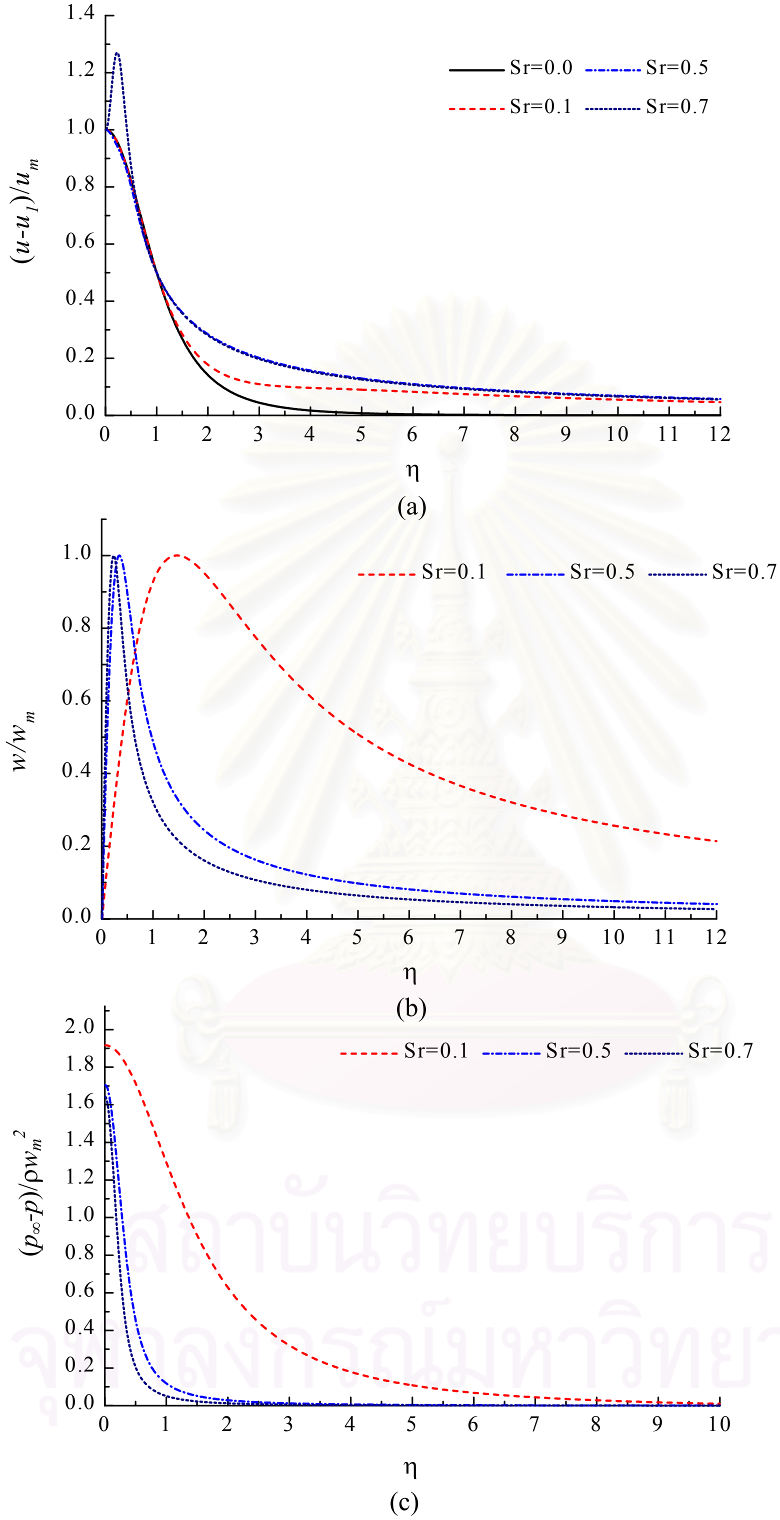


(b)

รูปที่ 7.7 Case B3: กรณีเจ็ตที่ระดับหมุนควงต่ำในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 2.0

(a) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนและแนวสัมผัส

(b) รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดัน

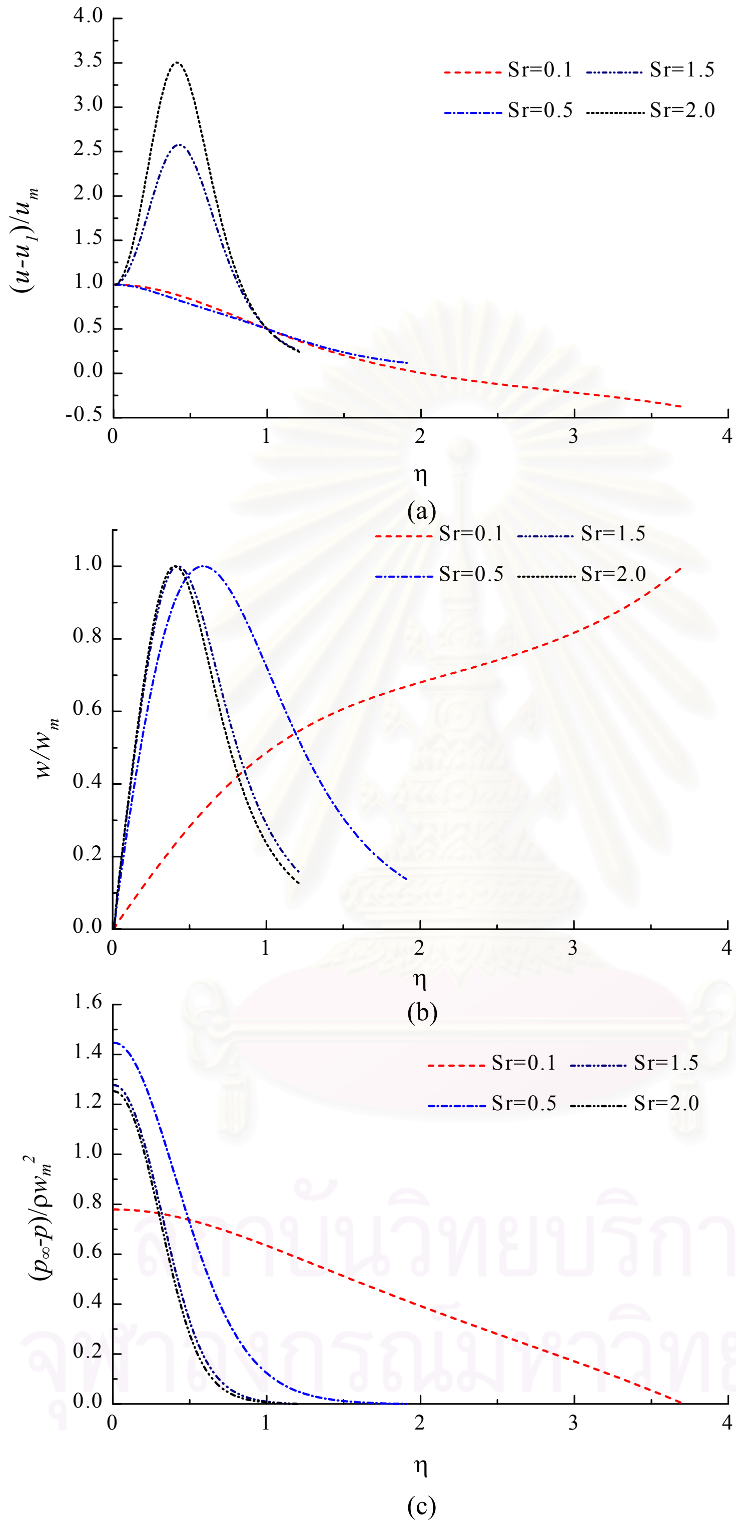


รูปที่ 7.8 Case C11: กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง ($u_1 = 0$) โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 0.7

(a) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน

(b) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส

(c) รูปร่างการกระจายตัวของความดัน

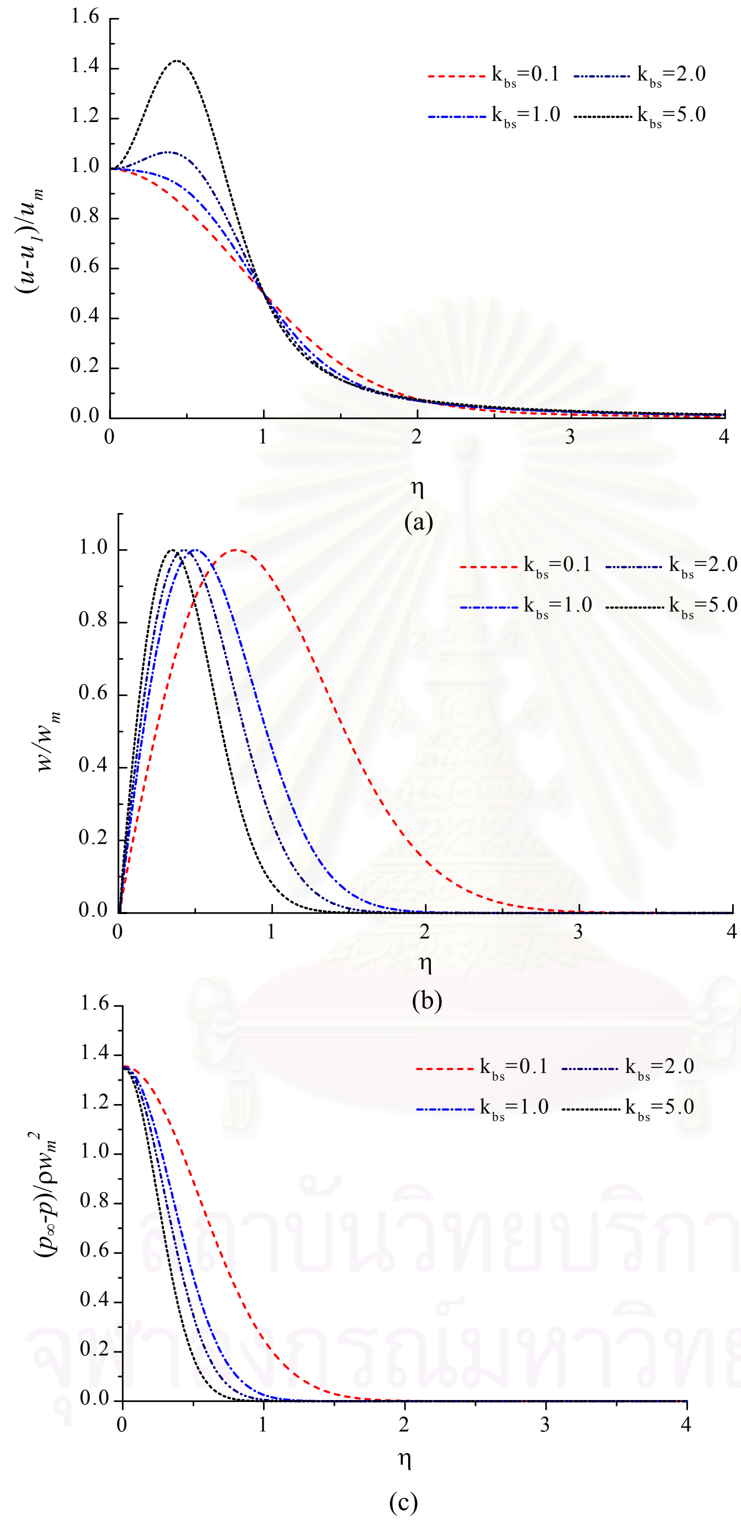


รูปที่ 7.9 Case C12 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่ง ($u_1 = 0$) โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1 ถึง 2.0

(a) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน

(b) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส

(c) รูปร่างการกระจายตัวของความดัน

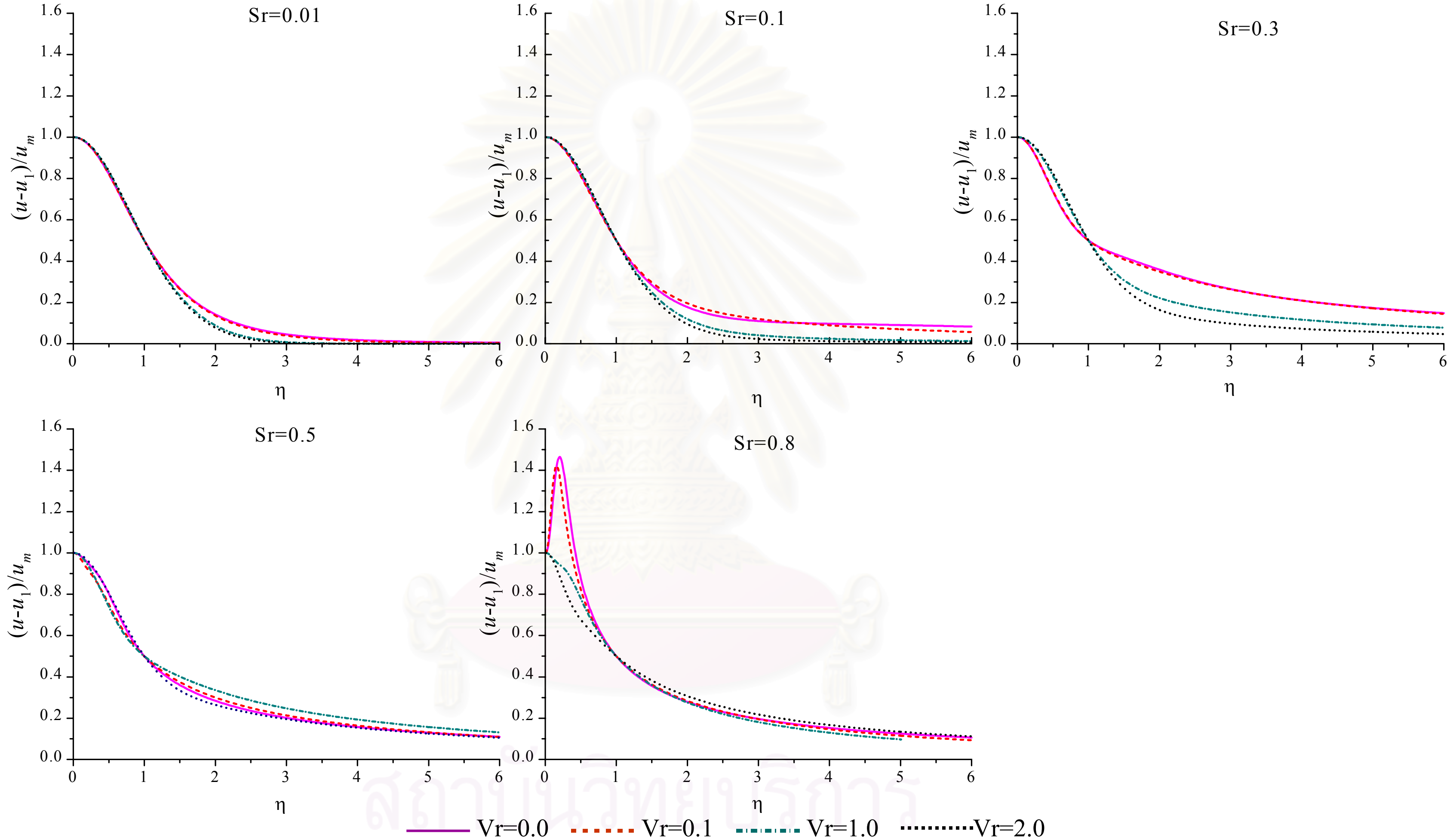


รูปที่ 7.10 Case C2: กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต ($u_1 >> u_m$) โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} เท่ากับ 0.1 ถึง 5.0

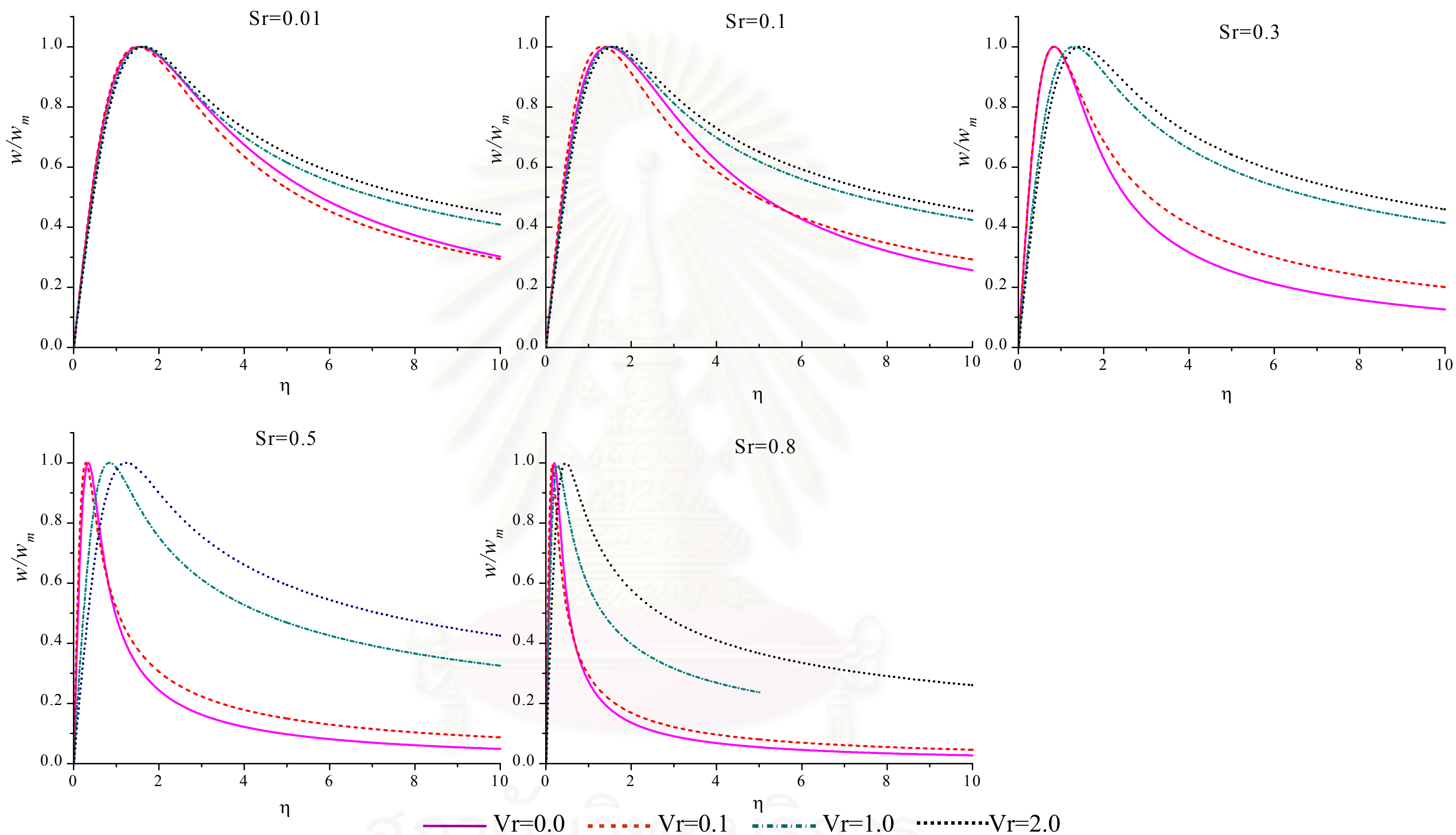
(a) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน

(b) รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัส

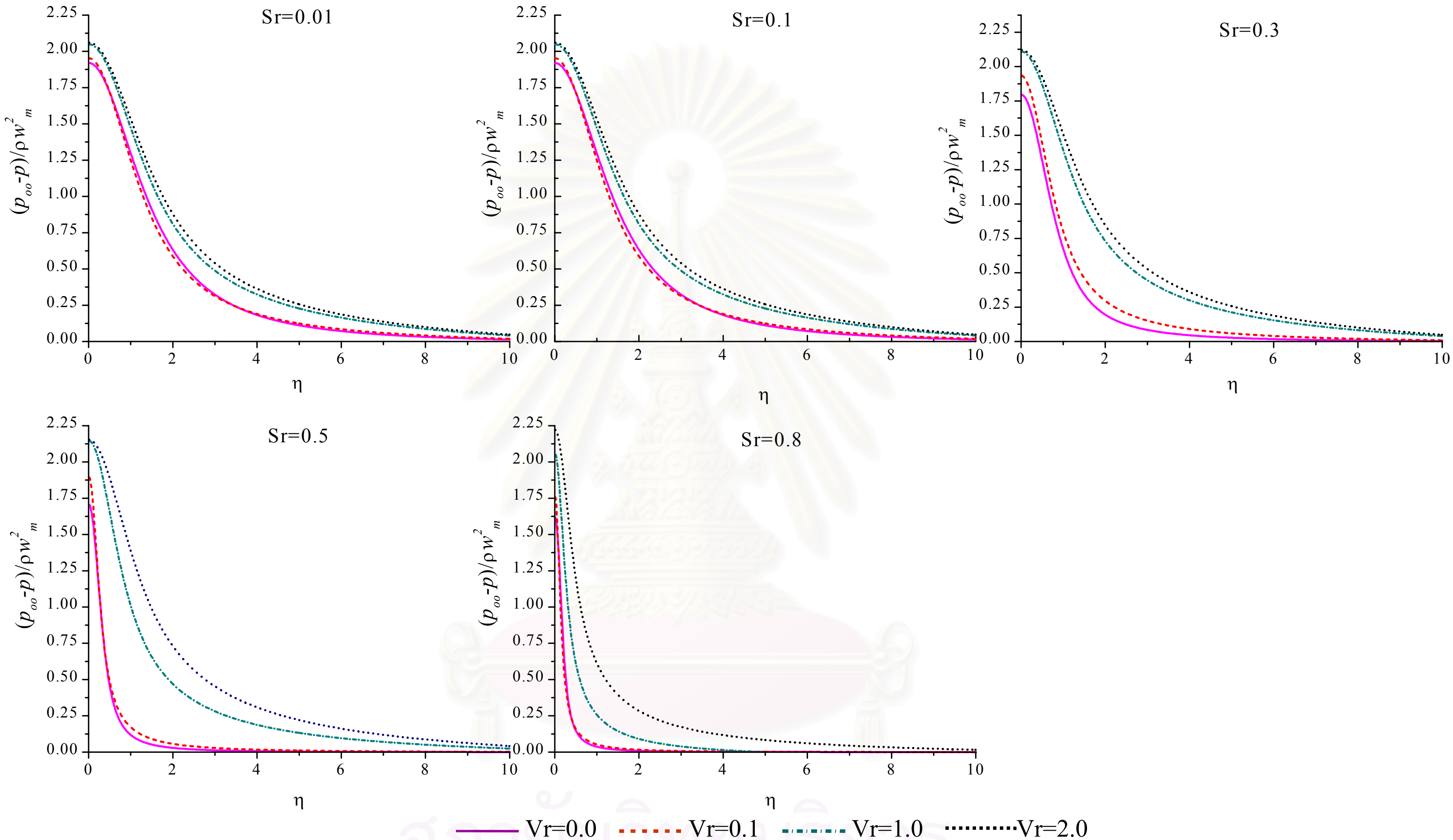
(c) รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดัน



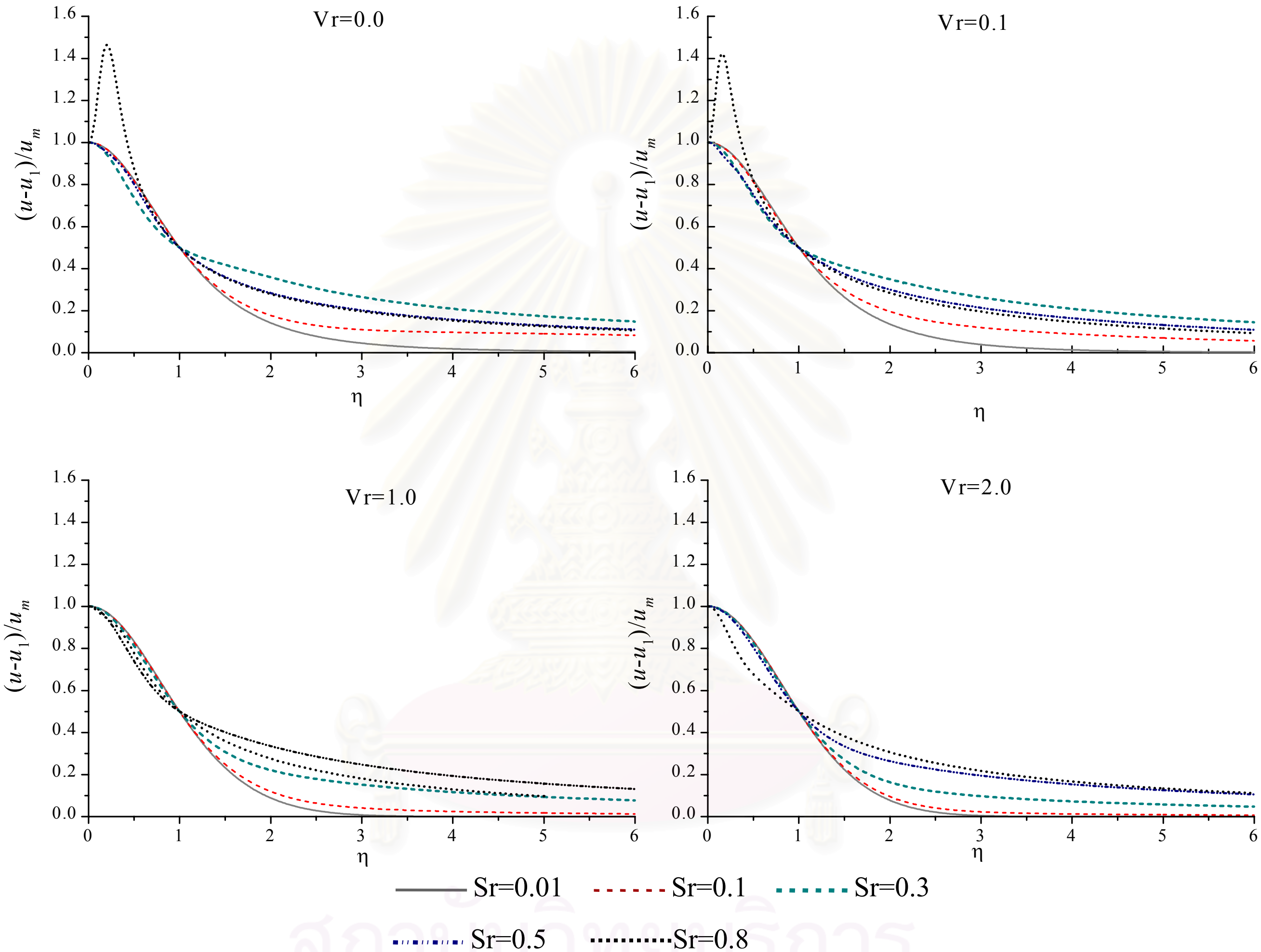
รูปที่ 7.11a Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



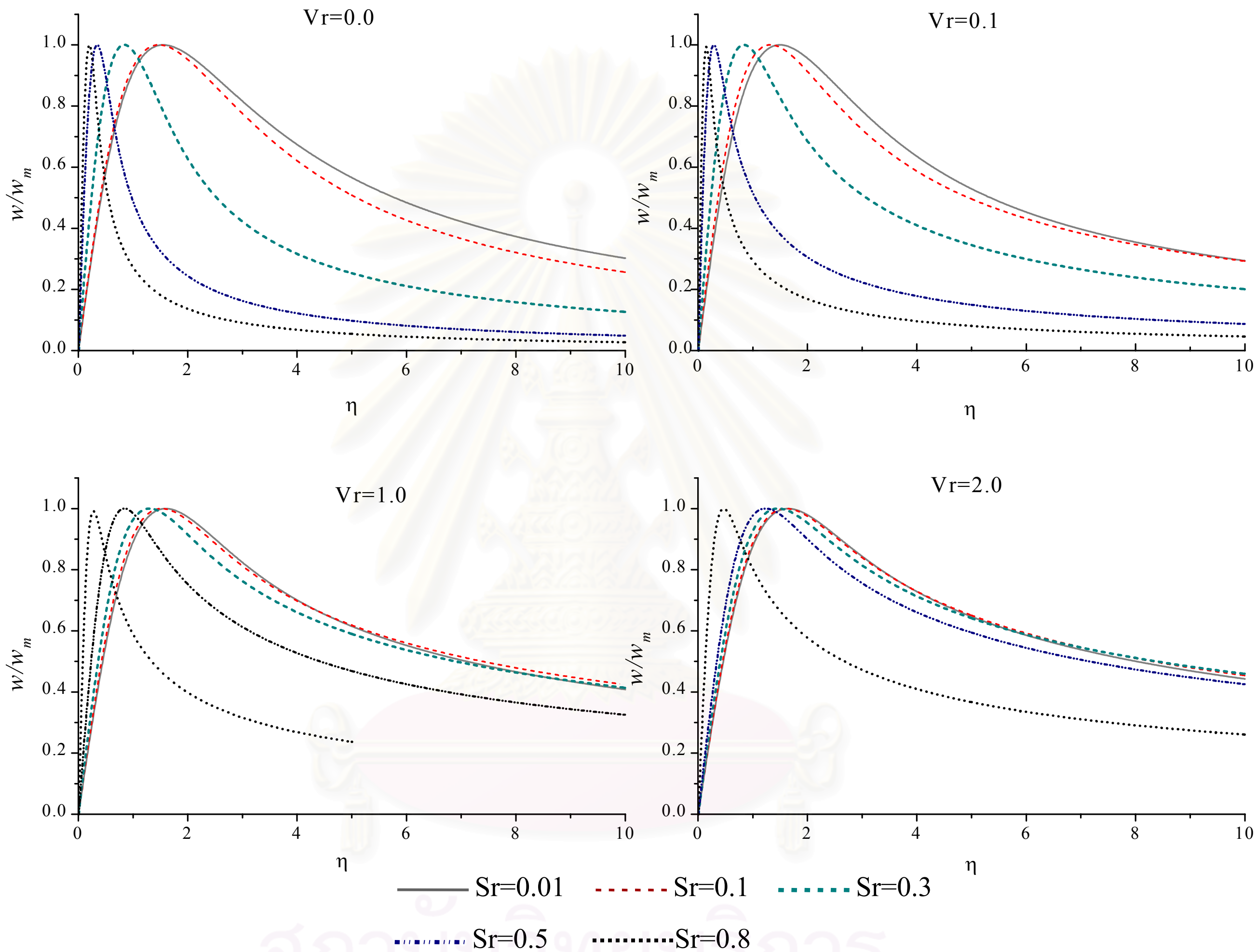
รูปที่ 7.11b Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



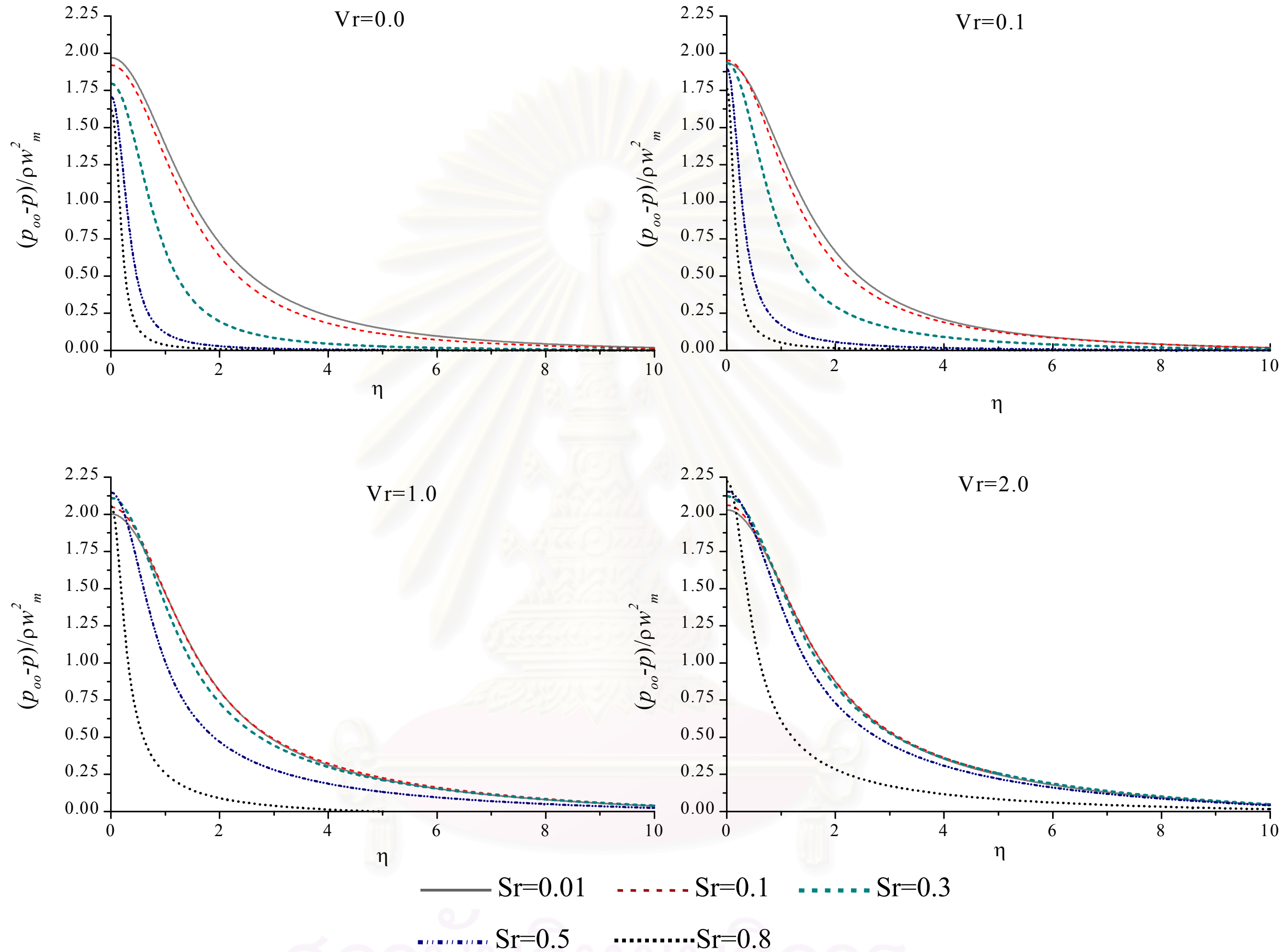
รูปที่ 7.11c Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



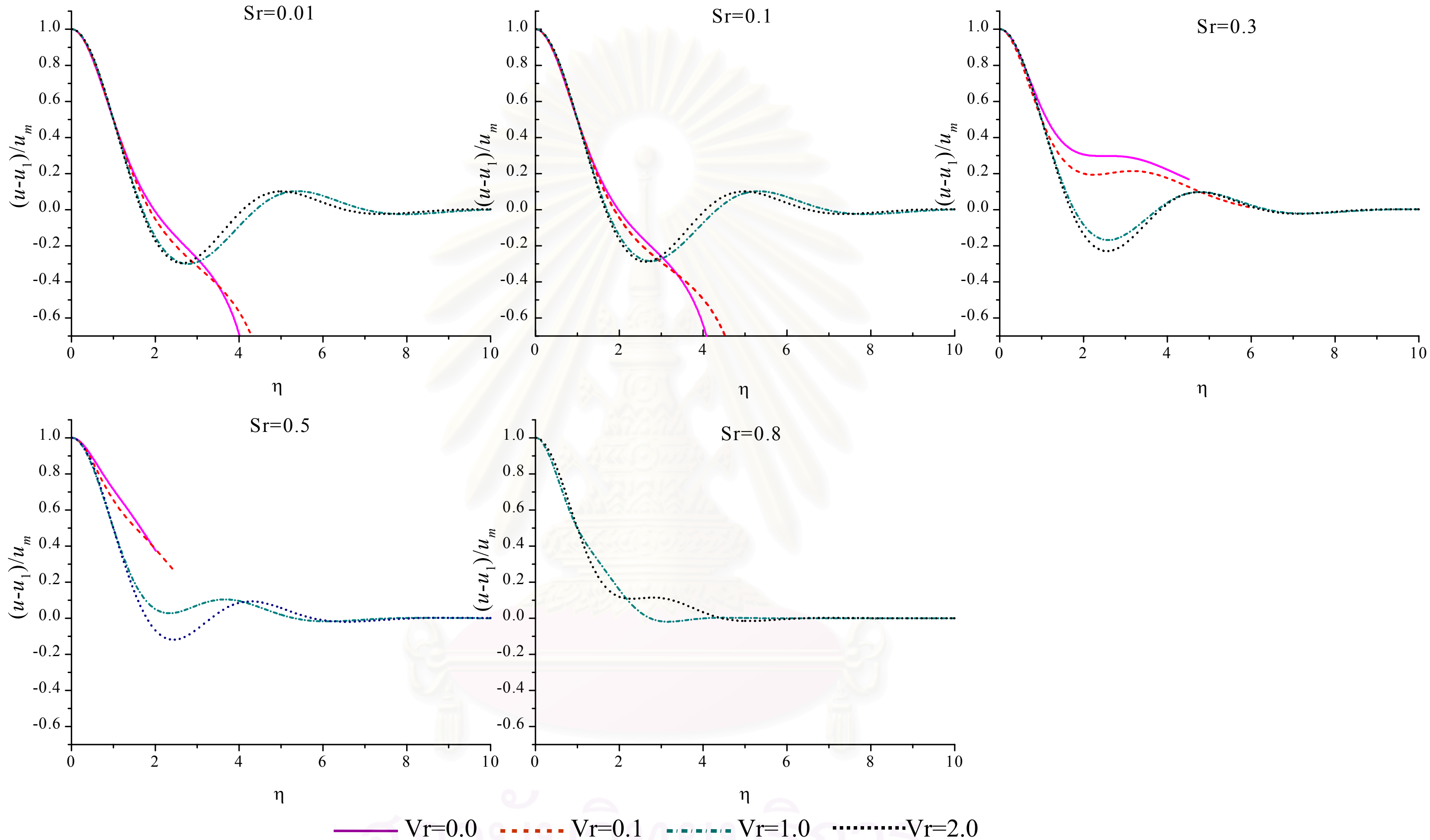
รูปที่ 7.12a Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



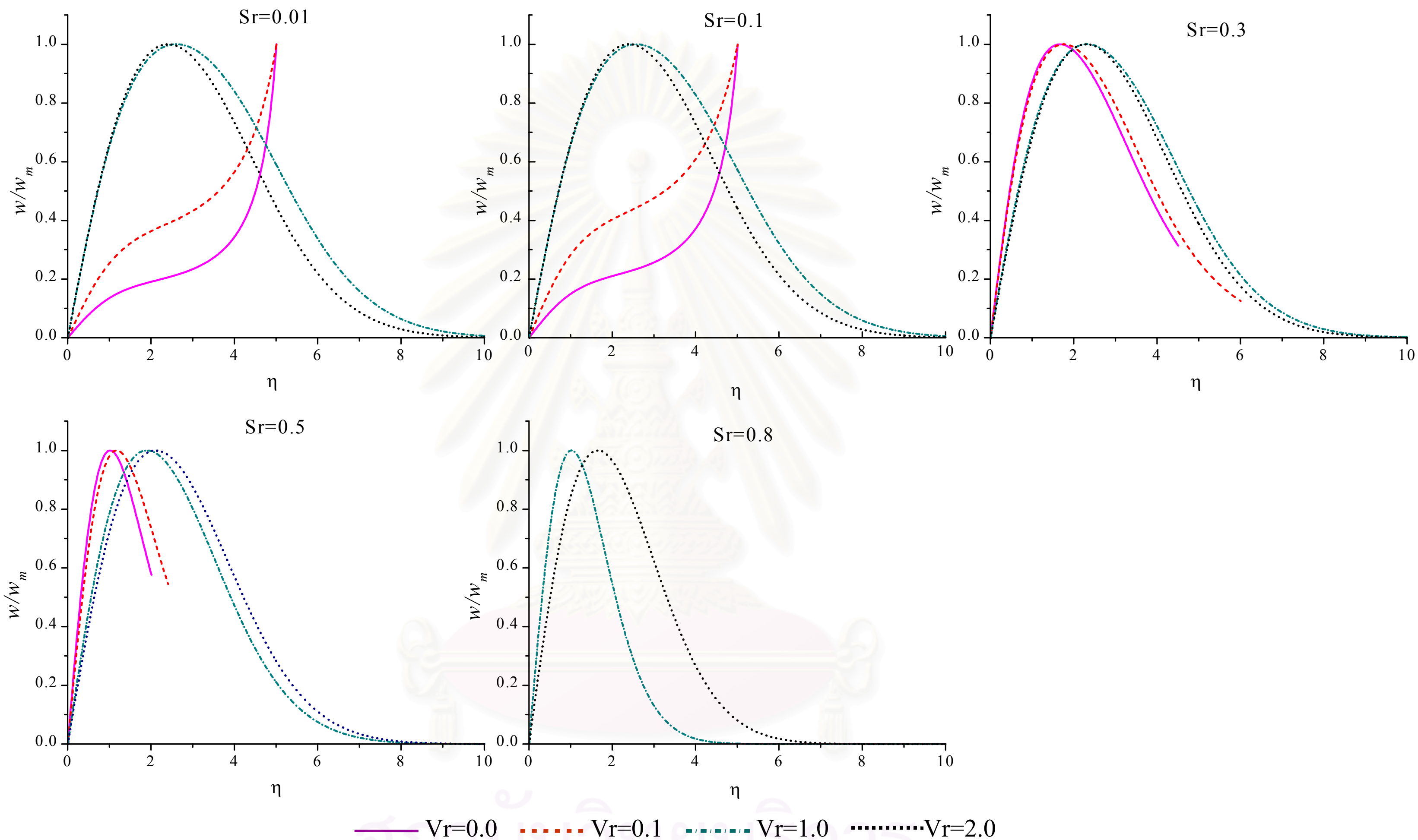
รูปที่ 7.12b Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



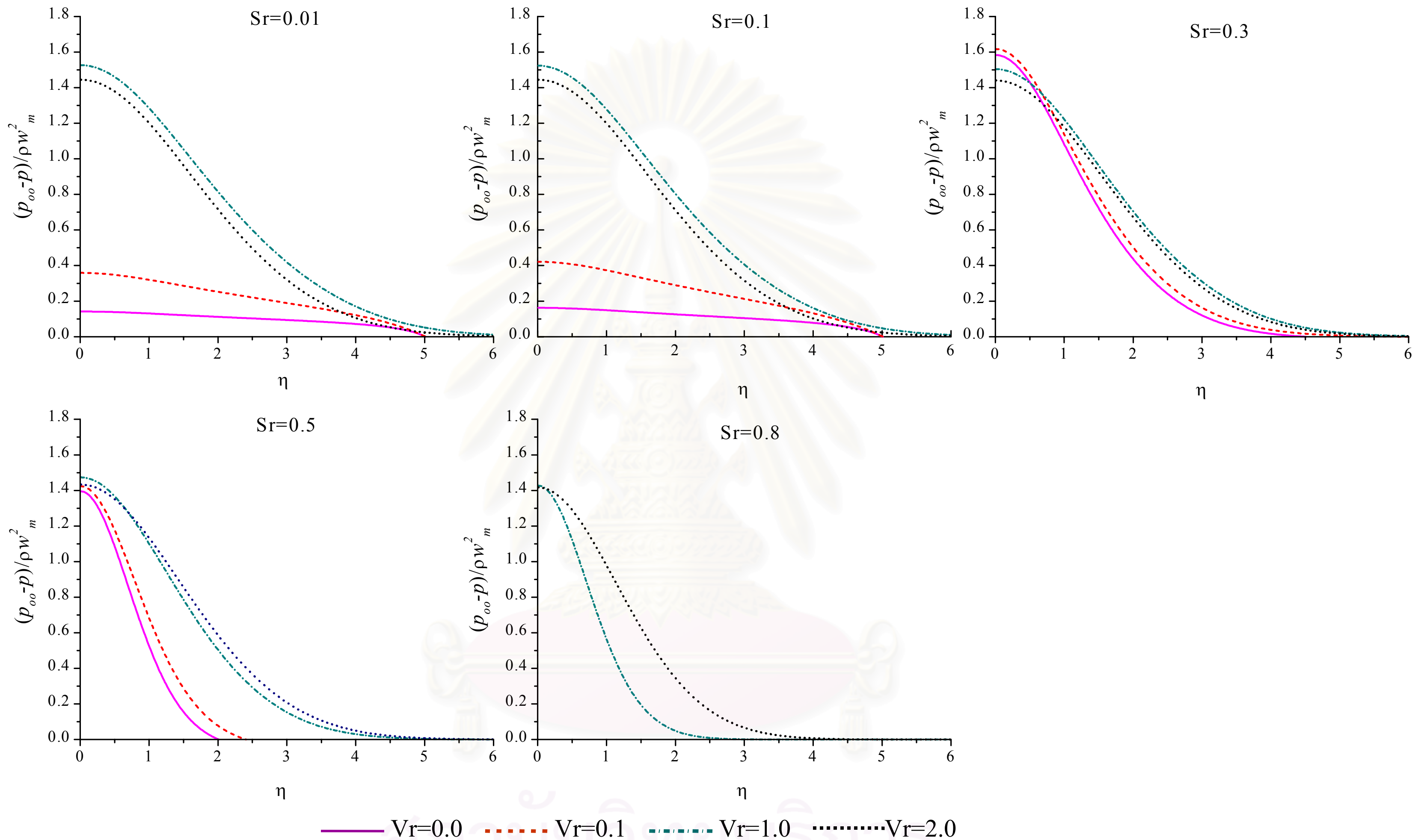
รูปที่ 7.12c Case C31: รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



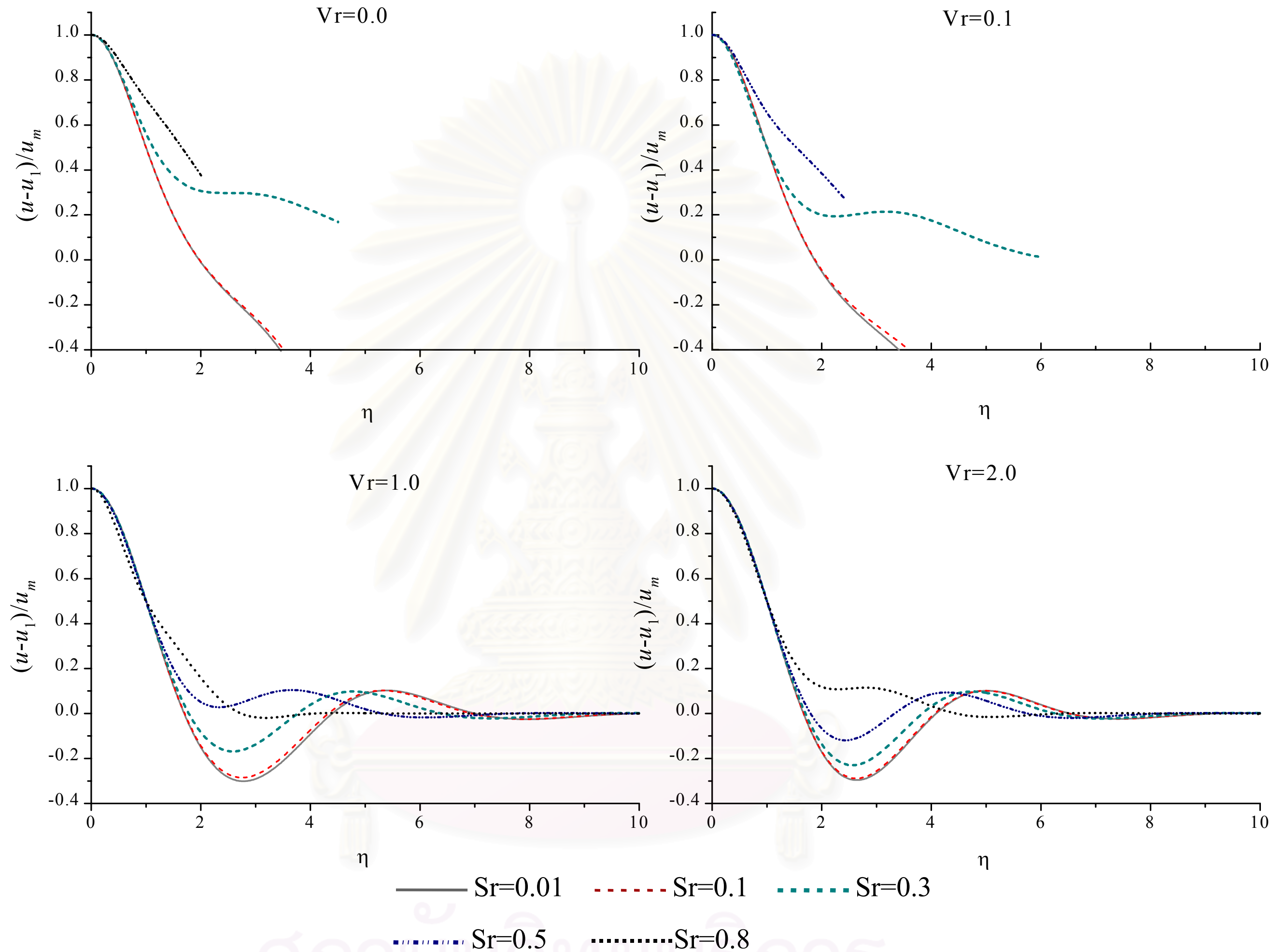
รูปที่ 7.13a Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมใน กรณีที่ Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



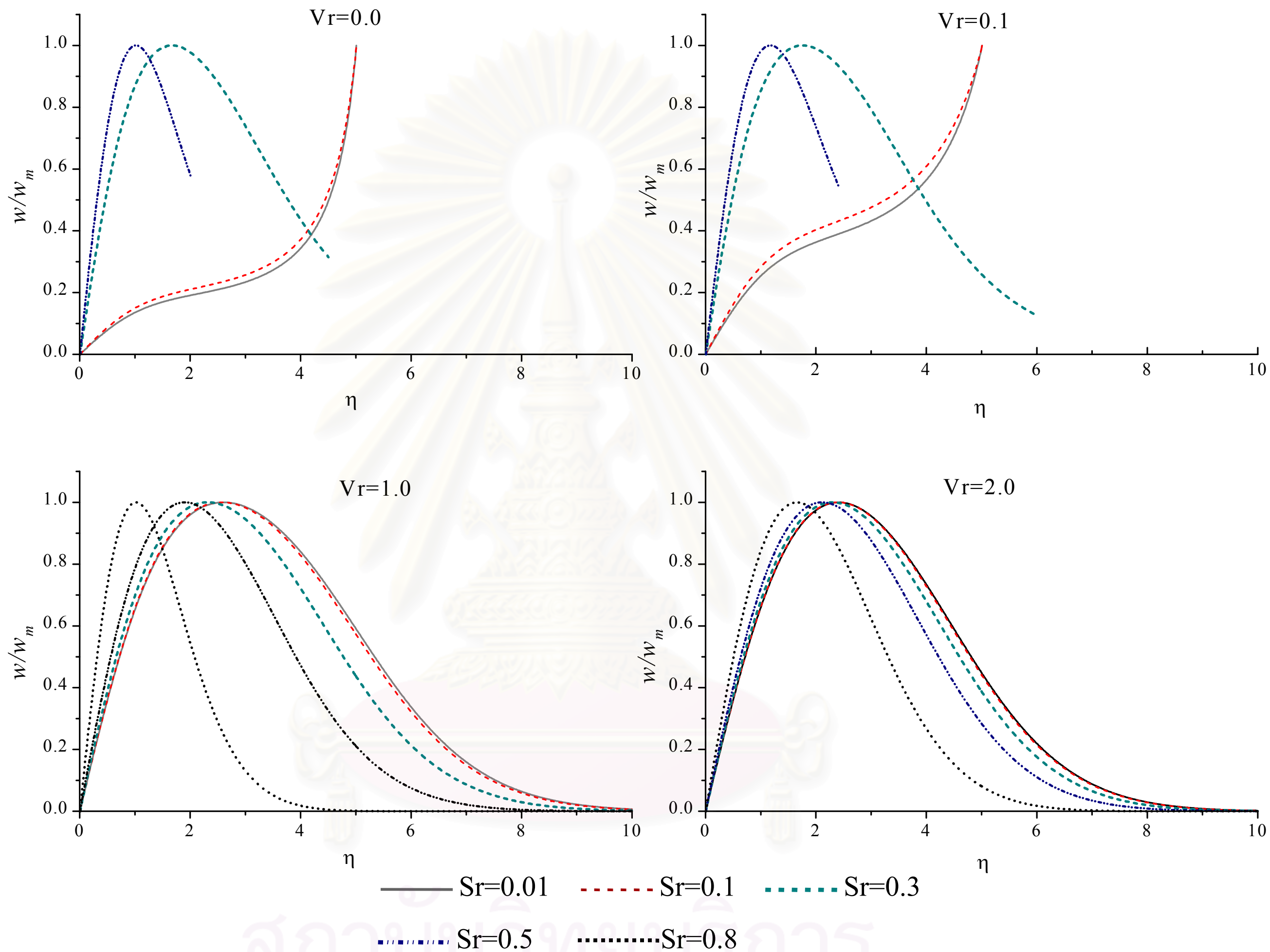
รูปที่ 7.13b Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr เท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



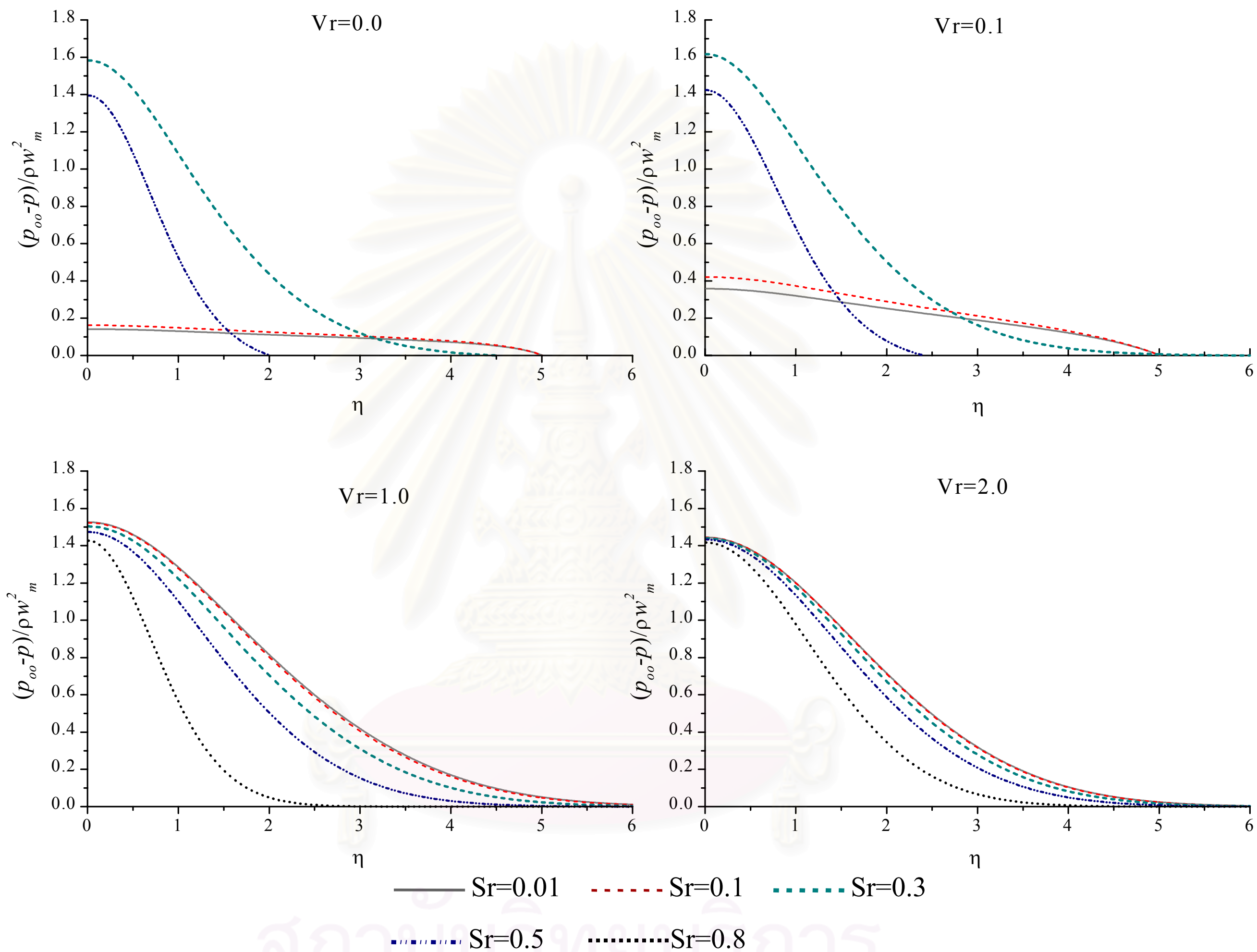
รูปที่ 7.13c Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ S*r* เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* เท่ากับ 0.0 ถึง 2.0



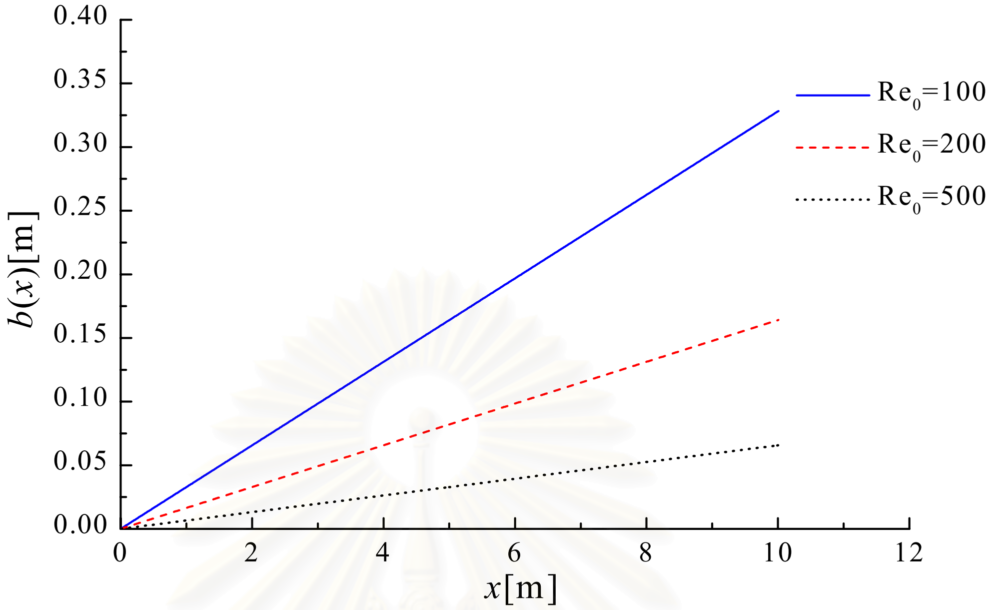
รูปที่ 7.14a Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



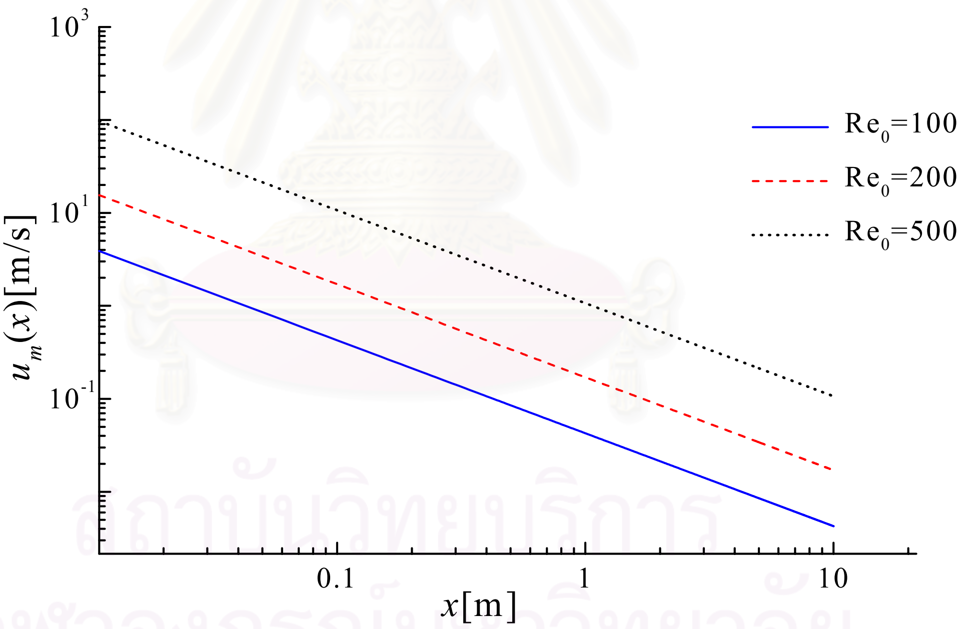
รูปที่ 7.14b Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของความเร็วตามแนวสัมผัสของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามโดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



รูปที่ 7.14c Case C32: รูปร่างการกระจายตัวของผลต่างความดันของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Vr มีค่าเท่ากับ 0.0 ถึง 2.0 โดยเปลี่ยน แปลงค่า Sr เท่ากับ 0.01 ถึง 0.8



(a)

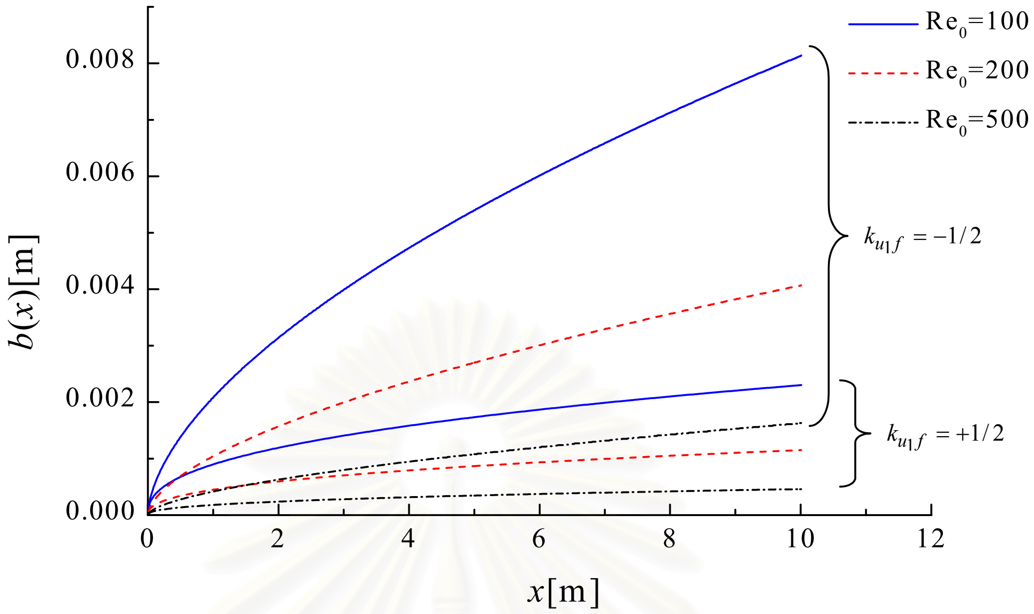


(b)

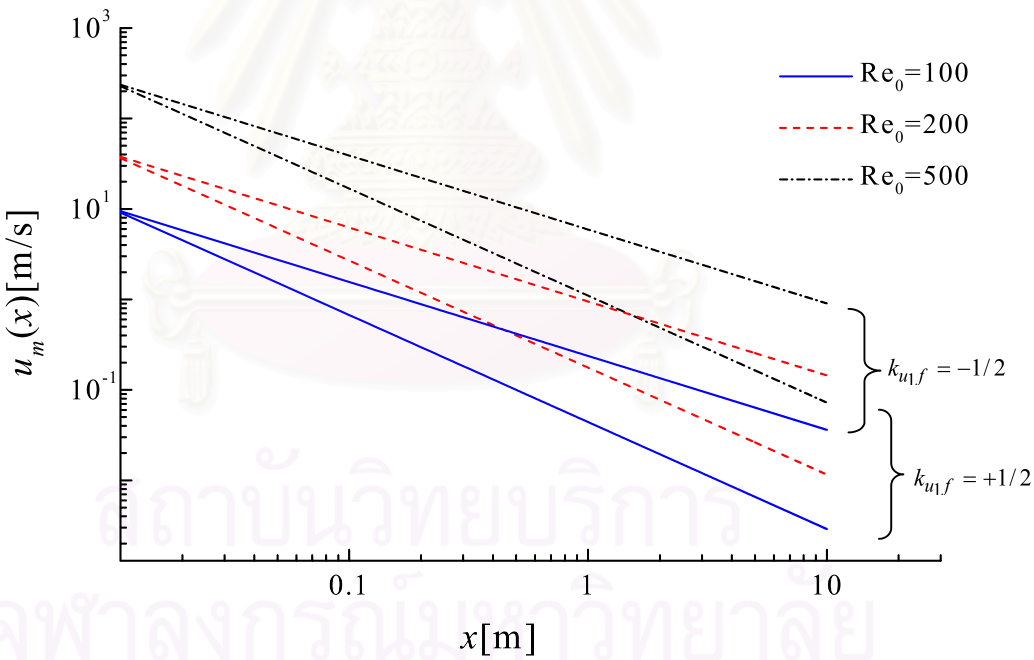
รูปที่ 7.15 Case A1: กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500

(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด



(a)

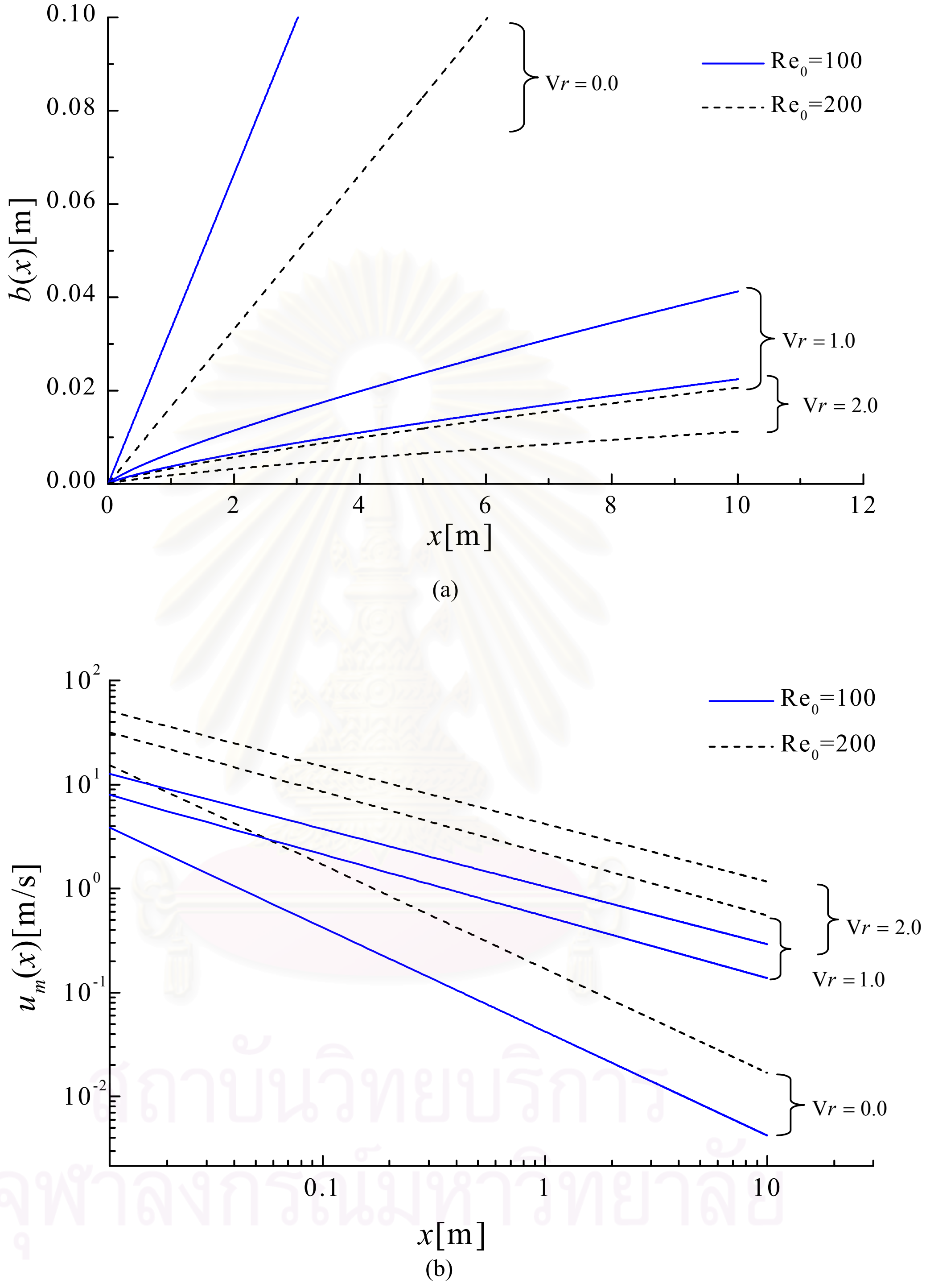


(b)

รูปที่ 7.16 Case A2: กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 ในกรณี $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $+1/2$ และกรณี $k_{u_1 f}$ มีค่าเท่ากับ $-1/2$

(a) ความหนาของเจ็ต

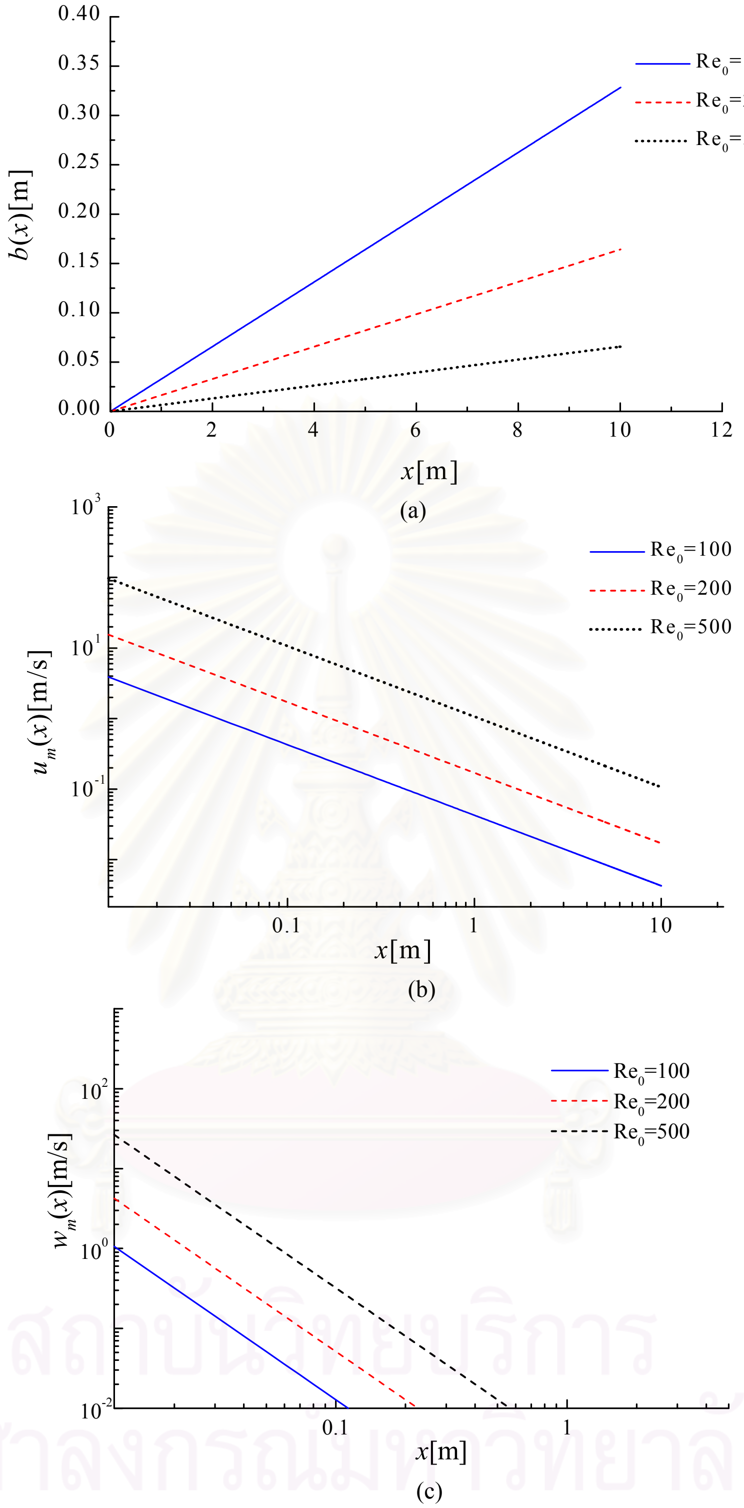
(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด



รูปที่ 7.17 Case A3: กรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr เท่ากับ 0.0, 1.0 และ 2.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200

(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

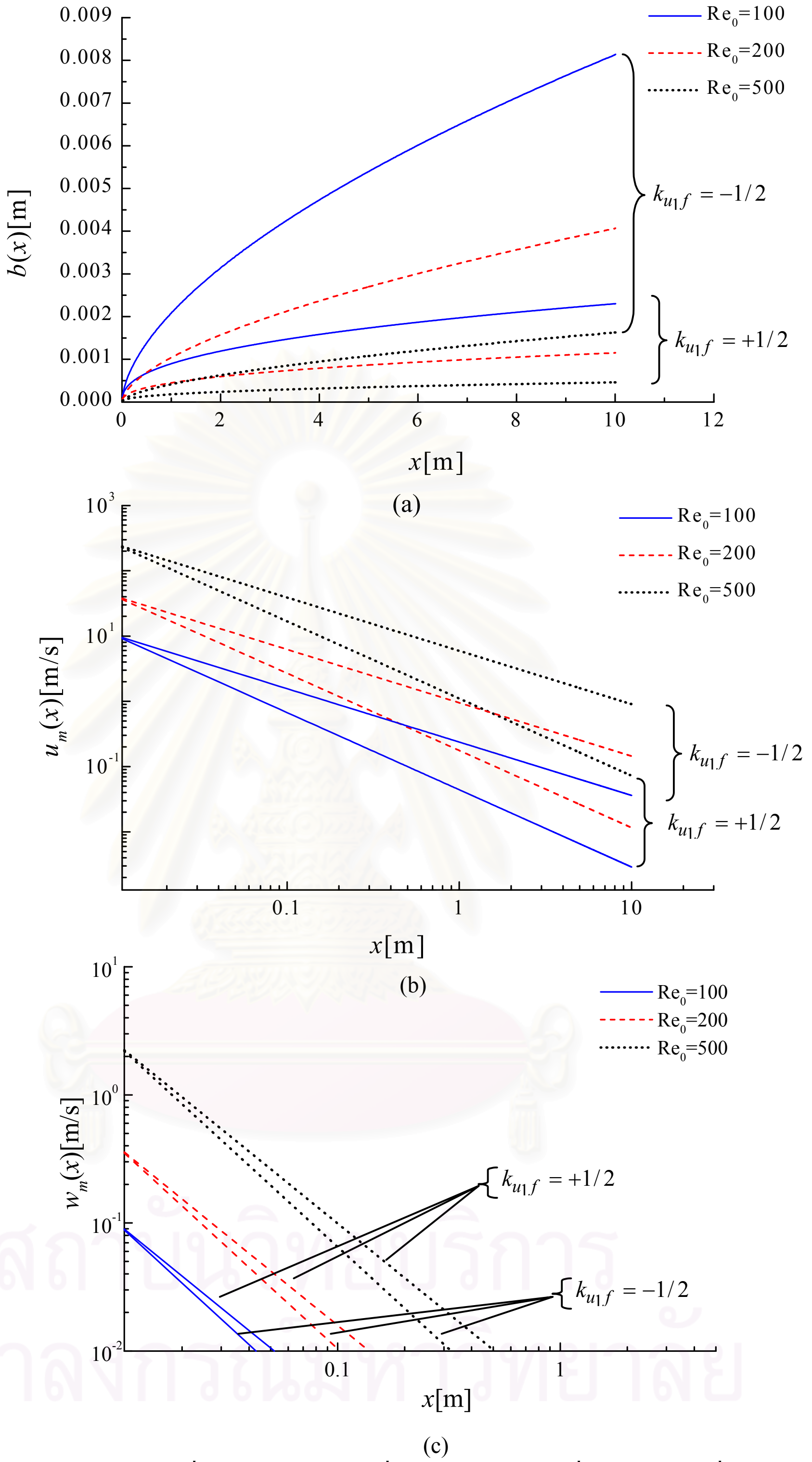


รูปที่ 7.18 Case B1: กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่งที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500

(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

(c) การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด

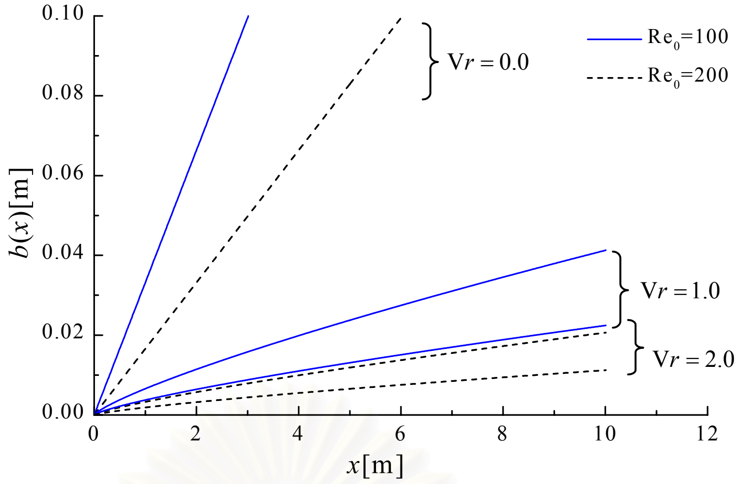


รูปที่ 7.19 Case B2: กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100, 200 และ 500 ในกรณี $k_{u_1 f} = 1/2$ และกรณี $k_{u_1 f} = -1/2$

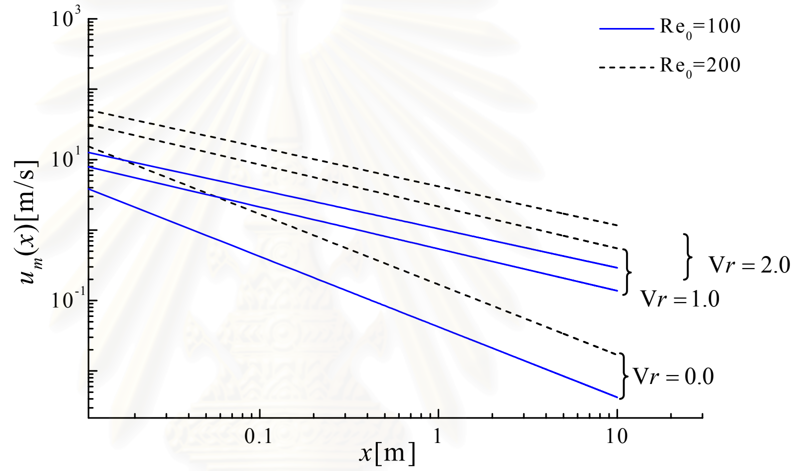
(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

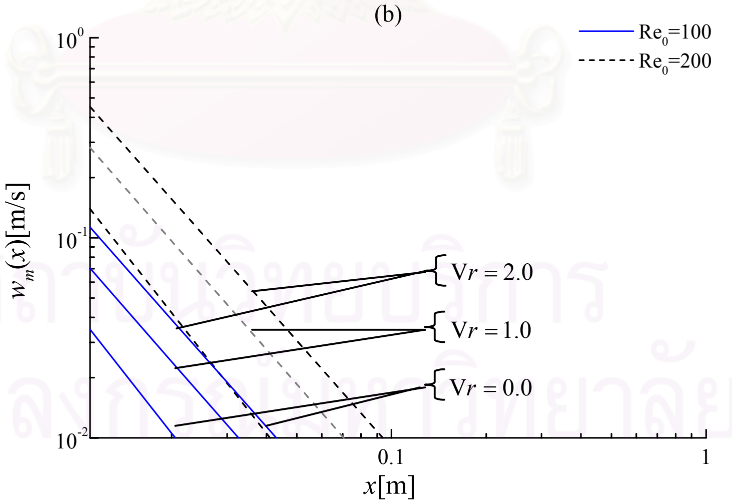
(c) การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสของที่สุด



(a)



(b)

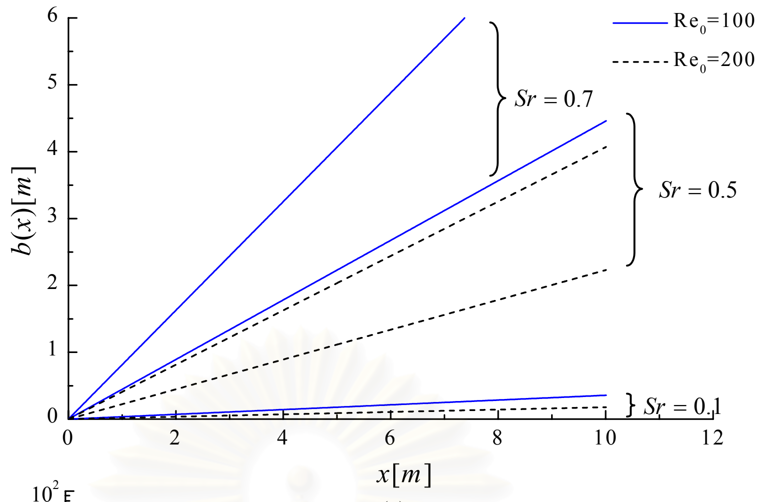


(c)

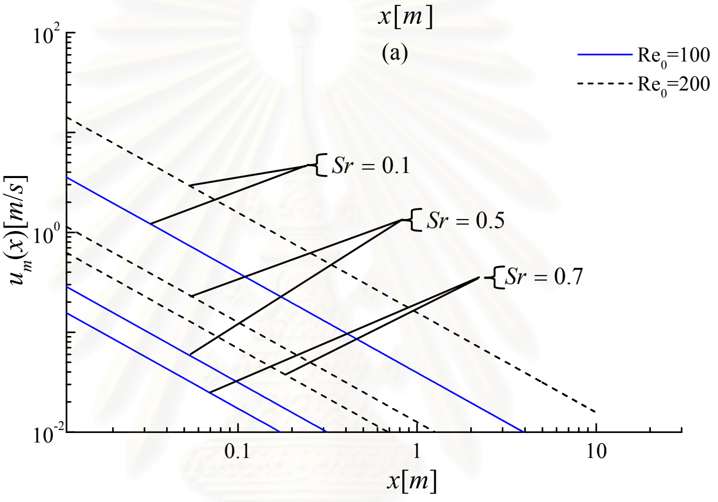
รูปที่ 7.20 CaseB3: กรณีเจ็ตที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามที่ $u_1 \sim u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr เท่ากับ 0.0, 1.0 และ 2.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200

(a) ความหนาของเจ็ต

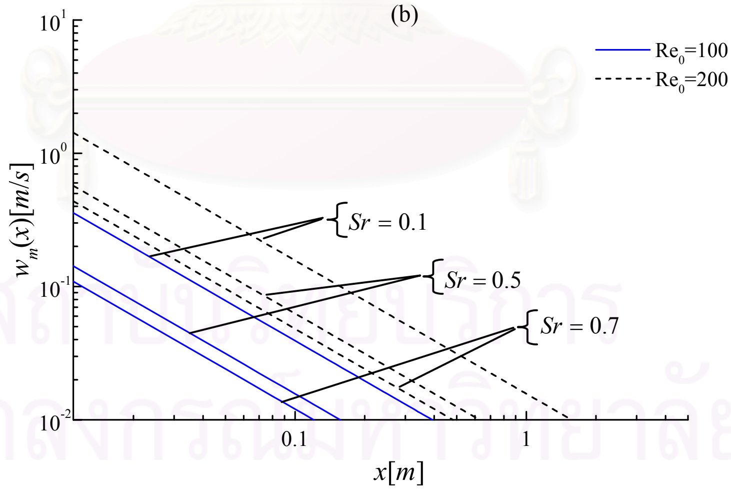
(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด



(a)



(b)



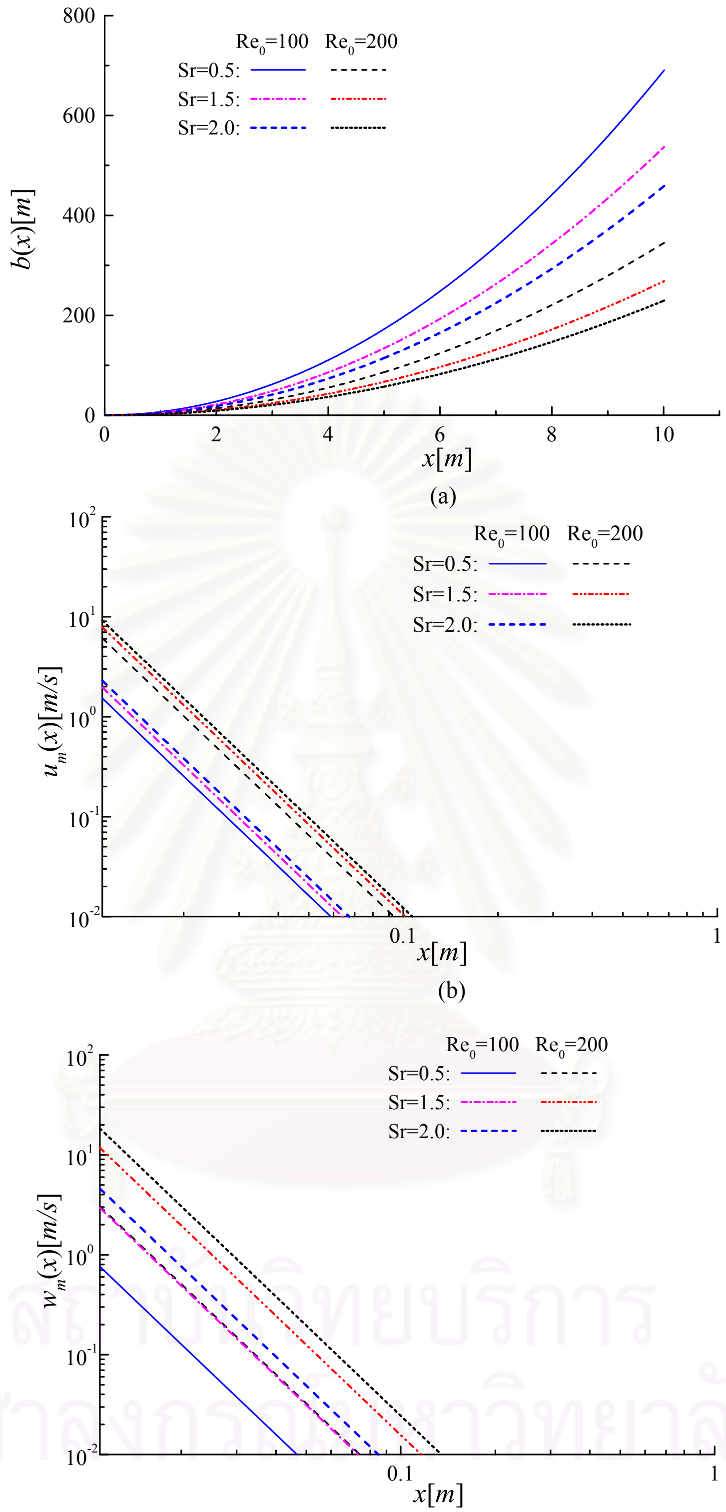
(c)

รูปที่ 7.21 Case C11: กรณีเจ็ตที่หมุนควงโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมตัมเชิงเส้นใน กรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.1, 0.5 และ 0.7 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200

(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

(c) การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด

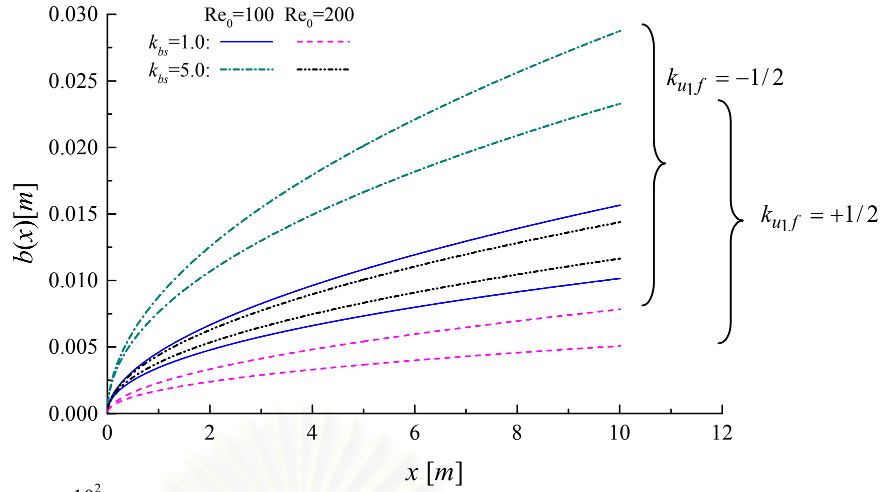


รูปที่ 7.22 Case C12: กรณีเจ็ตที่หมุนควงโดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมใน กรณีที่ Sr มีค่าเท่ากับ 0.5, 1.5 และ 2.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200

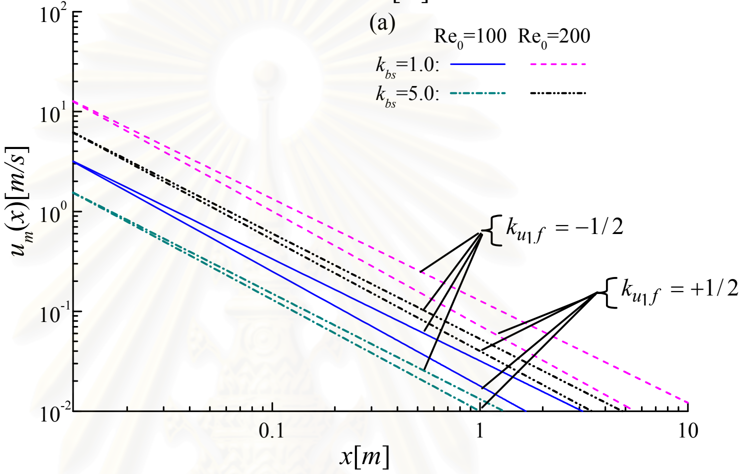
(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

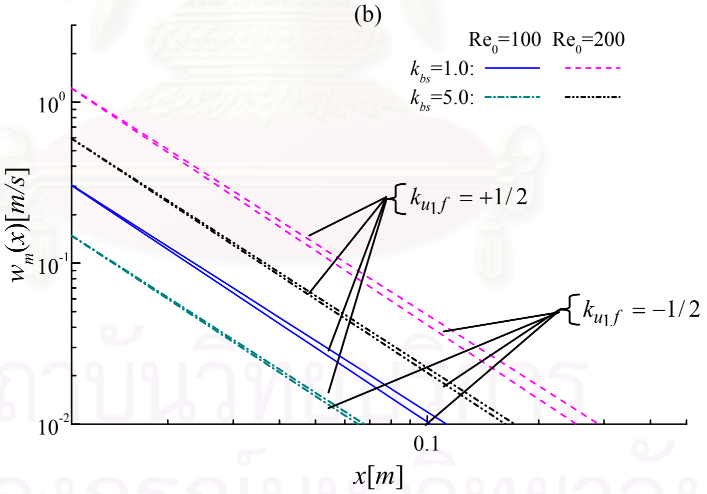
(c) การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด



(a)



(b)



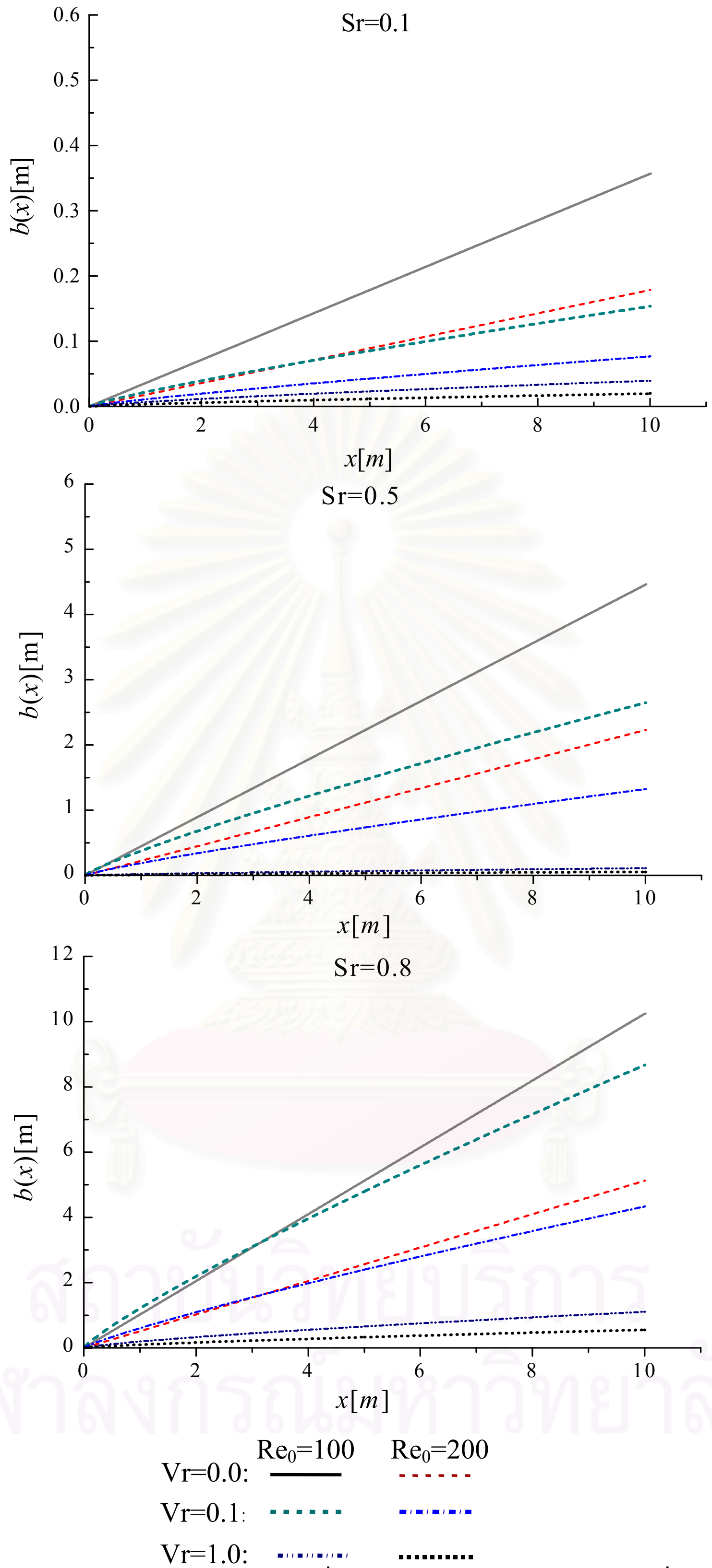
(c)

รูปที่ 7.23 Case C2 กรณีเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตามที่ $u_1 >> u_m$ โดยเปลี่ยนแปลงค่า k_{bs} เท่ากับ 1.0 และ 5.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200 ในกรณี $k_{u_1 f} = +1/2$ และกรณี $k_{u_1 f} = -1/2$

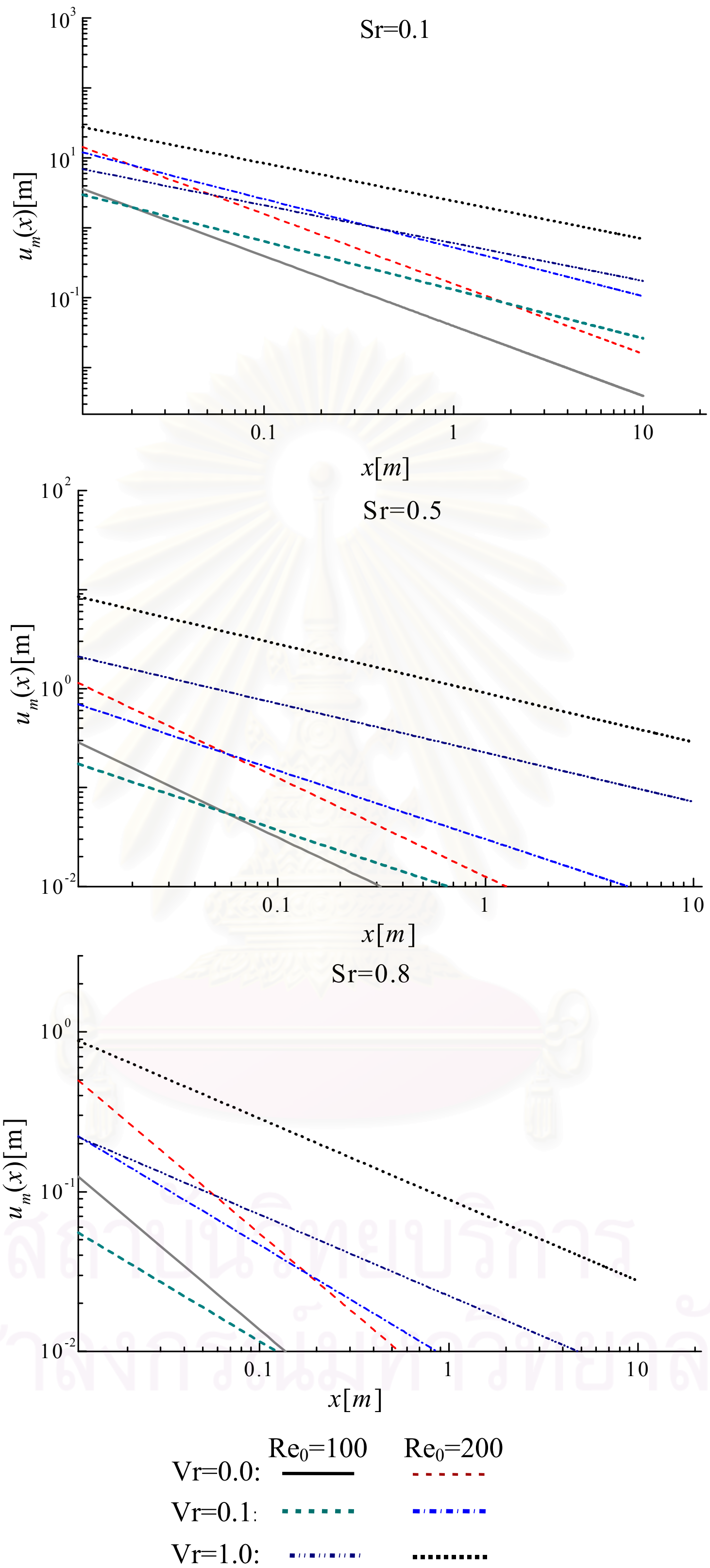
(a) ความหนาของเจ็ต

(b) การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุด

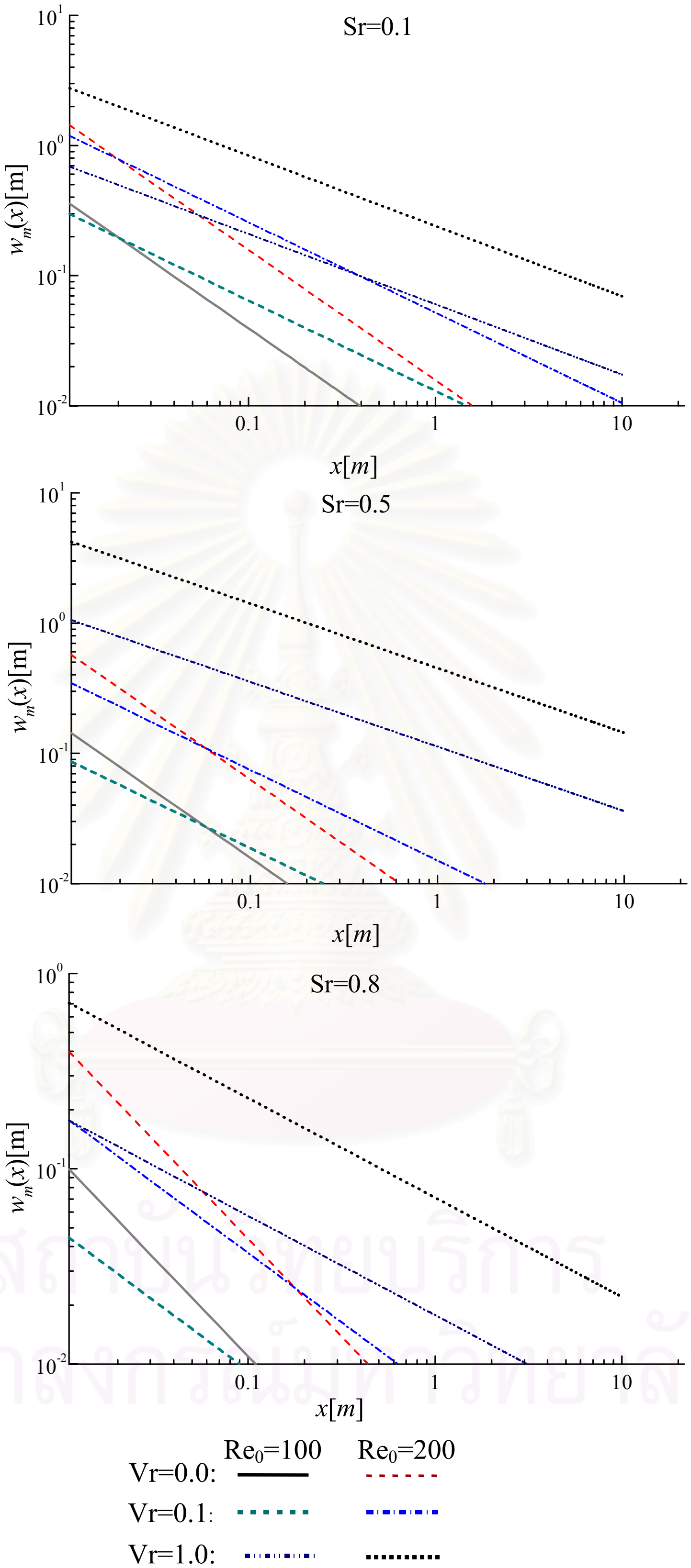
(c) การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุด



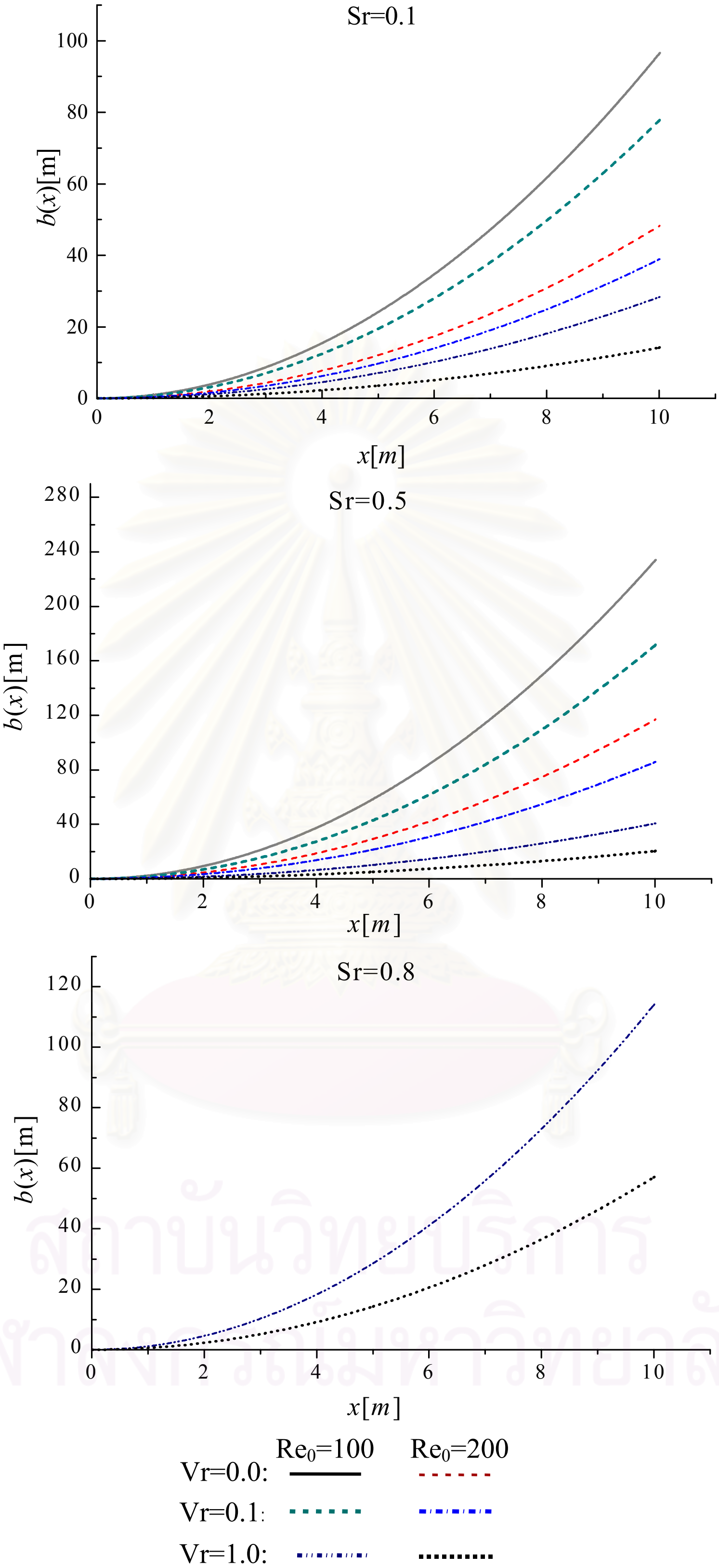
รูปที่ 7.24a Case C31: ความหนาของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



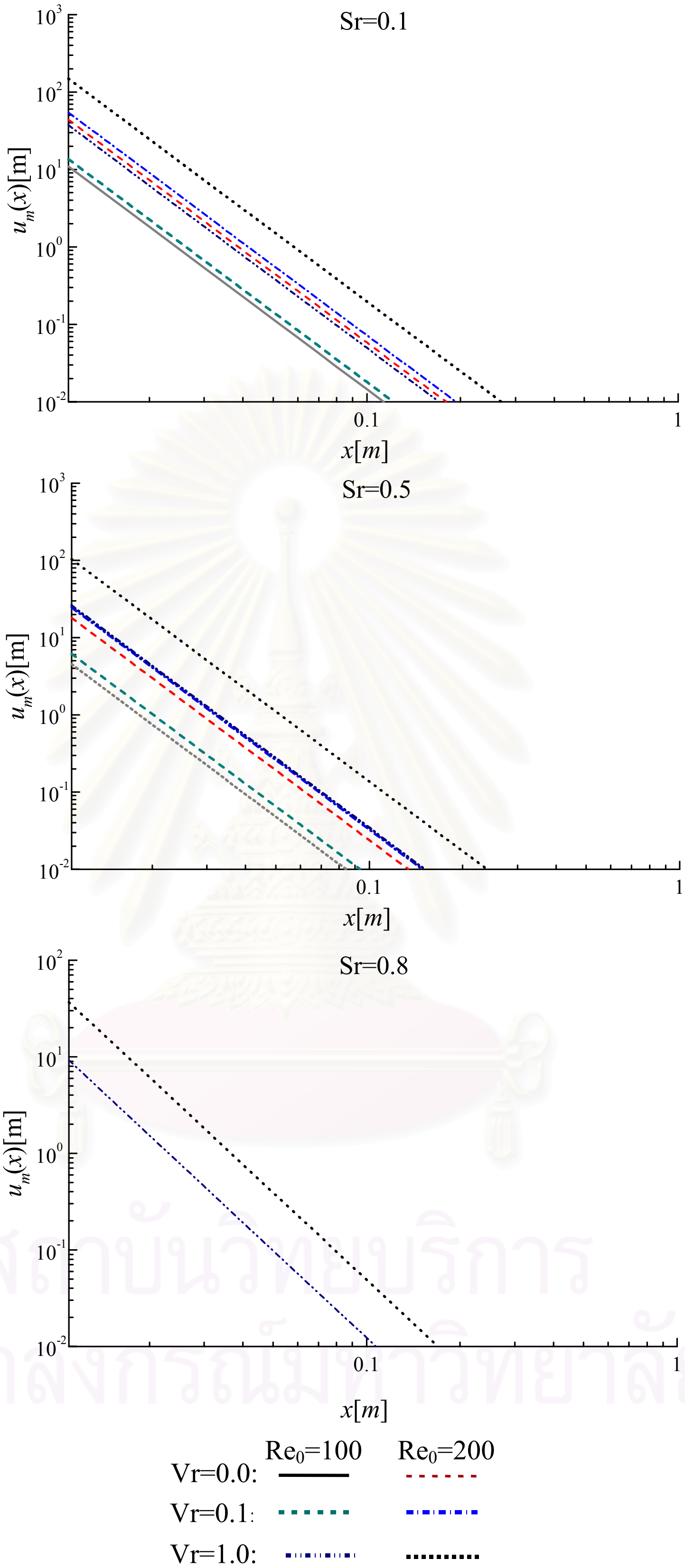
รูปที่ 7.24b Case C31: การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



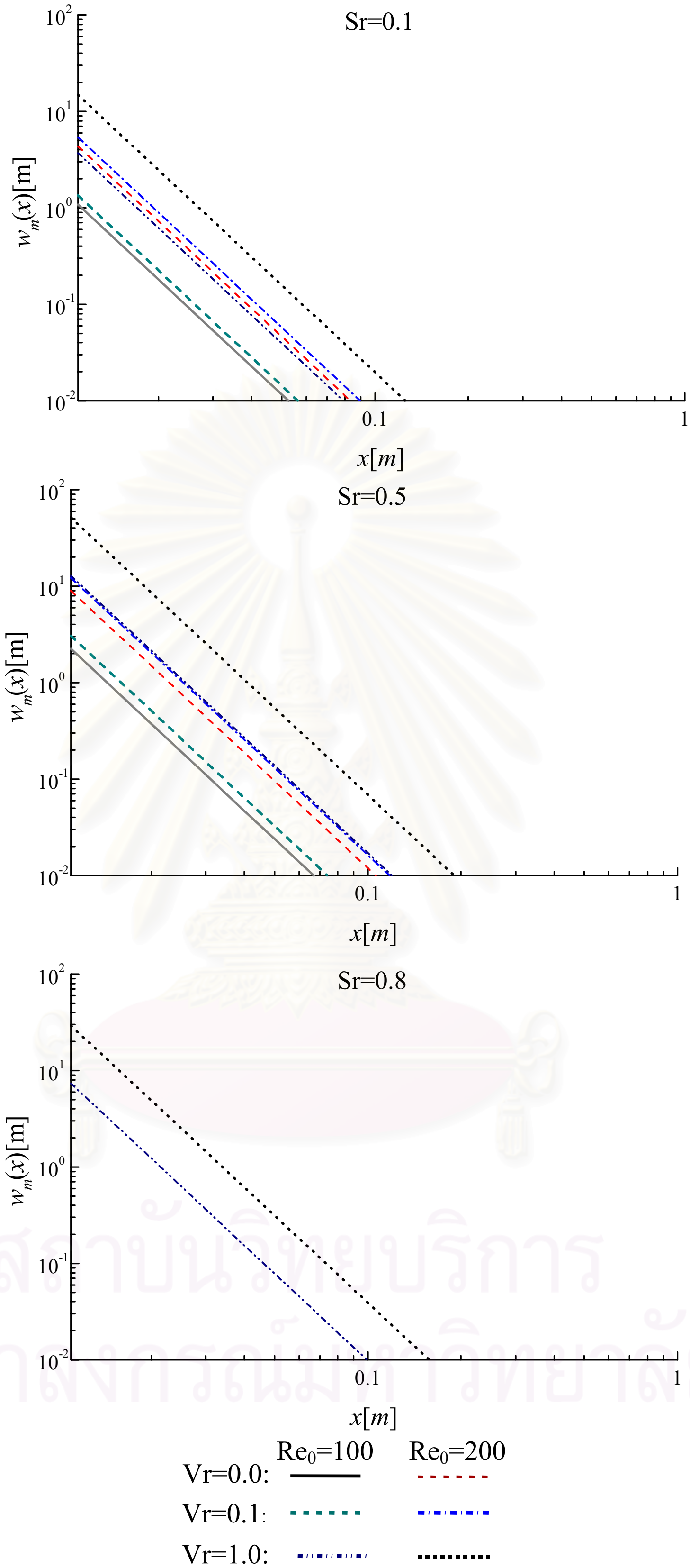
รูปที่ 7.24c Case 31: การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงเส้นในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



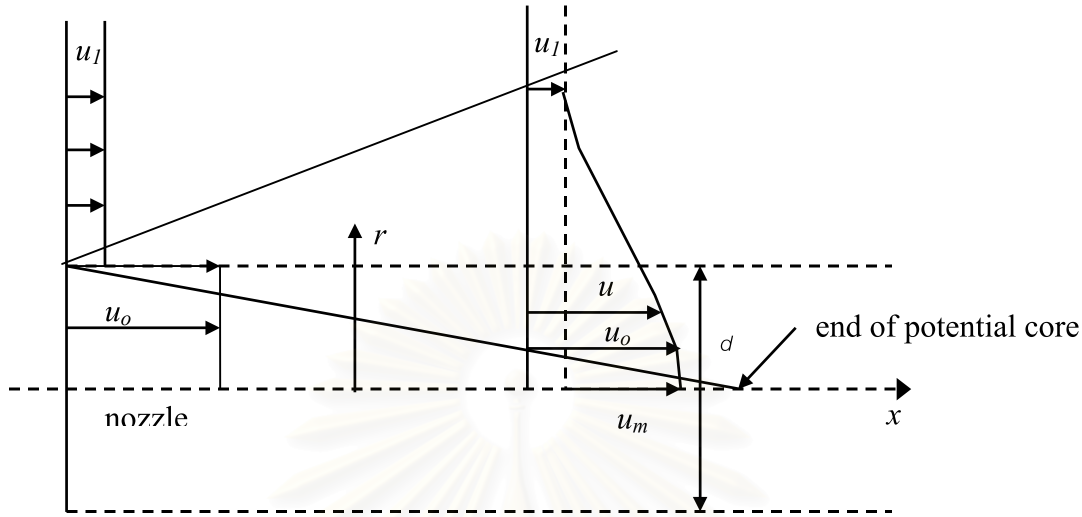
รูปที่ 7.25a Case 32: ความหนาของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



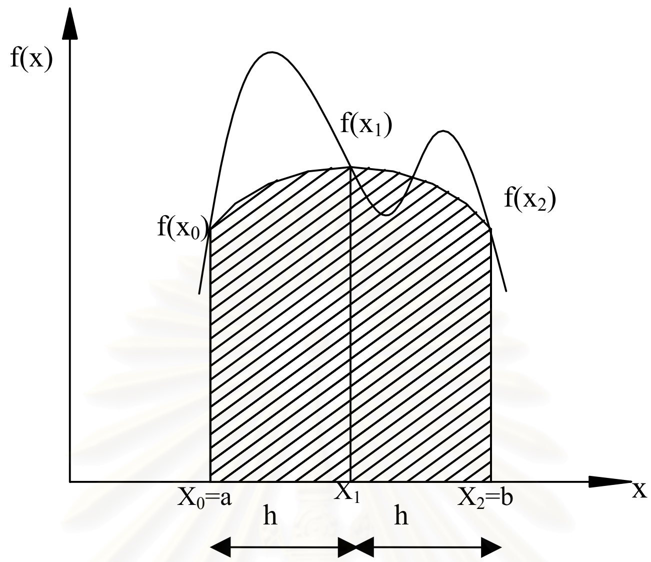
รูปที่ 7.25b Case 32: การลดลงของความเร็วตามแนวแกนมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทิกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



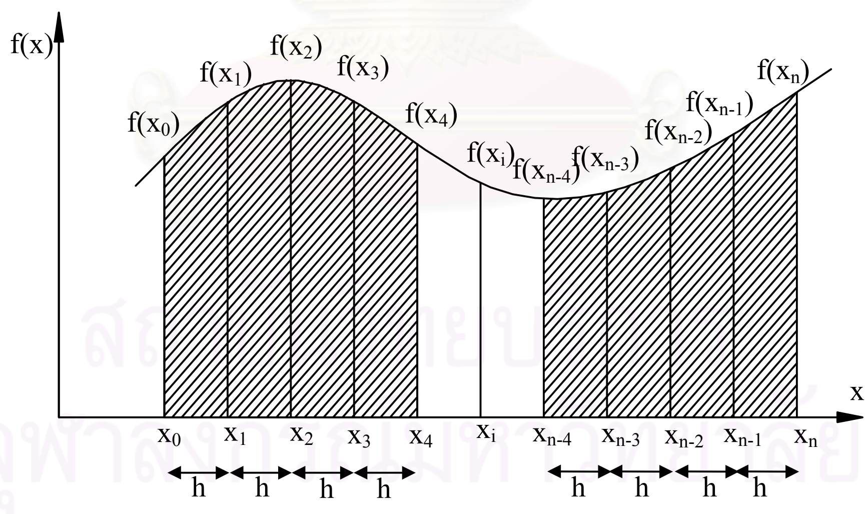
รูปที่ 7.25c Case 32: การลดลงของความเร็วตามแนวสัมผัสมากที่สุดของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยใช้เงื่อนไขจากสมการอินทกรัลโมเมนตัมเชิงมุมในกรณีที่ Sr มีค่าจาก 0.1 ถึง 0.8 โดย เปลี่ยนแปลงค่า Vr จาก 0.0 ถึง 1.0 ที่ Re_0 มีค่าเท่ากับ 100 และ 200



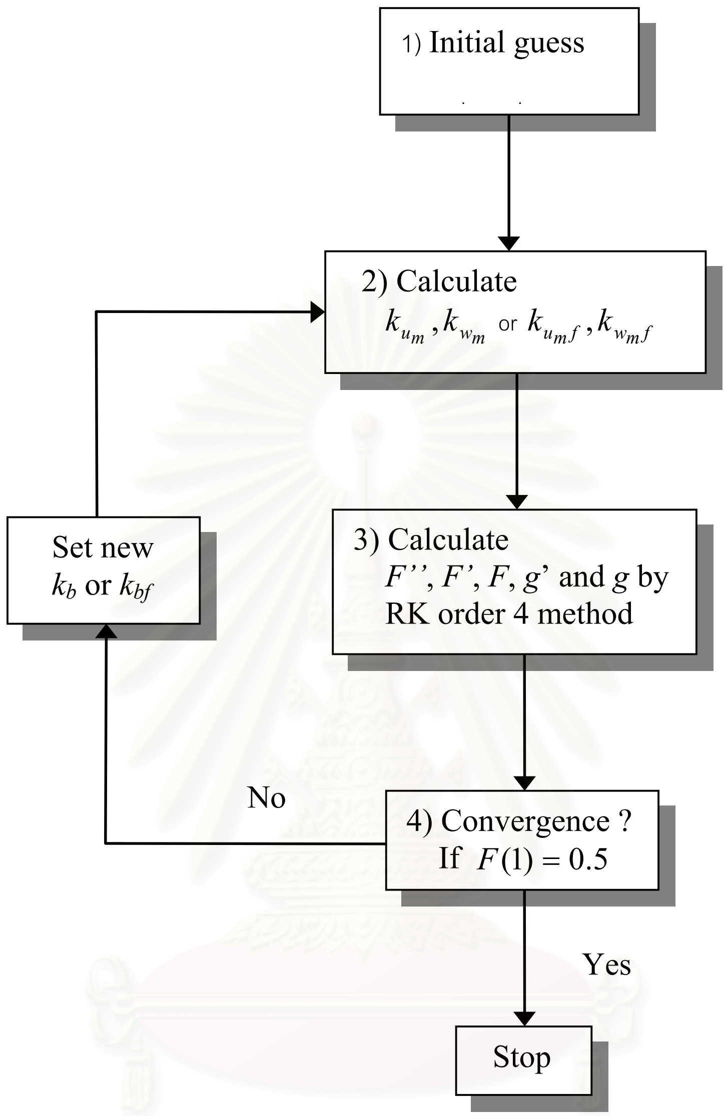
รูปที่ 8.1 ลักษณะการเกิด Shear layer เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของความเร็วเจ็ต



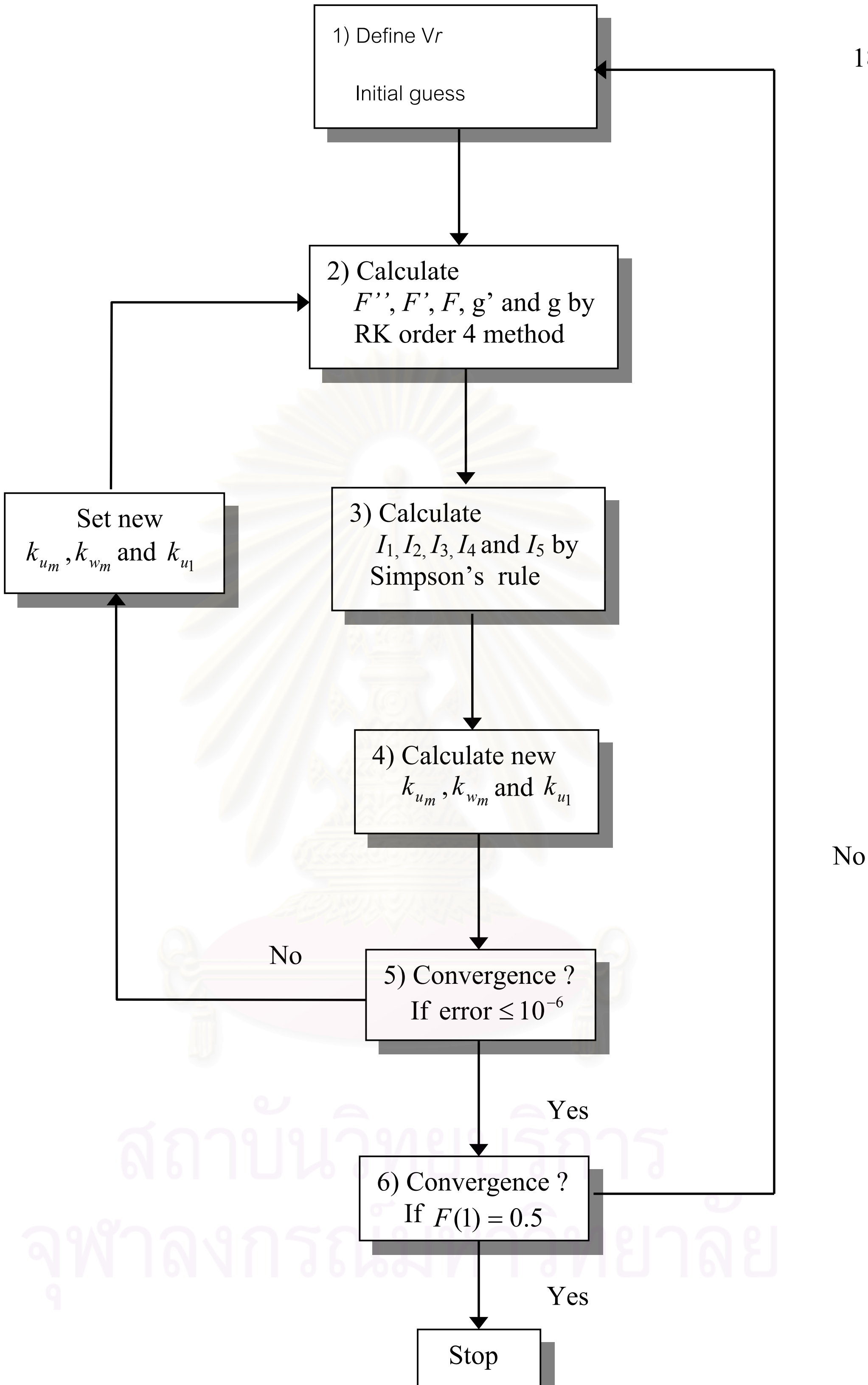
รูปที่ ก.1 การประมาณค่าอินทิกรัลโดยใช้กฎซิมป์สัน



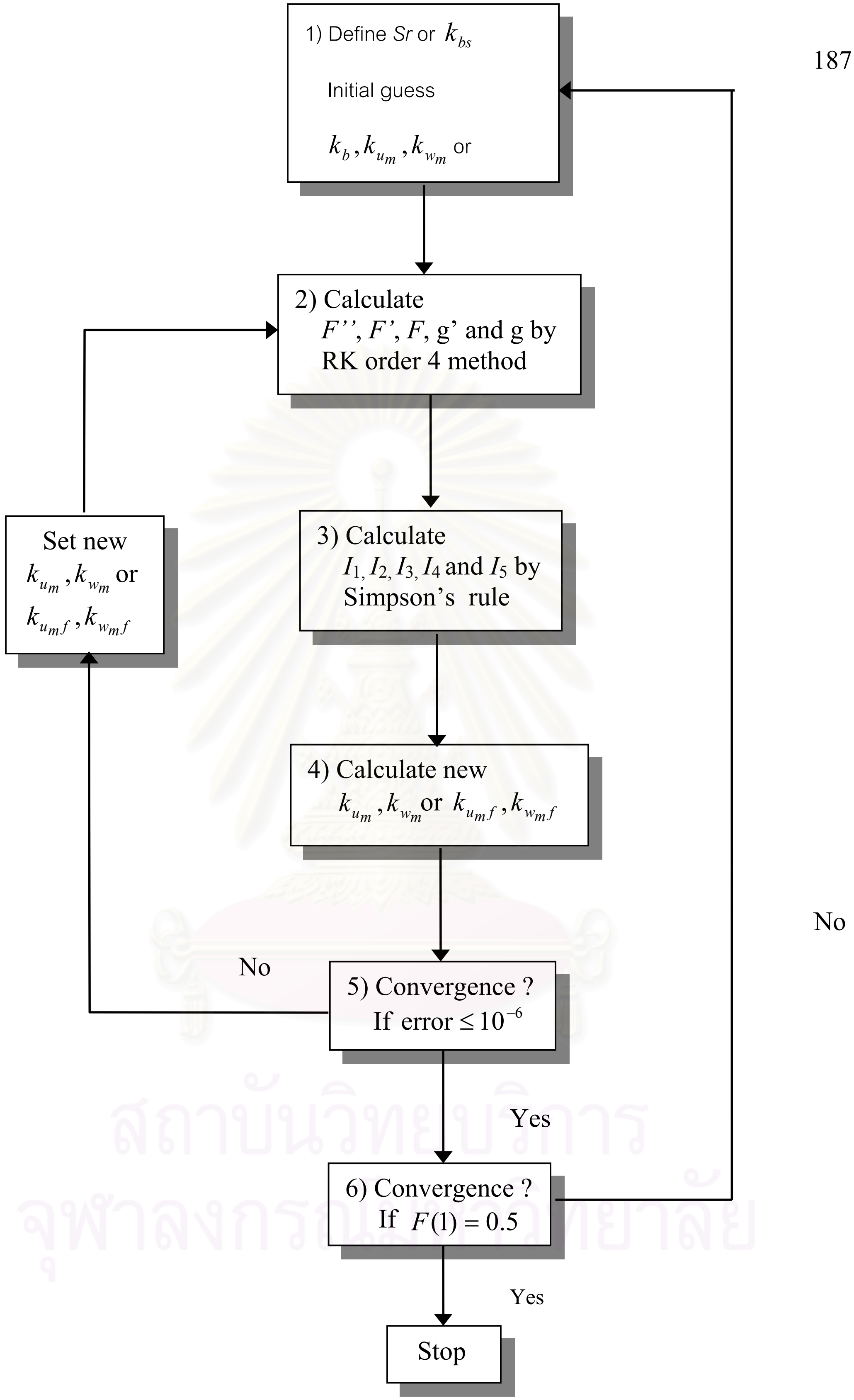
รูปที่ ก.2 การประมาณค่าอินทิกรัลโดยใช้กฎซิมป์สันแบบหลายช่วง



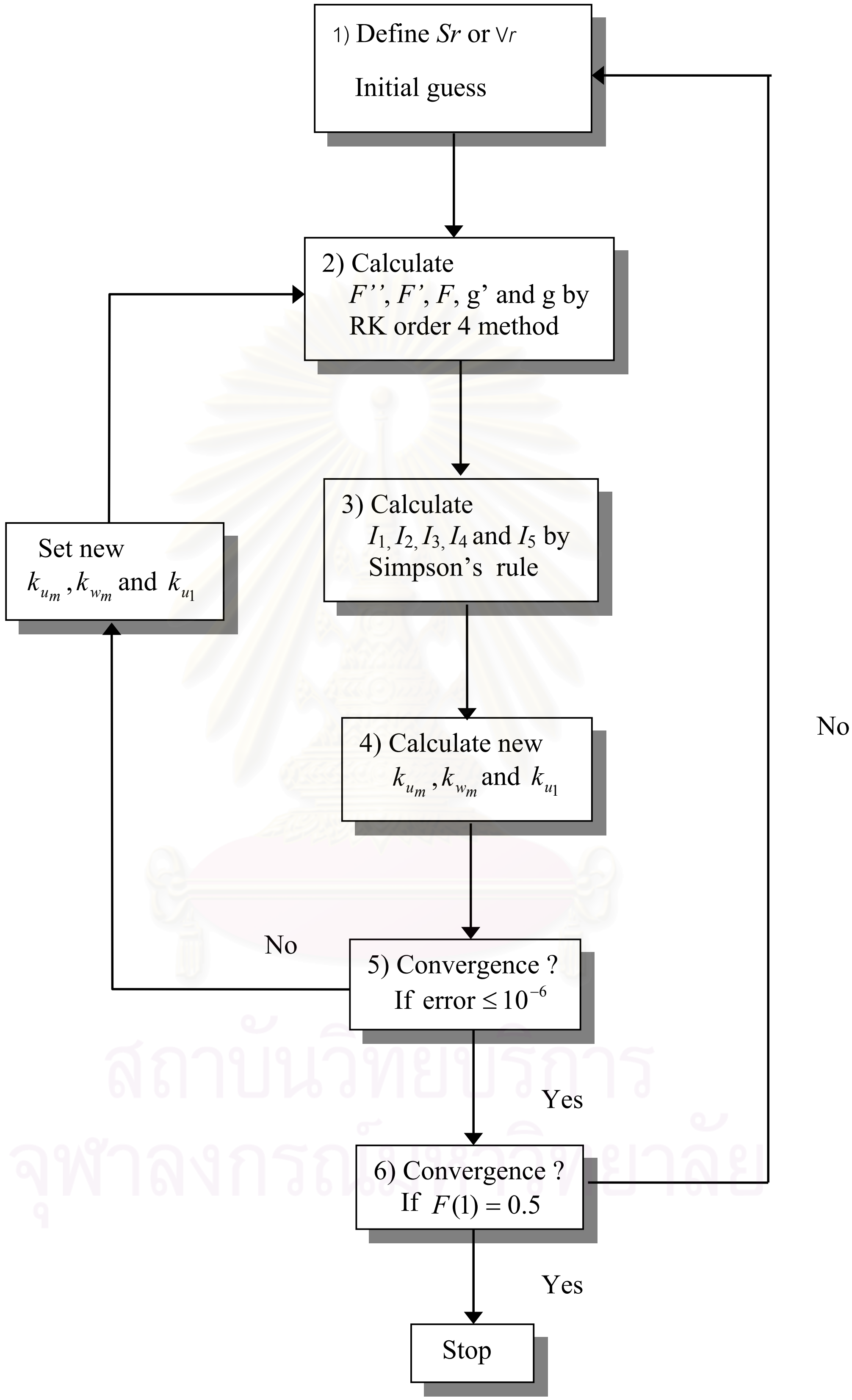
รูปที่ ค.1 ขั้นตอนการคำนวณของกรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงและที่ระดับการหมุนควงต่ำในอากาศหยุดนิ่งและในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต (Case A1, Case A2, Case B1, Case B2)



รูปที่ ค.2 ขั้นตอนการคำนวณของกรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงและที่ระดับการหมุนควงต่ำในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า V*r* (Case A3, Case B3)



รูปที่ ค.3 ขั้นตอนการคำนวณของกรณีการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในอากาศหยุดนิ่งและในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ตโดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ k_{bs} (Case C11, Case C12, Case C2)



รูปที่ ค.4 ขั้นตอนการคำนวณของกรณีการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr (Case C31 , Case C32)

รายการอ้างอิง

Abramovich, G.N., (1963), The Theory of Turbulent Jets, English Translation published by M.I.T. Press, Massachusetts.

Albertson, M.L., Dai, Y.B., Jensen, R.A., and Rouse, H., (1950), "Diffusion of submerged jets," *Trans. A.S.C.E.,* Vol. 115, pp. 639-697.

Alpinieri. L. J., (1964), "Turbulent mixing of co-axial jets," *AIAA Journal.*, Vol. 2, pp. 1560-1567.

Antonia, R.A., Bilger, R.W., (1973), "An experimental investigation of an axisymmetric jet in a co-flowing air stream," *J. Fluid Mech.,* Vol. 61, pp. 805-822.

Beer, J.M., and Chigier, N.A., (1972), Combustion Aerodynamics, Applied Science Publishers.

Billant, P., Chomaz, J.M., and Hueerre, P., (1998) "Experiment study of vortex breakdown in swirling jets," *J. Fluid Mech.,* Vol. 376, pp. 183-219.

Boersma, B.J., Brethouwer, G., and Nieuwstadt, F.T.M., (1997), "A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similarity region of a round jet," *Phys. Fluids.*, Vol. 10, No. 4, pp. 899-909.

Bradbury, L.J.S., (1965), " The structure of a self-preserving turbulent jet," *J. Fluid Mech.,* Vol. 23, pp. 31-64.

Chigier, N.A., and Chervinsky, A., (1967), "Experimental Investigation of Swirling Vortex Motion in Jets," *J. Appl. Mech.*, pp. 443-451.

Corrsin, S., (1964), "Investigation of flow in an axially symmetric heated jet of air," *N.A.C.A. Wartime Report,* W-49.

Curtet, R.M., and Darrigol, M., (1978), "Aerothermique d'un jet libretournant turbulent," prepared for 6 th International Heat Transfer Conference, Toronto.

Feyedelem, M.S., and Sarpkaya, T., (1997), "Free and Near-Free-Surface Swirling Turbulent Jets," *AIAA paper.,* No. 97-0438.

Forstall, W., and Shapiro, A. H., (1950), "Momentum and mass transfer in coaxial gas jet." *J. Appl. Mech.,* Vol. 72, pp. 399-408.

Gortler, H., (1954), "Decay of Swirl in an Axially Symmetrical Jet, Far from the Orifice," *Revista, Matematica Hispanoamericas*., Vol. 14, pp. 143-178.

Hinze, J.O., and Zijnen, B.G., (1949), "Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet," *J. Appl. Sci. Res.,* Al, pp. 435-461.

Hosel, W., (1978), "Drallstrahluntersuchungen mit einem weiterentwicklten, Laser-Droppler-Messverfahren," Dr.-lng. Dissertation, University of Karlsruhe.

Hussein, H.J., Capp, S.P., and George, W.K., (1994), " Velocity measurements in a high Reynolds number, momentum-conserving axisymmetric turbulent jet," *J. Fluid Mech.,* Vol. 258, pp. 31.

Langhaar, H.L., (1942), "Steady flow in the transition length of straight tube," *J. Appl. Mech.*, Vol. 10, pp. 55-58.

Launder, B.E., Reece, G.J., and Rodi, W., (1975), "Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure," *J. Fluid Mech.,* Vol. 68, pp. 537-566.

Lee, S.L., (1965), "Axisymmetrical Turbulent Swirling Jet," *J. Appl. Mech*., pp. 258-262.

Leschziner, M. A., and Rodi, W., (1984), "Computation of Strongly Swirling Axisymmetric Free Jets," *AIAA Journal.*, Vol. 22, pp. 1742-1747.

Ljuboja, M., and Rodi, W., (1980), "Calculations of Turbulent Wall Jets with an Algebraic Reynolds Stress Model," *J. Fluids Eng.*, Vol. 102, pp. 350-356.

Loitsyanski, L. G., (1953), "The propagation of a twisted jet in an unbounded space filled with the same fluid," *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.,* Vol. 17, pp. 3-16.

Panchapakesan, N.R., and Lumley, J.L., (1993), "Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet," *J. Fluid Mech.,* Vol. 246, pp. 197-223.

Patel, R. P., (1970), "A Study on Two-Dimensional Symmetric and Asymmetric Turbulent Shear Flows," PhD. thesis, McGill University.

Paully, A.J., Melnik, R.E., Rubel, A., Rudman, S., and Siclari, M. J., (1985), "Similarity Solution for Plane and Radial Jets Using a $k-\varepsilon$ Turbulence Model," *J. Fluids Eng*., Vol. 107, pp. 79-85.

Pratte, B. D., and Keffer, J. F., (1972), "The Swirling Turbulent Jet," *J. Basic. Eng.,* Vol. 94, pp. 739-748.

Rajaratnam, N., (1976), Turbulent Jets, Elsevier Scientific Publishing Company, New York.

Rankin, G.W., Sridhar, K., Arulraja, M., and Kumar, K.R., (1983), "An experimental investigation of laminar axisymmetric submerged jets," *J. Fluid Mech.,* Vol. 133, pp. 217-231.

Rose, W.G., (1962), "A Swirling round turbulent jet," *J. Appl. Mech*., Vol. 29, pp. 615-625.

Samet, M., and Einav, S., (1988), "Mean Value Measurements of a Turbulent Swirling-Jet," *AIAA Journal.*, Vol. 26, pp. 619-621.

Schlichting, (1968), Boundary-Layer Theory, 6th edition, McGRAW-Hill.

Speziale, C.G., Sarkar, S., and Gatski, T.B., (1991), "Modeling the Pressure Strain Correlation of Turbulence: An Invariant Dynamical Systems Approach," *J. Fluid Mech.,* Vol. 227, pp. 245-272.

Squire, H.B., and Trouncer, J., (1944), "Round Jets in a General Stream," Aeronautical Research Council, Rep No. 1974, 1944.

Tani, I., and Kobashi, U., (1951), "Experimental studies on compound jets," *Proc. 1 st Japan Natl. Congr. Appl. Mech.,* pp. 672-676.

Wygnanski, I., (1970), "Swirling Axisymmetrical Laminar Jet," *Phys. Fluids*, Vol. 13, No. 10, pp. 2455-2460.

Wygnanski, I., and Fiedler, H., (1969), "Some measurements in the self-preserving jet," *J. Fluid Mech.,* Vol. 38, pp. 577-612.

Younis, B.A., Gatski, T.B., and Speziale, C.G., (1996), "Assessment of the SSG Pressure-Strain Model in Free With and Without Swirl," *J. Fluids Eng.*, Vol. 118, pp. 800-809.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ก1 การหาค่าอินกรัลจากกฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง (Simpson's rules)

สำหรับการหาค่าอินทิกรัลโดยใช้ของกฎซิมป์สันนั้นเป็นการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง (เส้นประ) ซึ่งเป็นเส้นโค้งที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง ดังแสดงในรูปที่ ก.1

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad a \le x \le b$$

ในการหาค่าอินทิกรัลทำได้โดยประมาณฟังชันก์ชัน *f*(*x*) ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง (Secondary order Lagrange polynomial) ซึ่งมีรูปแบบดังสมการ

$$I \approx \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx \qquad (ก.1)$$

โดยที่ตำแหน่ง x_0, x_1, x_2 นั้นสามารถคำนวณหาค่า $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ ได้ ซึ่งกำหนดให้ $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการ (ก.1) จึงหาค่าอินทิเกรตได้เป็น

$$\boxed{I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]} \qquad (ก.2)$$

โดยที่ $h = \dfrac{b-a}{2}$

สมการ (ก.2) นี้ เรียกว่า กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน (Simpson's 1/3 rule) ซึ่งคำว่าเศษหนึ่งส่วนสามนี้มาจากสัมประสิทธ์ 1/3 ของสมการ

ในการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน *f*(*x*) โดยเฉพาะหากช่วงจาก a ถึง b นั้นค่อนข้างกว้าง การใช้กฎของซิมป์สันแบบช่วงเดียวอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดได้ค่อนข้างมาก เพื่อความเที่ยงตรงในการหาค่าอินทิกรัลจึงแบ่งช่วงจาก a ถึง b ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อยๆ ดังรูปที่ ก.2 ซึ่งแสดงลักษณะการกระจายของฟังก์ชัน *f*(*x*) ใดๆในช่วง $a \le x \le b$ โดยจะแบ่งช่วงจาก a ถึง b นี้ออกเป็น n ช่วงย่อย ดังนั้นความกว้าง h ของแต่ละช่วงย่อย คือ $h = \dfrac{b-a}{n}$

โดยที่ $x_i = x_0 + ih \qquad i = 0,1,2,....,n$

การหาค่าอินทิกรัลของ

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

โดยจะแบ่งการหาค่าอินทิกรัลนี้ออกเป็นทีละ n/2 ช่วง ซึ่งเริ่มจากช่วง $x_0 \le x \le x_2$, $x_2 \le x \le x_4$ เรื่อยไปจนถึงช่วง $x_{n-2} \le x \le x_n$ ดังนี้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

แทนสมการ (ก.1) ลงในแต่ช่วงของการหาค่าอินทิกรัล

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + ... \\ &+ \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \\ &\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ... \right. \\ &\left. + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i)\right]} \qquad \text{(ก.3)}$$

เนื่องจากเป็นการประยุกต์กฎของซิมป์สันจำนวน n/2 ครั้งลงบนช่วงของการอินทิเกรตทั้งหมด n/2 ช่วง ดังนั้น จำนวนช่วงย่อยที่กำหนดนั้นจึงต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ก2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-kutta method)

สำหรับในการหาสมการของระเบียบวิธี Rung-Kutta อันดับสี่ซึ่งมีที่มาโดยเริ่มต้นพิจารณาจากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y)h + f'(x,y)\frac{h^2}{2!} + f''(x,y)\frac{h^3}{3!} + f'''(x,y)\frac{h^4}{4!} + ... \qquad \text{(ก.4)}$$

หาค่าอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule)

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)$$

$$f''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right]$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + f^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 f$$

$$f'''(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + f\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$+ f^2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[2f\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dx}\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$+ 2f\,\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$f'''(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + f\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} f\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right]$$

$$+ f^2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} f\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[2f\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right]$$

$$+ 2f\,\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f\right]$$

$$f'''(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + f\,\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} + f^2\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial y} f$$

$$+ f^2\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + f^3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 2f\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x} + 2f^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 f + 2f\,\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$+ 2f^2\,\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (ก.4) แล้วจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y)h + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$
$$+\frac{h^3}{6}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 f\right] + \frac{h^4}{24}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + f\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\right.$$
$$+ f^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + f^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} + f^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ 2f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 f$$
$$\left. + 2f\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + 2f^2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \qquad (ก.5)$$

รูปแบบโดยทั่วไปของสมการระเบียบวิธี Rung-Kutta อันดับสี่ (Fourth-order Runge-kutta method) เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + [a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4]h \\ k_1 &= f(x,y) \\ k_2 &= f(x+p_1h, y+q_1k_1h) \\ k_3 &= f(x+p_2h, y+q_2k_2h) \\ k_4 &= f(x+p_3h, y+q_3k_3h) \end{aligned} \qquad (ก.6)$$

โดยที่ค่า k มีค่าเป็น

$$k_1 = f(x,y)$$
$$k_2 = f + p_1h\frac{\partial f}{\partial x} + q_1k_1h\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= f + p_1h\frac{\partial f}{\partial x} + q_1fh\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$k_3 = f + p_2h\frac{\partial f}{\partial x} + q_2k_2h\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= f + p_2h\frac{\partial f}{\partial x} + q_2h\frac{\partial f}{\partial y}\left[f + p_1h\frac{\partial f}{\partial x} + q_1hf\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$
$$= f + p_2h\frac{\partial f}{\partial x} + q_2fh\frac{\partial f}{\partial y} + q_2h^2\frac{\partial f}{\partial y}p_1\frac{\partial f}{\partial x} + q_2h^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_1f$$
$$k_4 = f + p_3h\frac{\partial f}{\partial x} + q_3k_3h\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= f + p_3h\frac{\partial f}{\partial x} + q_3h\frac{\partial f}{\partial y}\left[f + p_2h\frac{\partial f}{\partial x} + q_2h\frac{\partial f}{\partial y}f + q_2h^2\frac{\partial f}{\partial y}p_1\frac{\partial f}{\partial x} + q_2h^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_1f\right]$$

$$= f + p_3 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h\frac{\partial f}{\partial y} f + q_3 h^2 \frac{\partial f}{\partial y} p_2 \frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 f$$

$$+ q_3 h^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 q_1 q_2 f$$

แทนค่า k ต่างๆในสมการ (ก.6)

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4\right]h$$

$$= y_i + a_1 fh + a_2 h\left[f + p_1 h\frac{\partial f}{\partial h} + q_1 hf\frac{\partial f}{\partial y}\right] + a_3 h\left[f + p_2 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_2 h\frac{\partial f}{\partial y} f\right.$$

$$\left. + q_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial y} p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + q_2 h^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_1 f\right] + a_4 h\left[f + p_3 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h\frac{\partial f}{\partial y} f\right.$$

$$\left. + q_3 h^2 \frac{\partial f}{\partial y} p_2 \frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 f + q_3 h^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + q_3 h^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_1 f q_2\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[a_1 f + a_2 f + a_3 f + a_4 f\right] + h^2\left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_1 f\frac{\partial f}{\partial y} + a_3 p_2 \frac{\partial f}{\partial x}\right.$$

$$\left. + a_3 q_2 \frac{\partial f}{\partial y} f + a_4 p_3 \frac{\partial f}{\partial x} + a_4 q_3 \frac{\partial f}{\partial y} f\right] + h^3\left[a_3 q_2 \frac{\partial f}{\partial y} p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_3 q_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_1 f\right.$$

$$\left. + a_4 q_3 \frac{\partial f}{\partial y} p_2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_4 q_3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 f\right] + h^4\left[a_4 q_3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 q_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_4 q_3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 q_1 f\right] \qquad \text{(ก.7)}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการ (ก.5) กับสมการ (ก.7) จะได้ว่า

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_2 p_1 + a_3 p_2 + a_4 p_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_1 + a_3 q_2 + a_4 q_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 q_2 p_1 + a_4 q_3 p_2 = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_2 q_1 + a_4 q_3 q_2 = \frac{1}{6}$$

$$a_4 q_3 q_2 p_1 = \frac{1}{24}$$

$$a_4 q_3 q_1 q_2 = \frac{1}{24}$$

เมื่อทำการแก้สมการทั้งหมดสามารถหาค่าคงที่ต่างๆได้เป็น

$$p_1 = \frac{1}{2} \qquad p_2 = \frac{1}{2} \qquad p_3 = 1$$
$$q_1 = \frac{1}{2} \qquad q_2 = \frac{1}{2} \qquad q_3 = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{6} \qquad a_2 = \frac{2}{6} \qquad a_3 = \frac{2}{6} \qquad a_4 = \frac{1}{6}$$

แทนค่าคงที่ในสมการ (ก.6) ทำให้ได้สมการระเบียบวิธี Rung-Kutta อันดับสี่เป็น ดังนี้

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h) \end{aligned}} \qquad \text{(ก.8)}$$

ภาคผนวก ข

ข1 Similarity Transformation ของแต่ละเทอมใน Governing Equation

จากผลลัพธ์ของ Similarity Transformation ดังแสดงในบทที่ 3 ดังนั้นจึงทำ Transformation ของแต่ละเทอมใน Governing Equation ได้โดย

กำหนดให้ $u = u_1 + u_m f(\eta) \qquad w = w_1 + w_m g(\eta)$

$$\eta = \frac{r}{b(x)} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{r}{b^2(x)}\frac{db}{dx} = -\frac{\eta}{b(x)}\frac{db}{dx}$$

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u_1 + u_m f)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + f\frac{\partial u_m}{\partial x} + u_m\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$= \frac{du_1}{dx} + f\frac{du_m}{dx} - \left[\frac{\eta}{b}\frac{db}{dx}\right]u_m f'$$

$$= -\left[\frac{u_m}{b}\frac{db}{dx}\right]\eta f' + \left[\frac{du_1}{dx} + \frac{du_m}{dx}f\right]$$

$$= \frac{u_m}{b}\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\right)\right] \qquad (ข1.1)$$

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}) = \frac{1}{\eta b}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta b\mathrm{v})$$

$$= \frac{u_m}{b}\left[\frac{1}{u_m\eta}\frac{\partial(\eta\mathrm{v})}{\partial\eta}\right] \qquad (ข1.2)$$

สมการ x-โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}$:

$$\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} = \mathrm{v}\left[\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_m\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right]$$

$$= \mathrm{v}\left[\frac{u_m f'}{b}\right]$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{\mathrm{v}f'}{u_m}\right] \qquad (ข1.3)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}: \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}=\left[u_1+u_m f\right]\left[\frac{u_m}{b}\right]\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f'+\left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f+\frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\right)\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+f\right]\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f'+\left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f+\left(\frac{b}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right)\right] \tag{ข1.4}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}: \qquad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\nu\left[\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\left(\frac{1}{b}\frac{d^2b}{dx^2}-\frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-\left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 f''-\left(b\frac{d^2b}{dx^2}-2\left(\frac{db}{dx}\right)^2+2\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta f'\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{u_m}\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{d^2u_m}{dx^2}f\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 f''-\left(b\frac{d^2b}{dx^2}-2\left(\frac{db}{dx}\right)^2+2\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta f'\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b^2}{u_m}\frac{d^2u_m}{dx^2}\right)f+\frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b^2}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)\right] \tag{ข1.5}$$

$$\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right): \qquad \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)=\frac{\nu}{\eta b}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$=\frac{\nu}{\eta b^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta u_m f'\right)$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{\nu}{u_m b}\right]\left(f''+\frac{f'}{\eta}\right)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(f''+\frac{f'}{\eta}\right) \tag{ข1.6}$$

สมการ r -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}+u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-\frac{w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right)+\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2}\right)$$

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}: \qquad \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}=\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}$$

$$=\frac{\mathrm{v}}{b}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\eta}$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{1}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\eta}\right] \tag{ข1.7}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}: \qquad u\frac{\partial v}{\partial x} = [u_1 + u_m f]\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$= [u_1 + u_m f]\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right]$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m} + f\right]\left[\frac{b}{u_m}\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{1}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] \qquad (ข1.8)$$

$$\frac{w^2}{r}: \qquad \frac{w^2}{r} = \left[\frac{(w_1 + w_m g)^2}{\eta b}\right]$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{w_1}{w_m} + g\right)^2\right] \qquad (ข1.9)$$

จาก $\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right)\right] = \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \nu\frac{v}{r^2}$

$$\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right]: \qquad \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] = \frac{\nu}{\eta b}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\left(\frac{1}{u_m \eta}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{1}{u_m \eta}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \qquad (ข1.10)$$

$$\nu\frac{v}{r^2}: \qquad \nu\frac{v}{r^2} = \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\frac{v}{u_m}\frac{1}{\eta^2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\frac{v}{u_m}\frac{1}{\eta^2} \qquad (ข1.11)$$

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}: \quad \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \nu\left[\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \left(\frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dx^2} - \frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\eta\frac{\partial v}{\partial \eta} - \left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{\eta^2}{u_m}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \left(b\frac{d^2 b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\frac{\eta}{u_m}\frac{\partial v}{\partial \eta} - 2\left(\frac{b}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial x} + \frac{b^2}{u_m}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{\eta^2}{u_m}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \left(b\frac{d^2 b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\frac{\eta}{u_m}\frac{\partial v}{\partial \eta} - 2\left(\frac{b}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial x} + \frac{b^2}{u_m}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] \qquad (ข1.12)$$

สมการ θ -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mathrm{v}w}{r}=\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$\mathrm{v}\dfrac{\partial w}{\partial r}$:

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}=\mathrm{v}\left[\frac{\partial w_1}{\partial r}+w_m\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}g'\right] \tag{ข1.13}$$

$u\dfrac{\partial w}{\partial x}$:

$$u\frac{\partial w}{\partial x}=\left[u_1+u_m f\right]\left[\frac{w_m}{b}\right]\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta g'+\left(\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\right)g+\frac{w_1}{w_m}\left(\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\right)\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+f\right]\left[-\left(\frac{w_m}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta g'+\left(\frac{b}{u_m}\frac{dw_m}{dx}\right)g+\left(\frac{b}{u_m}\frac{dw_1}{dx}\right)\right] \tag{ข1.14}$$

$\dfrac{\mathrm{v}w}{r}$:

$$\frac{\mathrm{v}w}{r}=\frac{\mathrm{v}}{\eta b}\left[w_1+w_m g\right]$$

$$=\frac{w_1\mathrm{v}}{b}\left[\frac{1}{\eta}\left(1+\frac{w_m}{w_1}g\right)\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_1}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\right]\left[\frac{1}{\eta}\left(1+\frac{w_m}{w_1}g\right)\right] \tag{ข1.15}$$

$\nu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)\right]$:

$$\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]=\frac{\nu}{\eta b}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)$$

$$=\frac{\nu}{\eta b^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\eta w_m g'\right]$$

$$=\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[g''+\frac{g'}{\eta}\right]$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[g''+\frac{g'}{\eta}\right] \tag{ข1.16}$$

$\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$:

$$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\nu\left[\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-\left(\frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dx^2}-\frac{2}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)\eta\frac{\partial w}{\partial \eta}-\left(\frac{2}{b}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$=\frac{w_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{w_m b}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 g''-\left(b\frac{d^2 b}{dx^2}-2\left(\frac{db}{dx}\right)^2+2\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta g'\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{w_m}\left(\frac{d^2 w_1}{dx^2}+\frac{d^2 w_m}{dx^2}g\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 g'' - \left(b\frac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + 2\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta g' + \frac{b^2}{w_m}\left(\frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{d^2w_m}{dx^2}g\right)\right] \quad (ข1.17)$$

$$\nu\frac{w}{r^2}; \qquad \nu\frac{w}{r^2} = \frac{\nu}{\eta^2 b^2}\left[w_1 + w_m g\right]$$

$$= \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{\nu}{u_m b}\right)\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\frac{w_1}{w_m}\frac{1}{\eta^2} + \frac{g}{\eta^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\frac{w_1}{w_m}\frac{1}{\eta^2} + \frac{g}{\eta^2}\right] \quad (ข1.18)$$

ข2 การวิเคราะห์ Order of magnitude สำหรับ Laminar swirling jet

ในการวิเคราะห์ Order of magnitude ของแต่ละเทอมในสมการ Governing Equation จะกำหนดให้ $\mathcal{O}$ แทนขนาด Order of magnitude โดยที่ $\mathcal{O}(f^n) \sim \mathcal{O}(\eta) \sim 1$

จากสมการ (ข1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m}{b}\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\right)\right]$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \sim \frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L} + \frac{b}{L} + \frac{u_1}{u_m}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L} + \frac{b}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1 + \frac{u_1}{u_m}\right]$$

เนื่องจากสมการความต่อเนื่องมีเพียง 2 เทอม จึงทำให้ได้ว่า

สมการความต่อเนื่อง

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})\right) \sim \mathcal{O}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sim \frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1 + \frac{u_1}{u_m}\right]$$

และ $$\frac{\mathrm{v}}{u_m} \sim \frac{b}{L}\left[1 + \frac{u_1}{u_m}\right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v})}_{\frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u_m}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} = 0} \qquad (\text{ข}2.1)$$

สมการ x-โมเมนตัม

จากสมการ (ข1.3) $\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{\mathrm{v}f'}{u_m}\right]$

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{\mathrm{v}f'}{u_m}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.4) $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+f\right]\left[-\left(\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)f + \left(\frac{b}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right)\right]$

$$\mathcal{O}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) \sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{b}{L}+\frac{b}{L}+\frac{b}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]^2$$

จากสมการ (ข1.5) $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 f'' - \left(b\frac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + 2\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta f' + \left(\frac{b^2}{u_m}\frac{d^2u_m}{dx^2}\right)f + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{b^2}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)\right]$

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{b}{L}\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{L}\right)^2\right) + \left(\frac{b^2}{u_m}\frac{u_m}{L^2}\right) + \frac{b^2}{u_m}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\left(\frac{b}{L}\right)^2 + \frac{b^2}{u_m}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{L^2}{u_m}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.6) $\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(f''+\frac{f'}{\eta}\right)$

$$\mathcal{O}\left(\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\right)\sim\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{?}+\underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]}} \qquad (ข2.2)$$

สมการ r-โมเมนตัม

จากสมกร (ข1.7) $\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{1}{u_m}\frac{\mathrm{v}}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right]$

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)\sim\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]^2$$

$$\sim\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2$$

จากสมการ (ข1.8) $u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+f\right]\left[\frac{b}{u_m}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-\left(\frac{1}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right]$

$$\mathcal{O}\left(u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\sim\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2$$

จากสมการ (ข1.9) $\frac{w^2}{r} = \frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{w_1}{w_m}+g\right)^2\right]$

$$\mathcal{O}\left(\frac{w^2}{r}\right)\sim\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]^2\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]^2$$

จากสมการ (ข1.10) $\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{1}{u_m\eta}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta}\right)$

$$\mathcal{O}\left(\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\sim\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.11) $\nu\,\dfrac{\mathrm{v}}{r^2} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{u_m^2}{b}\dfrac{\mathrm{v}}{u_m}\dfrac{1}{\eta^2}$

$$\mathcal{O}\left(\nu\,\frac{\mathrm{v}}{r^2}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.12) $\nu\,\dfrac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{u_m^2}{b}\left[\left(\dfrac{db}{dx}\right)^2\dfrac{\eta^2}{u_m}\dfrac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\eta^2} - \left(b\dfrac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\dfrac{db}{dx}\right)^2\right)\dfrac{\eta}{u_m}\dfrac{\partial\mathrm{v}}{\partial\eta} - \right.$

$$\left. 2\left(\frac{b}{u_m}\frac{db}{dx}\right)\eta\,\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\eta\partial x} + \frac{b^2}{u_m}\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2}\right]$$

$$\mathcal{O}\left(\nu\,\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^3\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^3\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} + \underbrace{u\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]^2} - \underbrace{\frac{w^2}{r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]^2\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]^2} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}}_{?} + \underbrace{\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} - \\ &\qquad\qquad\underbrace{\nu\,\frac{\mathrm{v}}{r^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{\nu\,\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^3\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} \end{aligned}} \qquad (ข2.3)$$

สมการ θ -โมเมนตัม

จากสมการ (ข1.13) $\mathrm{v}\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{u_m^2}{b}\left[\dfrac{w_m}{u_m}\dfrac{\mathrm{v}}{u_m}g'\right]$

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.14) $u\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{u_m^2}{b}\left[\dfrac{u_1}{u_m}+f\right]\left[-\left(\dfrac{w_m}{u_m}\dfrac{db}{dx}\right)\eta g' + \left(\dfrac{b}{u_m}\dfrac{dw_m}{dx}\right)g + \left(\dfrac{b}{u_m}\dfrac{dw_1}{dx}\right)\right]$

$$\mathcal{O}\left(u\frac{\partial w}{\partial x}\right) \sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\frac{b}{L}+\frac{b}{u_m}\frac{w_m}{L}+\frac{b}{u_m}\frac{dw_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{L}{w_m}\frac{dw_1}{dx}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{u_1}{u_m}+1\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[\frac{b}{L}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.15) $\dfrac{vw}{r} = \dfrac{u_m^2}{b}\left[\dfrac{w_1}{u_m}\dfrac{v}{u_m}\right]\left[\dfrac{1}{\eta}\left(1+\dfrac{w_m}{w_1}g\right)\right]$

$$\mathcal{O}\left(\frac{vw}{r}\right) \sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]\left[1+\frac{w_m}{w_1}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{L}{u_m}\frac{du_1}{dx}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]$$

$$\sim \frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.16) $\nu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{u_m^2}{b}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)\left[g''+\dfrac{g'}{\eta}\right]$

$$\mathcal{O}\left(\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.17)

$$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)\left[\left(\frac{db}{dx}\right)^2\eta^2 g'' - \left(b\frac{d^2b}{dx^2} - 2\left(\frac{db}{dx}\right)^2 + 2\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{db}{dx}\right)\eta g' + \frac{b^2}{w_m}\left(\frac{d^2w_1}{dx^2}+\frac{d^2w_m}{dx^2}g\right)\right]$$

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{L^2}{w_m}\frac{d^2w_1}{dx^2}\right]$$

$$\sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]$$

จากสมการ (ข1.18) $\nu\dfrac{w}{r^2} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{u_m^2}{b}\left(\dfrac{w_m}{u_m}\right)\left[\dfrac{w_1}{w_m}\dfrac{1}{\eta^2}+\dfrac{g}{\eta^2}\right]$

$$\mathcal{O}\left(\nu\frac{w}{r^2}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]} + \underbrace{u\frac{\partial w}{\partial x}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} + \underbrace{\frac{\mathrm{v}w}{r}}_{\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{u_1}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} = \nu\underbrace{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]} + \\ &\qquad \underbrace{\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{b}{L}\right]^2\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} + \underbrace{\nu\frac{w}{r^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{w_m}{u_m}\right]\left[1+\frac{w_1}{w_m}\right]} \end{aligned}} \qquad (ข2.4)$$

ข3 Similarity สำหรับ Differential Governing Equation

จากผลการวิเคราะห์ Order of magnitude จึงสามารถลดรูปสมการ Governing Equation ได้ดังสมการ ซึ่งสมการทั้งหมดจะเป็นสมการเริ่มต้นในการ Similarity สำหรับ Differential Governing Equation ต่อไป

สมการความต่อเนื่อง $\dfrac{\partial(ru)}{\partial x} + \dfrac{\partial(r\mathrm{v})}{\partial r} = 0$

สมการ x-โมเมนตัม $\mathrm{v}\dfrac{\partial u}{\partial r} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$

สมการ r-โมเมนตัม $\dfrac{w^2}{r} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}$

สมการ θ-โมเมนตัม $\mathrm{v}\dfrac{\partial w}{\partial r} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\mathrm{v}w}{r} = \nu\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial rw}{\partial r}\right)$

กำหนดให้

$$u = u_1(x) + u_m(x)f(\eta)$$

$$w = w_1(x) + w_m g(\eta)$$

$$\eta = \frac{r}{b(x)}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{1}{b(x)}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{r}{b^2(x)}\frac{db}{dx} = -\frac{\eta}{b(x)}\frac{db}{dx}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการสมการ x-โมเมนตัมทำให้ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_m}{dx}f - \left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)u_m f' + \frac{du_1}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_m f'}{b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u_m f''}{b^2}$$

หาค่า v จากสมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial r\mathrm{v}}{\partial r} = -r\frac{\partial u}{\partial x} = -r\left[\frac{du_1}{dx} + \frac{du_m}{dx} f - \frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}u_m f'\right]$$

$$= \left[-r\frac{du_1}{dx} - r\frac{du_m}{dx} f + \frac{r^2}{b^2}\frac{db}{dx}u_m f'\right]$$

กำหนดให้ที่ $r = 0 \quad \mathrm{v}(x,0) = 0$

$$r\mathrm{v} = -\int_0^r r\frac{du_1}{dx}dr - \int_0^r r\frac{du_m}{dx} f dr + \int_0^r \frac{r^2}{b^2}\frac{db}{dx}u_m f' dr$$

แทนค่า $r = b(x)\eta$

$$r\mathrm{v} = -\int_0^\eta b^2\eta\frac{du_1}{dx}d\eta - \int_0^\eta b^2\eta f\frac{du_m}{dx}d\eta + \int_0^\eta b\eta^2 f' u_m\frac{db}{dx}d\eta$$

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\eta b}\left[\frac{db}{dx}u_m b\int_0^\eta \eta^2 f' d\eta - b^2\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta - b^2\frac{du_1}{dx}\int_0^\eta \eta d\eta\right]$$

$$\mathrm{v} = \frac{db}{dx}\frac{u_m}{\eta}\int_0^\eta \eta^2 f' d\eta - \frac{b}{\eta}\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta - \frac{b}{\eta}\frac{du_1}{dx}\int_0^\eta \eta d\eta$$

แทนค่า $\int_0^\eta \eta d\eta = \frac{\eta^2}{2}$

$$\mathrm{v} = \frac{u_m}{\eta}\frac{db}{dx}\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta - \frac{b}{\eta}\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta - \frac{b\eta}{2}\frac{du_1}{dx} \qquad (ข3.1)$$

สำหรับเทอม $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ นั้นจะหาได้จากการพิจารณาสมการ r-โมเมนตัม

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r}$$

เมื่ออินทิเกรตจะได้

$$p_\infty - p = \int_r^\infty \frac{\rho w^2}{r}dr$$

จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทำให้ได้

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left[\int_r^\infty \frac{\rho w^2}{r}dr\right] \qquad (ข3.2)$$

ถ้าพิจารณาว่าด้านนอกของ Thin shear layer เป็นการไหลแบบ Inviscid flow ดังนั้นจากสมการ Bernoulli's equation

$$p_0 = p_1(x) + \frac{1}{2}\rho u_1^2(x) = \text{ค่าคงที่}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

เมื่อ $(r \to \infty)$

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial x} = -\rho u_1 \frac{du_1}{dx}$$

ดังนั้นแทนในสมการ (ข3.2) ได้เป็น

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left[\int_r^\infty \frac{w^2}{r} dr\right] + u_1 \frac{du_1}{dx}$$

แทนค่า $w = w_m g(\eta)$, $\quad \eta = \frac{r}{b(x)}$, $\quad d\eta = \frac{dr}{b(x)}$ ทำให้ได้

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(w_m^2 G\right) + u_1 \frac{du_1}{dx}$$

กำหนดให้ $\quad G = \int_\eta^\infty \frac{g^2}{\eta} d\eta$ ดังนั้นได้ว่า

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 2w_m \frac{dw_m}{dx} G - \frac{w_m^2}{b}\frac{db}{dx} G'\eta + u_1 \frac{du_1}{dx} \qquad \text{(ข3.3)}$$

เมื่อแทนทั้งหมดในสมการ x-โมเมนตัมทำให้ได้

$$\underbrace{\left[\frac{u_m}{\eta}\frac{db}{dx}\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta - \frac{b}{\eta}\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta - \frac{b\eta}{2}\frac{du_1}{dx}\right]\frac{u_m}{b} f'}_{v\frac{\partial u}{\partial r}} +$$

$$\underbrace{\left[u_1 + u_m f\right]\left[\frac{du_1}{dx} + \frac{du_m}{dx} f - \frac{\eta}{b}\frac{db}{dx} u_m f'\right]}_{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \underbrace{2w_m \frac{dw_m}{dx} G - \frac{w_m^2}{b}\frac{db}{dx} G'\eta + u_1 \frac{du_1}{dx}}_{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} +$$

$$\underbrace{\nu\left[\frac{u_m}{b} f'' + \frac{u_m}{b^2}\frac{f'}{\eta}\right]}_{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)}$$

จัดรูปสมการ

$$\underbrace{\frac{u_m^2}{b}\frac{db}{dx}\frac{f'}{\eta}\left[\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta\right] - u_m \frac{du_m}{dx}\frac{f'}{\eta}\left[\int_0^\eta f\eta d\eta\right] - \frac{u_m}{2}\frac{du_1}{dx} f'\eta}_{v\frac{\partial u}{\partial r}}$$

$$\underbrace{+u_1\frac{du_1}{dx}+u_1\frac{du_m}{dx}f-u_1\frac{u_m}{b}\frac{db}{dx}f'\eta+u_m\frac{du_1}{dx}f+u_m\frac{du_m}{dx}f^2-\frac{u_m^2}{b}\frac{db}{dx}f'f\eta}_{u\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$=\underbrace{2w_m\frac{dw_m}{dx}G-\frac{w_m^2}{b}\frac{db}{dx}G'\eta+u_1\frac{du_1}{dx}}_{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}\;\underbrace{+\nu\frac{u_m}{b^2}f''+\nu\frac{u_m}{\eta}\frac{f'}{b^2}}_{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)} \tag{ข3.4}$$

ทำการอินทิเกรตเทอม $\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta$ โดยกำหนดให้ $F=\int_0^\eta f\eta d\eta,\ F'=f\eta$ และ $f=\dfrac{F'}{\eta}$

$$\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta=\eta^2 f-2\int_0^\eta f\eta d\eta$$

$$\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta=\eta F'-2F$$

ดังนั้นหาค่า f, f' และ f'' ได้เป็น

$$f=\frac{F'}{\eta}$$

$$f'=\frac{F''}{\eta}-\frac{F'}{\eta^2}$$

$$f''=\frac{F'''}{\eta}-2\frac{F''}{\eta^2}+2\frac{F'}{\eta^3}$$

กำหนดให้ Reynolds number มีค่าเป็น $\mathrm{Re}=\dfrac{u_m b}{\nu}$ เมื่อแทน f, f', f'' และ Re ในสมการ (ข3.4) ทำให้ได้

$$\underbrace{\frac{u_m^2}{b}\frac{db}{dx}\left[\frac{F''F'}{\eta}-\frac{F'^2}{\eta^2}-2\frac{F''F}{\eta^2}+2\frac{F'F}{\eta^3}\right]-u_m\frac{du_m}{dx}\left[\frac{F''F}{\eta^2}-\frac{F'F}{\eta^3}\right]-\frac{u_m}{2}\frac{du_1}{dx}\left[F''-\frac{F'}{\eta}\right]}_{v\frac{\partial u}{\partial r}}$$

$$\underbrace{+u_1\frac{du_1}{dx}+u_1\frac{du_m}{dx}\frac{F'}{\eta}-u_1\frac{u_m}{b}\frac{db}{dx}\left[F''-\frac{F'}{\eta}\right]+u_m\frac{du_1}{dx}\frac{F'}{\eta}+u_m\frac{du_m}{dx}\frac{F'^2}{\eta}-\frac{u_m^2}{b}\frac{db}{dx}\left[\frac{F''F'}{\eta}-\frac{F'^2}{\eta^2}\right]}_{u\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$=\underbrace{2w_m\frac{dw_m}{dx}G-\frac{w_m^2}{b}\frac{db}{dx}G'\eta+u_1\frac{du_1}{dx}}_{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}\;\underbrace{+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{F'''}{\eta}-2\frac{F''}{\eta^2}+2\frac{F'}{\eta^3}\right]+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_m^2}{b}\left[\frac{F''}{\eta^2}-\frac{F'}{\eta^3}\right]}_{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)}$$

นำค่า $\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m^2}\eta$ คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\underbrace{\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left[F''F'-\frac{F'^2}{\eta}-2\frac{F''F}{\eta}+2\frac{F'F}{\eta^2}\right]-\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left[\frac{F''F}{\eta}-\frac{F'F}{\eta^2}\right]-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}\left[F''\eta-\frac{F'}{\eta}\right]}_{\mathrm{Re}\frac{b}{u_m^2}\eta v\frac{\partial u}{\partial r}}$$

$$+\underbrace{\begin{matrix}\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}\left(\dfrac{u_1}{u_m}\right)^2\eta+\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}\dfrac{u_1}{u_m}\left[F'\right]-\mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\dfrac{u_1}{u_m}\left[F''\eta-F\right]+\mathrm{Re}\dfrac{b}{u_1}\dfrac{du_1}{dx}\dfrac{u_1}{u_m}\left[F'\right]+ \\ \mathrm{Re}\dfrac{b}{u_m}\dfrac{du_m}{dx}\left[\dfrac{F'^2}{\eta}\right]-\mathrm{Re}\dfrac{db}{dx}\left[F''F'-\dfrac{F'^2}{\eta}\right]\end{matrix}}_{\mathrm{Re}\frac{b}{u_m^2}\eta u\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$=\underbrace{2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 G\eta-\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 G'\eta^2+\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)^2}_{-\mathrm{Re}\frac{b}{u_m^2}\eta\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

$$+\underbrace{\left[F'''-2\frac{F''}{\eta}+2\frac{F'}{\eta^2}\right]}_{\mathrm{Re}\frac{b}{u_m^2}\eta v\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}+\underbrace{\left[\frac{F''}{\eta}-\frac{F'}{\eta^2}\right]}_{\mathrm{Re}\frac{b}{u_m^2}\eta v\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\begin{aligned}
&F'''-\frac{F''}{\eta}+\frac{F'}{\eta^2}+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G\eta-\left[\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right]G'\eta^2+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F''F}{\eta}\\
&-\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'F}{\eta^2}+\left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F''\eta\\
&-\left[\frac{3}{2}\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]F'\\
&-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{F'^2}{\eta}\quad=\quad 0
\end{aligned}$$

(ข3.5)

สมการ θ -โมเมนตัม

แทนค่าความเร็วโดยกำหนดให้ $w=w_1(x)+w_m(x)g(\eta)$ ทำให้ได้

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{w_m g'}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{w_m g''}{b^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{dw_1}{dx}-\left(\frac{r}{b^2}\frac{db}{dx}\right)w_m g'+g\frac{dw_m}{dx}$$

เมื่อแทนทั้งหมดใน θ - โมเมนตัมทำให้ได้

$$\underbrace{\left[\frac{u_m}{\eta}\frac{db}{dx}\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta-\frac{b}{\eta}\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta-\frac{b}{2}\frac{du_1}{dx}\eta\right]\frac{w_m}{b}g'}_{v\frac{\partial w}{\partial r}}+\underbrace{\left[u_1+u_m f\right]\left[\frac{dw_1}{dx}-\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}g'\eta+\frac{dw_m}{dx}g\right]}_{u\frac{\partial w}{\partial x}}$$

$$+\underbrace{\left[\frac{u_m}{\eta}\frac{db}{dx}\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta-\frac{b}{\eta}\frac{du_m}{dx}\int_0^\eta f\eta d\eta-\frac{b\eta}{2}\frac{du_1}{dx}\right]\left[\frac{w_1+w_m g}{b\eta}\right]}_{\frac{vw}{r}}$$

$$=\nu\underbrace{\left[\frac{w_m}{b^2}g''+\frac{w_m}{b^2}\frac{g'}{\eta}-\frac{(w_1+w_m g)}{b^2\eta^2}\right]}_{\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\underbrace{u_m\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}\frac{g'}{\eta}\left[\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta\right]-w_m\frac{du_m}{dx}\frac{g'}{\eta}\left[\int_0^\eta f\eta d\eta\right]-\frac{w_m}{2}\frac{du_1}{dx}g'\eta}_{v\frac{\partial w}{\partial r}}$$

$$+\underbrace{u_1\frac{dw_1}{dx}-u_1\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}g'\eta+u_1\frac{dw_m}{dx}g+u_m\frac{dw_1}{dx}f-u_m\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}fg'\eta+u_m\frac{dw_m}{dx}fg}_{u\frac{\partial w}{\partial x}}$$

$$+\underbrace{\begin{matrix}\frac{u_m}{\eta^2}\frac{w_1}{b}\frac{db}{dx}\left[\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta\right]-\frac{w_1}{\eta^2}\frac{du_m}{dx}\left[\int_0^\eta f\eta d\eta\right]-\frac{w_1}{2}\frac{du_1}{dx}+u_m\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}\frac{g}{\eta^2}\left[\int_0^\eta f'\eta^2 d\eta\right]-\\ w_m\frac{du_m}{dx}\frac{g}{\eta^2}\left[\int_0^\eta f\eta d\eta\right]-\frac{w_m}{2}\frac{du_1}{dx}g\end{matrix}}_{\frac{vw}{r}}$$

$$=\underbrace{\nu\frac{w_m g''}{b^2}+\nu\frac{w_m g'}{b^2\eta}-\nu\frac{(w_1+w_m g)}{b^2\eta^2}}_{\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)} \qquad (ข3.6)$$

เมื่อแทน f, f', f'' และ Re ลงในสมการ (ข3.6) ทำให้ได้

$$\underbrace{u_m \frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}\left[F'g'-2\frac{Fg'}{\eta}\right]-w_m\frac{du_m}{dx}\left[\frac{Fg'}{\eta}\right]-\frac{w_m}{2}\frac{du_1}{dx}[g'\eta]}_{v\frac{\partial w}{\partial r}}$$

$$+\underbrace{u_1\frac{dw_1}{dx}-u_1\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}[g'\eta]+u_1\frac{dw_m}{dx}[g]+u_m\frac{dw_1}{dx}\left[\frac{F'}{\eta}\right]-u_m\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}[F'g']+u_m\frac{dw_m}{dx}\left[\frac{F'g}{\eta}\right]}_{u\frac{\partial w}{\partial x}}$$

$$+\underbrace{\begin{matrix}u_m\frac{w_1}{b}\frac{db}{dx}\left[\frac{F'}{\eta}-2\frac{F}{\eta^2}\right]-w_1\frac{du_m}{dx}\left[\frac{F}{\eta^2}\right]-\frac{w_1}{2}\frac{du_1}{dx}+u_m\frac{w_m}{b}\frac{db}{dx}\left[\frac{F'g}{\eta}-2\frac{Fg}{\eta^2}\right]- \\ w_m\frac{du_m}{dx}\left[\frac{Fg}{\eta^2}\right]-\frac{w_m}{2}\frac{du_1}{dx}[g]\end{matrix}}_{\frac{vw}{r}}$$

$$=\underbrace{\frac{u_m w_m}{\mathrm{Re}\,b}\left[g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}-\frac{w_1}{w_m\eta^2}\right]}_{\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)}$$

นำ $\frac{\mathrm{Re}\,b}{u_m w_m}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\underbrace{\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left[F'g'-2\frac{Fg'}{\eta}\right]-\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left[\frac{Fg'}{\eta}\right]-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}[g'\eta]}_{\frac{\mathrm{Re}}{u_m}\frac{b}{w_m}v\frac{\partial w}{\partial r}}$$

$$+\underbrace{\begin{matrix}\mathrm{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}\frac{w_1}{w_m}-\mathrm{Re}\frac{u_1}{u_m}\frac{db}{dx}[g'\eta]+\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}[g]+\mathrm{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\frac{w_1}{w_m}\left[\frac{F'}{\eta}\right]- \\ \mathrm{Re}\frac{db}{dx}[F'g']+\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left[\frac{F'g}{\eta}\right]\end{matrix}}_{\frac{\mathrm{Re}}{u_m}\frac{b}{w_m}u\frac{\partial w}{\partial x}}$$

$$+\underbrace{\begin{matrix}\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{w_1}{w_m}\left[\frac{F'}{\eta}-2\frac{F}{\eta^2}\right]-\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{w_1}{w_m}\left[\frac{F}{\eta^2}\right]-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}\frac{w_1}{w_m}+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left[\frac{F'g}{\eta}-2\frac{Fg}{\eta^2}\right]- \\ \mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left[\frac{Fg}{\eta^2}\right]-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}[g]\end{matrix}}_{\frac{vw}{r}}$$

$$=\underbrace{\left[g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}-\frac{w_1}{w_m\eta^2}\right]}_{\frac{\mathrm{Re}}{u_m}\frac{b}{w_m}\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)}$$

จัดรูปแบบสมการใหม่

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}-\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\frac{1}{\eta^2}+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta}$$
$$+\left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta-\mathrm{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\left(\frac{w_1}{w_m}\right)$$
$$-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_1}\frac{dw_1}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right]\frac{F'}{\eta}$$
$$-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta}+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right]\frac{F}{\eta^2}$$
$$+\left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\left(\frac{w_1}{w_m}\right)\right]+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2}\quad=\quad 0$$

สำหรับในกรณีที่ $w_1=0$

$$g''+\frac{g'}{\eta}-\frac{g}{\eta^2}+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg'}{\eta}+\left[\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g'\eta$$
$$-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\left(\frac{u_1}{u_m}\right)\right]g-\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}+\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]\frac{F'g}{\eta}$$
$$+\left[2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right]\frac{Fg}{\eta^2}\quad=\quad 0$$

(ข3.7)

ข4 Similarity สำหรับ Integral Governing Equation

สำหรับในการทำ Similarity สำหรับ Integral Governing Equation นั้นได้มีการรวมสมการความต่อเนื่องและสมการ r-โมเมนตัมเข้าไว้ในสมการ x-โมเมนตัม และสมการ θ-โมเมนตัม จึงทำให้สมการที่ได้มีเพียง 2 สมการ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

นำ u คูณสมการความต่อเนื่อง

$$u\frac{\partial ru}{\partial x}+u\frac{\partial r\mathrm{v}}{\partial r}=0 \qquad (ข4.1)$$

นำ r คูณสมการ x-โมเมนตัม

$$r\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}+ru\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (ข4.2)$$

นำ (ข4.1)+(ข4.2)

$$\left[r\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{\partial r\mathrm{v}}{\partial r}\right]+\left[ru\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial ru}{\partial x}\right]=-\frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (ข4.3)$$

นำ (ข4.3) ลบด้วย $\frac{\partial}{\partial x}(ruu_1)$ และ $\frac{\partial}{\partial x}(r\mathrm{v}u_1)$ ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}u)-\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}u_1)+\frac{\partial}{\partial x}(ruu)-\frac{\partial}{\partial x}(ruu_1)=-\frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(ruu_1)-\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}u_1)$$

พิจารณาที่เทอม

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(ruu_1)+\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}u_1)&=\left[u_1\frac{\partial ru}{\partial x}+ru\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]+\left[u_1\frac{\partial r\mathrm{v}}{\partial r}+r\mathrm{v}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]\\&=\left[u_1\frac{\partial ru}{\partial x}+\cancelto{0}{u_1\frac{\partial r\mathrm{v}}{\partial r}}\right]+\left[ru\frac{\partial u_1}{\partial x}+\cancelto{0}{r\mathrm{v}\frac{\partial u_1}{\partial r}}\right]\\&=ru\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned}$$

จัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mathrm{v}(u-u_1)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[ru(u-u_1)\right]+ru\frac{du_1}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(rp)}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (ข4.4)$$

ทำการอินทิเกรต $\int_0^\infty dr$ สมการ (ข4.4) ได้เป็น

$$\left[r\mathrm{v}(u-u_1)\right]_0^\infty+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\left[ru(u-u_1)\right]dr+\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[ru]dr=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty rpdr\right]+\nu\left[r\frac{\partial u}{\partial r}\right]_0^\infty$$

เมื่อ $(r\to\infty)$ ได้ว่า $u=u_1(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty\left[ru(u-u_1)\right]dr+\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[ru]dr=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty rpdr\right] \qquad (ข4.5)$$

โดยที่

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty rpdr\right]=-\frac{1}{\rho}\left[\int_0^\infty r\frac{\partial p}{\partial x}dr\right]$$

สำหรับเทอม $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ นั้นจะหาได้จากการพิจารณาสมการ r-โมเมนตัม

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{w^2}{r}$$

เมื่ออินทิเกรตจะได้

$$p_\infty-p=\int_r^\infty\frac{\rho w^2}{r}dr$$

จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทำให้ได้

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{d}{dx}\left[\int_r^\infty \frac{\rho w^2}{r}dr\right]$$

ดังนั้นจาก

$$-\frac{1}{\rho}\left[\int_0^\infty r\frac{\partial p}{\partial x}dr\right]=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^\infty+\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty\left(\frac{rw^2}{2}\right)dr\right]$$

แทนในสมการ (ข4.5) ได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[ru(u-u_1)]dr+\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[ru]dr=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^\infty+\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty\left(\frac{rw^2}{2}\right)dr\right]$$

จากสมการ Bernoulli's equation ได้ว่า

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{r=\infty}=-\rho u_1\frac{du_1}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[ru(u-u_1)]dr+\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[ru]dr=\left[u_1\frac{du_1}{dx}\frac{r^2}{2}\right]+\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty\left(\frac{rw^2}{2}\right)dr\right]$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[ru(u-u_1)]dr-\frac{d}{dx}\int_0^\infty\left[\frac{rw^2}{2}\right]dr+\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[r(u-u_1)]dr=0 \qquad (ข4.6)$$

แทนค่า $u=u_m f(\eta)+u_1,\ w=w_m g(\eta),\ \eta=\frac{r}{b(x)},\ d\eta=\frac{dr}{b(x)}$ ในแต่ละเทอมในสมการ (ข4.6)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[ru(u-u_1)]dr=\frac{d}{dx}\int_0^\infty[\eta b(u_m f+u_1)(u_m f)bd\eta]$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^\infty\eta b^2u_m^2f^2d\eta+\frac{d}{dx}\int_0^\infty\eta b^2u_1u_m fd\eta$$

$$=\frac{d}{dx}\left[b^2u_m^2\int_0^\infty\eta f^2d\eta\right]+\frac{d}{dx}\left[b^2u_1u_m\int_0^\infty\eta fd\eta\right]$$

กำหนดให้ $I_1=\int_0^\infty f\eta d\eta$ และ $I_2=\int_0^\infty f^2\eta d\eta$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[ru(u-u_1)]dr=I_1\frac{d}{dx}\left(b^2u_1u_m\right)+I_2\frac{d}{dx}\left(b^2u_m^2\right) \qquad (ข4.7)$$

สำหรับเทอม

$$\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty[r(u-u_1)]dr=\frac{du_1}{dx}\left[\int_0^\infty b\eta u_m fbd\eta\right]$$

$$= \frac{du_1}{dx}\left[u_m b^2 \int_0^\infty f\eta d\eta\right]$$

จะได้ว่า

$$\frac{du_1}{dx}\int_0^\infty [r(u-u_1)]dr = I_1 \frac{du_1}{dx} u_m b^2 \qquad (ข4.8)$$

สำหรับ

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\infty \left[\frac{rw^2}{2}\right]dr = -\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty \eta b \frac{w_m^2}{2} g^2 b d\eta\right]$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(w_m^2 b^2\right)\frac{1}{2}\int_0^\infty g^2 \eta d\eta$$

กำหนดให้ $I_5 = \frac{1}{2}\int_0^\infty g^2 \eta d\eta$

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\infty \left[\frac{rw^2}{2}\right]dr = -I_5 \frac{d}{dx}\left(w_m^2 b^2\right) \qquad (ข4.9)$$

แทนค่าสมการ (ข4.7), (ข4.8) และ (ข4.9) ในสมการ (ข4.6) ได้เป็น

$$I_1 \frac{d}{dx}\left(b^2 u_1 u_m\right) + I_2 \frac{d}{dx}\left(b^2 u_m^2\right) - I_5 \frac{d}{dx}\left(b^2 w_m^2\right) + I_1 \frac{du_1}{dx} u_m b^2 = 0$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์ได้เป็น

$$I_1\left[b^2 u_1 \frac{du_m}{dx} + 2b^2 u_m \frac{du_1}{dx} + 2u_1 u_m b \frac{db}{dx}\right] + I_2\left[2b^2 u_m \frac{du_m}{dx} + 2u_m^2 b \frac{db}{dx}\right]$$
$$- I_5\left[2b^2 w_m \frac{dw_m}{dx} + 2w_m^2 b \frac{db}{dx}\right] = 0 \qquad (ข4.10)$$

นำ $\frac{\mathrm{Re}}{bu_m^2}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ (ข4.10) ได้เป็น

$$I_1\left[\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}\frac{u_1}{u_m} + 2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m} + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right] + I_2\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx} + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]$$
$$- I_5\left[2\,\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\left(\frac{w_m}{u_m}\right)^2\right] = 0$$

(ข4.11)

สมการ θ -โมเมนตัม

$$\mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}w}{r} = \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rw}{\partial r}\right)$$

นำ r คูณสมการ θ -โมเมนตัม ได้

$$r\nu\frac{\partial w}{\partial r}+ru\frac{\partial w}{\partial x}+\nu w=r\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rw}{\partial r}\right) \qquad (ข4.12)$$

พิจารณาเทอมสุดท้ายของสมการ (ข4.12)

$$r\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rw}{\partial r}\right)=\nu\left[r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right]$$

แทนค่ากลับในสมการ (ข4.12) ได้เป็น

$$r\nu\frac{\partial w}{\partial r}+ru\frac{\partial w}{\partial x}+\nu w=\nu\left[r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right]$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\left[\nu w+r\nu\frac{\partial w}{\partial r}\right]+\left[ru\frac{\partial w}{\partial x}\right]=\nu\left[r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+3\frac{\partial w}{\partial r}\right]-\nu\,\frac{w}{r}-2\nu\,\frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial r}(rw)+u\frac{\partial}{\partial x}(rw)=\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 w\right)\right)-2\nu\,\frac{\partial w}{\partial r}-\nu\,\frac{w}{r} \qquad (ข4.13)$$

นำ r คูณสมการ (ข4.13) ได้เป็น

$$r\nu\frac{\partial}{\partial r}(rw)+ru\frac{\partial}{\partial x}(rw)=r\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 w\right)\right)-2r\nu\,\frac{\partial w}{\partial r}-\nu w \qquad (ข4.14)$$

นำ rw คูณสมการความต่อเนื่องได้เป็น

$$rw\frac{\partial ru}{\partial x}+rw\frac{\partial r\nu}{\partial r}=0 \qquad (ข4.15)$$

นำ (ข4.14)+(ข4.15) ได้

$$\left[rw\frac{\partial r\nu}{\partial r}+r\nu\frac{\partial rw}{\partial r}\right]+\left[rw\frac{\partial ru}{\partial x}+ru\frac{\partial rw}{\partial x}\right]=r\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 w\right)\right)-2r\nu\,\frac{\partial w}{\partial r}-\nu w$$

ได้สมการโมเมนตัมเชิงมุมเป็น

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\nu w\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 uw\right)=r\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r^2 w\right)}{\partial r}\right)-2r\nu\,\frac{\partial w}{\partial r}-\nu w$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial\left(r^2\nu w\right)}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 uw\right)=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial w}{\partial r}-rw\right)\right] \qquad (ข4.16)$$

อินทิเกรต $\int_0^\infty dr$ สมการ (ข4.16) ได้เป็น

$$\left[r^2\nu w\right]_0^\infty+\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty\left(r^2 uw\right)dr\right]=\nu\left[\left(r^2\,\frac{\partial w}{\partial r}-rw\right)\right]_0^\infty$$

ที่ $r=0$ ค่า $\left(w,\dfrac{\partial w}{\partial r}=0\right)$ และ $r\to\infty$ ค่า $\left(w,\dfrac{\partial w}{\partial r}=0\right)$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty r^2 uwdr\right]=0 \qquad (ข4.17)$$

แทนค่า $u=u_m f+u_1,\quad w=w_m g(\eta),\ \eta=\dfrac{r}{b(x)}$ และ $d\eta=\dfrac{dr}{b(x)}$ ในสมการ (ข4.17) ได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty \eta^2 b^3 u_m w_m fgd\eta\right]+\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty \eta^2 b^3 u_1 w_m gd\eta\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[u_m w_m b^3\right]\left(\int_0^\infty fg\eta^2 d\eta\right)+\frac{d}{dx}\left[u_1 w_m b^3\right]\left(\int_0^\infty g\eta^2 d\eta\right)=0 \qquad (ข4.18)$$

กำหนดให้ $I_3=\int_0^\infty fg\eta^2 d\eta$ และ $I_4=\int_0^\infty g\eta^2 d\eta$ แทนค่าในสมการ (ข4.18)

$$I_3\frac{d}{dx}\left[u_m w_m b^3\right]+I_4\frac{d}{dx}\left[u_1 w_m b^3\right]=0$$

ทำการหาอนุพันธ์ได้เป็น

$$I_3\left[b^3 u_m\frac{dw_m}{dx}+b^3 w_m\frac{du_m}{dx}+3u_m w_m b^2\frac{db}{dx}\right]+I_4\left[b^3 u_1\frac{dw_m}{dx}+b^3 w_m\frac{du_1}{dx}+3u_1 w_m b^2\frac{db}{dx}\right]=0 \qquad (ข4.19)$$

และนำ $\dfrac{\mathrm{Re}}{b^2 u_m w_m}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ (ข4.19) ได้เป็น

$$I_3\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_m}\frac{du_m}{dx}+3\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\right]+$$

$$I_4\left[\mathrm{Re}\frac{b}{w_m}\frac{dw_m}{dx}\frac{u_1}{u_m}+\mathrm{Re}\frac{b}{u_1}\frac{du_1}{dx}\frac{u_1}{u_m}+3\mathrm{Re}\frac{db}{dx}\frac{u_1}{u_m}\right]=0 \qquad (ข4.20)$$

ภาคผนวก ค

ค1 ขั้นตอนการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดัน

สำหรับการคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดันกรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงและที่ระดับการหมุนควงต่ำ ในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งและในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ตนั้นมีขั้นตอนการคำนวณดังรูปที่ ค.1 โดยเริ่มต้นจากการกำหนดค่า k_b หรือ k_{bf} สำหรับกรณีกระแสลมตาม จากนั้นคำนวณหาค่า k_{u_m}, k_{w_m} หรือ $k_{u_m f}, k_{w_m f}$ จากสมการ Integral equation เมื่อแทนค่าคงที่ทั้งหมดลงในสมการ Differential equation แล้วจึงทำการแก้สมการอนุพันธ์เชิงสามัญโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Rung-Kutta อันดับ 4 จากนั้นตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าที่ $F(1) = 0.5$ ถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_b หรือ k_{bf} ใหม่แล้วทำการคำนวณซ้ำใหม่จนลู่เข้า

หมายเหตุ สำหรับในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงนั้นกำหนดให้ k_{w_m} และ $k_{w_m f}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ และในกรณีกระแสลมตามที่มีความเร็วไม่คงที่นั้นให้แทนค่า k_{bf} ด้วย A^* และแทนค่า $k_{u_m f}$ ด้วย B^*

ในการคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดันกรณีการไหลของเจ็ตที่ไม่หมุนควงและที่ระดับการหมุนควงต่ำ ในกระแสลมตามโดยเปลี่ยนแปลงค่า Vr นั้นมีขั้นตอนการคำนวณดังรูปที่ ค.2 โดยเริ่มต้นจากการกำหนดค่า k_b, k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} จากนั้นแทนค่าคงที่ทั้งหมดลงในสมการ Differential equation แล้วจึงทำการแก้สมการอนุพันธ์เชิงสามัญ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Rung-Kutta อันดับ 4 ต่อมาก็ทำการคำนวณค่าคงที่ I ต่างๆจากการอินทิเกรตด้วย Simpson's rule จากนั้นจึงคำนวณค่า k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} ใหม่ เมื่อเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าที่กำหนดเริ่มต้นถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} ขึ้นมาใหม่แล้วจึงทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 2 ใหม่จนลู่เข้า หลังจากนั้นตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าที่ $F(1) = 0.5$ ถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_b ใหม่แล้วจึงเริ่มทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 1 ใหม่จนลู่เข้า

หมายเหตุ สำหรับในกรณีเจ็ตที่ไม่หมุนควงนั้นกำหนดให้ k_{w_m} มีค่าเท่ากับศูนย์

สำหรับการคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดันกรณีการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในกรณีที่อากาศด้านนอกหยุดนิ่งและในกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ต โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr หรือ k_{bs} นั้นมีขั้นตอนการคำนวณดังรูปที่ ค.3 โดยเริ่มต้นจากการกำหนดค่า k_b, k_{u_m}, k_{w_m} หรือ $k_{bf}, k_{u_m f}, k_{w_m f}$ สำหรับกรณีกระแสลมตาม จากนั้นแทนค่าคงที่ทั้งหมดลงในสมการ Differential equation แล้วจึงทำการแก้สมการอนุพันธ์เชิงสามัญโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Rung-Kutta

อันดับ 4 ต่อมาก็ทำการคำนวณค่าคงที่ I ต่างๆจากการอินทิเกรตด้วย Simpson's rule จากนั้นจึงคำนวณค่า k_{u_m}, k_{w_m} หรือ $k_{u_{mf}}, k_{w_{mf}}$ ใหม่ เมื่อเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าที่กำหนดเริ่มต้นถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_{u_m}, k_{w_m} หรือ $k_{u_{mf}}, k_{w_{mf}}$ ขึ้นมาใหม่แล้วจึงทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 2 ใหม่จนลู่เข้า หลังจากนั้นตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าที่ $F(1) = 0.5$ ถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_b หรือ k_{bf} ใหม่แล้วจึงเริ่มทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 1 ใหม่จนลู่เข้า

หมายเหตุ สำหรับในกรณีกระแสลมตามที่มีความเร็วมากกว่าความเร็วเจ็ตนั้นให้แทนค่า k_{bf} ด้วย A^* และแทนค่า $k_{u_{mf}}$ ด้วย B^*

ในการคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดันกรณีการไหลของเจ็ตที่หมุนควงในกระแสลมตาม โดยเปลี่ยนแปลงค่า Sr และ Vr นั้นมีขั้นตอนการคำนวณดังรูปที่ ค.4 โดยเริ่มต้นจากการกำหนดค่า k_b, k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} จากนั้นแทนค่าคงที่ทั้งหมดลงในสมการ Differential equation แล้วจึงทำการแก้สมการอนุพันธ์เชิงสามัญโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Rung-Kutta อันดับ 4 ต่อมาก็ทำการคำนวณค่าคงที่ I ต่างๆจากการอินทิเกรตด้วย Simpson's rule จากนั้นจึงคำนวณค่า k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} ใหม่ เมื่อเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าที่กำหนดเริ่มต้นถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_{u_m}, k_{w_m} และ k_{u_1} ขึ้นมาใหม่แล้วจึงทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 2 ใหม่จนลู่เข้า หลังจากนั้นตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าที่ $F(1) = 0.5$ ถ้าไม่ลู่เข้าให้กำหนดค่า k_b หรือ k_{bf} ใหม่แล้วจึงเริ่มทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 1 ใหม่จนลู่เข้า

ค2 โปรแกรมการคำนวณรูปร่างการกระจายตัวของความเร็วและผลต่างความดัน

ในส่วนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ค นี้เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้สำหรับในการคำนวณหารูปร่างการกระจายตัวของความเร็ว และผลต่างความดันของทั้งกรณี เจ็ตที่ไม่หมุนควงและกรณีเจ็ตที่หมุนในกรณีต่างๆ โดยที่รายละเอียดของโปรแกรมนั้นจะประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นโปรแกรมหลัก (Main program) และส่วนที่เป็นโปรแกรมย่อย (Subroutine) ต่างๆ ดังนี้

- Main Program Case Nocoflow and Vary velocity ratio (Vr)

  เป็นโปรแกรมหลักที่ใช้ในการคำนวณในกรณีของ Case A1, Case A3, Case B1, Case B3, Case C11, Case C12, Case C31 และ Case 32 โดยภายในโปรแกรมหลักนี้จะมีการกำหนดค่าคงที่ต่างๆ เพื่อใช้คำนวณต่อไปโดยโปรแกรมย่อย

- Main Program for Case strong Coflow

  เป็นโปรแกรมหลักที่ใช้ในการคำนวณในกรณีของ Case A2, Case B2 และ Case C2 โดยภายในโปรแกรมหลักนี้จะมีการกำหนดค่าคงที่ต่างๆ เพื่อใช้คำนวณต่อไปโดยโปรแกรมย่อย

- Subroutine Rang-Kutta order 4

  เป็นโปรแกรมย่อยที่ใช้ในการคำนวณแก้สมการ ODE โดยระเบียบวิธี Rang-Kutta order 4

- Subroutine Integrate by Simpson's rule

  เป็นโปรแกรมย่อยที่ใช้ในการคำนวณการหาค่าการอินทิเกรตโดยระเบียบวิธี Simpson's rule

สำหรับรายละเอียดตัวโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณแสดงได้ดังนี้

Main Program Case Nocoflow and Vary velocity ratio (Vr)

```
C******PROGRAM SIMILARITY CIRCULAR JET AND SWIRLING JET IN *******
C       CASE NOCOFLOW (U1=0) AND VARY VELOCITY RATION (Vr=U1/UM)
C
C                   APPLY SUBROUTINE FOR PROGRAM
C        EQUATION FOR SECONDARY ORDER OF SETA-MOMENTUM
C              AND THIRD ORDER OF X- MOMENTUM EQUATION)
C*********************************************************************
C                                   ETA  = N
C                                          F  = F
C                                DF/DN  = P = F'
C                                DP/DN  = Q = F"
C                                          G  = G
C                                DG/DN  = A = G'
C                                     F'/N  = T
C********************** *** SET UP CONDITION ***************************
C                               MAIN PROGRAM
C                        ////DEFINE SW BUT DEFINE CF////
C
C
C********************** THIS PROGRAM IS MODIFLING  *******************
C**********  SUBROUTINE FOR CALCULATE RANK-KUTTA ORDER 4*********
            PROGRAM SIMILARITY_JET
            PARAMETER (NX=4101)
            DIMENSION ETA(NX),F(NX),P(NX),Q(NX),A(NX),G(NX)
            DIMENSION U(NX),W(NX),PESS(NX)
            REAL INTEG
            ETAMAX=10.0
            H=0.01
C**************** DEFINE ERROR FOR  CALCULATION   *******************
            EPSLON1=1.0E-2
            EPSLON2=1.0E-3
            MX=INT(ETAMAX/H)+1
            MAX=MX

C****************  ITER1= ITERATION OF  PEAK G-EQATION ****************
C**************** ITER2= ITERATION OF  KB ******************************
C**************** ITER3= ITERATION OF CONSTRAN **********************
            ITER1MAX=200
            ITER2MAX=200
            ITER3MAX=200

            ITER2=1
            KBEAK=0.5
            PEAK=1.0
C******************* SET UP SWIRL NUMBER (SW=WM/UM) ***************
            SW=0.8
C****************** SET UP VELOCITY RATIO (CF=U1/UM) ****************
            CF=1.0
C**************** SET CONSTANT C1,C2,C3,C5 FOR ODE ********************
C                            C1=Re(db/dx)
C                            C2=Re(b/um)(dum/dx)
C                            C3=Re(b/u1)(du1/dx)
C                            C5=Re(b/wm)(dwm/dx)
C                  FOR CF AND SW IS DEFINED
            C1=37.086
            DC1=0.5
C*************************************************************************
51           C1=C1+DC1
             C2=-C1
             C3=C2
             C5=C2
            ITER3=1
C*************************************************************************
101         A0=0.6
            DA0=0.2
            ITER1=1
C******************** START ITERATION AT ETA=0.***********************
C******************** SET UP BOUNDARY CONDITION *********************
1           I=1
            ETA(1)=0.01
            A0=A0+DA0
C******************** FIRST SET UP VALUE FOR ACALCULATION ***********
            TOL1=0.0
            TOL2=0.0
            TOL3=0.0
            TOL4=0.0
            TOL5=0.0

C********** SET UP BOUNDARY CONDITION OF AXIAL EQUATION***********
            F(1) = 0.0
            P(1) = 0.01
            Q(1) = 1.0
C********* SET UP BOUNDARY CONDITION OF TANGENTIAL EQUATION *****
            G(1)=0.0
C********* GUESS A(0) UNTIL A(00)=0
            A(1)=A0

C****************** APPLY RK-4 FORMULAR FOR ODE ********************
            ETA0=ETA(1)
C*************************************************************************
2           CALL INTEGATEG(I,MX,G,H,ETA0,ETAMAX,INTEG)

            CALL RANK4(I,H,MX,INTEG,SW,CF,C1,C2,C3,C5,ETA,F,P,Q,G,A)

            ETA(I+1)=ETA(1)+I*H
            I=I+1
```

```
      IF (I.LT.MX ) GOTO 2
      CONTINUE
C******************** SERACH LARGEST VALUE **************************
3     CALL BIGEST(MX,G,BIG)
C*********************************************************************
C     LOOP ITERATION FOR APPROXIMATE BOUNDARY CONDITION
C     IS SATISFIED (G'(OO))

        ERRORIT=ABS(BIG-PEAK)
      IF (ERRORIT.LE.EPSLON1) GOTO 30
      IF (((BIG.GT.PEAK).AND.(DA0.GT.0.)).OR.
     *   ((BIG.LT.PEAK).AND.(DA0.LT.0.))) DA0=-DA0/2.
      IF (ITER1.GE.ITER1MAX) GOTO 30
      ITER1=ITER1+1
      GOTO 1
30    CONTINUE

C*********  LOOP FOR CALCULATION INTEGRATION BY TRAPEZOIDAL *****
C************   I1=SUM1, I2=SUM2, I3=SUM3,  I4=SUM4,  I5=SUM5   ***********

      CALL INTEGATE1(MX,P,H,SUM1)

      CALL INTEGATE2(MX,P,ETA,H,SUM2)

      CALL INTEGATE3(MX,P,G,ETA,H,SUM3)

      CALL INTEGATE4(MX,G,ETA,H,SUM4)

      CALL INTEGATE5(MX,G,ETA,H,SUM5)

C************** SET FOR LINEAR MOMENTUM CONSTRAINT ***************
      C2N=-2*C1*(SUM1*CF+SUM2-SUM5*SW*SW)/
*     (3*SUM1*CF+2*SUM2-2*SUM5*SW*SW)

C************** SET FOR ANGULAR MOMENTUM CONSTRAINT *************
C     C2N=-C1*(3*SUM3+3*SUM4*CF)/(2*SUM3+2*SUM4*CF)
C*********************************************************************
      DEL=ABS(C2-C2N)
      C2=C2N
      C3=C2
      C5=C2
      IF (DEL.LE.EPSLON2) GOTO 35
      ITER3=ITER3+1
      IF (ITER3.GT.ITER3MAX) GOTO 7
      WRITE (*,87) DEL,C2,C1,ITER3
87    FORMAT ('  DEL =',1X,F8.5,2X,'C2=',1X,F12.6,2X,'(C1)=',1X,F12.6
   *     ,   2X,'ITER3 =',1X,I4)
      GOTO 101
35    CONTINUE
```

```
C******************** ITERATION K ***************************************
      NUM=INT((1-ETA(1))/H)+1
      PIG=P(NUM)/ETA(NUM)

      ERRORIT2=ABS(PIG-KBEAK)
      IF (ERRORIT2.LE.EPSLON2) GOTO 97

      IF (((PIG.GT.KBEAK).AND.(DC1.LT.0.)).OR.
      *   ((PIG.LT.KBEAK).AND.(DC1.GT.0.))) DC1=-DC1/2.

        IF (ITER2.GE.ITER2MAX) GOTO 97
      ITER2=ITER2+1

      WRITE(*,99) ERRORIT,ERRORIT2,C1,ITER2
99    FORMAT (' ERR K =',2X,F8.5,2X,'ERR PEAK =',2X,F8.5,
      *                 2X,'C1 =',2X,F10.5,2X,'ITER =',2X,I5)
      GOTO 51
97    CONTINUE

C*********************************************************************
C*********** CALCULATE U/UM AND W/WM *******************************
15      DO 10 I=1,MX
      U(I)=P(I)/ETA(I)
      W(I)=G(I)
C**********************************************************************
      SIGMA=0.0
      FS=(G(I)*G(I))/ETA(I)
      FN=(G(MX)*G(MX))/ETA(MX)

      DO 121 J=I,MX
      SIGMA=SIGMA+((G(J)*G(J))/ETA(J))
121   CONTINUE

      PESS(I)=0.5*H*(2*SIGMA-FS-FN)

10    CONTINUE

C*********************************************************************
C********************** PRINT DATA RESULT  *************************
4     WRITE(8,11) SUM1,SUM2,SUM3,SUM4,SUM5
11    FORMAT(10X'I1=',2X,F8.4,8X,'I2=',2X,F8.4,8X,'I3=',2X,F8.4,8X,
   *  'I4=',2X,F8.4,8X,'I5=',2X,F8.4)
      WRITE(8,12)        SW,CF
12    FORMAT(10X,' SWIRL NUMBER =  ',F8.4 // 10X,' COFLOW  = ',F8.3)

      WRITE(8,31) ITER1,ITER2,ITER3
31    FORMAT(10X' ITERATION1 OF SATIFY BC =',2X,I4 /,
   *  10X' ITERATION2 OF SATIFY BC =',2X,I4 /,
   *  10X' ITERATION3 OF SATIFY BC =',2X,I4)
      WRITE(8,81) H,C1,C2,C3,C5
```

```
81          FORMAT(10X,'H = ',2X,F13.5,10X,'C1 = ',2X,F13.5,10X,'C2 = ',F13.5,
   *        10X,'C3 = ',F13.5,10X,'C5 = ',F13.5)
C********************* PRINT DATA RESULT *****************************
            WRITE(8,5) ITER2
 5          FORMAT( 1H1,23X,24HNUMBER OF ITERATION   = ,I3 //
            22X,3HETA,20X,
   *        1HF,20X,2HF*,20X,3HF**,20X,1HG,20X,2HG*
```

Main Program for Case strong Coflow

```
C********** PROGRAM SIMILARITY JET IN  COFLOW STREAM ************
C
C   (MODIFY SUBROUTINE FOR INTEGRATION BY SIMPSON1/3 METHOD
C                  APPLY SUBROUTINE FOR PROGRAM
C       (EQUATION FOR SECONDARY ORDER OF SETA-MOMENTUM
C                                AND THIRD ORDER OF X-MOMENTUM EQUATION)


C*********************************************************************
C                                        ETA  = N
C                                           F  = F
C                                   DF/DN  = P = F'
C                                   DP/DN  = Q = F''
C                                          G  = G
C                                   DG/DN  = A = G'
C                                        F'/N  = T
C************************* SET UP CONDITION ************************
C****************************** MAIN PROGRAM ***********************
            PROGRAM SIMILARITY_JET
            PARAMETER (NX=3101)
            DIMENSION ETA(NX),F(NX),P(NX),Q(NX),A(NX),G(NX)
            DIMENSION U(NX),W(NX),PESS(NX)
            REAL INTEG
            ETAMAX=10.0
            H=0.01
            MX=INT(ETAMAX/H)+1
            MAX=MX
C*************** DEFINE ERROR FOR  CALCULATION   ********************
            EPSLON1=1.0E-6
            EPSLON2=1.0E-4
            NU=1.4E-5
            RHO=1.225
            PI=22/7.
C**********************************************************************
C           ITER1MAX = MAX ITERATION OF PEAK
C           ITER2MAX = MAX ITERATION OF BOUNDARY CONDITION K2
C           ITER3MAX = MAX ITERATION OF K1
```

```
*         , 20X,4HU/UM,20X,4HW/WM,20X,5HPRESS)
            WRITE(8,6) (ETA(I),F(I),P(I),Q(I),G(I),A(I),U(I),W(I),PESS(I),
   *        I=1,MX,1)
6           FORMAT(22X,F8.4,8E19.7)
            WRITE(*,*)  ' CONVERGE '
 7          STOP
            END


            ITER1MAX=200
           ITER2MAX=200
            ITER3MAX=200

            ITER3=1
            PEAK=1.0
            KBEAK=0.5
C************** SET CONSTANT C1,C2,C3,C4,C5 FOR ODE ******************
C
C             C1 = A = 0.5*Re(b/u1)(du1/dx)*(u1/um) + Re(db/dx)*(u1/um)
C             C2 = B = Re(b/u1)(du1/dx)*(u1/um) + Re(b/um)(dum/dx)*(u1/um)
C             C3 = C = Re(b/wm)(dwm/dx)*(u1/um) - 0.5Re(b/u1)(du1/dx)*(u1/um)
C             C4 = Re(db/dx)*((wm/um)**2)
C             C5 = Re(b/wm)(dwm/dx)*((wm/um)**2)
C
C                              FOR C1 AND C4 IS DEFINED
            C1=3.79375
            DC1=0.00002
C*********************************************************************
52          ITER2=1
            C1=C1+DC1
            C3=-3*C1
            C4=0.9
            C2=-2*C1
            C5=-3*C4

C********************** ASSUME WEAK SWIRLING JET ******************
51          A0=0.6
            DA0=0.2
            ITER1=1
C************* SET INITIAL VALUE FOR CALCULATION *****************

            DO 200 N=1,MX
            G(N)=0.0
200         CONTINUE

C****************  START ITERATION AT ETA=0.  **********************
C****************  SET UP BOUNDARY CONDITION  *********************
 1          I=1
            ETA(1)=0.01
            A0=A0+DA0
```

```
C********** SET UP BOUNDARY CONDITION OF AXIAL EQUATION *********
      F(1) = 0.0
      P(1) = 0.01
      Q(1) = 1.0
C****** SET UP BOUNDARY CONDITION OF TANGENTIAL EQUATION *******
      G(1)=0.0
C****************** GUESS A(0) UNTIL A(00)=0  ***************************
      A(1)=A0
C***************** APPLY RK-4 FORMULAR FOR ODE *********************
C                      APPLY SUBROUTINE INTEGRATION
C**************** INTEGRATIN FOR G BY TRAPEZOIDAL RULE ************
C
      ETA0=ETA(1)
2     CALL INTEGATEG(I,MX,G,H,ETA0,ETAMAX,INTEG)
C**********************************************************************
      CALL RANK4(I,H,MX,INTEG,C1,C2,C3,C4,C5,ETA,F,P,Q,G,A)
      ETA(I+1)=ETA(1)+I*H
      I=I+1
      IF (I.LT.MX) GOTO 2
      CONTINUE
C******************** SERACH LARGEST VALUE ************************
3     CALL BIGEST(MX,G,BIG)
C**********************************************************************
C     LOOP ITERATION FOR APPROXIMATE BOUNDARY CONDITION
C     IS SATISFIED (G'(OO))

        ERRORIT1=ABS(BIG-PEAK)
      IF (ERRORIT1.LE.EPSLON1) GOTO 30
      IF (((BIG.GT.PEAK).AND.(DA0.GT.0.)).OR.
      *   ((BIG.LT.PEAK).AND.(DA0.LT.0.))) DA0=-DA0/2.
      IF (ITER1.GE.ITER1MAX) GOTO 30
      ITER1=ITER1+1
      GOTO 1
30    CONTINUE
C***********  LOOP FOR CALCULATION INTEGRATION BY TRAPEZOIDAL ****
C**********   I1=SUM1, I2=SUM2, I3=SUM3,  I4=SUM4,  I5=SUM5   *************

      CALL INTEGATE1(MX,P,H,SUM1)

      CALL INTEGATE2(MX,P,ETA,H,SUM2)

      CALL INTEGATE3(MX,P,G,ETA,H,SUM3)

      CALL INTEGATE4(MX,G,ETA,H,SUM4)

      CALL INTEGATE5(MX,G,ETA,H,SUM5)
```

```
C******************* (CF <>0) ,CHECK ONE EQUATION ONLY  ***************

      TEM1=SUM5/SUM1
      TEM2=2*C5+2*C4
      TEM3=-2*C1

      C2N=(TEM1*TEM2)+TEM3
      ERRORIT2=ABS(C2-C2N)

      C2=C2N

C********** CHECK CONVERSE OF ITERATION OF (CONSTANT C) ***********
C     IF(ITER2.GE.ITER2MAX) GOTO 15
      WRITE(*,24) ITER1,ITER2,ERRORIT2
24    FORMAT(' ITER1PEAK = ',I3,7X,' ITER2K2 = ',I3,5X,'ERRK2 = ',
   *  F10.6)

C****************** GOTO 15 FOR WITHOUT U1 ************************
      IF(ITER2.GE.ITER2MAX) GOTO 15
C**********************************************************************
C     IF(ITER2.GE.ITER2MAX) GOTO 7
      ITER2=ITER2+1
C     IF((ERROR1.GT.EPSLON2).OR.(ERROR2.GT.EPSLON2)) GOTO 51
      IF (ERRORIT2.GT.EPSLON2) GOTO 51
C************************** ITERATION K1 ****************************
       NUM=INT((1-ETA(1))/H)+1
      PIG=P(NUM)/ETA(NUM)

        ERRORIT3=ABS(PIG-KBEAK)
      IF (ERRORIT3.LE.EPSLON2) GOTO 97

      IF (((PIG.GT.KBEAK).AND.(DC1.LT.0.)).OR.
      *   ((PIG.LT.KBEAK).AND.(DC1.GT.0.))) DC1=-DC1/2.

       IF (ITER3.GE.ITER3MAX) GOTO 97
      ITER3=ITER3+1

        WRITE(*,99) ERRORIT1,ERRORIT2,ERRORIT3,C1
99    FORMAT ('  ERRPEAK =',2X,F8.5,3X,'ERRK2 =',2X,F8.5,
      *                    3X,'  ERRK1 =',2X,F8.5,2X,'C1 =',2X,F8.5)
      WRITE(*,100) ITER3
100   FORMAT('  ITER K1 =',I3)
      GOTO 52
97    CONTINUE
C****** CALCULATE U/UM AND W/WM AND PRESSURE DISTRIBUTION *****
15    DO 10 I=1,MX
      U(I)=P(I)/ETA(I)
      W(I)=G(I)
```

```
C*************************************************************************

          SIGMA=0.0
          FS=(G(I)*G(I))/ETA(I)
          FN=(G(MX)*G(MX))/ETA(MX)

          DO 121 J=I,MX
          SIGMA=SIGMA+((G(J)*G(J))/ETA(J))
121       CONTINUE

          PESS(I)=0.5*H*(2*SIGMA-FS-FN)

10        CONTINUE

C*************************************************************************
C********************* PRINT HEADLINE DATA RESULT *******************
4         WRITE(8,11) SUM1,SUM2,SUM3,SUM4,SUM5
11        FORMAT(10X'I1=',2X,F10.5,8X,'I2=',2X,F10.5,8X,'I3=',2X,F10.5,8X,
   *      'I4=',2X,F10.5,8X,'I5=',2X,F10.5)

          WRITE(8,31) ITER1
31        FORMAT(10X' ITERATION OF SATIFY BC OF G = ',2X,I3)

          WRITE(8,81) C1,C2,C3,C4,C5
```

Subroutine Rang-Kutta order 4

```
C***************SUBROUTINE RANG-KUTTA ORDER 4 ********************
         SUBROUTINE  RANK4(I,H,MX,INTEG,SW,CF,C1,C2,C3,C5,ETA,F,P,Q,G,A)
DIMENSION ETA(MX),F(MX),P(MX),Q(MX),A(MX),G(MX)
          REAL INTEG
          EXTERNAL FUNC1,FUNC2,FUNC3,FUNC4,FUNC5

          D1F = H*FUNC1(P(I))
          D1P = H*FUNC2(Q(I))
          D1Q = H*FUNC3(F(I),P(I),Q(I),G(I),A(I),ETA(I),C1,C2,C3,C5,SW,CF,
          *     INTEG)
          D1G = H*FUNC4(A(I))
          D1A = H*FUNC5(F(I),P(I),G(I),A(I),ETA(I),C1,C2,C3,C5,CF)

          Z=ETA(I)+0.5*H

          FF=F(I)+0.5*D1F
          PP=P(I)+0.5*D1P
          QQ=Q(I)+0.5*D1Q
          GG=G(I)+0.5*D1G
          AA=A(I)+0.5*D1A

          D2F=H*FUNC1(PP)
          D2P=H*FUNC2(QQ)
          D2Q=H*FUNC3(FF,PP,QQ,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,SW,CF,INTEG)
          D2G=H*FUNC4(AA)
          D2A=H*FUNC5(FF,PP,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,CF)
```

```
81        FORMAT(10X,'C1 =  ',F10.5,10X,'C2 = ',F10.5,10X,'C3 = ',F10.5,
   *      10X,'C4 = ',F10.5,10X,'C5 = ',F10.5)

C********************** PRINT DATA RESULT   **************************

          WRITE(8,5) ITER2
5         FORMAT( 1H1,23X,24HNUMBER OF ITERATION   = ,I3 // 22X,3HETA,17X,
   *      1HF,17X,2HF*,17X,3HF**,17X,1HG,17X,2HG*
   *      ,  17X,4HU/UM,17X,4HW/WM,17X,3HWAX,17X,4HWTAN)

          WRITE(8,6) (ETA(I),F(I),P(I),Q(I),G(I),A(I),U(I),W(I),PESS(I),
   *       I=1,MX,1)
6          FORMAT(22X,F8.4,8F14.7)


C*********** CALCULATE GROWTH RATE AND VELOCITY DECAY **********
C
C         SET FOR NOT CALCULATE GROWTH RATE AND VELOCITY DECAY
          GOTO 7

C************************   END PROGRAM    ****************************
7         STOP
          END


          Z=ETA(I)+0.5*H
          FF=F(I)+0.5*D2F
          PP=P(I)+0.5*D2P
          QQ=Q(I)+0.5*D2Q
          GG=G(I)+0.5*D2G
          AA=A(I)+0.5*D2A

          D3F=H*FUNC1(PP)
          D3P=H*FUNC2(QQ)
          D3Q=H*FUNC3(FF,PP,QQ,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,SW,CF,INTEG)
          D3G=H*FUNC4(AA)
          D3A=H*FUNC5(FF,PP,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,CF)

          Z=ETA(I)+H
          FF=F(I)+D3F
          PP=P(I)+D3P
          QQ=Q(I)+D3Q
          GG=G(I)+D3G
          AA=A(I)+D3A

          D4F=H*FUNC1(PP)
          D4P=H*FUNC2(QQ)
          D4Q=H*FUNC3(FF,PP,QQ,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,SW,CF,INTEG)
          D4G=H*FUNC4(AA)
```

```
      D4A=H*FUNC5(FF,PP,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,CF)

      F(I+1)=F(I)+(D1F+2.*D2F+2.*D3F+D4F)/6.
      P(I+1)=P(I)+(D1P+2.*D2P+2.*D3P+D4P)/6.
      Q(I+1)=Q(I)+(D1Q+2.*D2Q+2.*D3Q+D4Q)/6.
```

Subroutine Integrate by Simpson's rule

```
C*************************************************************************
SUBROUTINE INTEGATEG(I,MX,G,H,ETA0,ETAMAX,INTEG)
      DIMENSION  G(MX)
      REAL INTEG

      SUM=0.0
      ETAI=ETA0+(I-1)*H

      DO 77 J=I,MX
      ZZ=ETA0+(J-1)*H
      SUM=SUM+((G(J)*G(J))/ZZ)
77    CONTINUE

      FX0=(G(I)*G(I))/ETAI
      FXN=(G(MX)*G(MX))/ETAMAX

      INTEG=(2*SUM-FX0-FXN)*H/2
      RETURN
      END
C******************* SUBROUTINE LARGEST VALUE *********************
      SUBROUTINE BIGEST(MX,G,BIG)
      DIMENSION G(MX)
      BIG=G(1)
      DO 150 J=1,MX-1
      SECH=(BIG-G(J+1))
      IF (SECH.LT.0.) BIG=G(J+1)
 150  CONTINUE
      RETURN
      END
C*************************************************************************
      SUBROUTINE INTEGATE1(MX,P,H,SUM1)
      DIMENSION  P(MX)
      SUM=0.0

      DO 14 I=2,MX-1,2
      SUM=SUM+P(I)
14    CONTINUE

      SUMF=0.0
      DO 141 I=3,MX-2,2
      SUMF=SUMF+P(I)
```

```
      G(I+1)=G(I)+(D1G+2.*D2G+2.*D3G+D4G)/6.
      A(I+1)=A(I)+(D1A+2.*D2A+2.*D3A+D4A)/6.

      RETURN
      EN
```

```
141   CONTINUE

      FX0=P(1)
        FXN=P(MX)
      SUM1=(FX0+FXN+4*SUM+2*SUMF)*H/3
      RETURN
      END
C*************************************************************************
      SUBROUTINE INTEGATE2(MX,P,ETA,H,SUM2)
      DIMENSION  P(MX),ETA(MX)
        SUM=0.0

      DO 15 I=2,MX-1,2
      SUM=SUM +(P(I)**2/ETA(I))
15    CONTINUE

      SUMF=0.0
      DO 151 I=3,MX-2,2
      SUMF=SUMF+(P(I)**2/ETA(I))
151   CONTINUE

      FX0=(P(1)**2/ETA(1))
        FXN=(P(MX)**2/ETA(MX))
      SUM2=(FX0+FXN+4*SUM+2*SUMF)*H/3
      RETURN
      END
C*************************************************************************
      SUBROUTINE INTEGATE3(MX,P,G,ETA,H,SUM3)
      DIMENSION  P(MX),G(MX),ETA(MX)
       SUM=0.0

      DO 16 I=2,MX-1,2
      SUM=SUM+(P(I)*G(I)*ETA(I))
16    CONTINUE

      SUMF=0.0
      DO 161 I=3,MX-2,2
      SUMF=SUMF+(P(I)*G(I)*ETA(I))
161   CONTINUE

      FX0=P(1)*G(1)*ETA(1)
      FXN=P(MX)*G(MX)*ETA(MX)
```

```
      SUM3=(FX0+FXN+4*SUM+2*SUMF)*H/3
      RETURN
      END
C*******************************************************
      SUBROUTINE INTEGATE4(MX,G,ETA,H,SUM4)
      DIMENSION  G(MX),ETA(MX)
      SUM=0.0

      DO 17 I=2,MX-1,2
      SUM=SUM+(G(I)*ETA(I)*ETA(I))
17    CONTINUE

      SUMF=0.0
      DO 171 I=3,MX-2,2
      SUMF=SUMF+(G(I)*ETA(I)*ETA(I))
171   CONTINUE

      FX0=G(1)*ETA(1)*ETA(1)
      FXN=G(MX)*ETA(MX)*ETA(MX)
      SUM4=(FX0+FXN+4*SUM+2*SUMF)*H/3
      RETURN
      END


C**************************************************************************
```

Function (f, f', f'', g, g')

```
C********************* SET FUNCTION FOR ODE *************************
      FUNCTION FUNC1(PP)
      FUNC1=PP
      RETURN
      END
C**********************************************************************
      FUNCTION FUNC2(QQ)
FUNC2=QQ
      RETURN
      END
C******************************************************************
C******* SET CONSTANT AND SWIRL NUMBER FOR CALCULATION *****
      FUNCTION FUNC3(FF,PP,QQ,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,SW,CF,INTEG)
C
C                INTEG=INTEGRAL OF G
C
        REAL INTEG
        TEM1=(QQ/Z)-(PP/Z**2)
      TEM2=C1*(SW**2)*Z*GG*GG
      TEM3=-2*C5*(SW**2)*INTEG*Z
      TEM4=(C2/Z)*PP*PP
      TEM5=(C2+2*C1)*FF*PP/(Z**2)
      TEM6=-(C2+2*C1)*QQ*(FF/Z)
      TEM7=-(0.5*CF*C3+CF*C1)*QQ*Z
```

```
C**************************************************************************
       SUBROUTINE INTEGATE5(MX,G,ETA,H,SUM5)
       DIMENSION  G(MX),ETA(MX)
       SUM=0.0

      DO 18 I=2,MX-1,2
      SUM=SUM+(G(I)*G(I)*ETA(I))
18    CONTINUE

      SUMF=0.0
      DO 181 I=3,MX-2,2
      SUMF=SUMF+(G(I)*G(I)*ETA(I))
181   CONTINUE

      FX0=G(1)*G(1)*ETA(1)
        FXN=G(MX)*G(MX)*ETA(MX)
      SUM5=0.5*(FX0+FXN+4*SUM+2*SUMF)*H/3
      RETURN
      END

C********************************************************************



      TEM8=(1.5*CF*C3+CF*C1+CF*C2)*PP

      FUNC3=TEM1+TEM2+TEM3+TEM4+TEM5+TEM6+TEM7+TEM8
      RETURN
      END
C************************************************************************
      FUNCTION FUNC4(AA)
      FUNC4=AA
      RETURN
      END
C******** SET CONSTANT FOR CALCULATION *******************************
      FUNCTION FUNC5(FF,PP,GG,AA,Z,C1,C2,C3,C5,CF)
      TEM1=-(AA/Z)+(GG/Z**2)
      TEM2=-(2*C1+C2)*(AA*FF/Z)
      TEM3=-(0.5*CF*C3+CF*C1)*AA*Z
      TEM4=(CF*C5-0.5*CF*C3)*GG
      TEM5=(C1+C5)*(GG*PP/Z)
      TEM6=-(2*C1+C2)*(GG*FF/Z**2)

      FUNC5=TEM1+TEM2+TEM3+TEM4+TEM5+TEM6
      RETURN
      END
C***********************************************************************
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย สุเมธ ไตรภพสกุล เกิดวันที่ 5 มีนาคม พ.ศ. 2520 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2540 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541