ศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวก

นายชัยวัฒน์ นามนาค

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2539

ISBN 974-636-473-1

POSITIVE ORDERED 0-SEMIFIELDS

Mr. Chaiwat Namnak

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
Academic Year 1996

ISBN 974-636-473-1

Thesis Title	Positive Ordered 0-semifields
By	Mr. Chaiwat Namnak
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

....Dean of Graduate School

(Professor Supawat Chutivongse M.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit..........Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell..........Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Ajchara Hamchoowong..........Member

(Assistant Professor Ajchara Hamchoowong Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

ชัยวัฒน์ นามนาค : ศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวก (POSITIVE ORDERED 0-SEMIFIELDS) อ. ที่ปรึกษา : ดร. ซิดนีย์ เอส. มิทเชลล์, 87 หน้า.

ISBN 974-636-473-1.

เราจะเรียกสิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ $(K, +, .)$ ว่า <u>ศูนย์-กึ่งสนาม</u> ก็ต่อเมื่อ 1) $(K, .)$ เป็นกลุ่มสลับที่ที่มี 0, 2) $(K, +)$ เป็นกึ่งกลุ่มสลับที่, 3) สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in K$, $x(y + z) = xy + xz$ และ 4) สำหรับทุก ๆ $x \in K$, $x + 0 = x$ สำหรับศูนย์-กึ่งสนาม K^* เราจะใช้สัญลักษณ์ K แทน $K - \{0\}$ และเราจะเรียกสิ่งทั้งสี่ที่อันดับ $(K, +, ., \leq)$ ว่า <u>ศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวก</u> ก็ต่อเมื่อ $(K, +, .)$ เป็นศูนย์-กึ่งสนาม และ $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน K ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in K$ 1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x + z \leq y + z$ และ $xz \leq yz$ และ 2) $x \geq 0$ จะเรียกสับเซต $P = \{x \in K \mid x \geq 1\}$ ของศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวก K ว่า <u>กรวยบวก</u> ของ K

ให้ $\{K_i \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวก <u>ผลคูณตรง</u>ของวงศ์ $\{K_i \mid i \in I\}$ คือเซตของสมาชิกทั้งหมด $(x_i)_{i \in I}$ ในผลคูณคาร์ทีเซียนของวงศ์ $\{K_i^* \mid i \in I\}$ และ 0 เมื่อ $0 = (0_i)_{i \in I}$ กับการดำเนินการไปตามส่วนประกอบ ให้ L เป็นกึ่งสนามย่อยของผลคูณตรงของ $\{K_i \mid i \in I\}$ จะเรียก L ว่า<u>ผลคูณตรงย่อย</u>ของ $\{K_i \mid i \in I\}$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $j \in I$, $\Pi_j(L) = K_j$ เมื่อ Π_j เป็นการส่งภาพฉาย จะเรียกศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวกทุกส่วน K ว่าเป็น<u>อาร์คีมีเดียน</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in K^*$, ถ้า $x < y$ แล้ว 1) จะมี $n \in Z^+$ ซึ่ง $y < nx$ และ 2) ถ้า $x \neq 1$ แล้วจะมี $n \in Z$ ซึ่ง $y < x^n$ ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 1.</u> ให้ K เป็นศูนย์-กึ่งสนาม และ $P \subseteq K^*$ และ $P^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in I\}$ สมมติว่า P สอดคล้อง 1) P เป็นกึ่งกลุ่มย่อยภายใต้การคูณของ K^* 2) $P \cap P^{-1} = \{1\}$, 3) สำหรับทุก ๆ $x \in K$, $1 + x \in P$ และ 4) สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ และ $a, b \in K$ ที่ $a + b = 1$, $ax + by \in P$ ดังนั้นจะมีอันดับบวกบางส่วนอย่างเดียวบน K ที่มาจาก P ซึ่ง P เป็นกรวยบวก ยิ่งไปกว่านั้นจะมีไอโซมอร์ฟิซึมที่เป็นอันดับจากเซตของสับเซตทั้งหมดของ K^* ซึ่งสอดคล้องกับ 1) – 4) ไปทั่วถึงเซตของอันดับบวกบางส่วนทั้งหมดบน K

<u>ทฤษฎีบท 2.</u> ถ้า K เป็นศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวกที่เป็นแลตทิซ แล้ว K จะเป็นผลคูณตรงย่อยของศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวกทุกส่วน

<u>ทฤษฎีบท 3.</u> ถ้า K เป็นศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวกที่อันดับทุกส่วนที่เป็นอาร์คีมีเดียน ซึ่ง $1 + 1 \neq 1$ และ กึ่งสนามย่อยที่เล็กที่สุดของ K ไอโซมอร์ฟิกที่เป็นอันดับกับ Q_0^+ แล้ว K จะถูกฝังในศูนย์-กึ่งสนามอันดับบวกทุกส่วนบริบูรณ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ชัยวัฒน์ นามนาค
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell
ปีการศึกษา 2539 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

C725039 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: 0-SEMIFIELDS / POSITIVE ORDERED 0-SEMIFIELDS.
CHAIWAT NAMNAK : POSITIVE ORDERED 0-SEMIFIELDS
THESIS ADVISOR : DR. SIDSEY S. MITCHELL, Ph.D. 87 pp.
ISBN 974-636-473-1

A triple $(K, +, .)$ is called a 0-semifield iff 1) $(K, .)$ is an abelian group with zero 0, 2) $(K, +)$ is a commutative semigroup, 3) for every $x, y, z \in K$, $x(y + z) = xy + xz$ and 4) for every $x \in K$, $x + 0 = x$. For a 0-semifield K, let K^* denote $K - \{0\}$. A quardruple $(K, +, ., \leq)$ is called a positive ordered 0-semifield if $(K, +, .)$ is a 0-semifield and $\leq$ is a partial order on K such that for every $x, y, z \in K$ 1) $x \leq y$ implies that $x + z \leq y + z$ and $xz \leq yz$ and 2) $x \geq 0$. The subset $P = \{x \in K \mid x \geq 1\}$ of a positive ordered 0-semifield K is called the positive cone of K.

Let $\{K_i \mid i \in I\}$ be a family of 0-semifields. The direct product of the family $\{K_i \mid i \in I\}$ is the set of all elements $(x_i)_{i \in I}$ in the cartesian product of the family $\{K_i^* \mid i \in I\}$ and 0 where $0 = (0_i)_{i \in I}$ together with the componentwise operations. Let L be a subsemifield of the direct product of $\{K_i \mid i \in I\}$. L is said to be a subdirect product of $\{K_i \mid i \in I\}$ iff for every $j \in I$, $\Pi_j(L) = K_j$ where Π_j is the natural projection map. A positive totally ordered 0-semifield K is said to be Archimedian iff for every $x, y \in K^*$, if $x < y$ then 1) there exists an $n \in Z^+$ such that $y < nx$ and 2) there exists an $n \in Z$ such that $y < x^n$ if $x \neq 1$. The main results of this research are as follows :

Theorem 1. Let K be a 0-semifield, $P \subseteq K^*$ and $P^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in P\}$. Suppose that P satisfies that
1) P is a multiplicative subsemigroup of K^*, 2) $P \cap P^{-1} = \{1\}$, 3) for every $x \in K$, $1 + x \in P$ and 4) for every $x, y \in P$ and $a, b \in K$, $a + b = 1$ implies that $ax + by \in P$. Then there exists a unique positive compatible partial order on K induced by P such that P is the positive cone. Furthermore, there exists an order isomorphism from the set of all subsets of K^* which satisfy 1) - 4) onto the set of all positive compatible partial orders on K.

Theorem 2. If K is a positive lattice ordered 0-semifield, then K is a subdirect product of positive totally ordered 0-semifields.

Theorem 3. If K is an Archimedian positive totally ordered 0-semifield such that $1 + 1 \neq 1$ and the prime semifield of K which is order isomorphic to Q_0^+ then K can be embedded into a complete positive totally ordered 0-semifield.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ชัยวัฒน์ นามนาค
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidsey S. Mitchell
ปีการศึกษา 2539 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

ACKNOWLEDGEMENTS

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis advisor, for his untired offering me some help during preparation and completion of my thesis. In addition, I am also grateful to Associate Professor Dr.Yupaporn Kemprasit and Assistant Professor Dr. Atchara Hauchuvong, who served as the chairman and members of this thesis committee, respectively.

The special thanks are due to all of my lecturers for their previous valuable lectures while studying.

Finally, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved family for their support throughout my graduate study.

INTRODUCTION

In [2], L. Fuchs and [1], G. Birkhoff have given some theorems of partially ordered semigroups, partially ordered groups, partially ordered rings, and partially ordered fields. And [3], J. Phayukul has proved some fundamental theorems of partially ordered ratio semirings.

Our research problem is to generalize some fundamental theorems in the book of [2], L. Fuchs, [1], G. Birkhoff and [3], J. Phayukul to a positive ordered 0-semifield.

An example of some theorem that we try to generalize is the following in [2], L. Fuchs, he proved that if a totally ordered group G is Archimedian then it is order isomorphic to a additive subgroup of the real numbers with the natural ordering.

In this research, we can generalize above theorem to a positive totally ordered 0-semifield that if K is an Archimedian positive totally ordered 0-semifield such that $1+1 \neq 1$ and $K_o \subseteq K$, the prime semifield of K is order isomorphic to Q_0^+ then K can be embedded into a complete positive totally ordered 0-semifield.

In Chapter I, we introduce some notations, give definitons and fundamental theorems concerning 0-semifields.

In Chapter II, we study positive ordered 0-semifields.

In Chapter III, we study positive lattice ordered 0-semifields.

In Chapter IV, we study positive totally ordered 0-semifields.

CONTENTS