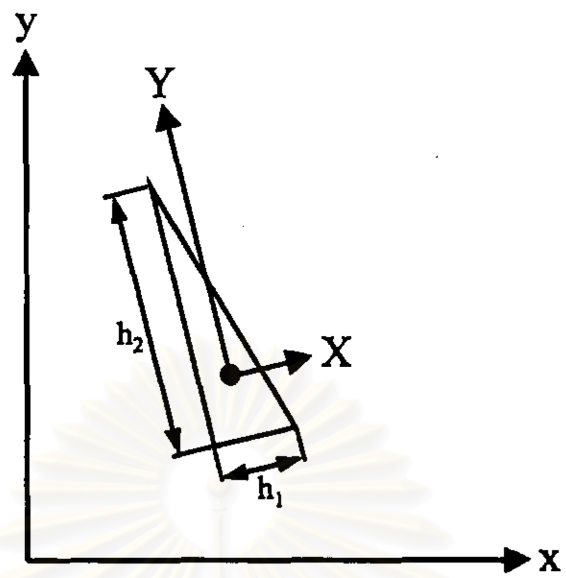
บทที่ 5

ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

การแก้ปัญหาโดยทั่วไปนั้น ผู้แก้ปัญหาไม่สามารถทราบลักษณะการไหลและการกระจายของผลเฉลยในปัญหานั้นๆได้ล่วงหน้าว่าเป็นอย่างไร ดังนั้นเพื่อให้ผลเฉลยที่ได้มีความแม่นยำสูงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์มากตามขึ้นไปด้วย หากเครื่องคอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำที่จำกัดจะไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานั้นๆได้หรือหากเครื่องคอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำเพียงพอ ก็ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก สิ่งที่เกิดขึ้นดังกล่าวสามารถแก้ไขได้โดยประยุกต์ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ซึ่งจะนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 3 มาใช้เป็นข้อมูลในการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยมีหลักการคือใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ (Solution gradient) สูง เพื่อให้ผลลัพธ์มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ต่ำ เพื่อลดเวลาในการคำนวณและลดเนื้อที่ของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยแสดงรายละเอียดในหัวข้อต่อไปนี้

5.1 ขั้นตอนพื้นฐาน

หลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ อาศัยหลักการหาค่าความเค้น (σ) ในแนวแกนหลัก (Principal stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics) (Peraire, 1987; Zienkiewicz, 1991) กล่าวคือ ค่าความเค้นบนระนาบ x-y ประกอบด้วยความเค้น 3 ค่า คือ σ_x σ_y และ τ_{xy} โดยค่าทั้งสามนี้ ถูกนำไปหาของค่าความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y คือ σ_X และ σ_Y แสดงความสัมพันธ์ดังสมการ (5.1) รวมทั้งทิศทางของแนวแกนหลัก X-Y จากนั้นค่าความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y จะถูกนำไปคำนวณหาค่าความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในแนวแกน X-Y คือ h_1 และ h_2 ดังแสดงในรูป 5.1



รูป 5.1 การเปลี่ยนแนวแกนพิจารณาจากแนวแกน x-y เป็นแนวแกน X-Y

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

เมื่อเปลี่ยนค่าความเค้นเป็นค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ สมการ (5.1) จะถูกเปลี่ยนรูปเป็นสมการ (5.2) ดังนั้นจำเป็นต้องหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้เพื่อนำมาคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวบ่งชี้ในแนวแกนหลักต่อไป

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial y\ \partial x} & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

โดย ϕ แทนผลลัพธ์ของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

i แทนจุดต่อที่ i

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y})$ สามารถหาได้ดังนี้

ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีจุดต่อ 3 จุด ดังนั้นต้องใช้ผลลัพธ์ที่จุดต่อทั้งสามจุดมาใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม เมื่อการกระจายของผลลัพธ์ภายในเอลิเมนต์สามารถแสดงได้ในสมการ (5.3)

$$\phi(x,y) = N_1\ \phi_1 + N_2\ \phi_2 + N_3\ \phi_3 \tag{5.3}$$

โดย N_i , $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ϕ_i , $i = 1, 2, 3$ แทนผลลัพธ์ที่จุดต่อ i ของเอลิเมนต์

ในกรณีนี้

$$N_i = L_i \qquad ; i = 1, 2, 3 \tag{5.4}$$

โดย L_i คือ พิกัดของพื้นที่ซึ่งสัมพันธ์กับพิกัด x-y (ปราโมทย์, 2538) ดังนี้

$$L_i(x,y) = a_i + b_i\ x + c_i\ y \qquad ; i = 1, 2, 3 \tag{5.5}$$

โดยค่า a_i, b_i, c_i มีค่าดังนี้

$$a_1 = (x_2\ y_3 - x_3\ y_2)/2A \tag{5.6a}$$

$$a_2 = (x_3\ y_1 - x_1\ y_3)/2A \tag{5.6b}$$

$$a_3 = (x_1\ y_2 - x_2\ y_1)/2A \tag{5.6c}$$

$$b_1 = (y_2 - y_3)/2A \tag{5.6d}$$

$$b_2 = (y_3 - y_1)/2A \tag{5.6e}$$

$$b_3 = (y_1 - y_2)/2A \tag{5.6f}$$

$$c_1 = (x_3 - x_2)/2A \tag{5.6g}$$

$$c_2 = (x_1 - x_3)/2A \tag{5.6h}$$

$$c_3 = (x_2 - x_1)/2A \tag{5.6i}$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณานั้น ซึ่งคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2}[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{5.7}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \tag{5.8}$$

เมื่อ $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial L_i}{\partial x}$ จะได้

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของค่าตัวบ่งชี้เทียบกับพิกัดในแนวแกน x และ y คำนวณได้ดังนี้

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 = \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\phi_1 + (y_3 - y_1)\phi_2 + (y_1 - y_2)\phi_3\right] \tag{5.9a}$$

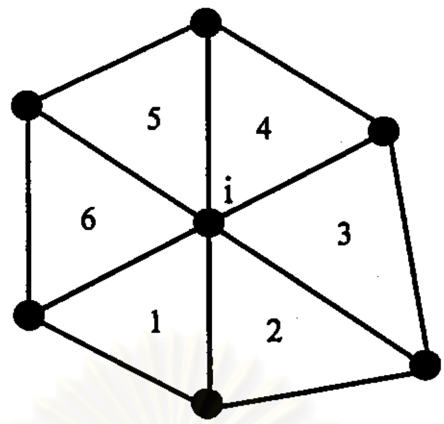
$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)\phi_1 + (x_1 - x_3)\phi_2 + (x_2 - x_1)\phi_3\right] \tag{5.9b}$$

แต่สิ่งที่ต้องการทราบ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อของเอลิเมนต์ ดังนั้นต้องนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ที่หาได้จากสมการ (5.9a)-(5.9b) กระจายไปยังจุดต่อของเอลิเมนต์ ซึ่งคำนวณได้จาก

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x}\cdot\frac{A_{e1}}{3} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x}\cdot\frac{A_{e2}}{3} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial x}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3} + \frac{A_{e2}}{3} + \ldots + \frac{A_{en}}{3}} \tag{5.10a}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y}\cdot\frac{A_{e1}}{3} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y}\cdot\frac{A_{e2}}{3} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial y}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3} + \frac{A_{e2}}{3} + \ldots + \frac{A_{en}}{3}} \tag{5.10b}$$

เมื่อจุดต่อ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น จุดต่อ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบจุดต่ออยู่ 6 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 6.2 ค่า $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ เป็นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อ ซึ่งได้จากการนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของทั้ง 6 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ i มาทำการเฉลี่ย จะได้



รูป 5.2 จุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบ 6 เอลิเมนต์

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial x}.\dfrac{A_{e1}}{3} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial x}.\dfrac{A_{e2}}{3} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{e6}}{\partial x}.\dfrac{A_{e6}}{3}}{\dfrac{A_{e1}}{3} + \dfrac{A_{e2}}{3} + \ldots + \dfrac{A_{e6}}{3}}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial y}.\dfrac{A_{e1}}{3} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial y}.\dfrac{A_{e2}}{3} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{e6}}{\partial y}.\dfrac{A_{e6}}{3}}{\dfrac{A_{e1}}{3} + \dfrac{A_{e2}}{3} + \ldots + \dfrac{A_{e6}}{3}}$$

ในทำนองเดียวกัน การหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y})$ สามารถคำนวณได้โดย

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right) = b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (5.11a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right) = c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (5.11b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right) = c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (5.11c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right) = b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (5.11d)$$

ซึ่ง $\dfrac{\partial^2\phi_e}{\partial x\ \partial y}=\dfrac{\partial^2\phi_e}{\partial y\ \partial x}$

หลังจากนั้นทำการกระจายค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ไปยังจุดต่อของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial x^2}.\dfrac{A_{e1}}{3}+\dfrac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial x^2}.\dfrac{A_{e2}}{3}+\ldots+\dfrac{\partial^2\phi_{en}}{\partial x^2}.\dfrac{A_{en}}{3}}{\dfrac{A_{e1}}{3}+\dfrac{A_{e2}}{3}+\ldots+\dfrac{A_{en}}{3}} \tag{5.12a}$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}=\frac{\dfrac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial y^2}.\dfrac{A_{e1}}{3}+\dfrac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial y^2}.\dfrac{A_{e2}}{3}+\ldots+\dfrac{\partial^2\phi_{en}}{\partial y^2}.\dfrac{A_{en}}{3}}{\dfrac{A_{e1}}{3}+\dfrac{A_{e2}}{3}+\ldots+\dfrac{A_{en}}{3}} \tag{5.12b}$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y}=\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\ \partial x}=\frac{\dfrac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial x\ \partial y}+\dfrac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial x\ \partial y}+\ldots+\dfrac{\partial^2\phi_{en}}{\partial x\ \partial y}.\dfrac{A_{en}}{3}}{\dfrac{A_{e1}}{3}+\dfrac{A_{e2}}{3}+\ldots+\dfrac{A_{en}}{3}} \tag{5.12c}$$

เมื่อจุดต่อ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของจุดต่อทั้งหมดแล้ว นำค่าอนุพันธ์อันดับสองเหล่านี้มาคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองในแนวแกนหลัก X-Y และทิศทาง α ในแนวแกนหลัก X-Y เทียบกับแนวแกน x-y โดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y}\right)^2} \tag{5.13a}$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y}\right)^2} \tag{5.13b}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)}\right) \tag{5.13c}$$

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองในแนวแกนหลักและทิศทางในแนวแกนหลัก $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}, \frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}, \alpha$ ของจุดต่อ i แล้วจึงทำการคำนวณหาค่า $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}, \frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}, \alpha$ สำหรับจุดต่ออื่นๆต่อไป จนครบทุกจุดต่อบนขอบเขตของปัญหา จากนั้นนำค่า $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}, \frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}$ ของทุกจุดต่อมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่มีค่ามากที่สุดของปัญหาซึ่งแทนด้วย λ_{max}

$$\lambda_{max} = \max\left[\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}\right|\right] \tag{5.14}$$

ค่า λ_{max} ที่ได้จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ต่อไป (Peraire, 1987) โดย

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right| h_1^2 = \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right| h_2^2 = \text{constant} = \lambda_{max}\ h_{min}^2 \tag{5.15}$$

โดย h_{min} แทนความยาวด้านของเอลิเมนต์เล็กที่สุดที่กำหนดขึ้น

λ_{max} แทนค่าอนุพันธ์อันดับสองในแนวแกนหลักที่มีค่ามากที่สุดของปัญหา

h_1, h_2 แทนความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในทิศทางของแนวแกนหลัก โดยพิจารณาให้ $|h_1| > |h_2|$ ซึ่งค่าทั้งสองนี้ต้องน้อยกว่าความยาวด้านของเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุด (h_{max}) ที่กำหนดขึ้นด้วย มิฉะนั้นค่า h_1, h_2 จะมีค่าเท่ากับ h_{max}

h_{max} แทนความยาวด้านของเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุดที่กำหนดขึ้น

ขณะเดียวกันค่า h_1, h_2 ที่ได้จะถูกนำไปหาค่าสัดส่วนของความยาวด้านของเอลิเมนต์ (Stretching parameter, s_i) เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ต่อไป กล่าวคือ

$$s_i = \frac{|h_1|}{|h_2|} \tag{5.16}$$

ค่าสัดส่วนของความยาวด้านของเอลิเมนต์ต้องน้อยกว่าค่าสัดส่วนของความยาวด้านของเอลิเมนต์สูงสุด (s_{max}) ที่กำหนดขึ้นด้วย มิฉะนั้นค่า s_i จะมีค่าเท่ากับ s_{max}

จากนั้นจึงนำค่าความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมที่สั้นกว่า (ในกรณีคือ h_2) ค่าสัดส่วนของความยาวด้านของเอลิเมนต์ (s_i) และทิศทางในแนวแกนหลัก ($\propto$) ของจุดต่อทั้งหมดภายในขอบเขตของปัญหา มาใช้เป็นข้อมูลในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ต่อไป

6.2 การประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

จากคำอธิบายในหัวข้อ 6.1 ว่า หลักการของระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติอาศัยหลักการหาความเค้นในแนวแกนหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็ง โดยวิทยานิพนธ์นี้ใช้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 3 เป็นค่าตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะตามตำแหน่งต่างๆของปัญหา ซึ่งสามารถแสดงได้ในสมการ (5.17)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial x\ \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial y\ \partial x} & \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \rho_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

โดยสมการของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองที่แสดงในสมการ (5.8)-(5.12) เปลี่ยนรูปเป็น สมการ (5.18)-(5.21) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x}\rho_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\rho_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\rho_3 = b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + b_3\rho_3 \\ &= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\rho_1 + (y_3 - y_1)\rho_2 + (y_1 - y_2)\rho_3\right] \end{aligned} \tag{5.18a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial y}\rho_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y}\rho_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y}\rho_3 = c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3 \\ &= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)\rho_1 + (x_1 - x_3)\rho_2 + (x_2 - x_1)\rho_3\right] \end{aligned} \tag{5.18b}$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial x}=\frac{\frac{\partial\rho_{e1}}{\partial x}\cdot\frac{A_{e1}}{3}+\frac{\partial\rho_{e2}}{\partial x}\cdot\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{\partial\rho_{en}}{\partial x}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3}+\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{A_{en}}{3}} \tag{5.19a}$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial y}=\frac{\frac{\partial\rho_{e1}}{\partial y}\cdot\frac{A_{e1}}{3}+\frac{\partial\rho_{e2}}{\partial y}\cdot\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{\partial\rho_{en}}{\partial y}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3}+\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{A_{en}}{3}} \tag{5.19b}$$

$$\frac{\partial^2\rho_e}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho_e}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\rho_1+b_2\rho_2+b_3\rho_3\right)=b_1\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+b_2\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+b_3\frac{\partial\rho_3}{\partial x} \tag{5.20a}$$

$$\frac{\partial^2\rho_e}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\rho_e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(c_1\rho_1+c_2\rho_2+c_3\rho_3\right)=c_1\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+c_2\frac{\partial\rho_2}{\partial y}+c_3\frac{\partial\rho_3}{\partial y} \tag{5.20b}$$

$$\frac{\partial^2\rho_e}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho_e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\rho_1+c_2\rho_2+c_3\rho_3\right)=c_1\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+c_2\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+c_3\frac{\partial\rho_3}{\partial x} \tag{5.20c}$$

$$\frac{\partial^2\rho_e}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\rho_e}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(b_1\rho_1+b_2\rho_2+b_3\rho_3\right)=b_1\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+b_2\frac{\partial\rho_2}{\partial y}+b_3\frac{\partial\rho_3}{\partial y} \tag{5.20d}$$

ซึ่ง $\frac{\partial^2\rho_e}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\rho_e}{\partial y\,\partial x}$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2\rho_{e1}}{\partial x^2}\cdot\frac{A_{e1}}{3}+\frac{\partial^2\rho_{e2}}{\partial x^2}\cdot\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{\partial^2\rho_{en}}{\partial x^2}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3}+\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{A_{en}}{3}} \tag{5.21a}$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2\rho_{e1}}{\partial y^2}\cdot\frac{A_{e1}}{3}+\frac{\partial^2\rho_{e2}}{\partial y^2}\cdot\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{\partial^2\rho_{en}}{\partial y^2}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3}+\frac{A_{e2}}{3}+\dots+\frac{A_{en}}{3}} \tag{5.21b}$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x\ \partial y}=\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y\ \partial x}=\frac{\frac{\partial^2\rho_{e1}}{\partial x\ \partial y}\cdot\frac{A_{e1}}{3}+\frac{\partial^2\rho_{e2}}{\partial x\ \partial y}\cdot\frac{A_{e2}}{3}+\ldots+\frac{\partial^2\rho_{en}}{\partial x\ \partial y}\cdot\frac{A_{en}}{3}}{\frac{A_{e1}}{3}+\frac{A_{e2}}{3}+\ldots+\frac{A_{en}}{3}} \qquad (5.21c)$$

และสมการ (5.13)-(5.14) เปลี่ยนรูปเป็นสมการ (5.22)-(5.23)

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial X^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x\ \partial y}\right)^2} \qquad (5.22a)$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial Y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x\ \partial y}\right)^2} \qquad (5.22b)$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\ \partial y}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)}\right) \qquad (5.22c)$$

$$\lambda_{max}=\max\left[\left|\frac{\partial^2\rho_i}{\partial X^2}\right|,\left|\frac{\partial^2\rho_i}{\partial Y^2}\right|\right] \qquad (5.23)$$

ค่า λ_{max} ที่ได้ถูกนำไปคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ต่อไป โดยใช้สมการ (5.15)-(5.16) คือ

$$\left|\frac{\partial^2\rho_i}{\partial X^2}\right|\ h_1^2=\left|\frac{\partial^2\rho}{\partial Y^2}\right|\ h_2^2=\text{cons}\tan t=h_{min}^2\ \lambda_{max} \qquad (5.24)$$

$$s_i=\frac{|h_1|}{|h_2|} \qquad ;\ |h_1|>|h_2| \qquad (5.25)$$

ขั้นตอนการปฏิบัติในการนำระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มแรก (1st adaptive mesh) จำลองขอบเขตปัญหา

ขั้นที่ 2 ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้ คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ FINITE ที่

กล่าวไว้ในบทที่ 4 แก้ปัญหาการไหล ทำให้ได้ผลลัพธ์ของการไหลประกอบด้วย ค่าความหนาแน่น ρ ค่าความเร็ว u ในแนวแกน x ค่าความเร็ว v ในแนวแกน y และค่าพลังงานรวม ε

ขั้นที่ 3 นำค่าความหนาแน่นบนจุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวบ่งชี้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ โดยใช้ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และนำค่าความยาวด้านของเอลิเมนต์ใหม่ที่คำนวณได้มาสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ (2nd adaptive mesh) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่จะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 6

ขั้นที่ 4 วนกลับไปทำขั้นตอนที่ 2 ใหม่ เป็นลำดับขั้นตอนอย่างนี้ไปจนกระทั่งการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มีค่าน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้ในครั้งก่อนหนึ่งครั้ง

ขั้นตอนที่ได้กล่าวมาในข้างต้น จะถูกแสดงโดยละเอียดในบทที่ 6 ต่อไป