การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544
ISBN 974-03-1091-5

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

DEVELOPMENT OF TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY INVISCID HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW COMPUTER PROGRAM BY FINITE ELEMENT METHOD

Mr.Sutthisak Phongthanapanich

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University

Academic Year 2001
ISBN 974-03-1091-5

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
โดย	นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	นาวาเอก รองศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย กาทอง

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(นาวาเอก รองศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย กาทอง)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช : การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. (DEVELOPMENT OF TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY INVISCID HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW COMPUTER PROGRAM BY FINITE ELEMENT METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, อ.ที่ปรึกษาร่วม : นาวาเอก รองศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย กาทอง, 130 หน้า. ISBN 974-03-1091-5.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ แสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาการไหลคงตัวและไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ทำการประดิษฐ์ขึ้นมาสำหรับของไหลที่เป็นอากาศและน้ำทะเล สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากการประยุกต์ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎการอนุรักษ์พลังงาน

วิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ได้นำมาใช้ในกระบวนการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับโดเมนที่ต้องการทำการวิเคราะห์ปัญหา และเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงได้ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เข้ากับกระบวนการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแต่ละช่วงเวลาของการวิเคราะห์

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กระทำโดยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงจำนวนหลายปัญหารวมทั้งปัญหาของคลื่นช็อกภายในท่อ ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงและสอดคล้องกัน สำหรับปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเลพบว่าคลื่นช็อกนั้นกระจายออกจากจุดศูนย์กลางของการระเบิดในลักษณะของวงกลม โดยมีค่าความดันสูงสุดในขณะระเบิดประมาณ 1.23 GPa และมีค่าลดลงตลอดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกโดยมีค่าประมาณ 407 MPa เมื่อตกกระทบใต้ท้องเรือ

ภาควิชา.. ลายมือชื่อนิสิต...

สาขาวิชา........วิศวกรรมเครื่องกล........... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา......................................

ปีการศึกษา ……2544…………….. ลายมือชื่ออาจารย์ทีปรึกษาร่วม................................

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4270603221 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD: FINITE ELEMENT / TRANSIENT HIGH SPEED FLOW / CELL-CENTERED / DELAUNAY TRIANGULATION / ADAPTIVE REMESHING

SUTTHISAK PHONGTHANAPANICH : DEVELOPMENT OF TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY INVISCID HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW COMPUTER PROGRAM BY FINITE ELEMENT METHOD. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, PhD., THESIS COADVISOR : CAPTAIN ASSOC. PROF. MONCHAI GATHONG, Ph.D., 130 pp. ISBN 974-03-1091-5.

This thesis presents a finite element computational method for solving both steady-state and unsteady-state high-speed inviscid compressible flows of air or sea water fluids. A finite computer program has been developed. The finite element equations corresponding to these flow problems were derived from the governing Navier-Stokes partial differential equations that consist of the conservation of mass, momentum, and energy using the upwind cell-centered algorithm.

The Delaunay triangulation algorithm was used to generate triangular meshes for the entire domain. To improve solution accuracy, the adaptive remeshing technique based on the Delaunay triangulation concept was applied to each time step of the finite element analysis.

The computer program was verified by several problems that have exact solutions including the shock tube problem. Accurate finite element solutions were obtained comparing to the exact solution. The program was then used to simulate the shock wave propagation from underwater explosion. The peak initial pressure of 1.23 GPa was found at the center of explosion. The pressure then decreased gradually to 407 MPa at the time of impact the ship hull.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department.. Student's signature...

Field of study......Mechanical Engineering.... Advisor's signature...

Academic year ......2001.................... Co-advisor's signature...

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และนาวาเอก รองศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย กาทอง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ซึ่งท่านได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดต่าง ๆ ที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง อันเป็นแรงบันดาลใจและกำลังใจให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ ประธานกรรมการ และ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ พลเรือตรี วีระวัฒน์ วงษ์ดนตรี นาวาเอก รองศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย กาทอง และนาวาโท ศราวุธ วงศ์เงินยวง กรมอู่ทหารเรือ กองทัพเรือ ที่ช่วยสนับสนุนงานวิจัยชิ้นนี้ด้วยดีเสมอมา

ขอขอบคุณ อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ อาจารย์วิโรจน์ ลิ่มตระการ และคุณเสฏฐวรรธ สุจริตภวัตสกุล ตลอดจนเพื่อน ๆ ทุกท่านในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณทุกท่าน สำหรับคำแนะนำและกำลังใจในระหว่างการทำงานวิจัยนี้ ขอขอบคุณคุณประภาศรี สวัสดิ์อำไพรักษ์ ที่คอยให้กำลังใจและอำนวยความสะดวกในเรื่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาอันเป็นที่รักยิ่ง ที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญภาพ

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	เมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) ของ E หรือ F เทียบกับ U
c	ความเร็วของเสียง (speed of sound)
c_o	ค่าความเร็วเสียงอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ
C_p	ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
C_v	ค่าความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่
dp_i	ค่าระยะห่างของจุดต่อ (nodal spacing value)
e	พลังงานภายใน
E	เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในทิศแกน x
F	เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดในทิศแกน y
$\widetilde{F}_n$	ปริมาณฟลักซ์แบบเชิงเลข
g	แรงโน้มถ่วงโลก
h	ค่าเอนทัลปี (enthalpy)
H	ค่าเอนทัลปีรวม (total enthalpy)
J	เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน y
M	เมตริกซ์การแปลง (transformation matrix) จากตัวแปรเชิงอนุรักษ์ เป็นตัวแปรปฐมภูมิ
m	มวล
$\hat{n}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทางตั้งฉากกับด้านของเอลิเมนต์
n_x, n_y	ทิศทางโคไซน์ (direction cosine) ของเวกเตอร์ $\hat{n}$ ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ
p	ความดัน
p_o	ค่าความดันอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ
p_c	จุดศูนย์ถ่วงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
R	ค่าคงที่ของก๊าซ (Gas constant)

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

T	อุณหภูมิ
t	เวลา
U	เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables)
U_n	เวกเตอร์ความเร็วที่ตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา
u	ความเร็วในแนวแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
$\vec{V}$	ความเร็วในรูปของเวกเตอร์
V_t	เวกเตอร์ความเร็วที่ขนานกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา
Γ	ขอบของการไหล
Ω	โดเมนของการไหล
γ	อัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ ต่อปริมาตรคงที่
ε	พลังงานรวม (total energy)
ρ	ความหนาแน่น
ρ_o	ค่าความหนาแน่นอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก (normal stress)
τ	ความเค้นเฉือน (shear stress)
δ	ความยาวของด้านร่วมของเอลิเมนต์
λ	ค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของ A
Λ	เมตริกซ์ทแยงของค่าเจาะจงของ A
α	ค่าสัมประสิทธิ์อัลฟ่า สำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมน
β	ค่าสัมประสิทธิ์เบต้า สำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมน

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาถึงผลกระทบของการระเบิดใต้น้ำที่มีต่อโครงสร้างของท้องเรือเป็นการศึกษาเชิงประยุกต์ โดยการนำเอาทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของของไหล มาประยุกต์ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) เพื่อทำการคำนวณเพื่อแสดงลักษณะการเกิดคลื่นช็อก (shock wave) อันเนื่องมาจากแรงกดดันของการระเบิดใต้น้ำ โดยผลจากพลังงานของคลื่นช็อกจะทำให้เกิดการกระจายของแรงดัน (pressure) บนโครงสร้างท้องเรือ ซึ่งจะทำให้เกิดความเครียดอันจะนำไปสู่การเสียหายของโครงสร้างท้องเรือ ดังนั้นการศึกษาเชิงประยุกต์นี้จะช่วยในการพยากรณ์ภาระการรับแรง และความน่าจะเป็นของลักษณะการเกิดความเสียหายของโครงสร้างท้องเรืออันเนื่องมาจากพลังงานของคลื่นช็อก นอกจากนี้ยังก่อให้เกิดประโยชน์ทางวิชาการเป็นอย่างมาก ในด้านการพัฒนาอัลกอริทึมสำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing) ด้วยวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) โดยการประยุกต์เทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลง (refinement) และสามารถควบคุมอัตราส่วนระหว่างความยาวด้านที่ยาวที่สุดและด้านตั้งฉากของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่น้อยที่สุด (aspect ratio) ซึ่งการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่สามารถปรับตัวได้ สามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับการคำนวณด้านกลศาสตร์ของแข็ง การถ่ายเทความร้อน และกลศาสตร์ของไหล โดยในการศึกษานี้จะนำมาประยุกต์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัลกอริทึมอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) สำหรับการคำนวณปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว (steady state and unsteady state high-speed inviscid compressible flows) ซึ่งถูกควบคุมโดยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

สุดท้ายจะนำเอาผลการศึกษาเชิงทฤษฎีและเชิงประยุกต์ดังกล่าว มาใช้ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาในลักษณะเดียวกันแต่มีเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) หรือขอบเขตของโดเมนที่แตกต่างกัน โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้เป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตซับซ้อนของปัญหา และขอบเขตของโดเมนแบบปฏิสัมพันธ์ในโหมดกราฟิก (interactive computer graphics) แก้ระบบสมการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบกราฟิกที่หลาก

หลาย ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ และสามารถที่จะพัฒนาต่อเพื่อช่วยในการพัฒนาเทคโนโลยีการคำนวณสำหรับภาคอุตสาหกรรมอื่นๆได้ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระนาบสองมิติ สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว (unsteady state high-speed compressible flows)

1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

1.2.3 ประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay Triangulation) สำหรับการแบ่งโดเมนของปัญหาการไหลในระนาบสองมิติ

1.2.4 พัฒนาระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing) ในระนาบสองมิติ ภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

1.2.5 ปรับปรุงผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ โดยการประยุกต์ใช้งานร่วมกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

1.2.6 สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการสร้างโดเมน การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยอัตโนมัติ และการแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงผลความสัมพันธ์แบบ x-y (XY plot) การแสดงผลเส้นชั้น (contour plot) เป็นต้น โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้จะทำงานแบบปฏิสัมพันธ์ในโหมดกราฟิก (interactive computer graphic program) และนำโปรแกรมที่ได้มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหล

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการศึกษาที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ข้างต้น มีดังต่อไปนี้

1.3.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระนาบสองมิติ สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์

1.3.2 ศึกษาวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay Triangulation) และระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing) ในระนาบสองมิติ

1.3.3 สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการสร้างโดเมน การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยอัตโนมัติ และการแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงผลความสัมพันธ์แบบ x-y (XY plot) การแสดงผลเส้นชั้น (contour plot) เป็นต้น โดย

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้จะทำงานแบบปฏิสัมพันธ์ในโหมดกราฟิก (interactive computer graphic program) เพื่อนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวทั้งสำหรับของไหลที่เป็นอากาศและน้ำทะเล

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระนาบสองมิติ สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว

1.4.2 สามารถนำเอาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ มาใช้ในการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวในระนาบสองมิติโดยการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์

1.4.3 สามารถประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay Triangulation) และพัฒนาระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในระนาบสองมิติ และสามารถที่จะนำมาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์

1.4.4 ทำให้เกิดการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในลักษณะของโปรแกรมสำเร็จรูป (application) ที่สามารถนำไปใช้แก้ไขปัญหาที่มีรูปร่างหรือเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้ ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้สามารถที่จะช่วยลดเวลาการสร้างโมเดลที่มีความซับซ้อนได้มาก

1.4.5 สามารถที่จะพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างต่อเนื่อง เพื่อให้สามารถนำไปใช้ในเชิงพาณิชย์

1.4.6 ลดการพึ่งพาโปรแกรมสำเร็จรูปจากต่างประเทศ

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1.5.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์

1.5.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบ การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่โดยอัตโนมัติ

1.5.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์สำหรับของไหลที่เป็นอากาศ

1.5.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์สำหรับของไหลที่เป็นน้ำทะเล

1.5.5 ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมา ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง

1.5.6 ประดิษฐ์โปรแกรมด้านคอมพิวเตอร์กราฟิก เพื่อรวมโปรแกรมที่ได้จากขั้นตอนข้างต้นเข้าด้วยกัน

1.5.7 ประยุกต์โปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว

1.5.8 จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ และสรุปผล

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยฉบับนี้มีความเกี่ยวข้องกับแนวความคิดทางทฤษฎีสองประการหลัก ๆ ดังนี้ ประการที่หนึ่ง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) สำหรับการคำนวณปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง (high-speed inviscid compressible flows) ประการที่สองการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) และระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) โดยมีแนวคิดพื้นฐานโดยสังเขปดังต่อไปนี้

2.1 แนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์

สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว จะถูกควบคุมโดยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = J \tag{2.1}$$

โดย $\{U\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

ρ หมายถึง ค่าความหนาแน่น u และ v หมายถึง ค่าความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ ε หมายถึง ค่าพลังงานรวม (total energy) ส่วน $\{E\}$ และ $\{F\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u\varepsilon + pu \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v\varepsilon + pv \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

p หมายถึง ค่าความดัน และ $\{J\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของแรงและพลังงานเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho\left(u f_x + v f_y\right) \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

f_x และ f_y หมายถึงแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับพลังงานรวม (total energy) จะประกอบด้วยพลังงานภายใน (internal energy) e และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ดังนี้

$$\varepsilon = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{2.5}$$

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered) จะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ [1,2] และเขียนสมการ (2.1) ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลบนเอลิเมนต์ [3] โดย Ω หมายถึงพื้นที่ของเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\Omega - \int_\Omega J d\Omega = 0 \tag{2.6}$$

เมื่อทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) และประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เข้ากับสมการ (2.6) ก็จะทำให้ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว ดังนี้

$$\left[[I] + \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{i=1}^{3} \delta_i |A| \right] \{\Delta U\} = -\frac{\Delta t}{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \delta_i \{\overline{G}\} + J^n \Delta t \tag{2.7}$$

โดย $[I]$ หมายถึง เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4x4 ส่วน δ_i หมายถึง ความยาวของด้านลำดับที่ i ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และ $\{\overline{G}\}$ หมายถึง ปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดเฉลี่ย ดังนี้

$$\{\overline{G}\} = \frac{1}{2}\left[G_{iR}^{n+1} + G_{iL}^{n} - |A| \left(U_R^{n+1} - U_L^{n} \right) \right] \tag{2.8}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ส่วน $|A|$ หมายถึง ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) ดังจะได้กล่าวรายละเอียดทั้งสำหรับกรณีที่ของไหลเป็นอากาศและน้ำทะเลในบทถัดไป

2.2 แนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่

การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะอ้างอิงจากงานวิจัยของ Weatherill, et. al. [4] และ Karamete, et. al. [5] โดยได้นำเสนอเทคนิคการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติเดอลอนเน่ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมที่มีลักษณะใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับสามเหลี่ยมที่สร้างด้วยวิธีอื่น [6] และวิธีการแทรกจุดต่อภายในโดเมนเพื่อแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้เล็กลง โดยแนวคิดทั้งสองสามารถที่จะทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ตามที่ต้องการ โดยสามารถใช้ได้ทั้งกรณีที่เป็นโดเมนอย่างง่ายและโดเมนที่รูปร่างซับซ้อน

แนวคิดโดยสรุปของการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติเดอลอนเน่ ก็คือการเลือกเชื่อมต่อเส้นตรงระหว่างจุดต่อสองจุดที่กำหนด เพื่อให้เกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่จะต้องไม่มีจุดต่อใดๆของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอยู่ภายในวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้นๆ หรืออีกนัยหนึ่งสามารถกล่าวได้ว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติเดอลอนเน่ หมายถึงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ผ่านคุณสมบัติ Empty circumcircle [5,6] เท่านั้น

ส่วนแนวคิดโดยสรุปของวิธีการแทรกจุดต่อภายในโดเมน จะทำการแทรกลงตรงตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง (centroid) ของสามเหลี่ยมที่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์อัลฟ่า (alpha test) และเบต้า (beta test) โดยค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองจะใช้ในการควบคุมความหนาแน่นของจำนวนสามเหลี่ยมซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของสามเหลี่ยม และควบคุมความสม่ำเสมอของการสร้างสามเหลี่ยมโดยการตรวจสอบระยะห่างจากจุดต่อที่ถูกแทรกในครั้งที่ผ่านมาตามลำดับ การผสมผสานระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองจะส่งผลต่อรูปร่าง ขนาดและจำนวนของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาทั้งหมด

สำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นเทคนิคที่คิดขึ้นมาใหม่โดยอาศัยแนวคิดพื้นฐานมาจากอัลกอลิทึมเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ผสมผสานกับแนวคิดของการเลือกตัวชี้วัดค่าความผิดพลาด (error indicator) [2,7] ซึ่งค่าที่ได้จะใช้เป็นตัวกำหนดขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่จะถูกสร้างในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งถัด ๆ ไป ซึ่งเป็นวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่ทั้งหมด จากข้อมูลของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในครั้งที่ผ่านมา และ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ส่งผลให้เกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ ที่เหลือ

2.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษานี้เป็นการศึกษาในลักษณะของเชิงประยุกต์ ดังนั้น จึงได้ทำการศึกษาจากบทความในวารสารที่ให้ความรู้ในเชิงทฤษฎีที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัย โดยองค์ความรู้ที่ทำการศึกษาจากบทความในวารสาร สามารถแบ่งออกได้เป็นสองกลุ่ม ดังนี้ กลุ่มที่หนึ่งเกี่ยวกับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) สำหรับการคำนวณปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง (high-speed compressible flows) และการเลือกตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) ส่วนกลุ่มที่สองเกี่ยวกับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีเดอลอนเน่ และระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) ดังต่อไปนี้

Roe [8] ได้ทำการศึกษาวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาที่ถูกควบคุมด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออยเลอร์ในรูปแบบไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic) โดยการทดสอบความถูกต้องกับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ (shock in a tube) หรือปัญหาไลแมนน์ (Riemann problem) โดยในเอกสารได้นำเสนอให้เขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออยเลอร์ให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์พารามิเตอร์ (parameter vector) ประกอบกับสมการสถานะของก๊าซ (Gas equation of state) ก็จะทำให้สามารถหาค่าเมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป โดยการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง เพื่อประมาณผลลัพธ์ของปัญหาไลแมนน์

$$u_t + F_x + G_y + H_z = 0 \tag{2.9}$$

โดย

$$u = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \;;\quad F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(p+e) \end{Bmatrix} \;;\quad G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(p+e) \end{Bmatrix} \;;\quad H = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(p+e) \end{Bmatrix}$$

Gnoffo [3] ได้นำเสนอวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาที่ถูกควบคุมด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออยเลอร์/นาเวียร์-สโตกส์ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยอาศัยแนวคิดที่นำเสนอโดย Roe [8] มาประยุกต์เป็นระเบียบวิธีอัปวินด์แบบแนบนัย (implicit upwind method) บนโดเมนการคำนวณแบบตาข่ายสี่เหลี่ยม (rectangular mesh) เพื่อให้อัลกอริทึมมีความเสถียรอันเป็นผลมาจากธรรมชาติของอัปวินด์ของประมาณปริมาณฟลักซ์ ที่ไหลผ่านผนังของเอลิเมนต์

Huang [9] ได้ทำการศึกษาวิธีการคำนวณการตอบสนองทางไดนามิกส์ของโครงสร้างที่อยู่ใต้น้ำเมื่อถูกกระทบโดยพัลซ์ของความดัน (pressure pulse) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยจะทำการคำนวณสมการการเคลื่อนตัวของแผ่นระนาบไปพร้อม ๆ กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ที่ไม่มีสมการพลังงาน และอาศัยสมการสถานะของ Tait (Tait equation of state) ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นและความดันของของไหล ซึ่งสามารถใช้ได้ทั้งของไหลที่เป็นอากาศ น้ำ และน้ำทะเล ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$p - p_o = \frac{\rho_o c_o^2}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^n - 1\right] \tag{2.10}$$

โดย

$c_o^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_o}$ หมายถึง ค่าความเร็วเสียงอ้างอิงในสภาวะที่ไม่ถูกรบกวน และในสภาวะเอนโทรปีมีค่าคงที่ (isentropic)

p_o หมายถึง ค่าความดันอ้างอิงในสภาวะที่ไม่ถูกรบกวน

ρ_o หมายถึง ค่าความหนาแน่นอ้างอิงในสภาวะที่ไม่ถูกรบกวน

n หมายถึง ค่าคงที่เท่ากับ 7.15 ในกรณีของน้ำทะเล

Peraire et al. [7] ทำการศึกษาเกี่ยวกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สำหรับนำมาใช้ปรับปรุงคุณภาพของผลลัพธ์ในสภาวะคงตัว (steady state) ของระบบสมการออยเลอร์ (Euler equations) โดยนำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ใช้ในบทความจะใช้ อัลกอริทึมการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้า (advancing front algorithm) ซึ่งใช้หลักการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยเริ่มต้นจากบริเวณขอบของโดเมนเข้าสู่ภายในของโดเมน โดยที่ขนาดของ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะถูกควบคุมด้วยอัตรา

ส่วน streching (streching ratio) ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านที่ยาวที่สุดและความยาวของด้านตั้งฉากกัน (ด้านที่สั้นที่สุด)

สำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็อาศัยอัลกอริทึมการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้าเช่นกัน แต่ขนาดและทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะถูกควบคุมด้วยตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) โดยในบทความจะใช้ปริมาณอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของค่าความหนาแน่นของไหลเป็นตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด สำหรับเอลิเมนต์ใด ๆ เอลิเมนต์หนึ่ง (e) ในหนึ่งมิติสามารถแสดงได้โดยสมการ (2.11) ดังนี้

$$E_e = \frac{1}{2} x_i (h_e - x_i) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}\bigg|_e \tag{2.11}$$

โดย x_i หมายถึง ตำแหน่งใดๆของจุดบนเอลิเมนต์ตามแนวแกน x และ h_e หมายถึง ความยาวของเอลิเมนต์ สำหรับค่ารากที่สองของกำลังสองเฉลี่ยของค่าความผิดพลาดท้องที่ (local error, E_e) จะเป็นดังในสมการ (2.12)

$$E_e^{RMS} = \left\{ \frac{1}{2} x_i (h_e - x_i) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}_e \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{11} h_e^2 \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} \right|_e \tag{2.12}$$

ดังนั้น สำหรับปัญหาสองมิติการประมาณขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับขนาดความผิดพลาด สามารถแสดงได้โดยสมการ (2.13)

$$h_1^2 \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} \right| = h_2^2 \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} \right| = \text{constant} = h_{min}^2 \lambda_{max} \tag{2.13}$$

โดยที่ λ_{max} หมายถึง ปริมาณหลักที่มีค่ามากที่สุดในโดเมน

Probert et al. [10] ได้ทำการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และกระบวนการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ สำหรับการคำนวณผลลัพธ์ที่ขึ้นกับเวลาของปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว โดยนำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (central difference time-stepping) สำหรับตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดที่ใช้ในบทความจะใช้ค่าตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ที่ได้จากการคำนวณ โดยจะนำมาคำนวณในรูปแบบของค่าสัมประสิทธิ์ Pressure-Switch (Pressure-Switch coefficient) ดังนี้

$$E_I = C_v \frac{\sum_{e\in I} 2U_I^* - U_J^* - U_K^*}{\sum_{e\in I} \left| A_{IJ} + A_{IK} \right|} \tag{2.14}$$

โดยที่

$$A_{IJ} = \max\left(\left|U_I^* - U_J^*\right|, \alpha\left(U_I^* + U_J^*\right)\right)$$
$$B_{IJ} = \max\left(\left|U_I^* - U_K^*\right|, \alpha\left(U_I^* + U_K^*\right)\right)$$

ค่าคงที่ α จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.01 และ C_v หมายถึง ค่าคงที่ที่ถูกกำหนดโดยผู้ใช้ (user-specified constant) สำหรับขนาดความผิดพลาดที่ได้จากสมการ (2.14) จะถูกนำมาใช้ในการปรับขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมภายในโดเมน โดยเปรียบเทียบกับค่า E_{min} และ E_{max} ที่กำหนดขึ้นมา โดยจะทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้เล็กลงถ้าหาก E_I มากกว่า E_{max} และในทางกลับกันปรับขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้โตขึ้น ถ้าหาก E_I น้อยกว่า E_{min} โดยในบทความได้เสนอแนะให้ใช้ค่า E_{min} และ E_{max} เท่ากับ 0.1 และ 0.25 ตามลำดับ สำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ก็อาศัยอัลกอริทึมการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้าเช่นเดียวกับบทความข้างต้น เพียงแต่ในบทความนี้ไม่ได้เสนอแนะวิธีการปรับทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนั้นอัลกอริทึมการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้าในบทความนี้จึงไม่มีคุณสมบัติการปรับทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (directional control)

Bibb et al. [11] ทำการศึกษาเกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลที่ความเร็วสูงผ่านรูปทรงซับซ้อนในสามมิติ โดยการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากแนวคิดของการไหลผ่านด้านของเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นแนวคิดที่เริ่มต้นมาจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume) ส่วนปริมาณของฟลักซ์จะถูกคำนวณโดยใช้เทคนิคการแบ่งปริมาณเวกเตอร์ฟลักซ์ระหว่างด้านร่วมของเอลิเมนต์ (flux vector splitting)

$$\frac{dU^i}{dt} + \frac{1}{V^i} \sum_{f\in F_i} \frac{1}{3}\left(F_k^l + F_k^m + F_k^n\right) S_k^f = 0 \tag{2.15}$$

โดยตัวห้อยท้าย k หมายถึง แนวแกน x, y และ z ตามลำดับ ส่วนตัวยกขึ้นบน l, m และ n หมายถึงโหนดทั้งสามของด้านของเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า F_i หมายถึง ด้านทั้งหมดของเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าสามมิติ V^i หมายถึง ปริมาตรของเอลิเมนต์ทั้งหมดที่มีจุดปลายเชื่อมต่อกับจุดที่ i S_k^f หมายถึง เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับด้านของเอลิเมนต์สามมิติในแนวแกน x, y และ z ส่วน U^i

หมายถึง เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ของโหนดที่ i ซึ่งสามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของ $\{U\}$ ได้ดังนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho\varepsilon \end{Bmatrix}$$

และ $F_k(U)$ หมายถึง เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x, y และ z ตามลำดับดังนี้

$$F_k(U) = \begin{Bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + p\delta_{1k} \\ \rho u_2 u_k + p\delta_{2k} \\ \rho u_3 u_k + p\delta_{3k} \\ \rho H u_k \end{Bmatrix}$$

สมการข้างต้นได้ถูกนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ชื่อ FELISA และได้นำมาประยุกต์เพื่อแสดงลักษณะการไหลและการเกิดคลื่นช็อกของอากาศที่ผ่านอากาศยานรุ่น X-33 ขององการอวกาศ NASA

ปัญญา จันทร์ไพแสง [1] ได้ทำการศึกษาวิธีการคำนวนการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) ในระนาบสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) ร่วมกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing) เพื่อปรับปรุงคุณภาพของผลลัพธ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้น

สำหรับการสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ในงานวิจัยเสนอแนะให้ใช้ปริมาณอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของค่าความหนาแน่นของไหลในระนาบสองมิติ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ดังในสมการ (2.16)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

โดยในการคำนวณค่าสูงสุดของปริมาณอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของค่าความหนาแน่นของของไหล หมายถึงการคำนวณปริมาณหลัก (principal quantities) ซึ่งจะทำให้ผลคูณอนุพันธ์ขวาง (cross derivatives) ในสมการ (2.16) หมดไป และจะได้ความสัมพันธ์ของปริมาณหลัก และขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ดังในสมการ (2.17)

$$h_1^2\left|\frac{\partial^2\rho}{\partial X^2}\right| = h_2^2\left|\frac{\partial^2\rho}{\partial Y^2}\right| = \text{constant} = h_{\min}^2\lambda_{\max} \tag{2.17}$$

ส่วนทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมตามแนวคลื่นช็อก จะถูกกำหนดในรูปของมุมที่วัดโดยเทียบกับแนวแกนหลัก (α) ดังในสมการ (2.18)

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{\partial^2\rho_i}{\partial x\partial y}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\rho_i}{\partial y^2}\right)}\right] \tag{2.18}$$

การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในวิทยานิพนธ์ จะใช้อัลกอริทึมการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้า (advancing front algorithm) ซึ่งใช้หลักการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยเริ่มต้นจากบริเวณขอบของโดเมนเข้าสู่ภายในของโดเมน โดยที่ขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะถูกควบคุมด้วยอัตราส่วน streching (streching ratio) ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านที่ยาวที่สุดและความยาวของด้านตั้งฉากกัน (ด้านที่สั้นที่สุด)

Dechaumphai และ Limtrakarn [2] อธิบายวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) ในระนาบสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) ร่วมกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing) เพื่อปรับปรุงคุณภาพของผลลัพธ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้น การไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงถูกควบคุมโดยระบบ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes) โดยอัลกอริทึมอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ที่นำมาใช้อาศัยการคำนวณอัตราการไหลของฟลักซ์ (flux) ระหว่างเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันตามกระบวนการคำนวณค่าเฉลี่ยของโรย์ (Roe's averaging) ดังในสมการ (2.19) โดยที่ $\overline{G}$ หมายถึง ปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดเฉลี่ย และ U หมายถึงตัวแปรอนุรักษ์

$$\overline{G} = \frac{1}{2}\left[G_L + G_R + |A^*|\left(U_L + U_R\right)\right] \tag{2.19}$$

สำหรับการสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ในบทความเสนอแนะให้ใช้ปริมาณอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของค่าความหนาแน่นของไหลในระนาบสองมิติ (การเปลี่ยนแปลงเกรเดียน) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ดังในสมการ (2.15) ข้างต้น ในการคำนวณค่าสูงสุดของการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนของค่าความหนาแน่นของไหล ก็จะหมายถึงการคำนวณปริมาณหลัก (principal quantities) ซึ่งทำให้ผลคูณอนุพันธ์ขวาง (cross derivatives) ในสมการ (2.16) หมดไป และจะได้ความสัมพันธ์ของปริมาณหลักและขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ดังปรากฏในสมการ (2.17) ข้างต้น

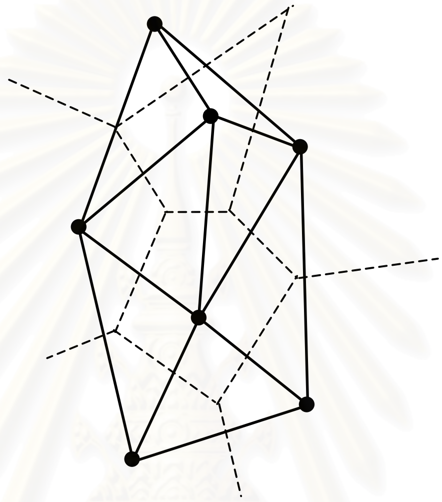
โดยที่ λ_{max} หมายถึง ปริมาณหลักที่มีค่ามากที่สุดในโดเมน

สำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะอาศัยข้อมูลของการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนของค่าความหนาแน่นของของไหลที่ได้จากสมการ (2.17) ข้างต้น ร่วมกับข้อมูลของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ใช้ในการคำนวณครั้งที่ผ่านมา มาใช้ในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่ โดยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนของค่าความหนาแน่นของของไหลสูงก็จะมีขนาดที่เล็กลง ส่วนในบริเวณที่การเปลี่ยนแปลงเกรเดียนของค่าความหนาแน่นของของไหลต่ำก็จะมีขนาดเท่าเดิมหรือโตขึ้น ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น

Liang [12] ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อก เพื่อนำไปใช้ในการประมาณผลกระทบที่จะเกิดกับโครงสร้างที่ถูกตกกระทบโดยคลื่นช็อก โดยในงานวิจัยได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อประยุกต์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์สำหรับการไหลที่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว และใช้รูปแบบ WENO ลำดับที่ห้า (fifth-order Weighted essentially non-oscillatory) ในการประมาณพจน์การพา (convection term) และทำการอินทิเกรตเวลาโดยใช้วีธี Runge-Kutta สำหรับในกรณีที่ของไหลเป็นอากาศในงานวิจัยได้ใช้สมการของสถานะของ Tait ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความดันและค่าความหนาแน่นและทำการประยุกต์เข้ากับปัญหาการระเบิดในอากาศ

Bowyer [13] นำเสนออัลกอริทึมการสร้างแผนผังโวโรนอย (Voronoi diagram หรือ Dirichlet Tesselation) ซึ่งเป็นแผนผังที่ได้จากการเชื่อมต่อจุดซึ่งเป็นปัญหาการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (optimized path searching) เช่น กำหนด n จุดในระนาบหนึ่งๆ ถ้าหากต้องการที่

จะสร้างโครงสร้างข้อมูล (data structure) เพื่อค้นหาจุด q โดยใช้เวลาน้อยที่สุด สามารถกระทำได้โดยการแบ่งระนาบออกเป็นโครงร่างทั้งหมด n โครงร่าง โดยที่แต่ละโครงร่างจะสัมพันธ์กับแต่ละจุด ดังนั้นโครงร่าง P ที่สัมพันธ์กับจุด p ถ้าหาก P เป็นเส้นทางการเดินของจุดของโครงร่างที่ใกล้กับจุด p มากกว่าจุดอื่นๆในระนาบ การแบ่งระนาบออกเป็นโครงร่างย่อยๆที่ต่อเชื่อมกันเรียกว่า แผนผังโวโรนอย ซึ่งถูกแสดงด้วยเส้นประ และการสร้างสามเหลี่ยมที่ได้จากการเชื่อมต่อจุดที่สัมพันธ์กับแต่ละโครงร่างเรียกว่า การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay Triangulation) ซึ่งถูกแสดงด้วยเส้นทึบ ดังในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

อัลกอริทึมการสร้างแผนผังโวโรนอยจากจุดที่กำหนดให้ ในระนาบ ได้ถูกนำเสนอ โดยสมมติว่าต้องการที่จะแทรกจุดใหม่ (Q) ลงในแผนผังโวโรนอย สามารถแบ่งออกเป็น 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. อ่านจุดต่อของแผนผังโวโรนอยจากโครงสร้างข้อมูล โดยกำหนดให้เป็นจุดที่จะถูกลบทิ้งออกจากโครงสร้างข้อมูล
2. ค้นหาจากโครงสร้างข้อมูล เพื่อกำหนดจุดต่อของแผนผังโวโรนอยอื่นๆที่จะถูกลบทิ้งออกจากโครงสร้างข้อมูล โดยจุดที่จะถูกลบทิ้งออกจากโครงสร้างข้อมูล จะหมายถึงจุดที่อยู่ใกล้ Q มากกว่าจุดอื่นๆในโครงสร้างโวโรนอย
3. กำหนดจุดต่อสามเหลี่ยมทั้งหมด ที่สัมพันธ์กับจุดต่อของแผนผังโวโรนอยที่จะถูกลบทิ้งออกจากโครงสร้างข้อมูล
4. ลบทิ้งการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อที่ได้
5. สร้างแผนผังโวโรนอยขึ้นมาใหม่

6. แทนที่จุดต่อที่ถูกลบทิ้งด้วยจุดต่อใหม่ในโครงสร้างข้อมูล

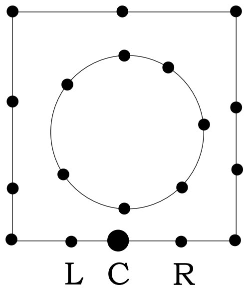
Weatherill และ Hassan [4] ได้นำเสนอวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอ-ลอนเน่ในระนาบสามมิติ และวิธีการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ (automatic point creation) โดย อัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าเดอลอนเน่ในระนาบสามมิติ จะอ้างอิงจะงานของ Bowyer [13] โดยมีรายละเอียดตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. กำหนดให้มีเซตของจุดบนขอบเขตของโดเมนแบบนูน (convex hull domain)
2. แทรกจุดหนึ่งจากเซตของจุดลงในโดเมนแบบนูน
3. ค้นหาจุดต่อทั้งหมดของแผนผังโวโรนอยที่จะถูกลบทิ้ง หมายถึง จุดทั้งหมดที่อยู่ภายในรัศมีของทรงกลม (r) ที่มีจุดต่อของแผนผังโวโรนอยเป็นจุดศูนย์กลาง (x_c) ดังแสดงในสมการ (2.20)

$$\left|x_c - x_{new}\right| < r \tag{2.20}$$

4. ค้นหาจุดที่สัมพันธ์กับแผนผังโวโรนอยที่จะถูกลบทิ้ง (ได้จากขั้นตอนที่ 3)
5. ค้นหาจุดต่อของแผนผังโวโรนอยใกล้เคียง ซึ่งอยู่ติดกับแผนผังโวโรนอยที่จะถูกลบทิ้ง
6. สร้างแผนผังโวโรนอยขึ้นมาใหม่
7. กำหนดจุดต่อของแผนผังโวโรนอยที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ ให้กับแผนผังโวโรนอยใกล้เคียง
8. ปรับปรุงโครงสร้างข้อมูลสำหรับแผนผังโวโรนอยที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่
9. วนซ้ำขั้นตอนที่ 2 ถึง 8 สำหรับจุดต่อๆไป

สำหรับอัลกอริทึมการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ จะใช้วิธีการแทรกจุดลงตรงตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า (tetrahedral) และควบคุมเงื่อนไขการสร้างรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์อัลฟ่า (α) และสัมประสิทธิ์เบต้า (β) โดยที่สัมประสิทธิ์อัลฟ่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดที่ต้องการแทรกและจุดต่อทั้งสามของสามเหลี่ยม ซึ่งจะมีผลต่อความหนาแน่นของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (mesh density) และสัมประสิทธิ์เบต้า เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการทดสอบระยะห่างระหว่างจุดในบริเวณใกล้เคียงที่มีอยู่แล้วกับจุดที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ ซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ (regularity of triangulation) โดยมีรายละเอียดตามขั้นตอนต่อไปนี้



$$dp_c = \frac{|r_L - r_C| + |r_R - r_C|}{2}$$

รูปที่ 2.2 การคำนวณฟังก์ชันการกระจายของจุดบนขอบเขตของโดเมน

1. คำนวณค่าฟังก์ชันการกระจายของจุด (point distribution function) สำหรับจุดบนขอบเขตของโดเมน โดยจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดดังกล่าวและจุดสองจุดที่อยู่ติดกัน ดังในรูปที่ 2.2 โดยที่ | | หมายถึง ระยะห่างระหว่างจุดทั้งสอง
2. สร้างเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าในระนาบสามมิติ สำหรับจุดบนขอบเขตของโดเมนทั้งหมด
3. กำหนดให้จำนวนจุดภายในโดเมนเท่ากับศูนย์
4. สร้างรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าภายในโดเมน โดยมีขั้นตอนย่อย ดังนี้
   4.1. เลือกจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า Q เป็นจุดที่ต้องการแทรกลงในโดเมน
   4.2. คำนวณฟังก์ชันการกระจายของจุด (dp_Q) โดยการประมาณค่าเฉลี่ยจากจุดปลายทั้งสี่ของรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า
   4.3. คำนวณระยะห่างจากจุด Q ไปยังจุดปลายทั้งสี่ของรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า (d_m, $m = 1, \ldots, 4$)
   4.4. ถ้าหาก $d_m < \alpha dp_Q$ ปฏิเสธการสร้างจุด และกระโดดไปยังขั้นตอนที่ 4
   4.5. คำนวณระยะห่างจากจุด Q ไปยังจุดที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้ที่อยู่ใกล้เคียง (s_j) ซึ่งหมายถึงจุดในเซต **P**
   4.6. ถ้าหาก $s_j < \beta dp_Q$ ปฏิเสธการสร้างจุด และกระโดดไปยังขั้นตอนที่ 4
   4.7. ยอมรับการสร้างจุด Q และจัดเก็บจุด Q ลงในในเซต **P**
   4.8. กำหนดค่าฟังก์ชันการกระจายของจุด ให้กับจุด Q ที่ถูกจัดเก็บใน **P**
   4.9. ไปยังทรงเหลี่ยมสี่หน้าถัดไป
5. ถ้าหากจำนวนสมาชิกในเซต **P** = 0 ไปยังขั้นตอนที่ 7
6. สร้างเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าเดอลอนเน่ในระนาบสามมิติ สำหรับจุดในเซต **P** และกลับไปยังขั้นตอนที่ 3
7. ปรับปรุงรูปร่างของรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าให้ดีขึ้น ด้วยอัลกอริทึมลาปลาซ (Laplace smoothing algorithm)

Karamete et al. [5] ได้นำเสนอเทคนิคการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object Oriented Programming, OOP) และการจัดเก็บข้อมูลของจุดและสามเหลี่ยมด้วยโครงสร้างข้อมูลแบบแผนภูมิต้นไม้ที่เรียกว่า Alternating Digitla Tree (ADT) มาใช้ปรับปรุงอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าเดอลอนเน่ในระนาบสามมิติ และวิธีการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติของ Weatherill [4] สำหรับวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในระนาบสองมิติ โดยอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในระนาบสองมิติ มีขั้นตอนดังนี้

Read geometrical data from a disk file or by a graphical interface.

Begin with an interior point p

Find the nearest point q to point p.

Set pq as the generating line segment.

Search for the points in the search list.

Foint point r giving minimum-distance-to-center.

Load Triangle pqr to Triangle_List.

Load Triangle number toeach three points' Point_Triangle_List.

Repeat

Increase active triangle number.

For i:=1 **To** 2 do

Begin

Extract active triangle pt from Triangle_List.

If i = 1 **Then** p:=pt.[1]; q:=pt.[3]; r:=pt.[2];

Else p:=pt.[2]; q:=pt.[3]; r:=pt.[1];

The line segment pq is the generating line segment.

Set boolean Skip to False.

Check to see pq to be boundary line segment.

If Yes **Then** Slip := True.

If Triangle_List size greater **Then** 1 and not Skip Then

Begin

Extract triangle numbers of point p from Point_Triangle_List.

Extract triangle numbers of point q from Point_Triangle_List.

Check to see one of the p and q's triangle numbers other than the active triangle to coincide.

If Yes **Then** Skip := True and Break if loop.

End

If not Skip **Then**

Begin

Extract point coordinate of p from Point_List.

Extract point coordinate of q from Point_List.

Extract point coordinate of r from Point_List.

Search for the points opposite to point r from the Search_List.

Find point m satisfying minimum-distance-to-center criterion.

If found **Then** Found := True **Else** Found := False.

If Found **Then**

Begin

Load Triangle pqm to Triangel_List.

Check for Boundedness and delete bounded points from Search_List.

End (Found)

End (Skip)

End (i)

Until Search_List size equals zero.

End (Triangulize)

สำหรับอัลกอริทึมการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ จะมีรายละเอียดตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. คำนวณค่าฟังก์ชันการกระจายของจุด (point distribution function) สำหรับจุดบนขอบเขตของโดเมน โดยจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดดังกล่าวและจุดสองจุดที่อยู่ติดกัน ดูรูปที่ 2.2

2. สร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในระนาบสองมิติ สำหรับจุดบนขอบเขตของโดเมนทั้งหมด
3. กำหนดให้จำนวนจุดภายในโดเมนเท่ากับ 0
4. สร้างสามเหลี่ยมภายในโดเมน โดยมีขั้นตอนย่อย ดังนี้
   4.1. เลือกจุดศูนย์ถ่วงของรูปสามเหลี่ยม Q เป็นจุดที่ต้องการแทรกลงในโดเมน
   4.2. คำนวณฟังก์ชันการกระจายของจุด (dp_Q) โดยการประมาณค่าเฉลี่ยจากจุดปลายทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
   4.3. คำนวณระยะห่างจากจุด Q ไปยังจุดปลายทั้งสี่ของรูปสามเหลี่ยม (d_m, m = 1, 2, 3)
   4.4. ถ้าหาก $d_m < \alpha dp_Q$ ปฏิเสธการสร้างจุด และกระโดดไปยังขั้นตอนที่ 4
   4.5. คำนวณระยะห่างจากจุด Q ไปยังจุดที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้ที่อยู่ใกล้เคียง (s_j) ซึ่งหมายถึงจุดในเซต $\mathbf{P}$
   4.6. ถ้าหาก $s_j < \beta dp_Q$ ปฏิเสธการสร้างจุด และกระโดดไปยังขั้นตอนที่ 4
   4.7. ยอมรับการสร้างจุด Q และจัดเก็บลงในในโครงสร้างข้อมูล Point_List และ Point_Triangle_List
   4.8. กำหนดค่าฟังก์ชันการกระจายของจุดให้กับจุด Q ที่ถูกจัดเก็บโครงสร้างข้อมูล Point_List
   4.9. ไปยังสามเหลี่ยมถัดไป
5. ถ้าหากจำนวนสมาชิกในโครงสร้างข้อมูล Point_List = 0 ไปยังขั้นตอนที่ 7
6. สร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในระนาบสองมิติ สำหรับจุดในโครงสร้างข้อมูล Point_List และ Point_Triangle_List และกลับไปยังขั้นตอนที่ 3
7. ปรับปรุงรูปร่างของสามเหลี่ยมให้ดีขึ้น ด้วยอัลกอริทึมลาปลาซ (Laplace smoothing algorithm)

Ruppert [14] ได้นำเสนออัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่และวิธีการแบ่งสามเหลี่ยมภายในโดเมน โดยที่แต่ละสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างจะถูกควบคุมโดยอัตราส่วนระหว่างด้านที่ยาวที่สุด และด้านตั้งฉากของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่น้อยที่สุด (aspect ratio) สำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ภายในโดเมนสองมิติ ด้วยอัลกอริทึม *DelaunayRefine* จะกำหนดให้ V หมายถึง จุดปลายของสามเหลี่ยม และ DT(V) หมายถึงเซตของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

subroutine SplitTri(triangle t)

Add circumcenter of t to V, updating DT(V)

subroutine SplitSeg(segment s)

Add midpoint of s to V, updating DT(V)

Remove s from S, add its two halves s_1 and s_2 to S

Algorithm *DelaunayRefine*

INPUT : planar straightline graph X;

desired minimum angle bound α

OUTPUT : triangulation of X, with all angle $\geq \alpha$.

Initialize:

add a bounding square B to X:

compute extremes of X: xmin, ymin, xmax, ymax

let span(X) = max(xmax- xmin, ymax- ymin)

let B be the square of side 3 x span(X), centered on X

add the four boundary segments of B to X

let segment list S = edge of X

let vertex list V = vertices of X

compute initial Delaunay triangulation DT(V)

repeat:

while any segments s is encroached upon:

SplitSeg(s)

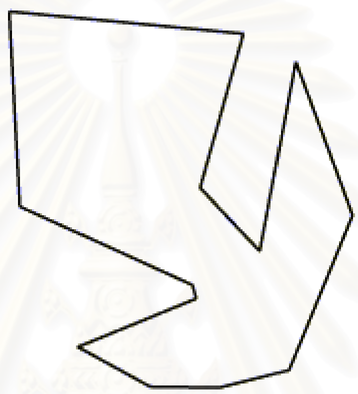
let t be (any) skinny triangle (min angle < α)

let p be t's circumcenter

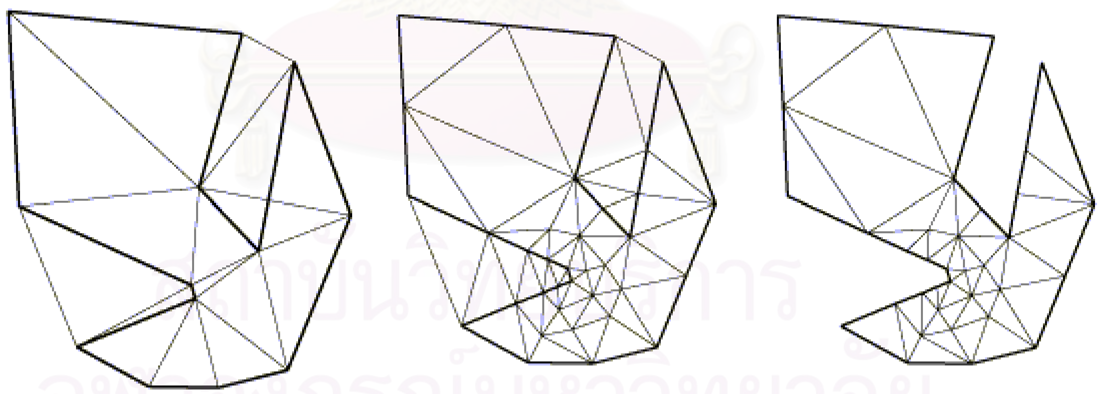
if p encroaches upon any segments s_1, …, s_k then

```
        for i:=1 to k;
                SplitSeg(s_i)
    else
        SplitTri(t) (* add p to V *)
    endif
until no segments encroached upon, and no angle < α

output current Delaunay triangulation DT(V)
```



รูปที่ 2.3 โดเมนที่ต้องการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่



รูปที่ 2.4 ขั้นตอนการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ของอัลกอริทึม ***DelaunayRefine***

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Devillers [15] ได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับทำการลบทิ้งจุดต่อออกจากโดเมนของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ โดยสามเหลี่ยมที่เหลือยังคงเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทุกประการ โดยอัลกอริทึมที่ถูกนำเสนอจะสามารถทำงานได้รวดเร็วกว่า และยังมีความเที่ยงตรง

กว่าอัลกอริทึมในอดีต สำหรับขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมดังกล่าว สามารถแสดงในรูปแบบของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (OOP) สำหรับอัลกอริทึม *Delete(DT(S), p))* ได้ดังนี้

อัลกอริทึม *Delete(DT(S), p))*

Let $q_o q_1 \ldots q_{k-1}$ the vertices incident to *p* in *DT(S)* in ccw order around *p*;

Let *Q* be a priority queue;

for *i* = 0 to *k* – 1

do ear ⟵ $q_i q_{i+1} q_{i+2}$;

if counterclockwise($q_i q_{i+1} q_{i+2}$)

then p ⟵ ∞;

else p ⟵ -power(*p*, *ear*);

Q.insert(*p*, *ear*);

while size(*Q*) > 3

do *ear* ⟵ *Q*.minimum();

create triangle ear and linked it to its two existing neighbors;

ear0 ⟵ *ear*.previous;

ear1 ⟵ *ear*.next;

ear0.vertex(2) ⟵ *ear*.vertex(2); *ear0*.next ⟵ *ear1*;

ear1.vertex(0) ⟵ *ear*.vertex(0); *ear1*.previous ⟵ *ear2*;

Q .delete(*ear*);

Q.modify-priority(*ear0*);

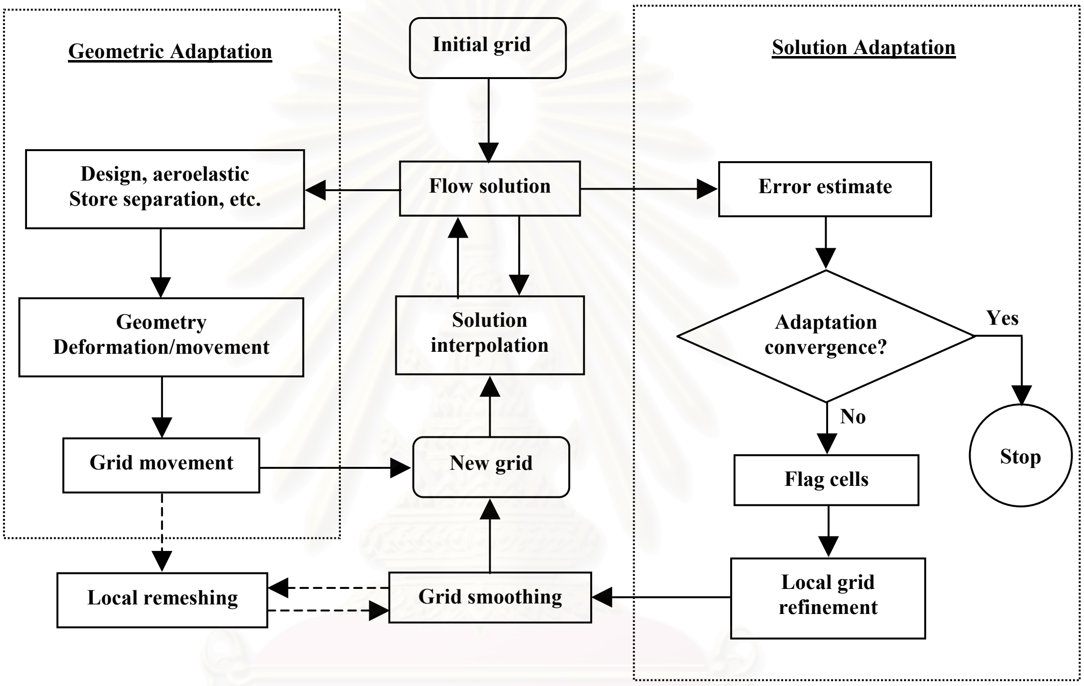
Q.modify-priority(*ear1*);

ear ⟵ *Q*.minimum();

Create triangle ear and linked it to its three existing neighbors;

Pirzadeh [16] ได้ศึกษาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แบบปรับตัวได้ โดยรวมเอาเทคนิคการแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (grid subdivision) การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่เฉพาะส่วน (local remeshing) และการย้ายตำแหน่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (grid movement) และได้นำเอาอัลกอริทึมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่มาใช้ในการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง

โดยในรูปที่ 2.5 แสดงแผนผังภาพรวมของการทำงานของการแบ่งขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยม การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่เฉพาะส่วน และการย้ายตำแหน่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วนหลัก ๆ ดังนี้ ส่วนที่หนึ่งเป็นการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเบื้องต้น ส่วนที่สองเป็นการคำนวณผลลัพธ์และการประมาณค่าความผิดพลาด และขั้นตอนที่สามเป็นการปรับขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยกระบวนการดังกล่าว และสิ้นสุดด้วยการปรับปรุงรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งในบทความได้นำเสนอเทคนิคลาปลาซ



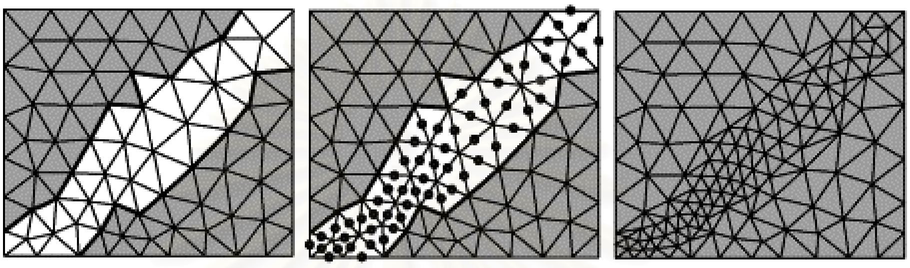
รูปที่ 2.5 แผนผังภาพรวมของการทำงานของการแบ่งขนาดของสามเหลี่ยม
การสร้างสามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่เฉพาะส่วน และการย้ายตำแหน่งสามเหลี่ยม

สำหรับการสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ในบทความเสนอแนะให้ใช้ค่าความหนาแน่นและความดันสถิตย์ของของไหลในการประมาณค่าความผิดพลาด ดังนี้

$$E_i = \left(1 + \frac{\delta_i}{\delta_a}\right)\frac{|\Delta p_i|}{p_i} \tag{2.21}$$

โดยที่ p_i และ Δp_i หมายถึง ความดันสถิตย์ที่จุดต่อและอัตราการเพิ่มขึ้นของความดันสถิตย์ที่จุดต่อ (อัตราการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากการคำนวณสมการไม่เชิงเส้นแบบวนซ้ำตามลำดับ ส่วน δ_i และ δ_a หมายถึง ระยะห่างของจุดต่อ (local grid spacing) และระยะห่างเฉลี่ยของจุดต่อ (average grid spacing) ตามลำดับ

รูปที่ 2.6 แสดงตัวอย่างการแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม โดยสมมติว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีความผิดพลาดมากกว่าที่กำหนดได้ถูกแสดงด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ไม่ถูกระบายดังในรูปทางซ้ายมือ ส่วนรูปกลางแสดงการแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้เล็กลงโดยการสร้างจุดลงบนตำแหน่งกึ่งกลางของด้านของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าว และรูปทางขวามือแสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ซึ่งจะมีขนาดเล็กลง การแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีดังกล่าวในบางครั้งจะถูกเรียกว่ากระบวนการ mesh enrichment



รูปที่ 2.6 ตัวอย่างการแบ่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (grid subdivision)

บทที่ 3
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล

การศึกษาในงานวิจัยนี้ จะต้องอาศัยทฤษฎีหรือระเบียบวิธีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับองค์ความรู้สามประการ ดังนี้

1. ทฤษฎีพื้นฐานของการไหล สำหรับการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวในสองมิติ จะถูกควบคุมโดยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน
2. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered) สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์
3. ทฤษฎีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

เนื่องจากงานวิจัยนี้จะศึกษาเฉพาะการไหลในสองมิติ ดังนั้นในการพิสูจน์สมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีพื้นฐานของการไหล ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ และอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ก็จะพิจารณาเฉพาะในระบบแกนพิกัดฉากในสองมิติเท่านั้น โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

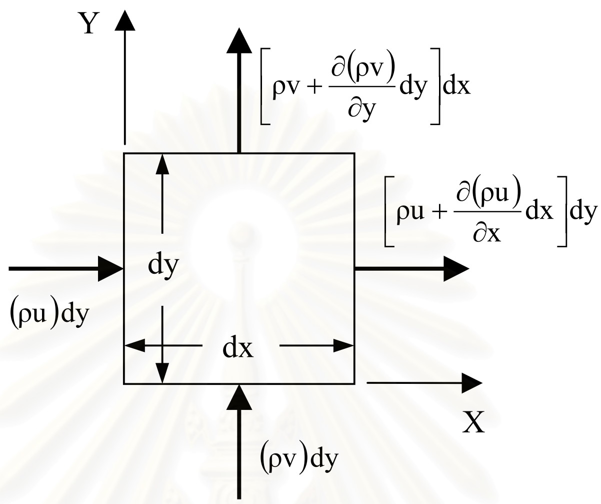
สำหรับโมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กอยู่กับที่ในโดเมน (Infinitesimally small element fixed in space model) [17] ดังในรูปที่ 3.1 โดยสมมติให้ความหนาของเอลิเมนต์ในแนวแกน z เท่ากับ 1 หน่วย การไหลของมวลในแนวแกน x จะไหลเข้าทางด้านซ้ายและไหลออกทางด้านขวา ส่วนการไหลของมวลในแนวแกน y จะไหลเข้าทางด้านล่างและไหลออกทางด้านบน ดังนั้นปริมาณการไหลออกสุทธิของมวล (net outflow of mass) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ สามารถแสดงได้ด้วยสมการ (3.1) และ (3.2) ตามลำดับ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy - (\rho u)dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy \tag{3.1}$$

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx - (\rho v)dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dx\,dy \tag{3.2}$$

และปริมาณการไหลออกสุทธิของมวลผ่านเอลิเมนต์ สามารถแสดงได้ด้วยสมการ (3.3) ซึ่งได้จากการรวมสมการ (3.1) และ (3.2) เข้าด้วยกันดังนี้

$$\text{net mass outflow} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dx\,dy \tag{3.3}$$



รูปที่ 3.1 โมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กอยู่กับที่ในโดเมนของฟลักซ์ของมวลผ่านด้านของเอลิเมนต์

ตามหลักการคงที่ของมวล ดังนั้นปริมาณการไหลออกสุทธิของมวลผ่านเอลิเมนต์จะต้องมีค่าเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในเอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการ (3.4)

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dx\,dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy \tag{3.4}$$

และสามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ (conservation form) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล ดังแสดงในสมการ (3.5)

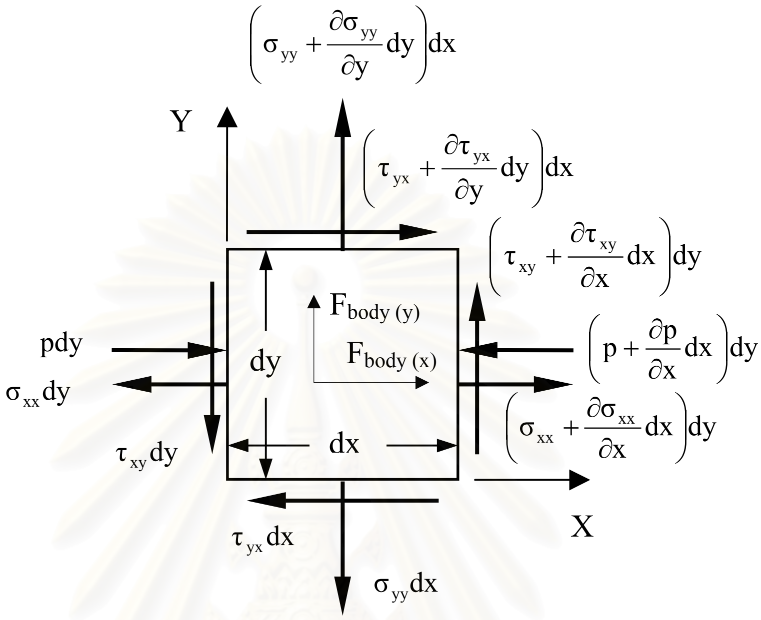
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \tag{3.5}$$

3.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

เมื่อพิจารณาโมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนที่ในโดเมน (Infinitesimally small element moving in space model) ดังในรูปที่ 3.2 ซึ่งมีแรงภายนอกมากระทำกับเอลิเมนต์ สำหรับแรงภายนอกดังกล่าวสามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสองชนิด คือแรงเนื่องจากน้ำหนักของ

วัตถุ (body forces) และแรงกระทำที่ผิว (surface forces) เมื่อทำการพิจารณาเฉพาะแรงภายนอกที่มากระทำเฉพาะในแนวแกน x สามารถแสดงแรงเนื่องจากน้ำหนักได้ด้วยสมการ (3.6)

$$\text{body force}_x = \rho f_x dx\, dy \tag{3.6}$$



รูปที่ 3.2 โมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนที่ในโดเมนของแรงภายนอกกระทำกับเอลิเมนต์

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) $F_x = ma_x$ สามารถที่จะเขียนผลรวมของแรงภายนอกในแนวแกน x ที่มากระทำกับเอลิเมนต์ดังในสมการ (3.7)

$$\begin{aligned}\text{surface force}_x = &\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\right] dy + \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) - \sigma_{xx}\right] dy \\ &+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dx\end{aligned} \tag{3.7}$$

ดังนั้นแรงสุทธิในแนวแกน x ที่กระทำกับเอลิเมนต์ จะเท่ากับผลรวมของสมการ (3.6) และ (3.7)

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right] dx\, dy + \rho f_x dx\, dy \tag{3.8}$$

เนื่องจากความเร่งมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา ดังนั้นจึงสามารถแสดงสมการ (3.8) ได้ด้วยสมการ (3.9)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{3.9}$$

เพื่อให้สามารถเขียนสมการ (3.9) ให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ ก็ต้องแทนที่พจน์ทางซ้ายมือของสมการด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ (3.10) และ (3.11) ดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \tag{3.10}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.11}$$

และ โดยอาศัยความสัมพันธ์เชิงเอกลักษณ์ของไดเวอร์เจนซ์ของผลคูณของปริมาณสกาลาร์และเวกเตอร์

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\rho u \vec{V}\right) = u \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) + \left(\rho \vec{V}\right) \cdot \vec{\nabla} u \tag{3.12}$$

เมื่อแทนที่สมการ (3.10) (3.11) และ (3.12) ลงในสมการ (3.9) ก็จะสามารถเขียนสมการ (3.9) ให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ ที่เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho u \vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{3.13}$$

ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ก็สามารถสร้างได้ด้วยวิธีเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x โดยการเปลี่ยนตัวแปรของแรงกระทำและความเร็วในแนวแกน x ให้เป็นแรงกระทำและความเร็วในแนวแกน y ดังนั้นจึงสามารถแสดงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ ได้ดังสมการ (3.14)

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho v \vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y \tag{3.14}$$

3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

เมื่อพิจารณาโมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนที่ในโดเมน (Infinitesimally small element moving in space model) ดังในรูปที่ 3.3 จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายใน ปริมาณความร้อนและงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์ได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในเอลิเมนต์ = ปริมาณฟลักซ์ความร้อนสุทธิที่ไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ + อัตราของงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์ อันเนื่องจากแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุและแรงกระทำที่ผิว

จากความสัมพันธ์ข้างต้นอัตราของงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์ อันเนื่องจากแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุสำหรับเอลิเมนต์ของของไหลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{V}$ สามารถแสดงได้ด้วยสมการ (3.15)

$$W_b = \rho\vec{f}\cdot\vec{V}(dx\ dy) \tag{3.15}$$

ส่วนอัตราของงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์ อันเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน x สำหรับเอลิเมนต์ของของไหลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u ในส่วนที่เกิดจากแรงดัน (pressure) ความเค้นหลัก (main stress) และความเค้นเฉือน (shear stress) สามารถแสดงได้ด้วยสมการ (3.16) (3.17) และ (3.18) ตามลำดับดังนี้

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial(up)}{\partial x}dx\ dy \tag{3.16}$$

$$\left[\left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dy\right) - u\tau_{yx}\right]dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dx\ dy \tag{3.17}$$

$$\left[\left(u\sigma_{xx} + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}dx\right) - u\sigma_{xx}\right]dy = \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}dx\ dy \tag{3.18}$$

สำหรับอัตราของงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์ อันเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน y สำหรับเอลิเมนต์ของของไหลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในส่วนที่เกิดจากแรงดัน (pressure) ความเค้นหลัก (main stress) และความเค้นเฉือน (shear stress) ก็สามารถสร้างขึ้นมาได้ด้วยวิธีเช่นเดียวกัน ดังนั้น อัตราของงานสุทธิที่กระทำต่อเอลิเมนต์ อันเนื่องจากแรงเนื่อง

จากน้ำหนักของวัตถุและแรงกระทำที่ผิว จึงเท่ากับผลรวมของสมการ (3.15) ถึง (3.18) และงานที่กระทำต่อเอลิเมนต์อันเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน y ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial(up)}{\partial x} - \dfrac{\partial(vp)}{\partial y} + \dfrac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \\ \dfrac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \dfrac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \dfrac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y} \end{bmatrix} dx\,dy + \rho\vec{f}\cdot\vec{V}dx\,dy \tag{3.19}$$

สำหรับปริมาณฟลักซ์ความร้อนสุทธิที่ไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ จะประกอบด้วยอัตราความร้อนสะสมภายในปริมาตรของเอลิเมนต์ของไหล (volumetric heating) และปริมาณการถ่ายเทความร้อนผ่านผิวของเอลิเมนต์ (heat transfer) ดังในรูปที่ 3.4 โดยที่อัตราความร้อนสะสมภายในปริมาตรของเอลิเมนต์ของไหล จะมีค่าเท่ากับดังที่ปรากฏในสมการ (3.20) ส่วนปริมาณการถ่ายเทความร้อนผ่านผิวของเอลิเมนต์ในแนวแกน x และแกน y จะมีค่าเท่ากับดังที่ปรากฏในสมการ (3.21) และ (3.22) ตามลำดับ ดังนี้

$$\text{volumetric heating } = \rho\dot{q}\,dx\,dy \tag{3.20}$$

$$\left[\dot{q}_x - \left(\dot{q}_x + \frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x}dx\,dy \tag{3.21}$$

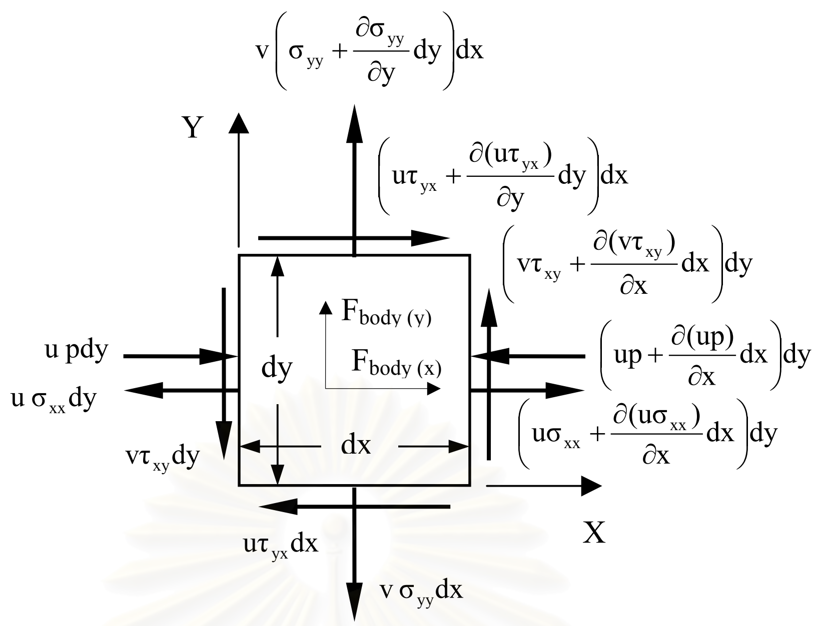
$$\left[\dot{q}_y - \left(\dot{q}_y + \frac{\partial\dot{q}_y}{\partial y}dy\right)\right]dx = -\frac{\partial\dot{q}_y}{\partial y}dx\,dy \tag{3.22}$$

โดยที่

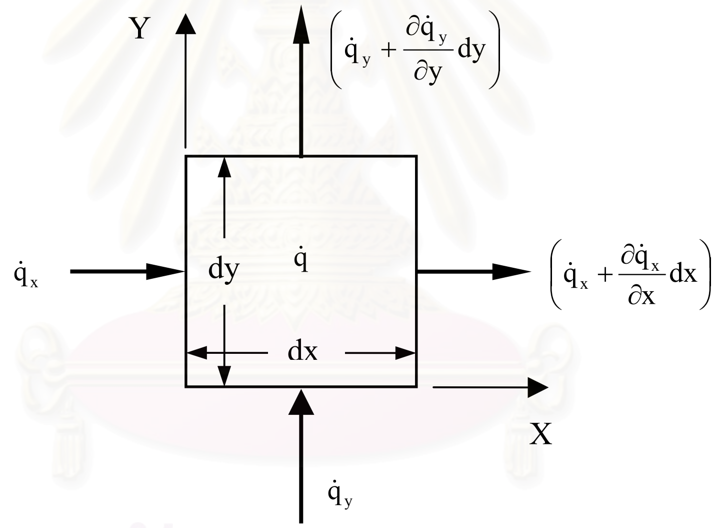
$$\dot{q}_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad \dot{q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ความร้อนสุทธิที่ไหลเข้าสู่เอลิเมนต์ จึงเท่ากับผลรวมของสมการที่ (3.20) ถึง (3.22) ดังนี้

$$\left[\rho\dot{q} - \left(\frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial\dot{q}_y}{\partial y}\right)\right]dx\,dy \tag{3.23}$$



รูปที่ 3.3 โมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนที่ในโดเมนของฟลักซ์งานผ่านเอลิเมนต์



รูปที่ 3.4 โมเดลเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนที่ในโดเมนของฟลักซ์พลังงานผ่านเอลิเมนต์

สำหรับในส่วนของพลังงานภายในเอลิเมนต์จะเกิดจากสองแหล่งดังนี้ พลังงานภายในเนื่องจากการเคลื่อนที่แบบสุ่มของโมเลกุล ซึ่งจะรวมเป็นพลังงานเฉลี่ยและเรียกว่าพลังงานภายใน (e) และพลังงานภายในเนื่องจากการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ของของไหล (kinetic energy) ดังในสมการ (3.24)

$$\text{internal energy} = \rho\frac{D\left(e+\frac{V^2}{2}\right)}{Dt}dx\,dy \tag{3.24}$$

เพื่อให้สามารถเขียนสมการ (3.24) ให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ ก็ต้องแทนที่พจน์ทางซ้ายมือของสมการด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังนี้

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\vec{\nabla}e \tag{3.25}$$

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.26}$$

และโดยอาศัยความสัมพันธ์เชิงเอกลักษณ์ของไดเวอร์เจนซ์ของผลคูณของปริมาณสกาล่าร์และเวกเตอร์

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho e\vec{V}\right) = e\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) + \left(\rho\vec{V}\right)\cdot\vec{\nabla}e \tag{3.27}$$

ส่วนพจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน เนื่องจากการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ของของไหล สามารถหาได้จากการคูณสมการที่ (3.9) ด้วย u ดังนี้

$$\rho\frac{D\frac{u^2}{2}}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \tag{3.28}$$

และเนื่องจาก $V^2 = u^2 + v^2$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในเนื่องจากการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ของของไหล จึงเท่ากับผลรวมของสมการ (3.28) และสมการในรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (3.28) แต่เป็นสมการสำหรับแรงกระทำจนเกิดงานจากการเคลื่อนตัว และความเร็วในแนวแกน y (v) ดังนี้

$$\begin{aligned}\rho\frac{DV^2}{Dt} = &-u\frac{\partial p}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial y} + u\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right)\\ &+ \rho\left(uf_x + vf_y\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

เมื่อแทนที่สมการ (3.15) (3.19) (3.23) (3.25) ถึง (3.29) ลงในสมการความสัมพันธ์ข้างต้น ก็สามารถที่จะเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุรักษ์ ที่เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} \qquad (3.30)$$
$$+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\rho(uf_x+vf_y)$$

3.4 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุรักษ์

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล (3.5) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y (3.14 และ 3.15) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน (3.30) สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่าย ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=J \qquad (3.31)$$

โดย $\{U\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังนี้

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \qquad (3.32)$$

$\{E\}$ และ $\{F\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\{E\}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p-\sigma_x\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho u\varepsilon+pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\sigma_x-v\tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (3.33)$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv+\tau_{xy}\\ \rho v^2+p-\sigma_y\\ \rho v\varepsilon+pv-k\frac{\partial T}{\partial y}-u\tau_{xy}-v\sigma_y\end{Bmatrix} \qquad (3.34)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\{J\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน x และ y และความร้อนสะสมภายในดังนี้

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho\left(\dot{q} + uf_x + vf_y\right) \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

โดย ε แทนพลังงานรวม (total energy) ซึ่งประกอบด้วยพลังงานภายใน (internal energy) e และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ดังนี้

$$\varepsilon = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{3.36}$$

เนื่องจากขอบเขตของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะมุ่งเน้นศึกษาเฉพาะปัญหาการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืด และไม่พิจารณาพจน์การนำความร้อนรวมทั้งความร้อนสะสมภายในของไหล และพิจารณาเฉพาะแรงเนื่องจากน้ำหนักในแนวแกน y เท่านั้น ดังนั้นจึงสามารถลดรูปสมการ (3.33) ถึง (3.35) โดยตัดพจน์ที่ไม่เกี่ยวข้องออกไป ก็จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในรูปแบบอย่างง่ายดังต่อไปนี้

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u\varepsilon + pu \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v\varepsilon + pv \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

โดยที่ $\{E\}$ และ $\{F\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho f_y \\ \rho v f_y \end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

และ $\{J\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน y

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ข้างต้น เมื่อนำมาแก้ปัญหาการไหลในกรณีที่ของไหลเป็นอากาศ ก็จะใช้สมมติฐานของอากาศในอุดมคติ (ideal gas) มาพิจารณาร่วมกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ โดยผ่านทางสมการสถานะของก๊าซ (Gas equation of state) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นและความดันของของก๊าซ ดังนี้

$$p = \rho RT \tag{3.39}$$

และพลังงานภายใน e สามารถคำนวณได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ทางเทอร์โมไดนามิกส์ ดังนี้

$$e = c_v T \tag{3.40}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{3.41}$$

สำหรับในกรณีที่ของไหลเป็นน้ำทะเล เช่นการวิเคราะห์ปัญหาการระเบิดใต้ท้องน้ำทะเล เป็นต้น สมมติฐานของอากาศในอุดมคติจะไม่สามารถนำมาใช้งานได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นในกรณีนี้จึงจำเป็นต้องใช้สมการสถานะของ Tait สมการ (2.9) ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมา เพื่อนำมาพิจารณาร่วมกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ แต่เนื่องจากสมการดังกล่าวไม่แสดงความสัมพันธ์เฉพาะระหว่างความหนาแน่นและความดันของของไหล โดยไม่ปรากฏอุณหภูมิเป็นตัวแปรในสมการ ดังนั้นในกรณีที่ของไหลเป็นน้ำทะเล ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ที่นำมาใช้ในการสร้างระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ดังที่จะกล่าวในบทต่อไป ก็จะมีเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล (3.5) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y (3.13 และ 3.14) เท่านั้น เพราะในการประดิษฐ์เมตริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix) สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ จะต้องแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของอนุรักษ์พลังงานในรูปของพลังงานรวมให้อยู่ในรูปของความดันโดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการสถานะ ดังนั้นสมการในรูปแบบอย่างง่ายของตัวแปรอนุรักษ์สามารถที่จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

โดย $\{U\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังนี้

$$\{E\}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\end{Bmatrix} \quad ; \quad \{F\}=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

$\{E\}$ และ $\{F\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ

$$\{J\}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \rho f_y\end{Bmatrix} \tag{3. 44}$$

และ $\{J\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน y

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์

ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์เพื่อแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ถูกปรับปรุงให้สามารถใช้ได้กับเอลิเมนต์รูปร่างใด ๆ เพื่อนำไปใช้คำนวณการไหลของอากาศผ่านหน้ายานที่มีรูปทรงซับซ้อนโดย Gnoffo [3] ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการศึกษาต่อเนื่องสำหรับการนำมาประยุกต์เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีการวางตัวอย่างไม่เป็นระเบียบ (unstructured mesh) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 ในการสร้างระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ จะถูกแบ่งออกเป็นสองกรณี กรณีแรกสำหรับปัญหาการไหลที่ของไหลเป็นอากาศ ซึ่งจะทำการศึกษาโดยเริ่มต้นจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

ส่วนกรณีที่สองสำหรับปัญหาการไหลที่ของไหลเป็นน้ำทะเล เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการแพร่กระจายของคลื่นช็อกจากการระเบิดใต้ท้องทะเลซึ่งจะทำการศึกษาโดยเริ่มต้นจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y เท่านั้น โดยจะแสดงรายละเอียดต่าง ๆ ในหัวข้อต่อไปนี้

4.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับอากาศ

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ดังที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 สำหรับปัญหาการไหลที่ของไหลเป็นอากาศ ภายใต้ศึกษาสมมติฐานของงานวิจัยที่มุ่งเน้นศึกษาเฉพาะปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว ไม่พิจารณาพจน์การนำความร้อนรวมทั้งความร้อนสะสมภายในของไหล และพิจารณาเฉพาะแรงเนื่องจากน้ำหนักในแนวแกน y เท่านั้น จะถูกนำมาแสดงอีกครั้ง ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = J \tag{4.1}$$

โดย $\{U\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

$\{E\}$ และ $\{F\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u\varepsilon + pu \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v\varepsilon + pv \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

และ $\{J\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในทิศแกน y

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho f_y \\ \rho v f_y \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

โดย ε แทนพลังงานรวม (total energy) ซึ่งประกอบด้วยพลังงานภายใน (internal energy) e และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ดังนี้

$$\varepsilon = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{4.5}$$

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ข้างต้น เมื่อนำมาแก้ปัญหาการไหลในกรณีที่ของไหลเป็นอากาศ ก็จะใช้สมมติฐานของอากาศในอุดมคติ (ideal gas) มาพิจารณาร่วมกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ โดยผ่านทางสมการสถานะของก๊าซ (Gas equation of state) เนื่องจากจำนวนตัวแปรที่ปรากฏมากกว่าจำนวนสมการของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นและความดันของของก๊าซ ดังนี้

$$p = \rho RT \tag{4.6}$$

และพลังงานภายใน e ในรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรปฐมภูมิ (primitive variables) ที่ปรากฏในสมการ (4.2) สามารถคำนวณได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ทางเทอร์โมไดนามิกส์ดังต่อไปนี้

$$e = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \tag{4.7}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{4.8}$$

สำหรับค่าความดัน p ค่าเอนทัลปี (enthalpy) h และค่าเอนทัลปีรวม (total enthalpy) H สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าพลังงานรวมและค่าความเร็วได้ ดังนี้

$$p = \rho(\gamma - 1)\,(\varepsilon - \frac{(u^2 + v^2)}{2}) \tag{4.9}$$

$$h = \gamma e = \gamma(\varepsilon - \frac{(u^2 + v^2)}{2}) \tag{4.10}$$

$$H = h + \frac{(u^2 + v^2)}{2} = \gamma\,\varepsilon - (\gamma - 1)\frac{(u^2 + v^2)}{2} \tag{4.11}$$

สำหรับค่าความเร็วของเสียง (speed of sound) c ที่ตำแหน่งต่างๆภายในโดเมนก็จะมีค่าไม่คงที่ โดนจะมีค่าขึ้นกับค่าของความดันและค่าความหนาแน่น ด้วยความสัมพันธ์ดังในสมการ (4.12)

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{4.12}$$

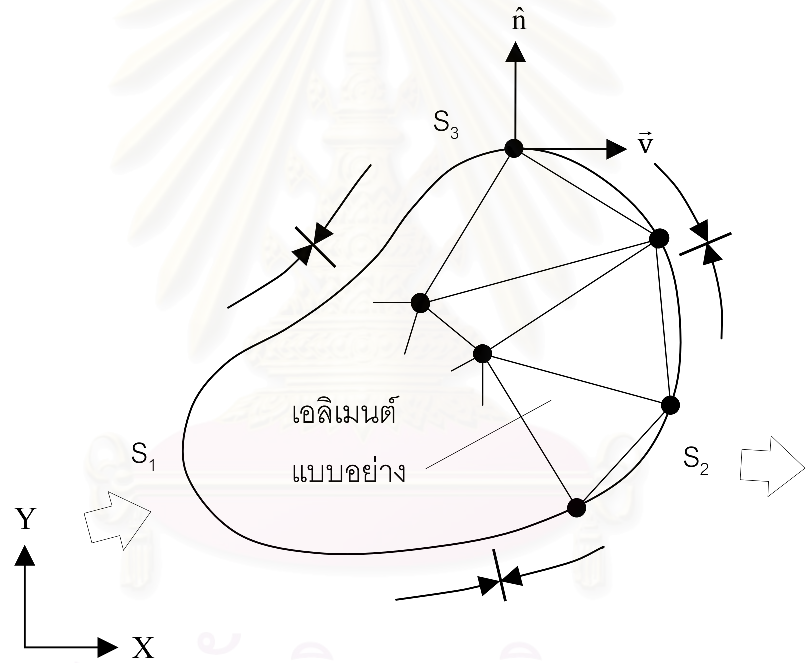
การพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตผ่านโดเมนของการไหลแบบอัดตัวได้ โดยทั่วไปจะประกอบด้วยเงื่อนไขในสามลักษณะ ดังต่อไปนี้ (1) เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) (2) เงื่อนไขขอบเขตการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) และ (3) เงื่อนไขขอบเขตการไหลในทิศทางขนานกับผนัง (solid wall) ดังในรูปที่ 4.1

(1) เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) ตลอดขอบ S_1 จะกำหนดให้ค่าตัวแปรปฐมภูมิมีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้น (initial values) ดังนี้

$$\rho = \rho_o$$
$$\vec{v} = \vec{v}_o$$
$$\varepsilon = \varepsilon_o$$

(2) เงื่อนไขขอบเขตการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) ตลอดขอบ S_2 ไม่ต้องมีการแก้ไขค่าตัวแปรปฐมภูมิ โดยปล่อยให้เป็นค่าที่ได้จากการแก้ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

(3) เงื่อนไขขอบเขตการไหลในทิศทางขนานกับผนัง (solid wall) ตลอดขอบ S_3 ภายใต้สมมติฐานของการไหลแบบไม่หนืด ดังนั้นจะกำหนดความเร็วให้อยู่ในทิศทางที่สัมผัส (tangent) กับผนังตลอดแนว ส่วนความเร็วในแนวตั้งฉากกับผนังตลอดแนว $\vec{v}\cdot\hat{n}$ จะต้องมีค่าเป็นศูนย์เสมอ



รูปที่ 4.1 เงื่อนไขขอบเขตของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ผ่านโดเมน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ในวิทยานิพนธ์นี้จะประดิษฐ์บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ [18] ดังในรูปที่ 4.2 ซึ่งโดยที่แต่ละจุดต่อประกอบด้วยตัวแปรอนุรักษ์ที่ไม่รู้ค่าสี่ตัว คือ ρ, ρu, ρv และ $\rho\varepsilon$ ตามที่ปรากฏในสมการ (4.2) เมื่อพิจารณาให้ค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอนุรักษ์ใด ๆ สำหรับแต่ละเอลิเมนต์สามารถคำนวณได้ด้วยสมการ (4.13)

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{3} U_i}{3} \tag{4.13}$$

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ จะเริ่มต้นด้วยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) [18] เข้ากับสมการ (4.1) และเขียน ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลบนเอลิเมนต์ [3] ดังนี้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} J d\Omega = 0 \tag{4.14}$$

เพื่อให้สมการ (4.13) สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของปริมาณฟลักซ์ไหลผ่านผนังร่วมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ก็ต้องทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เข้ากับพจน์ปริมาณฟลักซ์ของสมการ (4.14) ก็จะได้สมการ (4.15)

$$\int_{\Omega} u\, (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} u\, (\vec{v} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} u \cdot \vec{v})\, d\Omega \tag{4.15}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} (En_x + Fn_y) d\Gamma - \int_{\Omega} J d\Omega = 0 \tag{4.16}$$

โดย $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$ หมายถึง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ที่ตั้งฉากกับขอบของเอลิเมนต์ หรือพจน์ที่สองในสมการ (4.16) สามารถคำนวณได้จากผลคูณไดเวอร์เจนซ์ (divergence product) ของสมการ (4.3) กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา ดังนี้

$$En_x + Fn_y = \begin{Bmatrix} \rho u n_x + \rho v n_y \\ (\rho u^2 + p) n_x + \rho uv\, n_y \\ \rho uv\, n_x + (\rho v^2 + p) n_y \\ (\rho\varepsilon + p) u\, n_x + (\rho\varepsilon + p) v\, n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho U_n \\ \rho u U_n + p n_x \\ \rho v U_n + p n_y \\ \rho\varepsilon U_n + p U_n \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

โดย U_n หมายถึง เวกเตอร์ความเร็วที่ตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา และ V_t หมายถึงเวกเตอร์ความเร็วที่ขนานกับขอบเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา ดังนี้

$$U_n = u n_x + v n_y \tag{4.18}$$

$$V_t = -u n_y + v n_x \tag{4.19}$$

จากสมการ (4.16) พจน์การเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรอนุรักษ์เทียบกับเวลาสามารถที่จะประมาณให้อยู่ในรูปของผลต่าง โดยการประยุกต์ผลต่างสืบเนื่องแบบไปข้างหน้าตามเวลา (forward difference in time) ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \frac{U^{m+1} - U^{m}}{\Delta t} \Omega \tag{4.20}$$

และแทนที่ปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด ด้วยปริมาณฟลักซ์แบบเชิงเลข (numerical flux) $\widetilde{F}_n$ ดังในสมการ (4.21)

$$\int_{\Gamma} \left(En_x + Fn_y \right) d\Gamma = \sum_{n=1}^{3} \int_{\Gamma} \widetilde{F}_n d\Gamma \tag{4. 21}$$

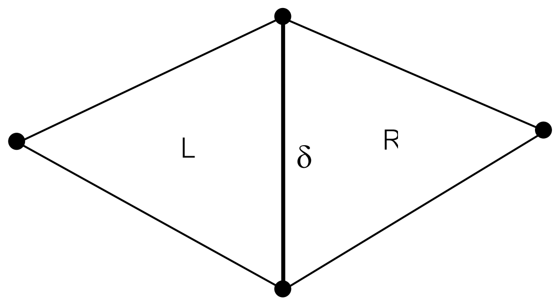
แทนสมการ (4.20) และ (4.21) กลับลงในสมการ (4.15) จะได้

$$U^{m+1} - U^{m} = -\frac{\Delta t}{\Omega} \sum_{n=1}^{3} \int_{\Gamma} \widetilde{F}_n d\Gamma + \frac{\Delta t}{\Omega} \int_{\Omega} J d\Omega \tag{4.22}$$

ปริมาณฟลักซ์แบบเชิงเลข $\widetilde{F}_n$ ที่ไหลผ่านขอบร่วมความยาว δ ของเอลิเมนต์ซ้ายมือ L และเอลิเมนต์ขวามือ R ดังแสดงในรูปที่ 4.2 สามารถแสดงในรูปแบบความสัมพันธ์ดังที่ปรากฏในเอกสารอ้างอิง [2] ดังนี้

$$\widetilde{F}_n = \frac{(F_{nL} + F_{nR})}{2} + \frac{|A|(U_L - U_R)}{2} \tag{4.23}$$

โดยที่ ตัวห้อยท้าย L และ R หมายถึง ปริมาณของเอลิเมนต์ซ้ายมือ L และเอลิเมนต์ขวามือ R ตามลำดับ และ $|A|$ หมายถึง ค่าดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของเมตริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix) ดังจะได้กล่าวถึงวิธีการหาเมตริกซ์แบบยาโคบีต่อไป



รูปที่ 4.2 เอลิเมนต์ซ้ายมือ L และเอลิเมนต์ขวามือ R ที่มีด้านร่วมยาว δ

เมื่อแทนสมการ (4.23) ลงใน (4.22) จะได้สมการที่ใช้ในการคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอนุรักษ์ ในแต่ละรอบของการคำนวณ ซึ่งสามารถที่จะนำไปใช้ในการปรับปรุงค่าตัวแปรอนุรักษ์ สำหรับการคำนวณครั้งใหม่ได้ทันที

$$\Delta U^{m+1} = -\frac{\Delta t}{2\Omega}\sum_{n=1}^{3}\delta_n \left[(F_{nL}^m + F_{nR}^m) + \left| A \right|^m (U_L^m - U_R^m)\right] + \frac{\Delta t}{\Omega}\int_{\Omega} J d\Omega \qquad (4.24)$$

การตรวจสอบค่าความผิดพลาดในแต่ละรอบของการทำซ้ำ สามารถคำนวณได้จากค่ารากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย (root mean square) ของผลต่างของค่าตัวแปรเชิงอนุรักษ์ของทุกเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\text{error} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\text{elem}} \left(U_n^{m+1} - U_n^{m}\right)^2} \qquad (4.25)$$

ค่าตัวแปรเชิงอนุรักษ์ที่คำนวณได้ โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ข้างต้น เป็นค่าตัวแปรเชิงอนุรักษ์ของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นถ้าหากต้องการแปลงค่าตัวแปรเชิงอนุรักษ์ดังกล่าวให้เป็นค่าของแต่ละจุดต่อ (node) ของเอลิเมนต์ ก็ต้องทำการหาค่าเฉลี่ยของค่าตัวแปรเชิงอนุรักษ์ของทุกเอลิเมนต์ที่เชื่อมโยงกับจุดต่อ ดังนี้

$$U_{node} = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{n} \qquad (4.26)$$

โดย n หมายถึง จำนวนเอลิเมนต์ที่เชื่อมโยงกับจุดต่อ หรือจำนวนเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ

จากสมการ (4.24) เมตริกซ์แบบยาโคบี $\vec{A}$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ถูกกำหนดให้เป็นค่าการเปลี่ยนแปลงของปริมาณฟลักซ์เทียบกับค่าของตัวแปรอนุรักษ์ [19] ซึ่งได้จากการเขียนสมการ (4.1) ให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} = J \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)U = J \qquad (4.28)$$

การคำนวณหาเมตริกซ์แบบยาโคบีโดยตรงจากสมการ (4.28) ค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นจึงต้องเขียนสมการ (4.28) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรปฐมภูมิ (primitive variables) แล้วจึงทำการคำนวณหาเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรปฐมภูมิ $\vec{\tilde{A}}$ จากนั้นจึงทำการแปลงเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรปฐมภูมิ ให้กลับเป็นเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรเชิงอนุรักษ์อีกครั้ง โดยผ่านทางเมตริกซ์สำหรับการแปลงค่า (transformation matrix) $\mathbf{M}$ ดังนี้

$$M = \frac{\partial U}{\partial W} \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial U}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{A}\cdot M\vec{\nabla}\, W = J \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(M^{-1}\vec{A}M\right)\cdot\vec{\nabla}\, W = M^{-1}J \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\tilde{A}}\cdot\vec{\nabla}\, W = \tilde{J} \tag{4.32}$$

ดังนั้น เมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรปฐมภูมิ $\vec{\tilde{A}}$ จะมีความสัมพันธ์กับเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรเชิงอนุรักษ์ $\vec{A}$ ดังนี้

$$\vec{\tilde{A}} = M^{-1}\,\vec{A}\,M \tag{4.33}$$

$$\vec{A} = M\,\vec{\tilde{A}}\,M^{-1} \tag{4.34}$$

$$\tilde{J} = M^{-1}\,J \tag{4.35}$$

นอกจากนี้ โดยอาศัยคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออยเลอร์ ที่มีพฤติกรรมในลักษณะไฮเปอร์โบลิก (hypobolic) ดังนั้นโดยวิธีการหาค่าเจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์แบบเจาะจง (eigenvector matrix) ก็สามารถที่จะแสดงเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรปฐมภูมิ ในลักษณะของเมตริกซ์แบบเจาะจง [1,19] ได้ดังนี้

$$\vec{\tilde{A}} = L\,\Lambda\,L^{-1} \tag{4.36}$$

โดย L หมายถึง เมตริกซ์แบบเจาะจง และ Λ หมายถึง เมตริกซ์แบบเจาะจงเฉียง (diagonal eigenvector matrix) ซึ่งประกอบด้วยค่าเจาะจง λ เฉพาะในแนวทแยงมุมหลักของเมตริกซ์

เมื่อแทนสมการ (4.36) กลับลงในสมการ (4.34) ก็จะได้สมการที่ใช้ในการคำนวณหาเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรเชิงอนุรักษ์ ดังนี้

$$\vec{A} = M L \Lambda L^{-1} M^{-1} = R \Lambda R^{-1} \tag{4.37}$$

โดย

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & -n_y & \frac{u+cn_x}{2c^2} & \frac{u-cn_x}{2c^2} \\ -\frac{v}{c^2} & n_x & \frac{v+cn_y}{2c^2} & \frac{v-cn_y}{2c^2} \\ -\frac{\alpha}{c^2} & V_t & \frac{\alpha+U_n c}{2c^2}+\frac{1}{2\beta} & \frac{\alpha-U_n c}{2c^2}+\frac{1}{2\beta} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} |U_n| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U_n| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |U_n + c| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |U_n - c| \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha\beta - c^2 & -\beta u & -\beta v & \beta \\ -V_t & -n_y & n_x & 0 \\ \alpha\beta - U_n c & cn_x - \beta u & cn_y - \beta u & \beta \\ \alpha\beta + U_n c & -cn_x - \beta u & -cn_y - \beta u & \beta \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในเมตริกซ์ทั้งสามข้างต้น ก็จะมีค่าตามที่กำหนดในสมการ (4.9) ถึง (4.12) และ (4.18) ถึง (4.19) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ α และ β มีค่าดังนี้

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{4.41}$$

$$\beta = \gamma - 1 \tag{4.42}$$

ส่วนค่าตัวแปรที่จะนำไปใช้ในสมการ (4.38) ถึง (4.41) จะต้องเป็นค่าของการไหลผ่านด้านร่วม δ ระหว่างเอลิเมนต์ซ้ายมือ L และเอลิเมนต์ขวามือ R โดยจะถูกประมาณด้วยวิธีการหาค่าเฉลี่ยของโรย์ (Roe’s averaging) [8] ดังนี้

$$\rho = \sqrt{\rho_L \rho_R} \tag{4.43}$$

$$u = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{4.44}$$

$$v = \frac{\sqrt{\rho_L}v_L + \sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{4.45}$$

$$H = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{4.46}$$

4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับน้ำทะเล

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นว่าเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรเชิงอนุรักษ์ จะถูกคำนวณมาจากเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรปฐมภูมิ และเนื่องจากสมการของสถานะของก๊าซ (4.6) แตกต่างไปจากสมการของสถานะของน้ำทะเล ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้สมการของสถานะของ Tait (Tait equation of state) [9] โดยจะขอยกจากบทที่ 2 มากล่าวอีกครั้ง ดังนี้

$$p - p_o = \frac{\rho_o c_o^2}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^n - 1\right] \tag{4.47}$$

โดย

$c_o = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_o}}$ หมายถึง ค่าความเร็วเสียงอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1,515 m/s.

p_o หมายถึง ค่าความดันอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 100,000 Pa.

ρ_o หมายถึง ค่าความหนาแน่นอ้างอิงที่ระดับความดันบรรยากาศ ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1,020.95 kg/m^3.

n หมายถึง ค่าคงที่เท่ากับ 7.15 ในกรณีของน้ำทะเล

เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนดังที่ในหัวข้อที่ผ่านมา แต่ใช้สมการของสถานะของ Tait แทนสมการของสถานะของก๊าซ ก็จะได้สมการที่ใช้ในการคำนวณหาเมตริกซ์แบบยาโคบีสำหรับตัวแปรเชิงอนุรักษ์ที่อยู่ในรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (4.37) แต่จะเป็นเมตริกซ์ขนาด 3x3

เนื่องจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ที่นำมาประดิษฐ์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์จะไม่รวมสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของพลังงาน ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ของเมตริกซ์ดังกล่าวจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-n_y}{2} & \frac{u}{2} + \frac{c_o n_x \rho^*}{2\sqrt{2}} & \frac{u}{2} - \frac{c_o n_x \rho^*}{2\sqrt{2}} \\ \frac{n_x}{2} & \frac{v}{2} + \frac{c_o n_y \rho^*}{2\sqrt{2}} & \frac{v}{2} - \frac{c_o n_y \rho^*}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} |U_n| & 0 & 0 \\ 0 & |U_n + \sqrt{2} c_o \rho^*| & 0 \\ 0 & 0 & |U_n - \sqrt{2} c_o \rho^*| \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -V_t & -n_y & n_x \\ 1 - \frac{U_n}{\sqrt{2} c_o \rho^*} & \frac{n_x}{\sqrt{2} c_o \rho^*} & \frac{n_y}{\sqrt{2} c_o \rho^*} \\ 1 + \frac{U_n}{\sqrt{2} c_o \rho^*} & \frac{-n_x}{\sqrt{2} c_o \rho^*} & \frac{-n_y}{\sqrt{2} c_o \rho^*} \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในเมตริกซ์ทั้งสามข้างต้น ก็จะมีค่าตามที่กำหนดในสมการ (4.18) ถึง (4.19) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ ρ^* มีค่าดังนี้

$$\rho^* = \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{4.51}$$

ส่วนค่าตัวแปรที่จะนำไปใช้ในสมการ (4.48) ถึง (4.51) จะต้องเป็นค่าของการไหลผ่านด้านร่วม δ ระหว่างเอลิเมนต์ซ้ายมือ L และเอลิเมนต์ขวามือ R โดยจะถูกประมาณด้วยวิธีการหาค่าเฉลี่ยของโรย์ (Roe's averaging) [8] ดังนี้

$$\rho = \sqrt{\rho_L \rho_R} \tag{4.52}$$

$$u = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{4.53}$$

$$v = \frac{\sqrt{\rho_L}\, v_L + \sqrt{\rho_R}\, v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{4.54}$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์โดยใช้สมการสถานะของ Tait ข้างต้น จะใช้เวลาในการประมวลผลค่อนข้างมาก เพราะปรากฏการยกกำลังเลขจำนวนจริงหลายครั้งในเมตริกซ์ข้างต้น ดังนั้นเพื่อเป็นการลดเวลาของการประมวลผล จึงควรที่จะแปลงสมการสถานะของ Tait ข้างต้นให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นตรง ซึ่งจะทำให้ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ปรากฏรายละเอียดในภาคผนวก ก จากตารางที่ 4.1 จะเห็นว่าให้ความแตกต่างของผลลัพธ์ที่ระดับความดัน 1,000 บาร์เหนือระดับความดันอ้างอิงมีค่าประมาณ 12.4456 เปอร์เซ็นต์ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์โดยใช้สมการสถานะของ Tait แบบเต็ม

ตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างอัตราส่วนของค่าความดันต่อค่าความดันอ้างอิงที่ระดับความดันต่าง ๆ เหนือระดับความดันอ้างอิง ที่ได้จากสมการสถานะของ Tait แบบสมการเต็ม และแบบสมการเชิงเส้น

	$(\rho - \rho_0) / \rho_0$		
$(p - p_0)$ (บาร์)	Linear Tait	Full Tait	Error (%)
100	0.004263	0.004208	1.3032
200	0.008525	0.008310	2.5920
300	0.012788	0.012311	3.8668
400	0.017050	0.016218	5.1283
500	0.021313	0.020035	6.3771
600	0.025575	0.023766	7.6135
700	0.029838	0.027415	8.8382
800	0.034100	0.030986	10.0515
900	0.038363	0.034482	11.2538
1000	0.042625	0.037907	12.4456

บทที่ 5
การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่

การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะเลือกใช้วิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) โดยเนื้อหาในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการอธิบายเทคโนโลยีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เป็นที่ยอมรับในปัจจุบัน ถัดไปก็จะเป็นการอธิบายวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ซึ่งจะยึดแนวคิดสำคัญและอัลกอริทึมจากเอกสารอ้างอิง [4,5] พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการเกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอย่างเป็นขั้นเป็นตอน สุดท้ายก็จะอธิบายการสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) และทำการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาขึ้นมาใหม่ภายใต้เงื่อนไขของการการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ เพื่อนำไปใช้ในการตรวจจับช็อกที่เกิดจากการไหลแบบอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง

5.1 เทคโนโลยีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในปัจจุบัน

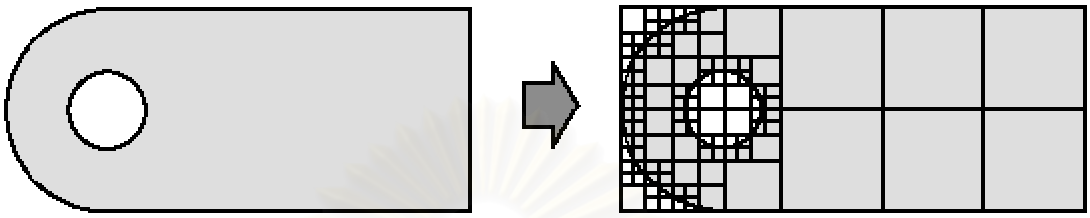
จากการสำรวจจากเอกสารงานวิจัยที่ได้รับการเปิดเผย และเอกสารเผยแพร่จากบริษัทผู้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบกับงานสำรวจของ Owen [20] พบว่า เทคโนโลยีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เป็นที่ยอมรับในปัจจุบันสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่มใหญ่ ๆ ดังนี้

1. Octree/Quadtree
2. Advancing Front
3. Delaunay triangulation

5.1.1 Octree/Quadtree

เทคนิค Octree ได้ถูกคิดค้นขึ้นครั้งแรกสำหรับใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า (tetrahedral) สำหรับโดเมนในสามมิติ Shephard [21,22] เป็นบุคคลสำคัญที่ช่วยในการพัฒนาเทคนิคดังกล่าว สำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในสองมิติจะเรียกเทคนิคเดียวกันนี้ว่า Quadtree หลักการโดยสำคัญของ Quadtree ก็คือ การเริ่มต้นสร้างสี่เหลี่ยมครอบโดเมนจะเรียกสี่เหลี่ยมดังกล่าวว่า root จากนั้นจึงทำการแบ่งพื้นที่ของสี่เหลี่ยมให้เล็กลงจากสี่เหลี่ยมหนึ่งรูปเป็นสี่เหลี่ยมสี่รูป และเรียกสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นจาก root ว่า leaf ซึ่งเป็นแนวคิดคล้ายกับแผนภูมิ

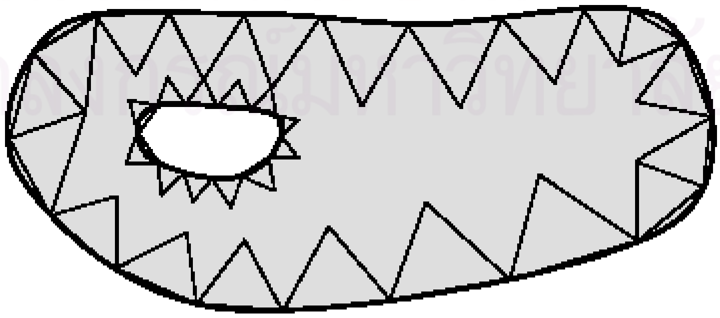
ต้นไม้ไบนารี (binary tree) ถัดไปก็จะเป็นการตรวจสอบด้านของสี่เหลี่ยมที่ตัดกับขอบของโดเมน ก็ให้ทำการคำนวณจุดตัดและแทรกจุดต่อลงตรงจุดตัดดังกล่าว และลบทิ้งของของสี่เหลี่ยมที่อยู่นอกโดเมน ลำดับสุดท้ายก็จะเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมที่ได้ออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูป ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.1 แสดงตัวอย่างการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Quadtree



รูปที่ 5.1 ตัวอย่างการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Quadtree

5.1.2 Advancing Front

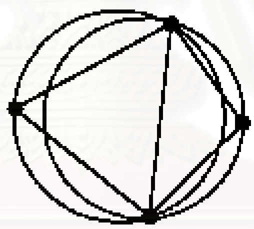
เทคนิค Advancing Front เป็นวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมอย่างมากในปัจจุบัน เนื่องจากสามารถที่จะให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพค่อนข้างดี Lohner [23,24] และ Lo [25,26] เป็นบุคคลสำคัญที่ช่วยในการพัฒนาเทคนิคดังกล่าวให้เป็นที่แพร่หลาย หลักการโดยสำคัญของ Advancing Front เริ่มต้นด้วยการสร้างจุดต่อตามขอบของโดเมนจากนั้นให้เลือกเส้นต่อระหว่างจุดต่อขึ้นมาหนึ่งเส้น เรียกว่า front เพื่อทำการสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าขึ้นมา แล้วทำการลบทิ้ง front ดังกล่าวออกจากบัฟเฟอร์ พร้อมทั้งกำหนดให้เส้นขอบที่เหลืออีกสองด้านของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหมเป็น front สำหรับเลือกใช้ในอนาคตโดยเก็บใส่ลงในบัฟเฟอร์ และกระบวนการเลือก front แล้วสร้างสามเหลี่ยมจะดำเนินไปเรื่อยๆจากขอบของโดเมนเข้าสู่พื้นที่ด้านในของโดเมน ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.2 แสดงการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Advancing Front



รูปที่ 5.2 ตัวอย่างการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Advancing Front

5.1.3 Delaunay triangulation

เทคนิค Delaunay triangulation เป็นวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้รับความนิยมมากที่สุด [20] เนื่องจากสามารถที่จะให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพค่อนข้างดีอันเนื่องมาจากเงื่อนไข Delaunay หรือเรียกอีกอย่างว่าคุณสมบัติ empty sphere ในสามมิติและ empty circumcircle ในสองมิติ อันเนื่องมาจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จะต้องเป็นสามเหลี่ยมที่จุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม จะต้องไม่อยู่ภายในวงกลมที่ล้อมรอบและลากผ่านจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยมอื่นๆ ซึ่งเป็นหลักการโดยสำคัญของเทคนิค Delaunay triangulation ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงทำให้สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในที่เล็กที่สุดโตกว่าสามเหลี่ยมที่สร้างโดยวิธีอื่นๆ [6] เงื่อนไข Delaunay ถูกนำมาพัฒนาจนเป็นวิธีที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (Delaunay triangulation) โดย Lawson [27] Bowyer [13] และ Watson [28] แต่เนื่องจากเงื่อนไข Delaunay ไม่ได้แนะนำวิธีการสร้างจุดต่อภายในโดเมน ในช่วงต่อมาได้มีผู้ทำการศึกษาและพัฒนาวิธีการสร้างจุดต่อภายในโดเมน จนทำให้วิธี Delaunay triangulation ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย ก็คือ Baker [29] Weatherill [4] George [30] Chew [31] Ruppert [14] และ Shewchuk [6]



รูปที่ 5.3 ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ผ่านเงื่อนไข Delaunay

จากการศึกษา [20] พบว่าในปัจจุบันเทคนิค Advancing Front และเทคนิค Delaunay triangulation เป็นสองวิธีที่ได้รับความนิยมและยังคงได้รับการศึกษาในแง่ของการวิจัยเพิ่มเติม และได้ถูกนำไปประยุกต์ลงในโปรแกรมเชิงพาณิชย์ที่ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เช่น Nastran หรือ Ansys เป็นต้น แต่ยังไม่พบว่ามีเอกสารงานวิจัยใดที่แยกแยะข้อดีข้อเสียหรือเปรียบเทียบจุดเด่นจุดด้อยของวิธีทั้งสองอย่างชัดเจน แต่จากการศึกษาและทดลองสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงโดยการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา พอที่จะสรุปข้อดีข้อเสียของการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีทั้งสอง ดังต่อไปนี้

เทคนิค Advancing Front

ข้อดี

1. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะมีลักษณะที่ใกล้เคียงสามเหลี่ยมด้านเท่าค่อนข้างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณขอบของโดเมน
2. สามารถกำหนดทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
3. เมื่อทำการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) จะทำให้ได้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนไม่มากเมื่อเทียบกับที่ได้จากเทคนิค Delaunay triangulation เนื่องจากผลของข้อที่ 2
4. อัลกอริทึมมีความซับซ้อนไม่มาก
5. ได้ถูกนำไปการประยุกต์ลงในโปรแกรมเชิงพาณิชย์ ที่ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เช่น Ansys เป็นต้น

ข้อเสีย

1. กรณีที่โดเมนมีรูปทรงที่เรียวยาวที่ด้านใดด้านหนึ่ง อาจจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณดังกล่าวมีคุณภาพที่ไม่ดี
2. เนื่องจากเป็นวิธีที่อยู่บนพื้นฐานของการสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าจากขอบ ดังนั้นจึงไม่เหมาะกับปัญหาที่มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กมากและเอลิเมนต์ขนาดโตมากอยู่ติด ๆ กัน เพราะเทคนิคดังกล่าวต้องการการสร้างเอลิเมนต์ที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดจากขนาดเล็กไปหาขนาดใหญ่หรือในทางตรงกันข้าม แบบค่อยเป็นค่อยไป (element size grading)
3. ถึงแม้ว่าจะสามารถควบคุมทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมตามแนวของเส้นช็อกได้ แต่ไม่สามารถที่จะปรับขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้โตขึ้นมากๆ เพราะอัลกอริทึมนี้ยังคงมีข้อจำกัดในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มี aspect ratio มากๆ ซึ่งจะส่งผลให้ไม่สามารถประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิ-เมนต์โดยอัตโนมัติได้มากครั้งตามที่ต้องการ

เทคนิค Delaunay triangulation

ข้อดี

1. จากคุณสมบัติเดอลอนเน่ดังจะกล่าวต่อไป ทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จะมีมุมที่เล็กที่สุดโตกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่สร้างโดยวิธีอื่นๆภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน หรืออีกนัยหนึ่งสามารถกล่าวได้ว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จะเข้าใกล้สามเหลี่ยมด้านเท่ามากกว่านั่นเอง
2. สามารถสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กมากและเอลิเมนต์ขนาดโตมากในบริเวณที่ใกล้ ๆ กันได้

3. ในโดเมนหนึ่ง ๆ สามารถที่จะสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดแตกต่างกันกว่า 100 เท่าได้ ซึ่งคุณสมบัตินี้จะเหมาะกับการนำไปประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ
4. สามารถใช้ได้กับโดเมนรูปทรงใด ๆ หรือโดเมนมีรูปทรงที่เรียวยาวที่ด้านใดด้านหนึ่ง
5. อัลกอริทึมมีความซับซ้อนไม่มาก
6. ได้ถูกนำไปประยุกต์ลงในโปรแกรมเชิงพาณิชย์ ที่ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยอาศัยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เช่น Nasrtan หรือ Fluent ซึ่งเป็นโปรแกรมเพียงตัวเดียวในปัจจุบันที่สามารถวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (high-speed compressible flow) และสามารถประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เป็นต้น

ข้อเสีย

1. ไม่สามารถกำหนดทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
2. เนื่องจากสามารถสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กมากและเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดโตมากในบริเวณที่ใกล้ ๆ กันได้ ดังนั้นการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ในบางกรณีอาจจะให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีคุณภาพไม่ดี หรือมีลักษณะเรียวยาวมาก ในบริเวณที่ไม่สามารถแทรกจุดภายโดเมน
3. โดยทั่วไปสำหรับปัญหาหนึ่ง ๆ เมื่อทำการประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะทำให้เกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนมากกว่าที่ได้จากเทคนิค Advancing Front
4. การประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะเกิดความยุ่งยากในการกำหนดค่า h_{min} และ h_{max} ที่เหมาะสม เพราะไม่มีเงื่อนไขที่ตายตัวในการกำหนดค่า h_{min} และ h_{max} เพราะจะขึ้นกับกายภาพของปัญหาและลักษณะของโดเมน

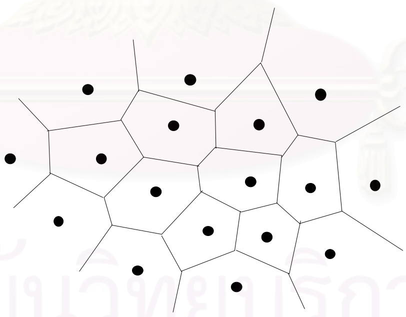
จากการเปรียบเทียบข้างต้น ประกอบกับงานวิจัยที่ผ่าน ๆ มา จะใช้เทคนิค Advancing Front ในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แต่ไม่เคยศึกษาเทคนิค Delaunay triangulation มาก่อน ประกอบกับความสำเร็จในการนำไปใช้งานในเชิงพาณิชย์ของเทคนิค Delaunay triangulation ที่ปรากฏในโปรแกรม Fluent ดังนั้นจึงเลือกที่จะศึกษาและประยุกต์เทคนิค Delaunay triangulation สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

5.2 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่และการสร้างจุดต่อภายโดเมน

การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ สามารถแบ่งออกได้เป็นสองขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้ ขั้นตอนที่หนึ่งเป็นการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ให้กับจุดต่อที่อยู่บนขอบของโดเมน (boundary node triangulation) และขั้นตอนที่สองเป็นการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

เดอลอนเน่ภายในโดเมนโดยการแบ่งย่อยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากขั้นตอนที่หนึ่ง ด้วยวิธีการสร้างจุดต่อภายในโดเมนแบบอัตโนมัติ และวิธีการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ เพื่อป้องกันการเกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบนราบจนเกินไป สำหรับอัลกอริทึมในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในบทความนี้จะอ้างอิงถึงอัลกอริทึมที่พัฒนาโดย Bowyer [13] ซึ่งได้นำเสนอวิธีการทดสอบจุดภายในวงกลม (in-circle test) มาใช้ในการทดสอบคุณสมบัติเดอลอนเน่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ก่อนที่จะกล่าวถึงอัลกอริทึมในการสร้างสามเหลี่ยมเอลิเมนต์เดอลอนเน่ ก็จะขออธิบายแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และแผนผังโวโรนอย (Voronoi diagram) ซึ่ง Dirichlet [13,28] เป็นบุคคลแรกที่นำเสนอวิธีการสร้างแผนผังโวโรนอย หรือเรียกอีกชื่อว่า Dirichlet tessellation (ดูตัวอย่างในรูปที่ 5.4) โดยนิยามในด้านเรขาคณิตการคำนวณ (computational geometry) แผนผังโวโรนอย หมายถึง แผนผังที่ได้จากการแบ่งโดเมนออกเป็นกลุ่มของรูปหลายเหลี่ยม โดยถ้าหากกำหนดให้มีจุดต่อภายในโดเมน $\{P_k\}$, k=1,..., n เราสามารถที่สร้างพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม (region) $\{V_k\}$, k=1,..., n ล้อมรอบจุดต่อดังกล่าว โดยแต่ละพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมจะล้อมรอบจุดต่อเพียงจุดเดียว ซึ่งจะทำให้ระยะห่างจากจุดต่อไปยังขอบของรูปหลายเหลี่ยมจะเป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อเทียบกับระยะห่างจากจุดต่อของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่ลากมายังขอบของรูปหลายเหลี่ยมดังกล่าว



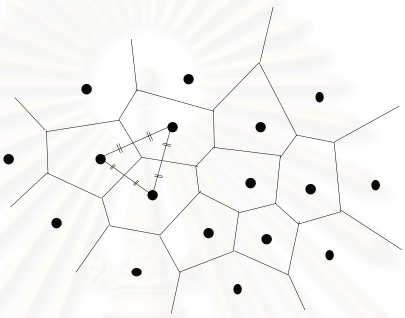
รูปที่ 5.4 แผนผังโวโรนอยของจุดต่อภายในโดเมน

ดังนั้นจากนิยามข้างต้น ก็สามารถที่จะแสดงความหมายของแผนผังโวโรนอยในรูปแบบของสมการเซต [4] ได้ดังนี้

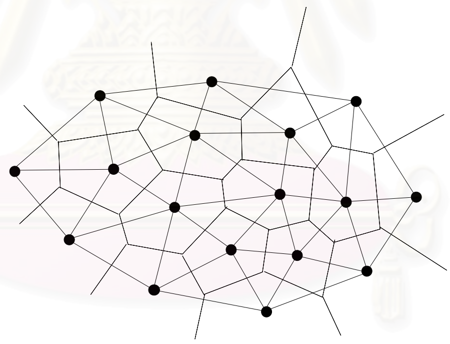
$$V_k = \left\{ P_i : \left| p - P_i \right| < \left| p - P_j \right|, \forall j \neq i \right\} \tag{5.1}$$

จากสมการ (5.1) สามารถกล่าวได้ว่าขอบแผนผังโวโรนอยแต่ละด้าน จะต้องวางอยู่ต้องกึ่งกลางระหว่างจุดต่อสองจุดต่อที่ขอบดังกล่าวเป็นขอบร่วม (ดูรูปที่ 5.5) ถ้าหากทุกจุดต่อ

ที่อยู่ภายในแผนผังโวโรนอยถูกเชื่อมต่อกันด้วยเส้นตรง โดยการลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อสองจุดต่อที่มีขอบเป็นขอบร่วม (common boundary) ดังในรูปที่ 5.6 รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากกระบวนการดังกล่าวจะถูกเรียกว่าสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangle) ในทางทฤษฎีกราฟ (Graph theory) สามเหลี่ยมเดอลอนเน่จะถูกนิยามให้เป็นกราฟ (graph) ที่เมื่อลากวงกลมผ่านจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยมล้อมรอบ จะต้องไม่มีจุดต่ออื่นอยู่ภายในวงกลมดังกล่าว ยกเว้นจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยมเองซึ่งจะอยู่บนเส้นรอบวงกลม คุณลักษณะดังกล่าวของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ถูกเรียกว่าคุณสมบัติ empty circumcircle



รูปที่ 5.5 ระยะห่างที่เท่ากันของระยะทางจากจุดต่อมายังขอบร่วม



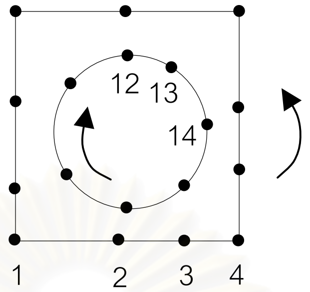
รูปที่ 5.6 สามเหลี่ยมเดอลอนเน่และแผนผังโวโรนอย

อัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (*DelaunayTriangulation*) ประกอบด้วยงานหลัก ๆ สองประการ ดังนี้ ประการที่หนึ่งการแบ่งจุดต่อบนขอบเขตของโดเมน และ ประการที่สองการลากเส้นเชื่อมโยงจุดต่อดังกล่าวเพื่อแบ่งพื้นที่ของโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

<u>อัลกอริทึมที่ 1</u> *DelaunayTriangulation*(**P**, **T**)

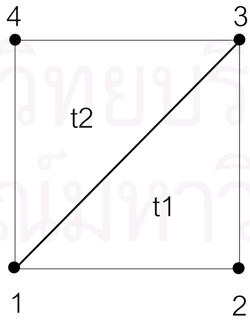
1. กำหนดให้ **P**, k = 1,…, n เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนขอบเขตของโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนขอบของโดเมนจะต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา (ccw) ถ้าหากเป็นจุดต่อ

บนขอบนอกของโดเมน และจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา (cw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนขอบในหรือรูของโดเมน ดังในรูปที่ 5.7 ซึ่งการอ่านจุดต่อบนขอบของโดเมนมายัง **P** ก็จะอ่านตามลำดับการจัดเก็บดังกล่าว



รูปที่ 5.7 การจัดเรียงลำดับจุดต่อบนขอบของโดเมน

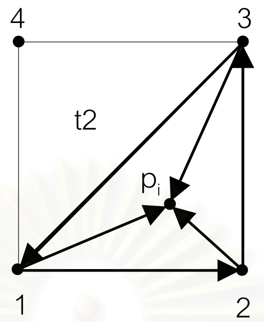
2. กำหนดให้ **T** เป็นเซตสำหรับจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่
3. กำหนดให้ **TD** เป็นเซตสำหรับจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ต้องการลบทิ้ง
4. กำหนดให้ **T** เป็นเซตว่าง
5. ค้นหาตำแหน่งจุดต่อบนขอบของโดเมนที่มีตำแหน่งโคออร์ดิเนตในแนวแกน x และ y ที่น้อยที่สุดและมากที่สุด เพื่อใช้ในการสร้างสี่เหลี่ยมนูน (convex hull rectangle)
6. สร้างสี่เหลี่ยมนูนที่สามารถบรรจุจุดต่อทั้งหมดเอาไว้ในโดเมนของสี่เหลี่ยมนูน และจัดเก็บจุดปลายทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมนูนเข้าไปในเซต **P** โดยมีสถานะเป็นจุดต่อที่เคยถูกอ่านจากเซต **P**
7. สร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมรูปที่หนึ่ง และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่สองที่ได้จากการแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมนูน (แบ่งสี่เหลี่ยมนูนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองรูป) ดังในรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 การแบ่งสี่เหลี่ยมนูนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองรูป

8. อ่านจุดต่อลำดับถัดไป p_i จากเซต **P**
9. ค้นหาเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i ในเซต **T** ที่มีจุดต่อลำดับที่ p_i อยู่ภายในสามเหลี่ยม ซึ่งวิธีการค้นหาจะใช้ทดสอบผลคูณเวกเตอร์ (cross product) โดยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีจุดต่อ

ลำดับที่ p_i อยู่ภายในจะต้องมีผลคูณเวกเตอร์ระหว่างด้านทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดต่อ p_i กับจุดปลายของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่กำลังทดสอบเป็นบวกเสมอ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.9



รูปที่ 5.9 การค้นหาจุดภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

10. กำหนดให้ **TD** เป็นเซตว่าง
11. ค้นหาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในเซต **T** ที่ไม่ผ่านการทดสอบวงกลมภายใน (in-circle test) โดยการลากวงกลมผ่านจุดปลายทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i ที่ได้จากขั้นตอนที่ 9 และจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าวลงในเซต **TD**
12. ลบทิ้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในเซต **TD** ออกจากเซต **T**
13. สร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ โดยการลากเส้นเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อ p_i และจุดต่อของเอลิเมนต์อื่น ๆ ที่มีขอบล้อมรอบจุดต่อ p_i และให้เพิ่มเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ลงในเซต **T**
14. ปรับปรุงหมายเลขของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีด้านติดกับสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่
15. กลับไปยังขั้นตอนที่ 8 จนกว่าจุดต่อทั้งหมดจะถูกอ่านจากเซต **P**
16. ลบทิ้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่นอกโดเมน เนื่องจากในขั้นตอนที่ 7 มีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจากการแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมนูน ดังนั้นจึงทำให้มีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมบางส่วนในเซต **T** ที่อยู่นอกโดเมน จึงต้องทำการลบทิ้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าวออกจาก **T**
17. ทำการเรียงลำดับหมายเลขของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมใหม่อีกครั้ง

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นว่าอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ไม่ได้แนะนำวิธีการสร้างจุดต่อภายโดเมน ดังนั้นจึงต้องอาศัยวิธีอื่น ๆ ในการสร้างจุดภายโดเมน สำหรับวิธีการสร้างจุดต่อลงในโดเมนโดยอัตโนมัติ มีอยู่ด้วยกันหลากหลายวิธี เช่น Cavendish [32] ได้แนะนำวิธีการแบ่งแยกโดเมนออกเป็นโซนๆตามความหนาแน่นของจุด และในแต่ละโซนก็

จะทำการแบ่งพื้นที่ออกเป็นสี่เหลี่ยมเล็ก จากนั้นวิธีการสร้างจุดต่อลงในโดเมนโดยอัตโนมัติลงในสี่เหลี่ยมขนาดเล็กแต่ละรูป โดยตำแหน่งการสร้างจุดต่อจะได้จากการสุ่มตำแหน่งภายในพื้นที่ของสี่เหลี่ยม และเงื่อนไขที่ใช้ในการทดสอบการสร้างจุดต่อ ก็คือภายในรัศมีที่กำหนดจากจุดต่อที่สร้าง จะต้องไม่มีจุดต่อที่ถูกสร้างก่อนหน้านี้อยู่ภายในวงกลม ซึ่งแนวคิดดังกล่าวนี้จะถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างจุดต่อลงในโดเมนโดยอัตโนมัติ ส่วน Frey [33] ได้มีการนำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างฟังก์ชันระยะห่างของจุด (point spacing function) เพื่อใช้ในการควบคุมความหนาแน่นของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แนวคิดดังกล่าวได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ต่อไป

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้เทคนิคที่แนะนำในเอกสารอ้างอิง [4,5] โดยการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ จะถูกควบคุมด้วยพารามิเตอร์ที่สำคัญสองค่า คือ สัมประสิทธิ์อัลฟ่า (α) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อที่ต้องการแทรกและจุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งจะมีผลต่อความหนาแน่นของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (mesh density) ส่วนสัมประสิทธิ์เบต้า (β) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการทดสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อในบริเวณใกล้เคียงที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ ซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ (regularity of triangulation) หลังจากที่จุดต่อถูกสร้างใหม่ภายในโดเมนผ่านการทดสอบด้วยค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสอง เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ก็จะถูกสร้างขึ้นมา ด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ข้างต้นทุกประการ โดยอัลกอริทึมสำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ (*MeshRefinement*) มีดังต่อไปนี้

<u>อัลกอริทึมที่ 2</u> *MeshRefinement*($\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$, α, β)

1. กำหนดให้ $\mathbf{P}$, k = 1 , …, n เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนขอบเขตของโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนขอบของโดเมนจะต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา (ccw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนขอบนอกของโดเมน และจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา (cw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนขอบในหรือรูของโดเมน ดังในรูปที่ 5.7 ซึ่งการอ่านจุดต่อบนขอบของโดเมนมายัง $\mathbf{P}$ ก็จะอ่านตามลำดับการจัดเก็บดังกล่าว
2. กำหนดให้ $\mathbf{V}$ เป็นเซตสำหรับจัดเก็บจุดต่อที่จะถูกแทรกลงภายในโดเมน
3. กำหนดให้ $\mathbf{T}$ เป็นเซตสำหรับจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ที่ถูกสร้างขึ้นมาโดยอัลกอลิทึม *DelaunayTriangulation*

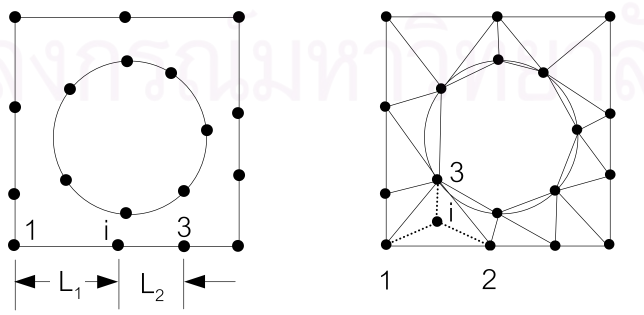
4. กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ α เป็นค่าสำหรับควบคุมความหนาแน่น (density) ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
5. กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ β เป็นค่าสำหรับควบคุมรูปร่าง (shape or regularity) ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
6. กำหนดให้ $\mathbf{V}$ เป็นเซตว่าง
7. คำนวณตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง (centroid) ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยสมการ 5.2 ดังนี้

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} \text{ and } y_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{5.2}$$

8. คำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ (nodal spacing value, $\mathbf{dp}_i$) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีด้านเชื่อมต่อกับจุดปลายของสามเหลี่ยม ค่าดังกล่าวจะเป็นค่าประจำของทุก ๆ จุดต่อภายในโดเมน และจะถูกใช้ในการเปรียบเทียบสำหรับเงื่อนไขการทดสอบอัลฟ่าและเบต้าต่อไป โดยการคำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้ กรณีที่ระยะห่างของจุดต่อบนขอบเขตของโดเมน (boundary node) จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดต่อสองจุดที่อยู่ติดด้วยสมการ (5.3) แต่ถ้าหากเป็นจุดต่อภายในโดเมนก็จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าระยะห่างของจุดต่อของทุกจุดต่อที่เชื่อมโยงกับจุดต่อดังกล่าวด้วยสมการ (5.4) ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.10

$$dp_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \left| p_j - p_i \right| \tag{5.3}$$

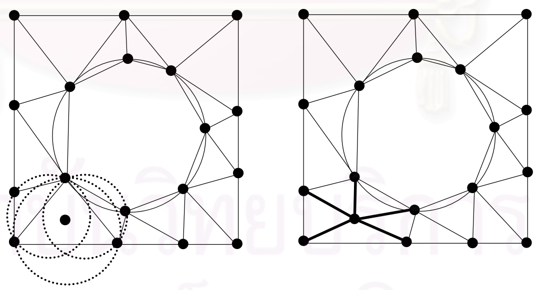
$$dp_i = \frac{\sum_{j=1}^{3} dp_j}{3} \tag{5.4}$$



$$dp_i = \frac{(L_1 + L_2)}{2} \qquad dp_i = \frac{(dp_1 + dp_2 + dp_3)}{3}$$

รูปที่ 5.10 ตัวอย่างการคำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ

9. อ่านหมายเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i จากเซต $\mathbf{T}$
10. กำหนดให้ตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i เป็นจุดต่อ p_c คำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ p_c ด้วยสมการ (5.4)
11. คำนวณระยะห่างจากตำแหน่งโคออร์ดิเนตจุดศูนย์ถ่วงไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ m = 1, 2, 3)
12. คำนวณระยะห่าง s_j จากจุดต่อ p_c ไปยังจุดต่อที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้ สมมติให้เท่ากับจำนวน N จุดต่อ
13. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α โดยถ้าหาก $d_m < (\alpha\ dp_c)$ สำหรับบางค่าของ m = 1, 2, 3 แสดงว่าจุดต่อ p_c ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 9 เพื่ออ่านหมายเลขเอลิเมนต์สามเหลี่ยมถัดไป
14. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β โดยถ้าหาก $s_j < (\beta\ dp_c)$ สำหรับบางค่าของ j = 1, …, N แสดงว่าจุดต่อ p_c ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 9 เพื่ออ่านหมายเลขเอลิเมนต์สามเหลี่ยมถัดไป
15. จัดเก็บจุดต่อ p_c ลงในเซต $\mathbf{V}$
16. ถ้าหากยังคงมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต $\mathbf{T}$ ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 9 เพื่ออ่านหมายเลขเอลิเมนต์สามเหลี่ยมถัดไป
17. ทำการแทรกจุดทั้งหมดในเซต $\mathbf{V}$ ลงในโดเมน และสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.11

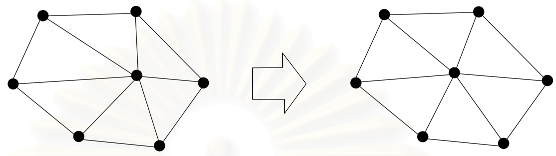


รูปที่ 5.11 ตัวอย่างการแทรกจุดภายในโดเมน

โดยปกติเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากการสร้างด้วยอัลกอริทึมทั้งสองข้างต้น อาจจะยังไม่มีค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุดและด้านที่ตั้งฉากกัน (aspect ratio) ที่ดีเพียงพอ ดังนั้นจึงควรที่จะทำการปรับปรุงรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้ดีขึ้น โดยการทำให้ค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุดและด้านที่ตั้งฉากกัน (aspect ratio) ของแต่ละเอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีค่าใกล้เคียงกันด้วยวิธีลาปลาซ (Laplacian smoothing technique) ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมาก [34] เนื่องจากทำให้ได้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีขึ้นและเป็นวิธีที่สามารถที่จะทำงานได้

รวดเร็ว การปรับปรุงรูปร่างของสามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ เป็นการย้ายตำแหน่งโคออร์ดิเนตของจุดที่ถูกล้อมรอบด้วยจุดอื่นๆ ไปยังตำแหน่งโคออร์ดิเนตที่ได้จากค่าเฉลี่ยของตำแหน่งโคออร์ดิเนตของจุดที่ล้อมรอบ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยดังในสมการ (5.5)

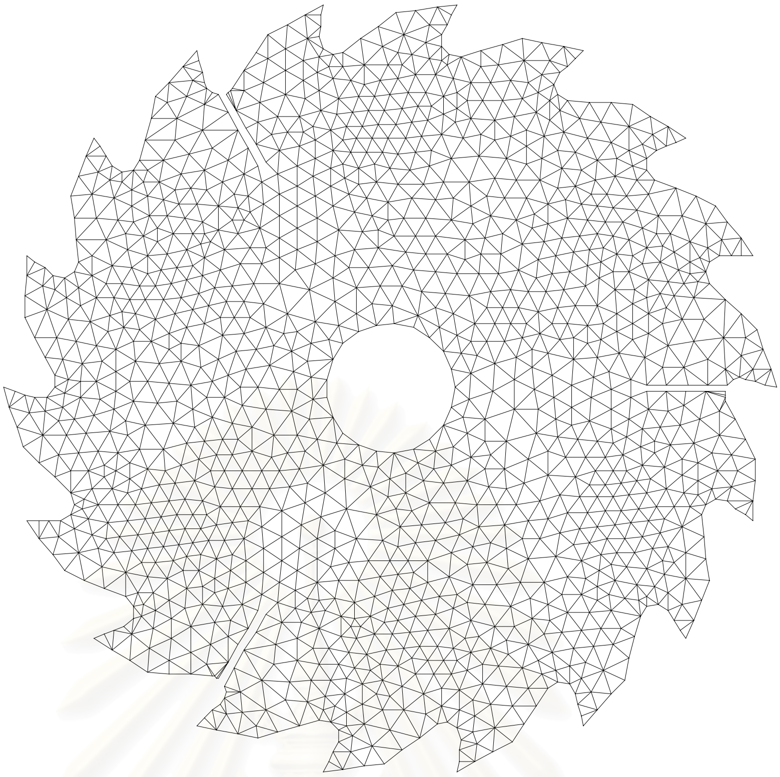
$$x_{lc} = \frac{\sum_{i=1}^{M} x_i}{M} \text{ and } y_{lc} = \frac{\sum_{i=1}^{M} y_i}{M} \qquad i = 1, 2, ..., M \tag{5.5}$$



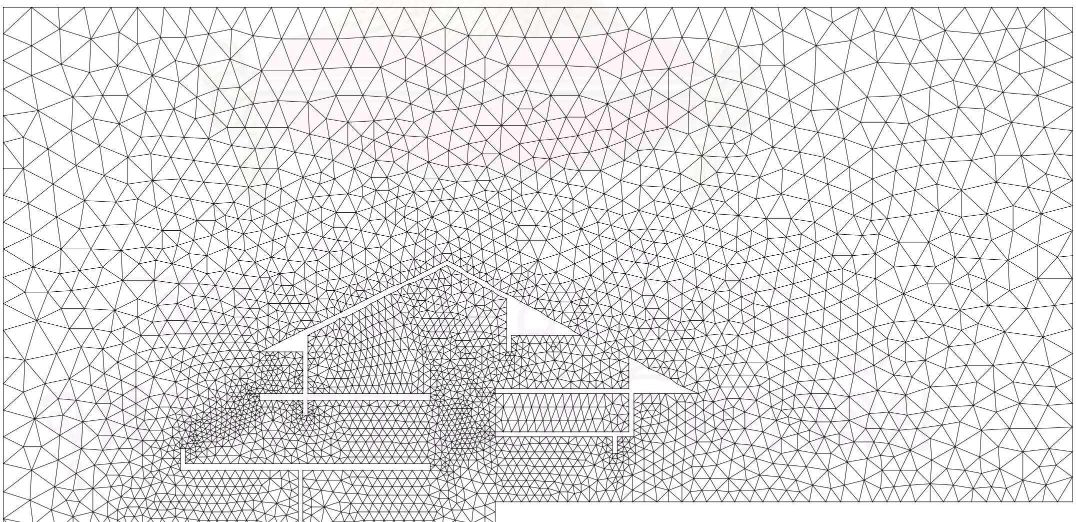
รูปที่ 5.12 การปรับปรุงรูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ

จากการทดลองประยุกต์การปรับปรุงรูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ หลังกระบวนการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยอลักอริทึม Delaunay triangulation พบว่าโดยส่วนใหญ่เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จะมีรูปทรงที่ดีขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งหมายถึงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จะมีลักษณะใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่ามากยิ่งขึ้น แต่สำหรับกรณีที่ทำการประยุกต์เข้ากับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้จากระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ พบว่าในบางครั้งจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในบริเวณแนวเส้นช็อกมีขนาดโตขึ้น อันเนื่องมาจากการเฉลี่ยขนาดกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดโตหว่าและมีเส้นขอบติดกัน ดังนั้นจึงส่งผลให้ต้องทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมากครั้งยิ่งขึ้น เพราะให้ผลของการปรับปรุงรูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซที่มีต่อเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในบริเวณแนวเส้นช็อกลดลง

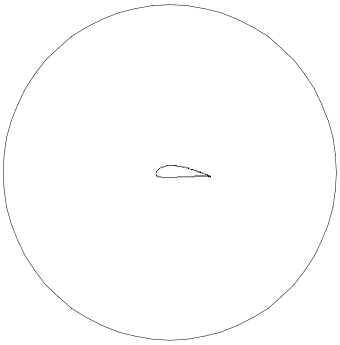
เพื่อแสดงให้เห็นถึงศักยภาพของวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ด้วยอัลกอริทึมทั้งสองข้างต้นก็จะขอแสดงตัวอย่างการสร้างเอลิเมนต์สำหรับโดเมนที่มีรูปทรงซับซ้อนดังต่อไปนี้ รูปที่ 5.13 จะแสดงการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของใบเลื่อย รูปที่ 5.14 จะแสดงการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของบ้านอยู่อาศัยสองชั้น ส่วนรูปที่ 5.15 และ 5.16 จะแสดงให้ถึงการเกิดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่อย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยรูปที่ 5.15 จะแสดงการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของ airfoil ส่วนรูปที่ 5.16 จะแสดงการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของแผ่นระนาบเจาะสองรู



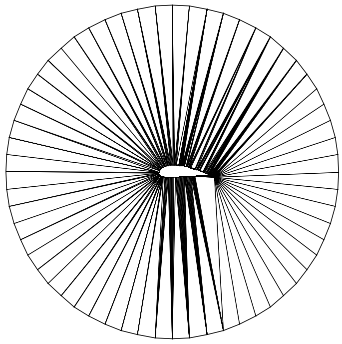
รูปที่ 5.13 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของใบเลื่อย



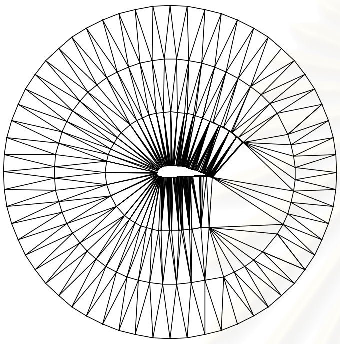
รูปที่ 5.14 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของบ้านอยู่อาศัยสองชั้น



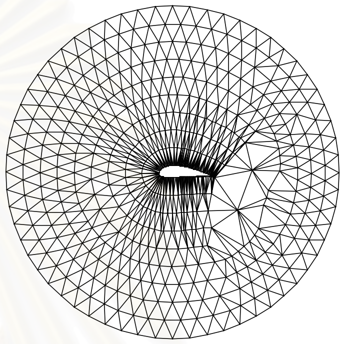
Multi-connected domain



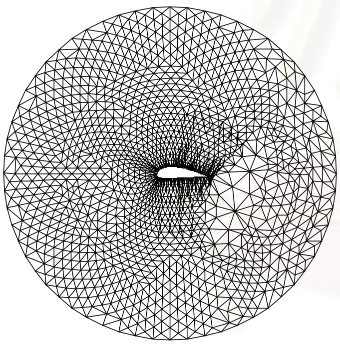
Boundary Triangulation NP=241, NE=241



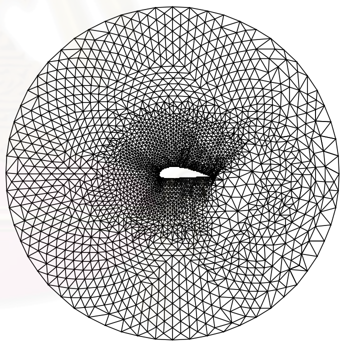
Refinement #1 NP=394, NE=547



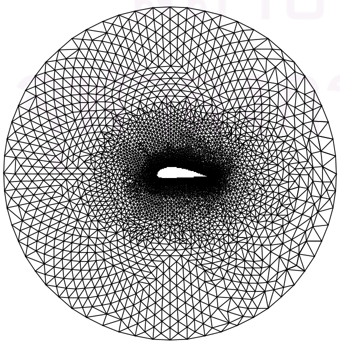
Refinement #2 NP=748, NE=1255



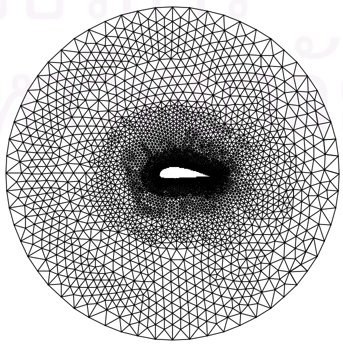
Refinement #3 NP=1696, NE=3151



Refinement #4 NP=2855, NE=5469

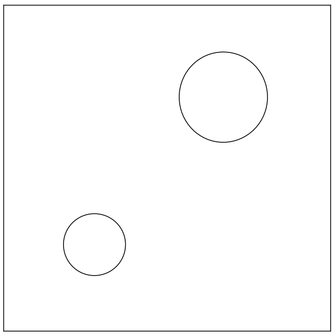


Refinement #5 NP=4324, NE=8407

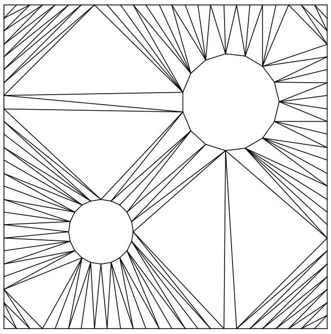


After Smoothing

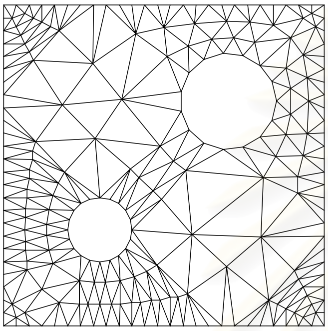
รูปที่ 5.15 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของ airfoil



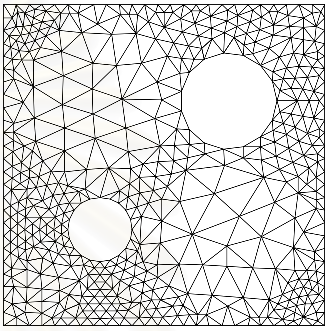
Multi-connected Domain



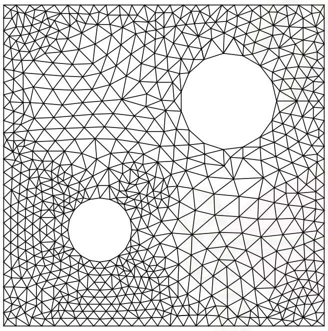
Boundary Triangulation NP=135, NE=137



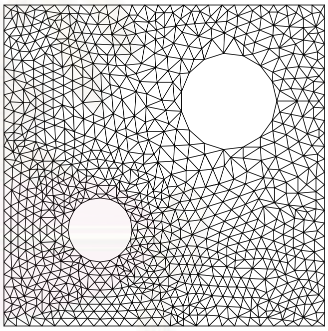
Refinement #1 NP=246, NE=359



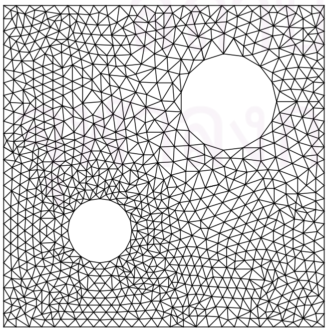
Refinement #2 NP=544, NE=955



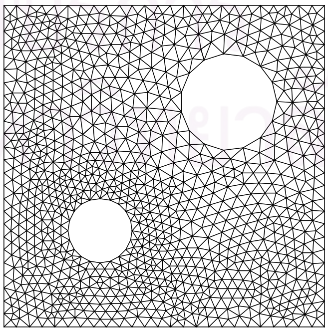
Refinement #3 NP=810 NE=1487



Refinement #4 NP=1033, NE=1933



Refinement #5 NP=1058, NE=1983



After Smoothing

รูปที่ 5.16 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนของแผ่นระนาบเจาะสองรู

5.3 ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดและระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นการประยุกต์อัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) และการสร้างจุดภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ (automatic point creation) เข้ากับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่ (remeshing) โดยอาศัยผลลัพธ์จากการคำนวณตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) และตำแหน่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมครั้งที่ผ่านมาเป็นตัวกำหนดเงื่อนไขในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ด้วยระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งใหม่ ซึ่งจะให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวอย่างเหมาะสมกับปัญหาการไหลต่าง ๆ และส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

สำหรับการเลือกตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด จะต้องเลือกตัวแปรที่สามารถบ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียน (gradient) ภายในโดเมนได้เป็นอย่างดี เช่น ความหนาแน่น ความดัน หรือค่าเอนโทรปี (entropy) เป็นต้น [1,2,7] การสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดสามารถที่จะกระทำได้ในหลาย ๆ รูปแบบ ทั้งนี้ขึ้นกับเวกเตอร์นอร์ม (norm) ที่ต้องการพิจารณา [7] สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของค่าความหนาแน่น หรือค่าความดันในระนาบสองมิติ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ดังในสมการที่ 5.6

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

โดยอาศัยแนวคิดจากการคำนวณค่าความเค้นหลัก (principal stress) ในด้านกลศาสตร์ของแข็ง ในการคำนวณค่าสูงสุดของอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของค่าความหนาแน่น ก็จะหมายถึงการคำนวณปริมาณหลัก (principal quantities) ซึ่งจะทำให้ผลคูณอนุพันธ์ย่อยขวาง (cross derivatives) ในสมการ (5.6) หมดไป และจะได้ความสัมพันธ์ของปริมาณหลักและขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

จากนั้น จึงนำค่าปริมาณหลักมากที่สุด (λ_{max}) ที่คำนวณได้มาใช้ในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม (h) โดยที่ค่า h_{min} และ h_{max} ในสมการ (5.8) จะถูกกำหนดโดยตัวผู้ใช้

$$h_i^2\lambda_i = h_{min}^2\lambda_{max} = \text{constant} \tag{5.8}$$

$$\lambda_i = \max\left(\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{5.9}$$

จากสมการ (5.8) จะเห็นว่าในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จำเป็นต้องกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุด (h_{min}) ซึ่งการกำหนดค่า h_{min} ที่น้อยเกินไปจะทำให้มีการแบ่งตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มากเกินไป และในทางกลับกันถ้าหากกำหนดค่า h_{min} ที่มากเกินไปจะทำให้มีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมน้อยเกินไป ซึ่งอาจจะส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกค่า h_{min} ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ในทางปฏิบัติในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ขึ้นมาใหม่ในแต่ละครั้ง ยังไม่มีวิธีใดที่สามารถบอกได้ว่าค่า h_{min} ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่าใด ทั้งนี้ก็ขึ้นกับลักษณะของปัญหาและประสบการณ์ โดยในเอกสารอ้างอิง [7] ได้แนะนำให้ทำการปรับลดค่า h_{min} ลงมาประมาณ 2 ถึง 3 เท่าของครั้งก่อน

เมื่อสามารถคำนวณขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตรงจุดต่อได้ ในขั้นตอนถัดไปก็จะเป็นการประดิษฐ์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมครั้งก่อนหน้าเป็นตาข่ายพื้นหลัง (background grid) และทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่โดยจะปรับขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ให้มีความสอดคล้องกับขนาดของเอลิเมนต์ที่คำนวณได้จากสมการ (5.8) โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>อัลกอริทึมที่ 3</u> *AdaptiveRemeshing*($\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$, α, β, h_{min}, h_{max})

1. กำหนดให้ $\mathbf{P}$, k = 1,…, n เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนขอบเขตของโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนขอบของโดเมนจะต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา (ccw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนขอบนอกของโดเมน และจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา (cw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนขอบในหรือรูของโดเมน ดังในรูปที่ 5.7 ซึ่งการอ่านจุดต่อบนขอบของโดเมนมายัง $\mathbf{P}$ ก็จะอ่านตามลำดับการจัดเก็บดังกล่าว
2. กำหนดให้ $\mathbf{T}$, l = 1,…, m เป็นเซตสำหรับจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นหลัง (background)

3. กำหนดให้ **NP** เป็นเซตสำหรับจัดเก็บจุดต่อที่จะถูกสร้างขึ้นมาใหม่
4. กำหนดให้ **NT** เป็นเซตสำหรับจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่จะถูกสร้างขึ้นมาใหม่
5. กำหนดให้ h_{min} และ h_{max} เป็นค่ากำหนดขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเล็กที่สุดและใหญ่ที่สุดตามลำดับ
6. กำหนดให้ **NP** เป็นเซตว่าง
7. กำหนดให้ **NT** เป็นเซตว่าง
8. คำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม (h) โดยใช้สมการ (5.8) และ (5.9)
9. ทำการสร้างจุดต่อบนขอบของโดเมนขึ้นมาใหม่โดยใช้ค่า h การหาระยะห่างระหว่างจุดต่อและทำการคำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ (nodal spacing value, dp_i) สำหรับจุดต่อบนขอบของโดเมนใหม่ทั้งหมด และจัดเก็บจุดต่อทั้งหมดลงในเซต **NP**
10. ค่าตัวแปรสำหรับจุดต่อบนขอบของโดเมนทั้งหมดในในเซต **NP** สามารถคำนวณได้จากการประมาณ (interpolate) จากค่าตัวแปรของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นหลัง
11. สร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่เชื่อมโยงจุดต่อบนขอบของโดเมนทั้งหมดในเซต **NP** โดยอาศัยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* และจัดเก็บเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมดลงในเซต **NT**
12. ทำการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอาศัยอัลกอริทึม *MeshRefinement* และจัดเก็บจุดต่อทั้งหมดที่ถูกสร้างขึ้นมาในเซต **NP**
13. อ่านจุดต่อ p_i จากเซต **P**
14. ถ้าหาก $h_i > h_{max}$ กลับไปยังขั้นตอนที่ 13 เพื่ออ่านจุดต่อถัดไป
15. ค้นหาเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i ภายในเซต **NT** ที่มีจุดต่อ p_i อยู่ภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
16. คำนวณตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i และกำหนดให้เป็นจุดต่อ p_c และคำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ p_c ด้วยสมการ (5.4)
17. คำนวณระยะห่างจากตำแหน่งโคออร์ดิเนตจุดศูนย์ถ่วง (p_c) ไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ m = 1, 2, 3)
18. ถ้าหาก h_i > ค่าเฉลี่ยของ d_m โดยที่ m = 1, 2, 3 กลับไปยังขั้นตอนที่ 13 เพื่อทำการอ่านจุดต่อถัดไป
19. ถ้าหาก $h_{min} < d_m$ โดยที่ m = 1, 2, 3 กลับไปยังขั้นตอนที่ 13 เพื่ออ่านจุดต่อถัดไป
20. จัดเก็บจุดต่อ p_c ลงในเซต **NP**
21. ถ้าหากยังคงมีจุดต่อที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต **P** ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 13 เพื่ออ่านจุดต่อถัดไป
22. ทำการแทรกจุดทั้งหมดในเซต **NP** ลงในโดเมน และสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation*

เมื่อเสร็จสิ้นกระบวนการของระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็ควรที่จะปรับปรุงรูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เพื่อช่วยลดจำนวนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีรูปร่างไม่เหมาะสม แต่จากการทดลองพบว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมบางส่วนในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนสูงที่ผ่านการปรับปรุงรูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ อาจจะมีขนาดที่โตขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ต้องทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมากครั้งกว่าปกติ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6
การใช้โปรแกรม FEMESH

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมา สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นโปรแกรมที่ทำงานในโหมดกราฟิก และสามารถที่จะใช้งานได้อย่างสะดวก เพราะสามารถที่จะออกแบบโมเดลและทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ทันที จากนั้นสามารถที่จะส่งต่อให้กับโปรแกรมที่ทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และสุดท้ายก็จะนำผลลัพธ์ที่ได้มาแสดงผลในรูปแบบกราฟิกที่หลากหลาย ในบทนี้ก็จะอธิบายถึงวิธีการใช้งานโปรแกรม FEMESH พร้อมทั้งรูปแบบมาตรฐานของไฟล์นำส่งข้อมูลที่นำส่งเพื่อนำไปคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

6.1 โปรแกรม FEMESH

ในปัจจุบันโปรแกรมเชิงพาณิชย์ สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เป็นที่รู้จักและได้รับความนิยมมีอยู่ด้วยกัน 2 โปรแกรม คือ โปรแกรม Nastran เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกออกแบบมาสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็งและการถ่ายเทความร้อน และโปรแกรม Ansys เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกออกแบบมาสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง ด้านกลศาสตร์การแตกร้าว การถ่ายเทความร้อน และปัญหาการไหลของของไหลที่ความเร็วต่ำทั้งแบบอัดตัวได้และอัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว แต่โปรแกรมทั้งสองข้างต้นไม่สนับสนุนระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาได้มีผู้ผลิตโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Fluent ซึ่งเป็นโปรแกรมแรกที่สามารถใช้วิเคราะห์การไหลแบบอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว และสนับสนุนระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังนั้นพอที่จะกล่าวโดยนัยได้ว่า สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ยังคงเป็นเรื่องที่ค่อนข้างใหม่และยังคงในระดับงานวิจัย

โปรแกรม FEMESH เป็นโปรแกรมประเภท integrated environment ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาเองทั้งหมด โดยรวมเอาความสามารถระหว่างส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานด้านคอมพิวเตอร์กราฟิก และการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกัน โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมที่รวมเอาความสามารถบางส่วนของโปรแกรม Nastran Ansys และ

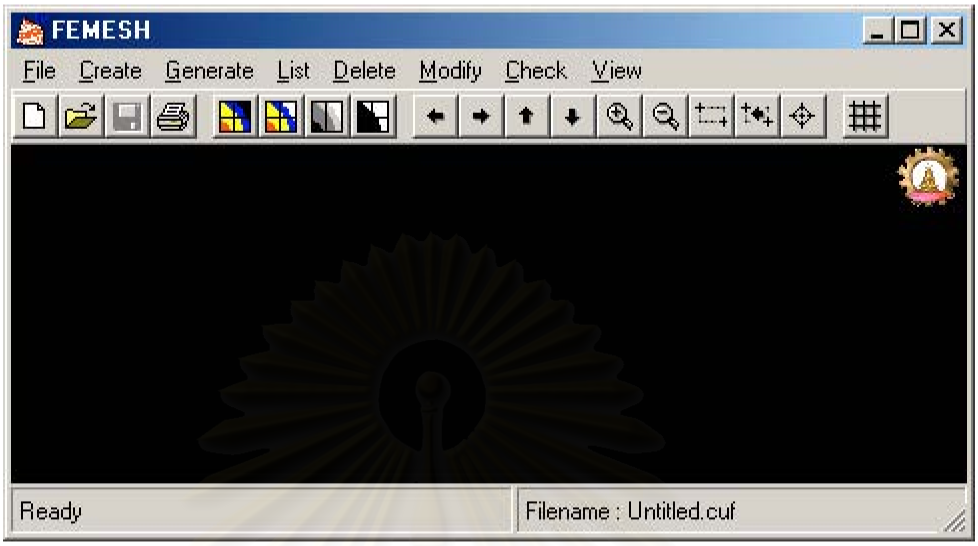
Fluent สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาในระดับสองมิติเข้าด้วยกัน โดยโปรแกรม FEMESH สามารถที่จะวิเคราะห์ปัญหาพื้นฐานด้านวิศวกรรมเครื่องกลในระดับสองมิติที่หลากหลาย เช่น ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง ปัญหาด้านกลศาสตร์การแตกร้าวและการติดตามรอยร้าว ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อนในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว ปัญหาด้านการไหลที่ความเร็วต่ำแบบมีความหนืดและการไหลแบบศักย์ในสภาวะคงตัว และปัญหาด้านการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว เป็นต้น ภาพโดยรวมของโครงสร้างการทำงานของโปรแกรม FEMESH สามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสามส่วนหลัก ๆ ดังนี้

1. ส่วนทำงานก่อนการประมวลผล (Pre-processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการเตรียมความพร้อมของโมเดล เช่น การวาดเส้นตรง หรือเส้นโค้ง การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม การกำหนดภาระ (load) หรือการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบ (boundary constraint) เป็นต้น ซึ่งเป็นภาระงานลำดับแรก ๆ ของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้น งานหลักของส่วนทำงานก่อนการประมวลผล ก็คือ การทำงานด้านคอมพิวเตอร์ช่วยการออกแบบ (CAD) ซึ่งประกอบด้วยคำสั่งต่างๆมากมายที่ช่วยในการสร้างรูปทรงเรขาคณิตในระดับสองมิติ โดยรูปแบบและรูปแบบการทำงานของคำสั่งในส่วนนี้จะคล้ายกับคำสั่งของโปรแกรม Nastran และ AutoCAD ทั้งนี้เพื่อลดเวลาในการเรียนรู้การใช้งานโปรแกรมของผู้ใช้ที่เคยใช้งานโปรแกรมประเภทเดียวกันกับ FEMESH

2. ส่วนการประมวลผล (Processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง ปัญหาด้านกลศาสตร์การแตกร้าว ปัญหาด้านการไหลที่ความเร็วต่ำ และปัญหาด้านการไหลที่ความเร็วสูง เป็นต้น โดยทั่วไปการทำงานในขั้นตอนนี้จะใช้เวลามากที่สุด ทั้งนี้ก็ขึ้นกับอัลกอริทึมการแก้ปัญหา และจำนวนโหนดของระบบสมการ

3. ส่วนทำงานหลังการประมวลผล (Post-processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงการเสียรูปของโดเมน (deformation) การแสดงเส้นชั้น (contour) หรือการแสดงเวกเตอร์ของความเร็ว (velocity vector) เป็นต้น ซึ่งเป็นที่ช่วยให้การตีความผลลัพธ์สามารถกระทำได้ดีขึ้นกว่าการพิจารณาโดยตรงจากตัวเลขซึ่งมีอยู่เป็นจำนวนมาก นอกจากนี้ในกรณีที่ต้องการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) เข้ากับปัญหาเพื่อต้องการให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น ก็จะเป็นการทำงานในส่วนนี้เช่นกัน โดยจะนำผลลัพธ์ที่

ได้มาทำการคำนวณขนาดของเอลิมนต์ที่เหมาะสม และทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่อีกครั้ง



รูปที่ 6.1 หน้าต่างหลักของโปรแกรม FEMESH

6.2 การใช้โปรแกรม FEMESH สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว

การใช้งานโปรแกรม FEMESH เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว มีขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้

6.2.1 สร้างโครงร่างของโมเดล (model outline) โดยใช้คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับการสร้างรูปทรงทางเรขาคณิต เช่น การสร้างเส้นตรง (line) การสร้างส่วนของวงกลม (arc) การสร้างวงกลม (circle) หรือการสร้างเส้นโค้ง spline (spline curve) เป็นต้น เพื่อความสะดวกในการออกแบบโมเดล โปรแกรม FEMESH ได้เตรียมวิธีการสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตในหลาย ๆ วิธี โดยอาศัยคำสั่งดังต่อไปนี้

<u>การสร้างเส้นตรง</u> (คำสั่ง Create/Line) ประกอบด้วยคำสั่งย่อยต่าง ๆ ที่ช่วยในการสร้างเส้นตรงภายใต้เงื่อนไขที่สะดวกและเหมาะสมต่อการออกแบบรูปทรงเรขาคณิต ดังนี้

คำสั่ง Projected Points สำหรับการสร้างเส้นตรง ที่เกิดจากการกำหนดจุดปลายสองจุด ซึ่งการกำหนดสามารถกระทำได้สามวิธี ดังนี้ วิธีที่หนึ่งโดยการใช้เมาส์คลิกลงในพื้นที่ของ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หน้าต่างออกแบบของโปรแกรมโดยตรง วิธีที่สองเลือกจุด (point) ที่มีอยู่แล้วในโมเดล และวิธีที่สามเลือกจุดต่อ (node) ที่มีอยู่แล้วในโมเดล

คำสั่ง Projected Points with Length สำหรับการสร้างเส้นตรง ที่เกิดจากการกำหนดจุดปลายสองจุดและการกำหนดความยาวของเส้นตรง โดยโปรแกรมจะลากเส้นตรงจากจุดปลายแรกไปยังทิศทางของจุดปลายที่สอง ด้วยขนาดความยาวของที่กำหนด

คำสั่ง Horizontal สำหรับการสร้างเส้นตรงในแนวราบ ด้วยความยาวที่กำหนด

คำสั่ง Vertical สำหรับการสร้างเส้นตรงในแนวตั้ง ด้วยความยาวที่กำหนด

คำสั่ง Perpendicular สำหรับการสร้างเส้นตรง ในทิศทางที่ตั้งฉากกับเส้นตรงอีกหนึ่งเส้นที่ถูกเลือก ด้วยความยาวที่กำหนด

คำสั่ง Parallel สำหรับการสร้างเส้นตรง ในทิศทางที่ขนานกับเส้นตรงอีกหนึ่งเส้นที่ถูกเลือก ด้วยความยาวที่กำหนด

คำสั่ง Mid Line สำหรับการสร้างเส้นตรง ในทิศทางที่แบ่งกึ่งกลางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ถูกเลือก

คำสั่ง At angle สำหรับการสร้างเส้นตรง ณ ตำแหน่งมุมต่างๆ

คำสั่ง Rectangle สำหรับการสร้างเส้นตรงสี่เส้น เพื่อประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยม

คำสั่ง Continuous สำหรับการสร้างเส้นตรงหลายๆเส้นต่อเนื่อง (polygon) ซึ่งสามารถที่จะกำหนดให้เป็นเส้นตรงหลายๆเส้นต่อเนื่องแบบเปิด (open-ended) หรือแบบปิดก็ได้ (closed-loop)

<u>การสร้างส่วนของวงกลม</u> (คำสั่ง Create/Arc) ประกอบด้วยคำสั่งย่อย ดังนี้

คำสั่ง Center-Start-End สำหรับการสร้างส่วนของวงกลม ด้วยการกำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลาง ตำแหน่งจุดเริ่มต้น และตำแหน่งจุดสิ้นสุด

คำสั่ง Radius-Start-End สำหรับการสร้างส่วนของวงกลม ด้วยการกำหนดความยาวรัศมี ตำแหน่งจุดเริ่มต้น และตำแหน่งจุดสิ้นสุด

คำสั่ง Angle-Start-End สำหรับการสร้างส่วนของวงกลม ด้วยการกำหนดขนาดของมุม ตำแหน่งจุดเริ่มต้น และตำแหน่งจุดสิ้นสุด

คำสั่ง Points สำหรับการสร้างส่วนของวงกลม ด้วยการกำหนดตำแหน่งจุดสามจุด ที่จะอยู่บนขอบของส่วนของวงกลม

การสร้างวงกลม (คำสั่ง Create/Circle) ประกอบด้วยคำสั่งย่อย ดังนี้

คำสั่ง Radius สำหรับการสร้างวงกลม ด้วยการเลือกจุดสองจุด เพื่อใช้ในการคำนวณหาความยาวของรัศมี

คำสั่ง Diameter สำหรับการสร้างวงกลม ด้วยการเลือกจุดสองจุด เพื่อใช้ในการคำนวณหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง

คำสั่ง Center สำหรับการสร้างวงกลม ด้วยการกำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลาง

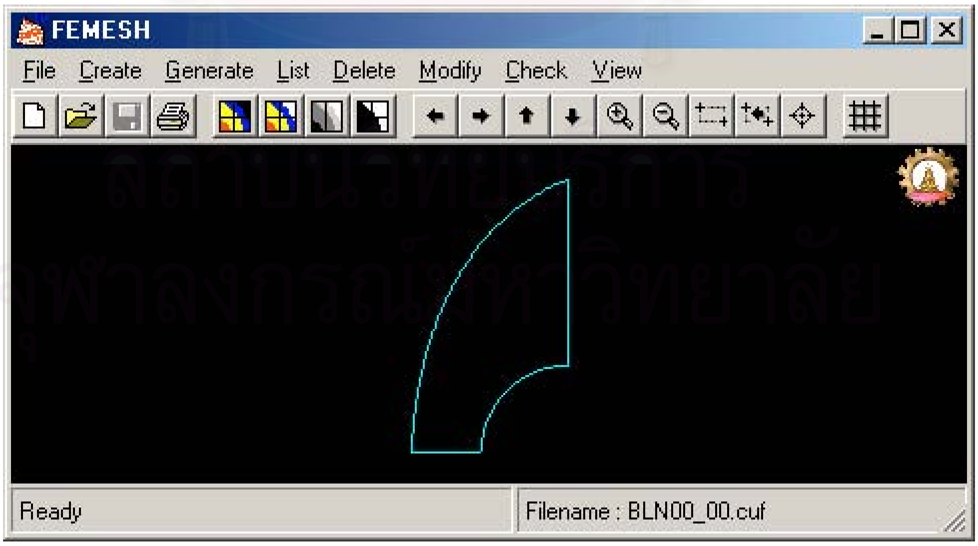
คำสั่ง Points สำหรับการสร้างวงกลม ด้วยการกำหนดตำแหน่งจุดสามจุด ที่จะอยู่บนขอบของวงกลม

การสร้างเส้นโค้ง spline (คำสั่ง Create/Spline) ประกอบด้วยคำสั่งย่อยที่ช่วยในการสร้างเส้นโค้งงอใด ๆ (spline) ดังนี้

คำสั่ง Project Control Points สำหรับการสร้างเส้นโค้ง spline ด้วยวิธีการกำหนดจุดควบคุม (control point) สี่จุด

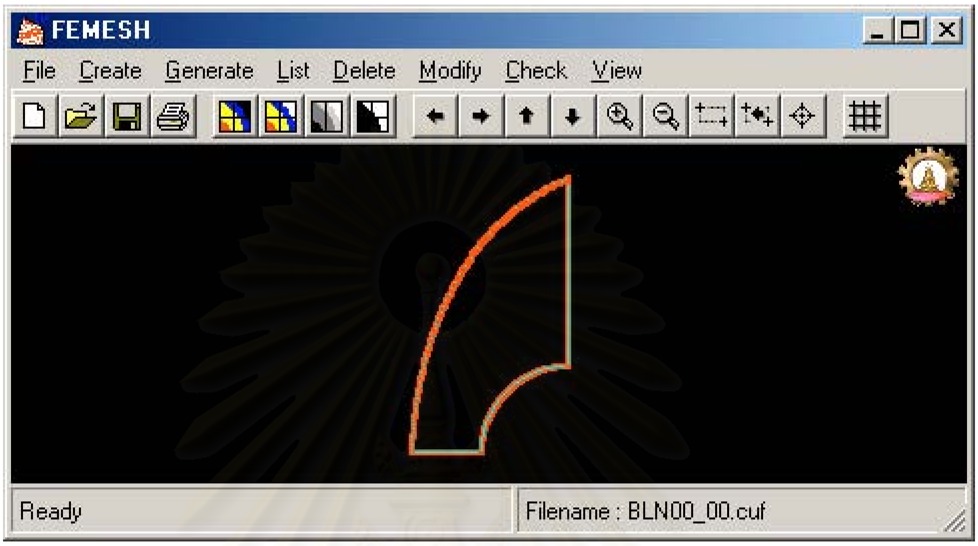
คำสั่ง Tangents สำหรับการสร้างเส้นโค้ง spline ด้วยวิธีการกำหนดจุดปลายสองจุด และจุดที่กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ที่จะขนาดของส่วนโค้งของเส้นโค้ง spline อีกสองจุด

คำสั่ง Points สำหรับการสร้างเส้นโค้ง spline ด้วยวิธีการกำหนดจุดสี่จุด เพื่อใช้ในการกำหนดจุดที่เส้นโค้ง spline จะต้องพาดผ่าน



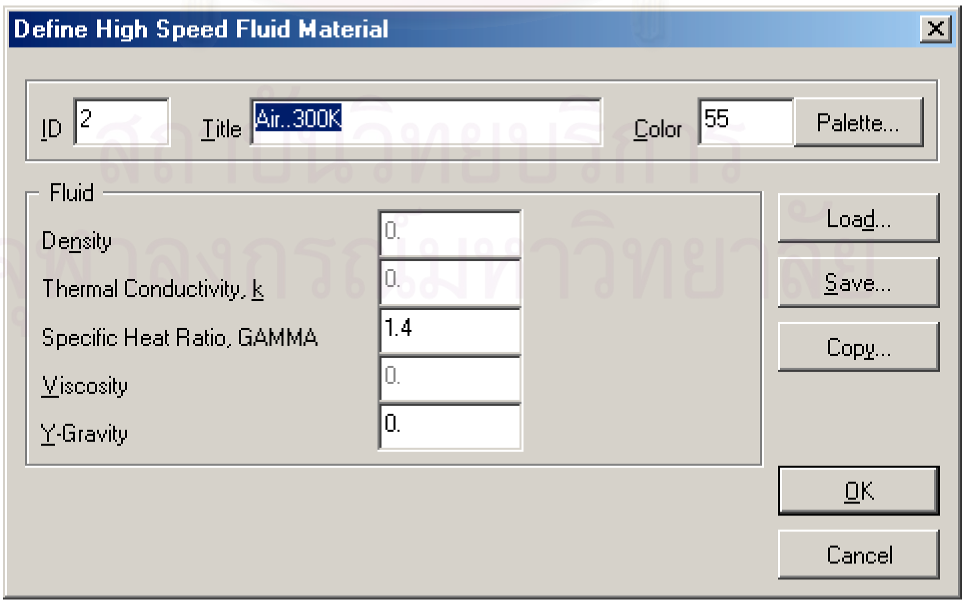
รูปที่ 6.2 สร้างโครงร่างของโมเดลสำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านวัตถุผิวโค้งมน (blunt body)

6.2.2 กำหนดขอบเขตของโมเดล (boundary) ด้วยคำสั่ง Generate/Defined Boundary เพื่อเลือกขอบเขตของโมเดลที่ต้องการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม โดยแต่ละขอบเขตจะต้องประกอบด้วยเส้นที่ต่อเนื่องกันเป็นแบบวงปิด (closed loop) เท่านั้น ดังนั้นถ้าหากมีวงกลมหรือการเจาะรูภายในโดเมน ส่วนเหล่านี้ก็ต้องถูกเลือกเป็นขอบเขตต่างหากของตนเอง



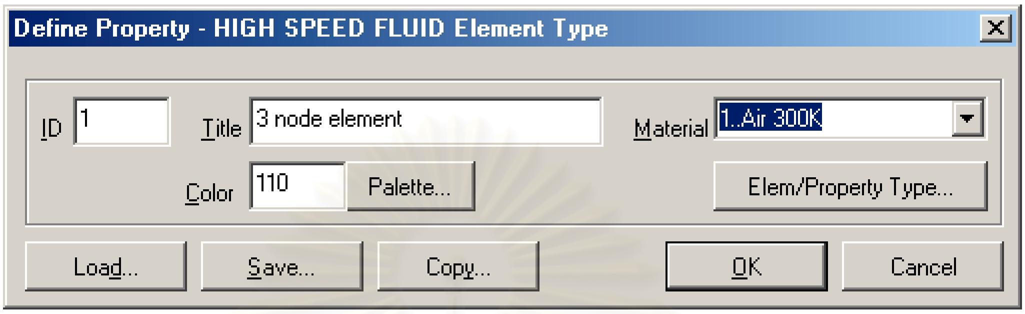
รูปที่ 6.3 ขอบเขตของโมเดล

6.2.3 การสร้างวัสดุ ด้วยคำสั่ง Create/Material ในกรณีของการไหลเป็นการสร้างหรือกำหนดคุณสมบัติของอากาศหรือน้ำทะเล ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณดังในรูปที่ 6.4 เนื่องจากเป็นการวิเคราะห์การไหลแบบไม่หนืด ดังนั้นให้ระบุเฉพาะค่า γ (ช่อง Specific Heat Ratio, GAMMA) และ/หรือค่าแรงโน้มถ่วง (ช่อง Y-gravity) เท่านั้น



รูปที่ 6.4 การกำหนดคุณสมบัติของอากาศ

6.2.4 การสร้างคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยคำสั่ง Create/Property ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง ก็ต้องเลือกเอลิเมนต์สามเหลี่ยมประเภท HIGH SPEED FLUID ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ จากนั้นให้เลือกวัสดุที่ถูกสร้างตามขั้นตอนที่ผ่านมาให้กับคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ 6.5 การสร้างคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

6.2.5 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยคำสั่ง Generate/Boundary Mesh ดังในรูปที่ 6.6 จะต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่จำเป็นในการเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

ช่อง Node ID กำหนดหมายเลขเริ่มต้นของจุดต่อ

ช่อง Elem ID กำหนดหมายเลขเริ่มต้นของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ช่อง Property เลือกคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ที่ถูกสร้างตามขั้นตอนที่ 6.1.4 ข้างต้น

ช่อง Laplacian Smoothing Iteration กำหนดจำนวนครั้งที่จะทำการปรับปรุงรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Laplacian ตามที่ได้อธิบายในบทที่ผ่านมา

ช่อง Smooth To กำหนดค่าตัวเลขที่ใช้หยุดการทำงานของการปรับปรุงรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Laplacian โดยถ้าหากระยะทางจุดต่อที่ถูกย้ายที่มากที่สุดมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนด ก็ให้หยุดการทำงานของการปรับปรุงรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยเทคนิค Laplacian ทันที

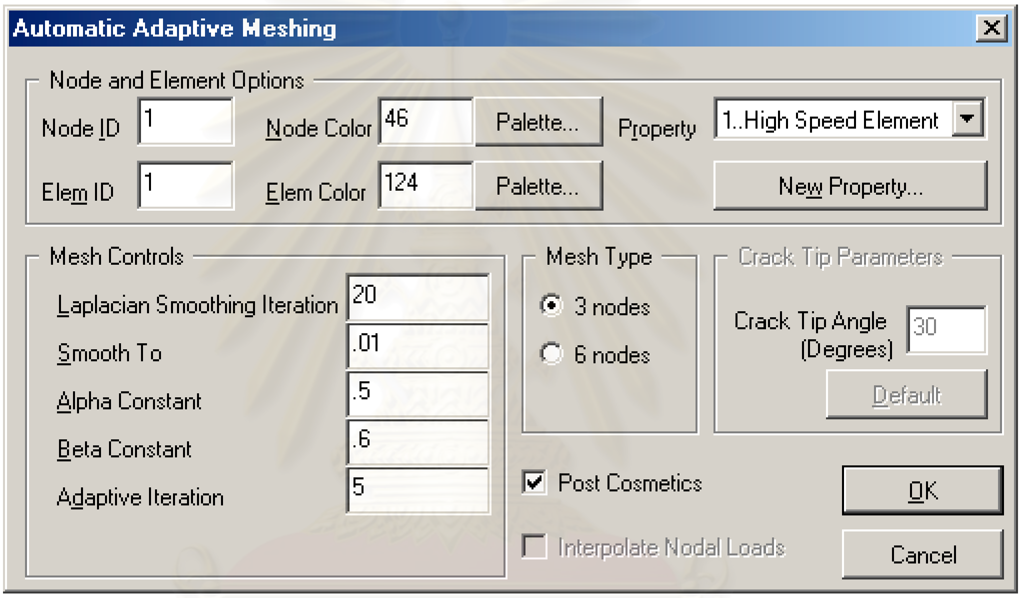
ช่อง Alpha Constant กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ α

ช่อง Beta Constant กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ β

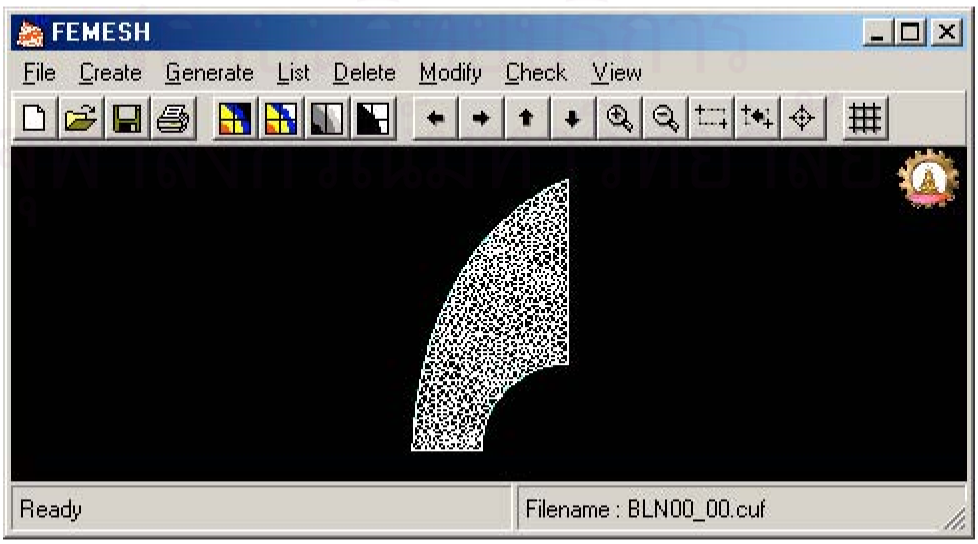
ช่อง Adaptive Iteration กำหนดจำนวนครั้งในการสร้างจุดต่อภายในโดเมน

กลุ่ม Mesh Type ให้เลือก 3 nodes สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง

ตัวเลือก Post Cosmetics ใช้ในการปรับแต่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมบางส่วนที่เมื่อแสดงผลแล้วอาจจะทำให้ดูแล้วขาดความสวยงาม เช่น ปรากฏเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนน้อยในบริเวณที่มีแต่เอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดที่ใหญ่กว่า เป็นต้น ถึงแม้ว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเหล่านี้จะผ่านคุณสมบัติเดอลอนเน่ก็ตาม สำหรับขั้นตอนการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา ไม่แนะนำให้เลือกตัวเลือกนี้ เพราะอาจจะส่งผลต่อคุณภาพของผลลัพธ์ในบริเวณที่เกิดเส้นช็อก

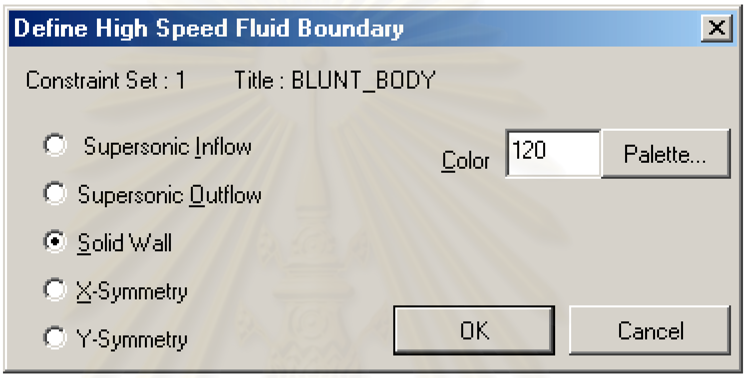


รูปที่ 6.6 การกำหนดพารามิเตอร์สำหรับการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ 6.7 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมภายในโดเมน

6.2.6 การกำหนดเงื่อนไขที่ขอบ (constraint) ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ด้วยคำสั่ง Create/Constraint เงื่อนไขที่ขอบที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง มีดังนี้ เงื่อนไขการไหลเข้าที่ความเร็วสูงกว่าเสียง (Supersonic Inflow) เงื่อนไขการไหลออกที่ความเร็วสูงกว่าเสียง (Supersonic Outflow) เงื่อนไขผนัง (Solid Wall) เงื่อนไขการไหลแบบสมมาตรในแนวแกน x (X-Symmetry) เงื่อนไขการไหลแบบสมมาตรในแนวแกน y (Y-Symmetry)



รูปที่ 6.8 เงื่อนไขที่ขอบสำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง

6.2.7 การกำหนดภาระเริ่มต้นที่จุดต่อ (initial condition) ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ด้วยคำสั่ง Create/Load ภาระเริ่มต้นที่จุดต่อที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง มีดังนี้

ช่อง X-Velocity กำหนดค่าความเร็วในแนวแกน x

ช่อง Y-Velocity กำหนดค่าความเร็วในแนวแกน y

ช่อง Fluid Density กำหนดค่าความหนาแน่น

ช่อง Total Energy กำหนดค่าพลังงานรวม

กรอบ Criteria ประกอบด้วยพารามิเตอร์สำหรับกำหนดเงื่อนไขของตำแหน่งของจุดต่อที่จะทำการสร้างภาระเริ่มต้น ซึ่งสามารถที่จะกำหนดในรูปแบบของสมการคณิตศาสตร์พร้อมๆกับเงื่อนไขทางตรรกศาสตร์ได้พร้อมๆกัน ดังนี้

ปุ่มเลือก Domain หมายถึง การสร้างภาระเริ่มต้นสำหรับทุกจุดต่อภายในโดเมน

ปุ่มเลือก No Load Nodes หมายถึง การสร้างภาระเริ่มต้นเฉพาะสำหรับจุดต่อที่ยังไม่มีภาระเริ่มต้น

ปุ่มเลือก Conditional หมายถึง การสร้างภาระเริ่มต้นแบบมีเงื่อนไข

ตัวเลือก Cartesian ใช้เลือกเพื่อให้สามารถกำหนดเงื่อนไขของตำแหน่งของจุดต่อในรูปแบบของโคออร์ดิเนต x และ y หรือตามแนวรัศมี (r)

ช่อง X กำหนดเงื่อนไขตำแหน่งของจุดต่อในแนวแกน x

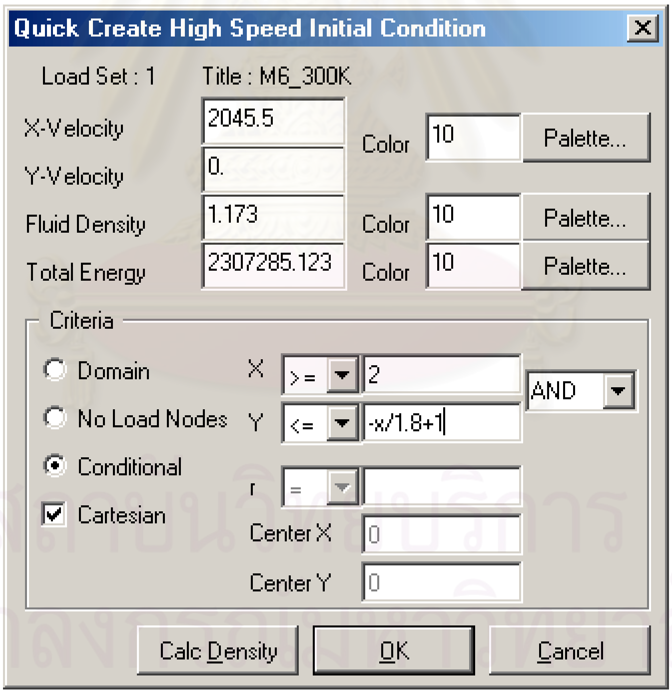
ช่อง Y กำหนดเงื่อนไขตำแหน่งของจุดต่อในแนวแกน y

ช่อง r กำหนดเงื่อนไขตำแหน่งของจุดต่อในแนวรัศมี

ช่อง CenterX กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางของรัศมี

ช่อง CenterX กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางในแนวแกน x ของรัศมี

ช่อง CenterY กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางในแนวแกน y ของรัศมี



รูปที่ 6.9 การกำหนดภาระเริ่มต้นที่จุดต่อ

6.2.8 การวิเคราะห์ปัญหาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยคำสั่ง File/Analyze ดังในรูปที่ 6.10 ค่าพารามิเตอร์สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว มีดังนี้

ช่อง Type กำหนดตัวแก้ปัญหา โดยสามารถเลือกรายการลำดับที่ 15 สำหรับกรณีที่ของไหลเป็นอากาศ หรือรายการลำดับที่ 16 สำหรับกรณีที่ของไหลเป็นน้ำทะเล

ช่อง Error Ind. กำหนดค่าตัวแปรที่จะใช้ในการคำนวณค่าตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด

ช่อง Title กำหนดชื่อเรื่องของปัญหาที่กำลังจะวิเคราะห์

ช่อง Sub Title กำหนดชื่อเรื่องย่อยของปัญหาที่กำลังจะวิเคราะห์

ช่อง Iteration กำหนดจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

ช่อง Tolerance กำหนดค่าความเผื่อของค่าความผิดพลาด เพื่อใช้เป็นเงื่อนไขในการหยุดการทำซ้ำ ถ้าหากค่าความผิดพลาดที่มากที่สุดในรอบดังกล่าวน้อยกว่าค่าความเผื่อของค่าความผิดพลาดที่กำหนด

ช่อง Transient Time (sec,) or 0 for Steady State กำหนดช่วงเวลา (time step) ในการปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวถ้าหากมีค่ามากกว่าศูนย์ หรือมีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว

ช่อง Load Set กำหนดชุดของภาระที่จะใช้ในการคำนวณ ซึ่งจะใช้ในการกรณีที่ต้องการทดสอบหลายๆกรณีของภาระเริ่มต้นของโมเดลเดียวกัน

ช่อง Constraint Set กำหนดชุดของเงื่อนไขที่ขอบที่จะใช้ในการคำนวณ ซึ่งจะใช้ในการกรณีที่ต้องการทดสอบหลายๆกรณีของภาระเริ่มต้นของโมเดลเดียวกัน

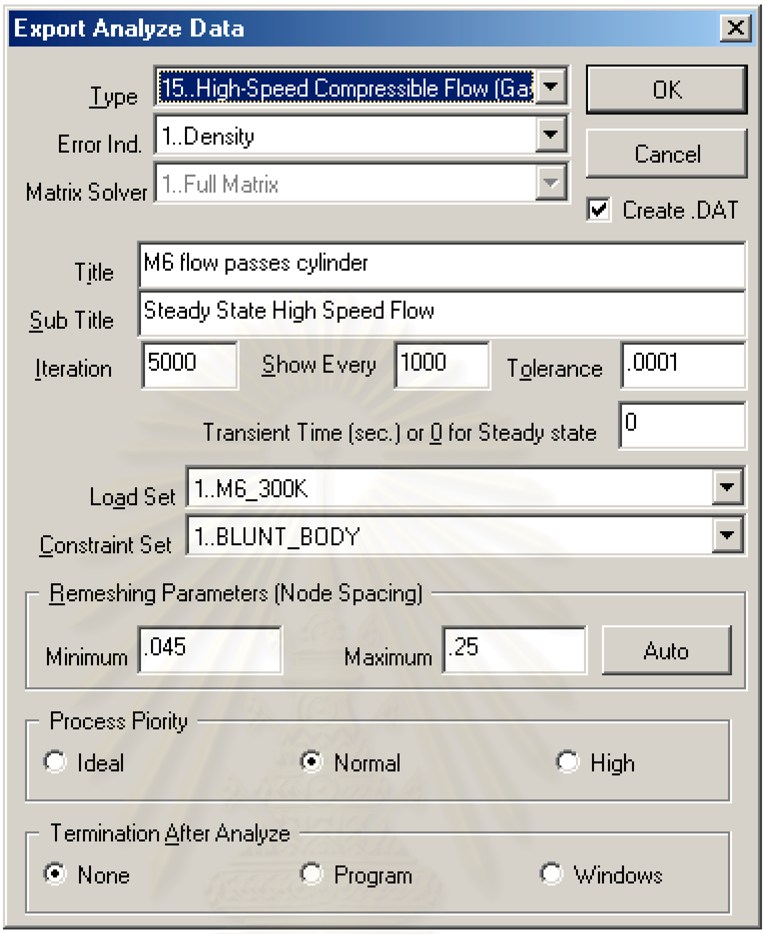
กรอบ Remeshing Parameters สำหรับกำหนดค่าพารามิเตอร์สำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังนี้

ช่อง Minimum กำหนดค่าขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่น้อยที่สุด (h_{min})

ช่อง Maximum กำหนดค่าขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มากที่สุด (h_{max})

กรอบ Process Priority สำหรับกำหนดลำดับความสำคัญของกระบวนงานที่ระบบปฏิบัติการวินโดวส์จะเลือกมาประมวลผล ซึ่งจะช่วยให้โปรแกรมสามารถทำงานได้เร็วขึ้น

กรอบ Termination After Analyze กำหนดให้ระบบปฏิบัติการวินโดวส์ปิดตัวเอง (terminate) หรือปิดเครื่องคอมพิวเตอร์ เมื่อการประมวลผลของส่วนประมวลผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สิ้นสุดการทำงาน



รูปที่ 6.10 การกำหนดพารามิเตอร์สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว

6.2.9 การแสดงผลหลังการวิเคราะห์ปัญหาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่อการการวิเคราะห์ปัญหาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สิ้นสุด ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณก็จะถูกอ่านมายังโปรแกรมโดยอัตโนมัติ จากนั้นก็สามารถที่จะแสดงผลของผลลัพธ์ที่ได้ในรูปแบบกราฟิกด้วยคำสั่ง View/Select ดังในรูปที่ 6.11 ซึ่งสามารถที่จะเลือกวิธีหรือรูปแบบการแสดงผลลัพธ์ ได้ดังนี้

การเลือกชนิดของตัวแปร ดังนี้ ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ค่าพลังงานรวม ค่าความเร็วในแนวแกน x ค่าความเร็วในแนวแกน y และค่าความเร็วรวม

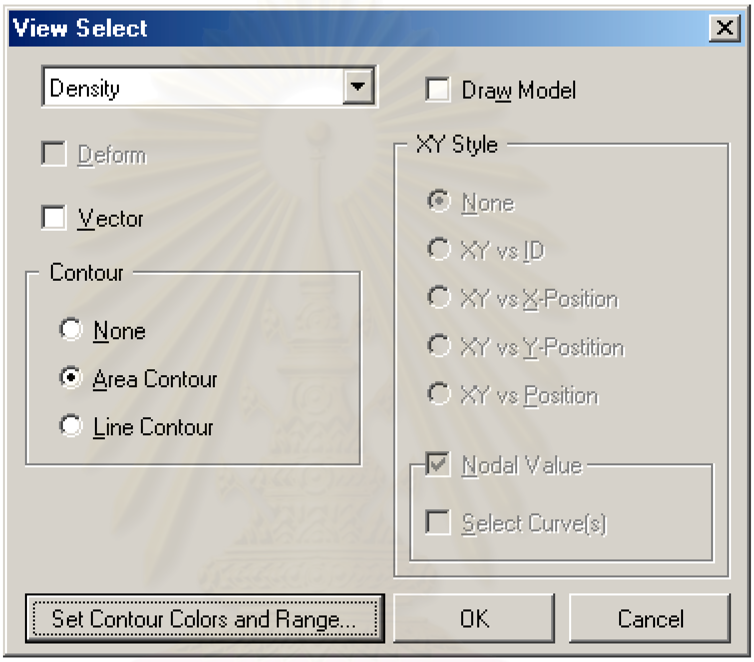
ตัวเลือก Vector สำหรับการแสดงผลค่าความเร็วรวมในรูปแบบของเวกเตอร์

กรอบ Contour เพื่อกำหนดรูปแบบของการแสดงผลเส้นชั้น โดยสามารถที่จะแสดงผลได้ทั้งที่เป็นเส้นชั้นแบบเส้น (contour line) และเส้นชั้นแบบระดับพื้นที่สี (contour area)

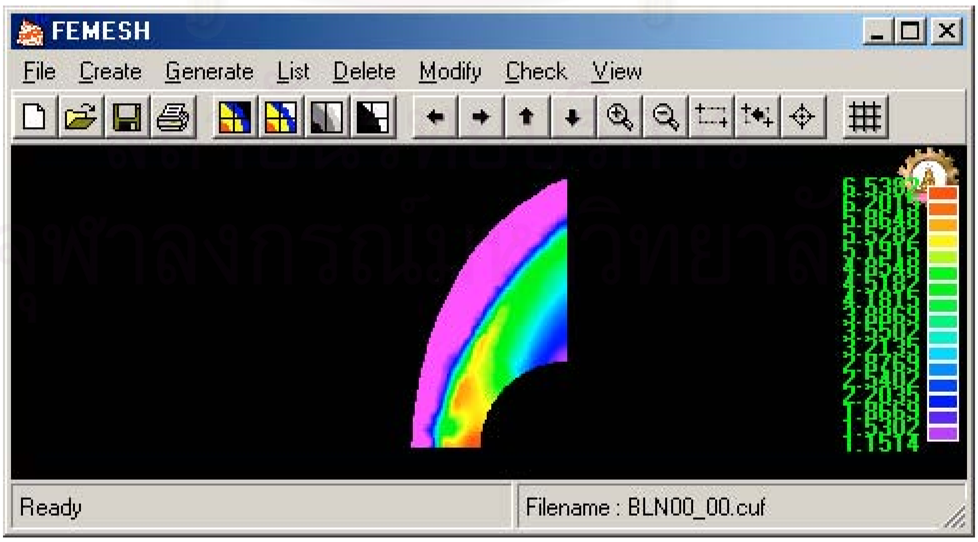
ตัวเลือก Draw Model สำหรับการแสดงผลโมเดลควบคู่กับการแสดงผลลัพธ์

กรอบ XY Style สำหรับเลือกรูปแบบของการแสดงผลกราฟเส้นตรง XY เช่น กราฟเส้นตรง XY แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์ของตัวแปรที่ถูกเลือกกับตำแหน่งในแนวแกน x (XY vs X-Position) หรือกราฟเส้นตรง XY แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์ของตัวแปรที่ถูกเลือกกับหมายเลขประจำของจุดต่อ (XY vs ID) เป็นต้น

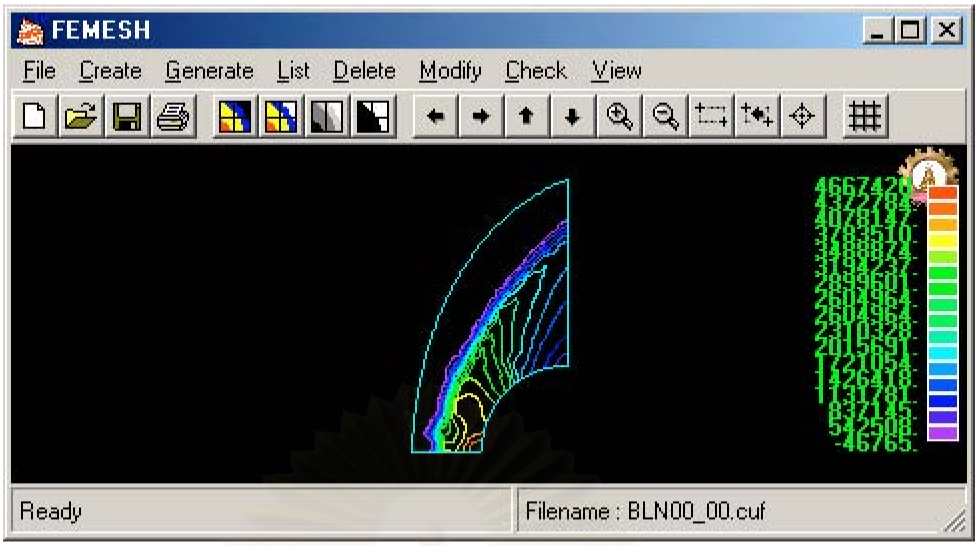
ปุ่มคำสั่ง Set Contour Colors and Range จะประกอบด้วยค่าพารามิเตอร์สำหรับการกำหนดระดับสีและช่วงของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของเส้นชั้นที่ต้องการแสดงผล



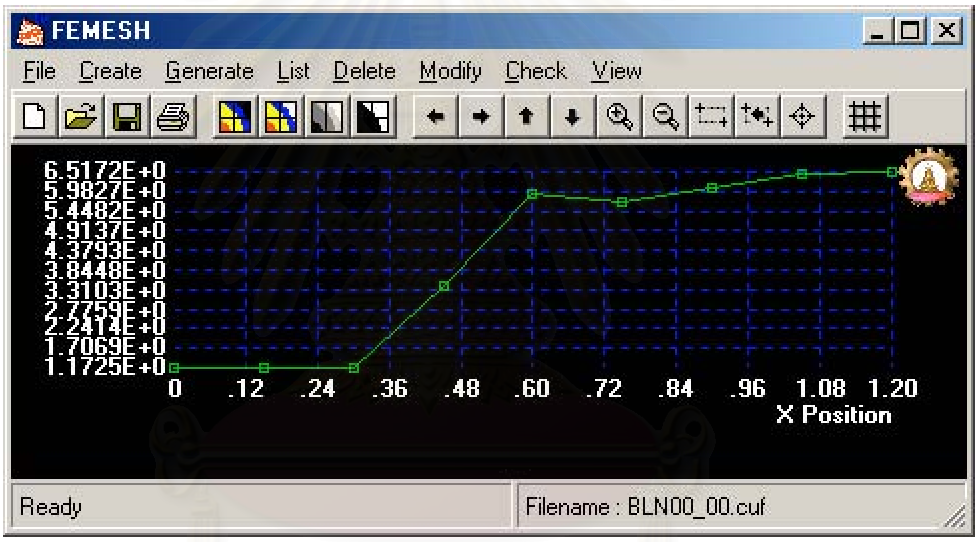
รูปที่ 6.11 การกำหนดรูปแบบการแสดงผลลัพธ์



รูปที่ 6.12 ตัวอย่างการแสดงผลลัพธ์ด้วยเส้นชั้นแบบระดับพื้นที่สี 128 ระดับ



รูปที่ 6.13 ตัวอย่างการแสดงผลลัพธ์ด้วยเส้นชั้นแบบเส้น 16 ระดับ



รูปที่ 6.14   กราฟเส้นตรง XY แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์ของตัวแปรค่าความหนาแน่น ตลอดขอบล่างแนวนอนของโดเมน กับตำแหน่งในแนวแกน x

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6.3 รูปแบบของไฟล์ข้อมูล

ไฟล์ข้อมูลที่ถูกสร้างโดยโปรแกรมประกอบไปด้วยไฟล์สามประเภท ดังนี้

6.3.1 ไฟล์โมเดล (model file) เป็นไฟล์ไบนารี (binary file) ที่มีนามสกุล .cuf ดังนั้นไฟล์โมเดลจึงไม่สามารถที่จะเปิดดูด้วยโปรแกรมประเภทแก้ไขข้อความ (text editor) ไฟล์โมเดลเป็นไฟล์ที่มีความสำคัญอย่างมาก เพราะข้อมูลทั้งหมดของโมเดลจะถูกจัดเก็บไว้ในไฟล์ดังกล่าว

6.3.2 ไฟล์ข้อมูล (data file) เป็นไฟล์ข้อความ (text file) ที่มีนามสกุล .dat ซึ่งเป็นไฟล์ที่ถูกแปลงข้อมูลจากไฟล์โมเดล เพื่อส่งต่อไปยังโปรแกรมคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกทอดหนึ่ง ดังนั้นไฟล์ข้อมูลจึงสามารถที่จะถูกสร้างโดยโปรแกรมอื่นๆ เช่น Ansys หรือ Nastran ก็ได้ สำหรับการจัดเก็บข้อมูลในไฟล์ข้อมูล ซึ่งสามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสามส่วนหลัก ๆ ดังต่อไปนี้

<u>ส่วนที่ 1</u> ส่วนคำสั่ง (command section) ประกอบด้วยคำสั่งเพื่อให้โปรแกรมคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถที่จะรู้ตำแหน่งการจัดเก็บ หรือสร้างไฟล์ผลลัพธ์ ตลอดจนค่าพารามิเตอร์ต่างๆสำหรับการคำนวณขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เหมาะสม ในกรณีที่ต้องการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คำสั่งในส่วนนี้จะจบเมื่อพบประโยค END=CMD

```
FILEID=FEMESH SCRIPT COMMAND
TITLE=M6 flow pasts cylinder
SUBTITLE=Steady State High Speed Flow
DATE=24-Jan-2002 21:23:20
SOL=15
PROBLEMID=16601
ERRORIND=0
DATADIR=D:\ZDRIVE_D\VBAPPL~1\FEMESH~3\Data\HIGHSP~1
PROGDIR=D:\ZDRIVE_D\VBAPPL~1\FEMESH~3
OUTFILE=BLN00_00.out
REMESH_HMIN=4.5E-2
REMESH_HMAX=2.5E-1
END=CMD
```

<u>ส่วนที่ 2</u> ส่วนข้อมูล (data section) ส่วนนี้จะเริ่มต้นเมื่อพบคำสั่ง BEGIN BULK และจะประกอบด้วยส่วนย่อย ดังนี้

<u>ส่วนที่ 2.1</u> ส่วนกำหนดพารามิเตอร์ เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม จำนวนครั้งของการทำซ้ำ หรือช่วงเวลาของการคำนวณในสภาวะไม่คงตัว เป็นต้น

```
NPOIP       NELEM       NBOUND
426         785         65
EPSLAM      NTIME       SAVITER     TRANSTIMES     NPROP     MPROP
1.0E-4      5000        1000        0.0            1         1
```

<u>ส่วนที่ 2.2</u> ส่วนกำหนดข้อมูลของจุดต่อ ประกอบด้วยข้อมูลเกี่ยวกับหมายเลขประจำ (ID) และตำแหน่งในแนวแกน x และ y ของจุดต่อ โดยจะมีจำนวนข้อมูลเท่ากับจำนวนจุดต่อที่ถูกกำหนดในส่วนที่ 2.1

NODE	X	Y [NODE=426]
1	0.0E+0	0.0E+0
2	1.5E-1	0.0E+0
3	3.0E-1	0.0E+0
4	4.5E-1	0.0E+0
5	6.0E-1	0.0E+0

<u>ส่วนที่ 2.3</u> ส่วนกำหนดข้อมูลของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ประกอบด้วยข้อมูลเกี่ยวกับหมายเลขประจำ (ID) และหมายเลขประจำของจุดต่อที่เป็นจุดปลายทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และหมายเลขประจำของคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม โดยจำนวนข้อมูลเท่ากับจำนวนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ถูกกำหนดในส่วนที่ 2.1

ELEM	I	J	K	PROP [TRIANGLE=785]
1	3	4	257	1
2	156	224	241	1
3	21	68	163	1
4	6	7	66	1
5	6	66	119	1

<u>ส่วนที่ 2.4</u> ส่วนกำหนดคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ประกอบด้วยข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

PROPID	GAMMA	Y-GRAVITY
1	1.4E+0	0.0

<u>ส่วนที่ 2.5</u> ส่วนกำหนดขอบเขตของโดเมน ประกอบด้วยข้อมูลที่ระบุหมายเลขประจำจุดต่อสองจุดที่ประกอบเป็นด้านซึ่งแสดงขอบเขตของโดเมน หมายเลขประจำเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เป็นเจ้าของด้านดังกล่าว และประเภทของเงื่อนไขขอบเขต

ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

NODE#1	NODE#2	ELEM	BNDIDX
12	11	33	3
17	16	52	3
18	17	53	3
9	21	68	3
19	18	154	3

<u>ส่วนที่ 3</u> ส่วนสิ้นสุดไฟล์ (ending section) ส่วนนี้จะประกอบด้วยคำสั่ง END BULK เพียงคำสั่งเดียว เพื่อระบุตำแหน่งการสิ้นสุดของไฟล์ข้อมูล

6.3.3 ไฟล์ผลลัพธ์ (output file) เป็นไฟล์ข้อความ (text file) ที่มีนามสกุล .out ซึ่งเป็นไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสองส่วนหลัก ๆ ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ส่วนคำสั่ง (command section) ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับส่วนคำสั่งของไฟล์ข้อมูล

ส่วนที่ 2 ส่วนผลลัพธ์ (solution section) ประกอบด้วยค่าตัวแปรที่จุดต่อ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยจะมีรูปแบบดังนี้

```
                NODAL VALUES SOLUTIONS [  426]:
                NODE    RHO             U             V
E                P               H
                   1    0.117300E+01    0.204550E+04   0.000000E+00
0.230728E+07    0.100995E+06    0.250000E+00
                   2    0.117300E+01    0.204550E+04  0.114661E-12
0.230728E+07    0.100995E+06    0.106894E+00
                   3    0.117300E+01    0.204550E+04  0.289320E-12
0.230728E+07    0.100995E+06    0.513886E-01
                   4    0.341491E+01    0.887262E+03 -0.759594E+02
0.182810E+07    0.195551E+07    0.139852E+00
                   5    0.593808E+01    0.618035E+03 -0.164366E+02
0.175032E+07    0.370347E+07    0.510523E-01
```

นอกจากนี้โปรแกรม FEMESH ยังสามารถที่จะทำการแปลงข้อมูลของโมเดล และผลลัพธ์ทังหมดให้อยู่ในรูปแบบที่โปรแกรม Ansys และ Nastran สามารถอ่านได้อีกด้วย โดยเลือกใช้คำสั่ง File/Export Model เพื่อทำการแปลงข้อมูลของโมเดล (Analysis Model) และผลลัพธ์ทั้งหมด (Results Model) ให้อยู่ในรูปแบบของไฟล์ที่มีนามสกุล .nas และ .f06 ตามลำดับ

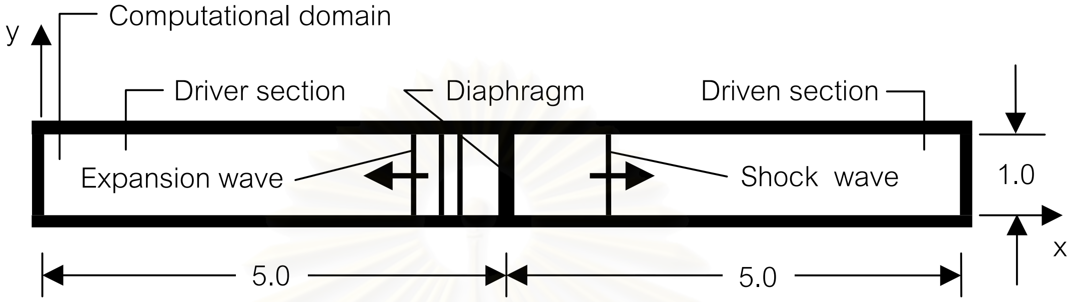
บทที่ 7
การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง ในสภาวะไม่คงตัว

ในบทนี้จะแสดงผลของการนำโปรแกรม FEMESH ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว โดยจะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับทุก ๆ ปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น และเพื่อให้มั่นใจว่าการทำงานของโปรแกรม FEMESH ทั้งในส่วนของการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม การประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และการประมวลผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์เป็นไปอย่างถูกต้อง ก็จะทำการทวนสอบความถูกต้องของโปรแกรมด้วยปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ (shock tube) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาอื่น ๆ ทั้งสภาวะคงตัวและไม่คงตัว ดังนี้ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย (expansion ramp) ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอก ปัญหาข้างต้นทั้งหมดยกเว้นปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ เป็นปัญหาของการเกิดคลื่นช็อกอันเนื่องมาจากการไหลที่ความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียง สำหรับปัญหาต่อนี้จะเป็นปัญหาของการเกิดคลื่นช็อกอันเนื่องมาจากผลของแรงอัดตัวของอากาศอันเนื่องมากจากการระเบิดทั้งในอากาศและใต้น้ำทะเล ดังนี้ ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ และปัญหาการการระเบิดใต้น้ำทะเล

7.1 ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

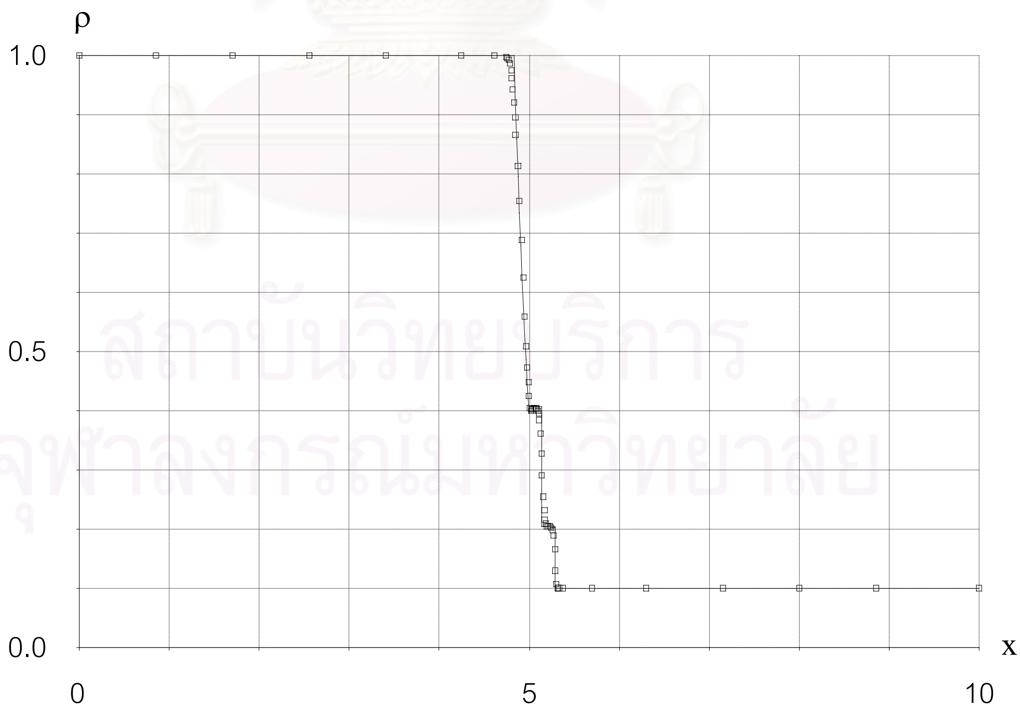
ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อเป็นปัญหาพื้นฐานในหนึ่งมิติที่มีผลเฉลยแม่นตรง [35,36] และเป็นปัญหาที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่คำนวณปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว นอกจากนี้ยังเป็นปัญหาที่สามารถทำการทดลองในห้องปฏิบัติการได้โดยตรง จึงสามารถเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงกับผลการทดลองได้ ลักษณะของปัญหาดังในรูปที่ 7.1 ก็คือ ในขณะที่เวลาเป็นศูนย์จะกำหนดให้ของไหลสองด้านภายในท่อถูกแบ่งออกจากกันโดยแผ่นกั้นตรงกึ่งกลางของท่อ และของไหลทั้งสองด้านจะมีคุณสมบัติเริ่มต้นที่แตกต่างกัน เช่น ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และอุณหภูมิเป็นต้น โดยในที่นี้กำหนดให้คุณสมบัติเริ่มต้นของของไหลทางด้านซ้าย (driver section) คือ ρ

$_4$=10, u_4 = 0, v_4 = 0 และ ε_4 = 215,310 (T_4 = 300 K) ส่วนคุณสมบัติเริ่มต้นของของไหลทางด้านขวา (driven section) คือ ρ_1=1, u_1 = 0, v_1 = 0 และ ε_1 = 215,310 (T_1 = 300 K) จากนั้นก็ยกแผ่นกั้นออกทันทีทันใด ผลจากความแตกต่างของคุณสมบัติของของไหลทั้งสองด้าน ก็จะทำให้เกิดคลื่นช็อกวิ่งไปทางขวามือ และเกิดคลื่นช็อกแบบขยาย (expansion shock wave) วิ่งไปทางซ้ายมือ

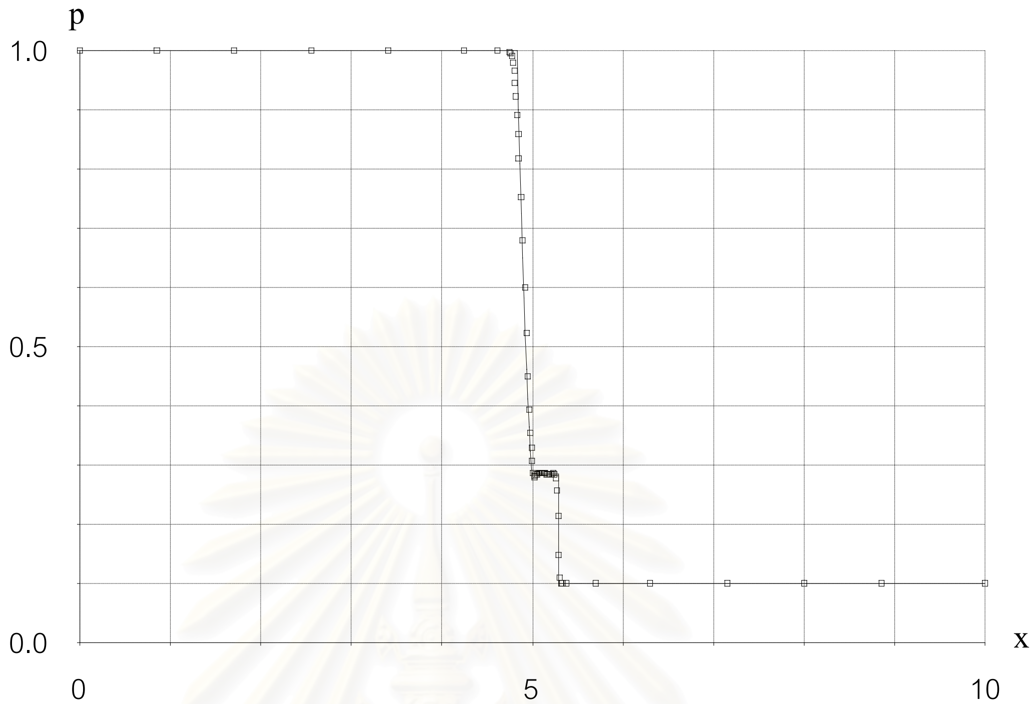


รูปที่ 7.1 ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

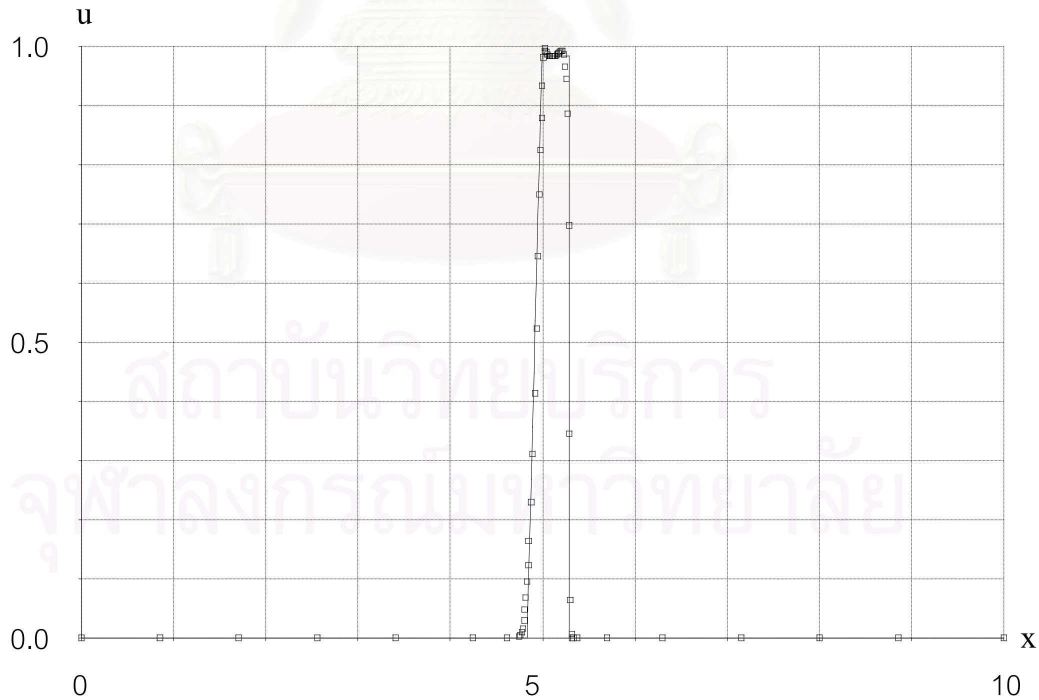
เพื่อให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมรูปที่ 7.2 ถึง 7.7 แสดงกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยแม่นตรง และผลคำนวณเชิงตัวเลขในรูปแบบค่าหนึ่งหน่วย (normalization) ของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา 0.0005 วินาที และ 0.001 วินาที โดยเส้นทึบจะแทนผลเฉลยแม่นตรงและสี่เหลี่ยมแทนผลเฉลยเชิงตัวเลข



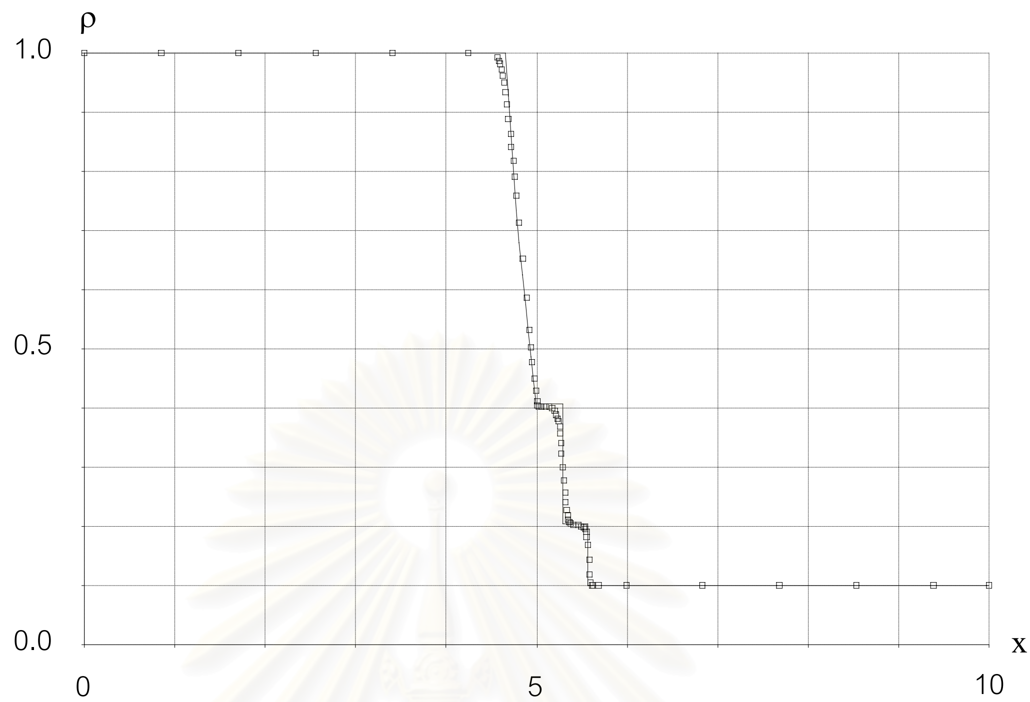
รูปที่ 7.2 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น ที่เวลา 0.0005 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



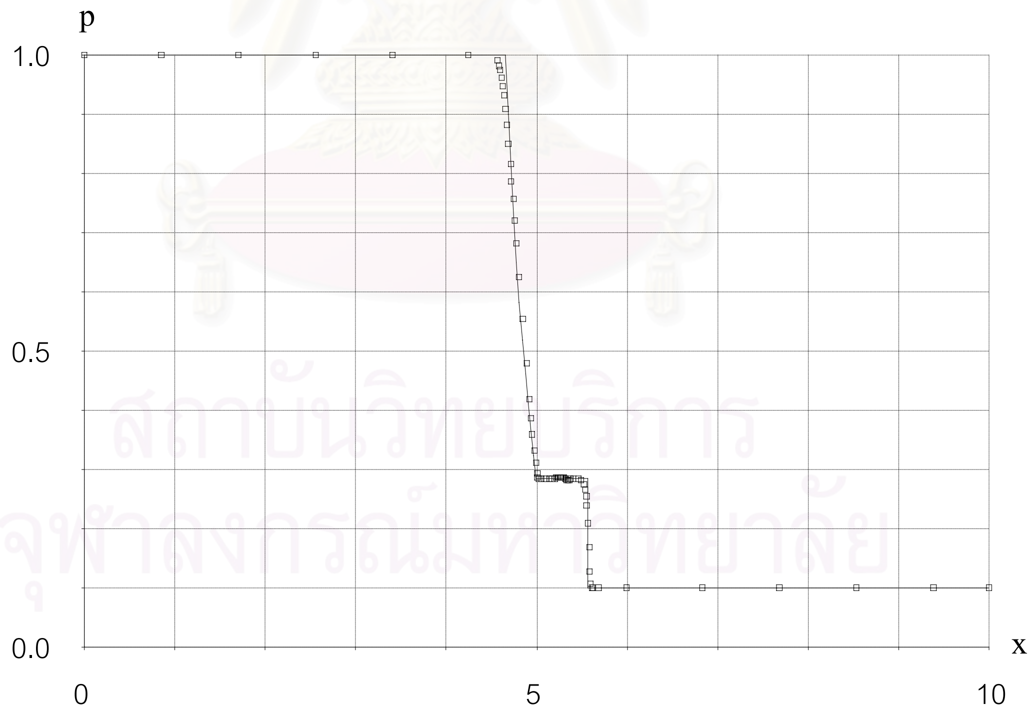
รูปที่ 7.3 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความดัน ที่เวลา 0.0005 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



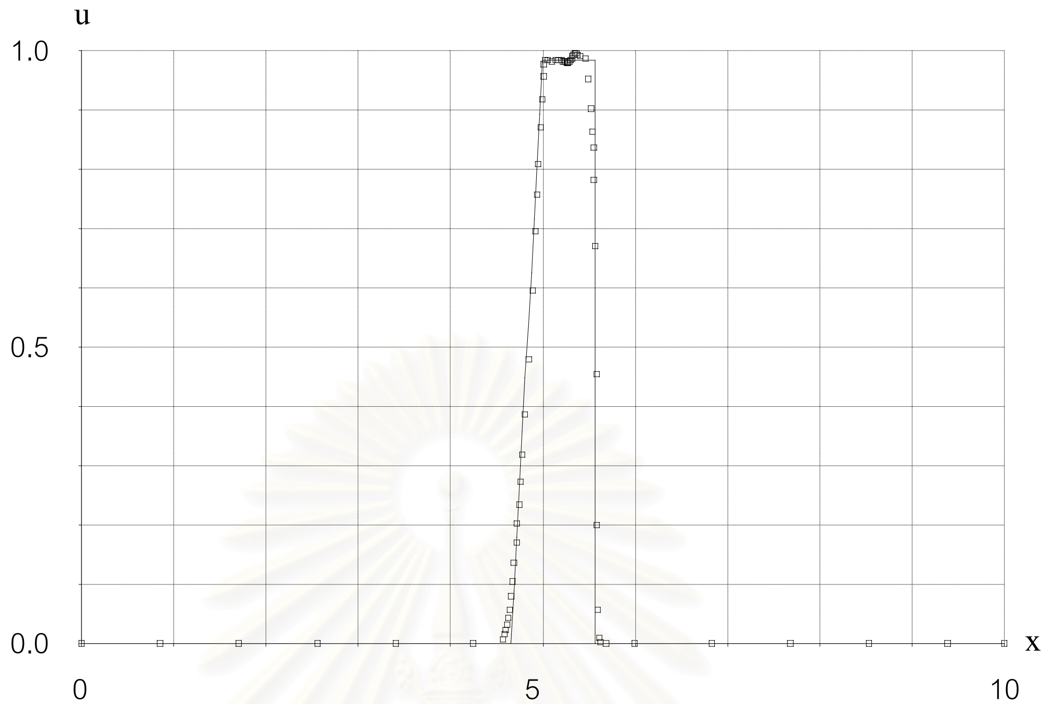
รูปที่ 7.4 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา 0.0005 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



รูปที่ 7.5 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น ที่เวลา 0.001 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

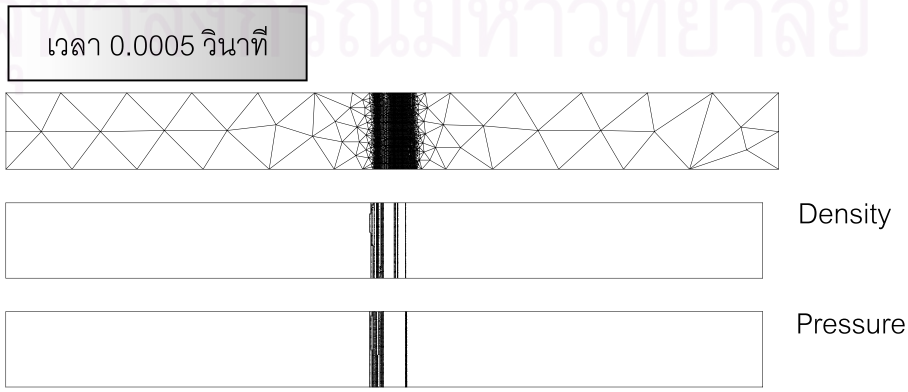


รูปที่ 7.6 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความดัน ที่เวลา 0.001 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

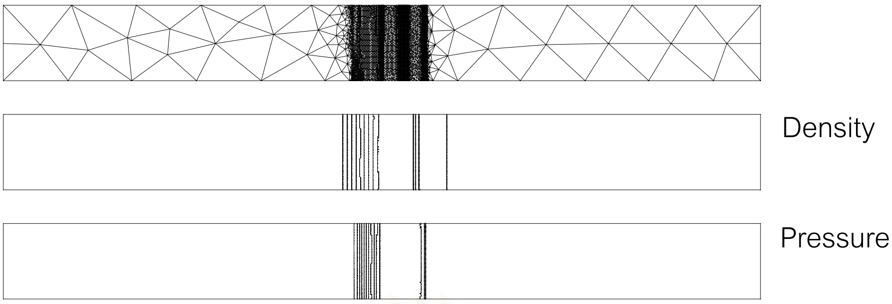


รูปที่ 7.7 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา 0.001 วินาที สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

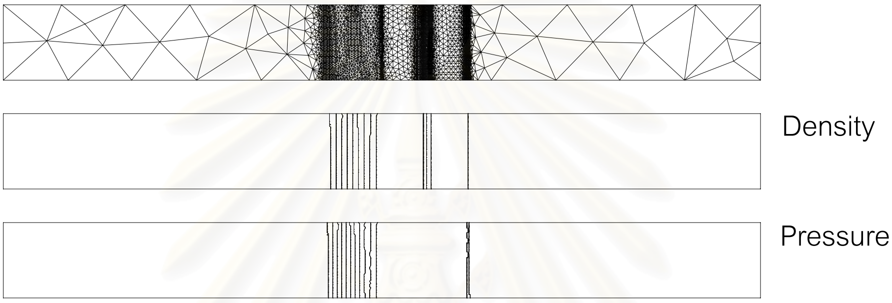
รูปที่ 7.8 แสดงเอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับตัวโดยอัตโนมัติ และเส้นชั้นของค่าความดันและค่าความดันของคลื่นช็อก ที่เวลาต่างๆ ซึ่งจะเห็นว่าแนวที่เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีความหนาแน่นมาก จะเป็นบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของค่าความหนาแน่น ซึ่งเป็นค่าที่ใช้ในการคำนวณค่าตัวชี้วัดความผิดพลาด โดยคลื่นช็อกจะเคลื่อนที่ไปทางขวามือซึ่งเป็นทิศทางการเคลื่อนตัวของของไหลที่มีความหนาแน่นมากกว่า ไปยังบริเวณที่ของไหลที่มีความหนาแน่นน้อยกว่า ส่วนทางคลื่นช็อกแบบขยายตัว (expansion wave) ก็จะเคลื่อนตัวไปทางซ้ายมือ โดยลักษณะของคลื่นช็อกแบบขยายตัว จะเป็นรูปแบบของคลื่นช็อกที่ติดตามด้วยคลื่นช็อกเป็นช่วง ๆ ด้านหลังติดต่อกัน



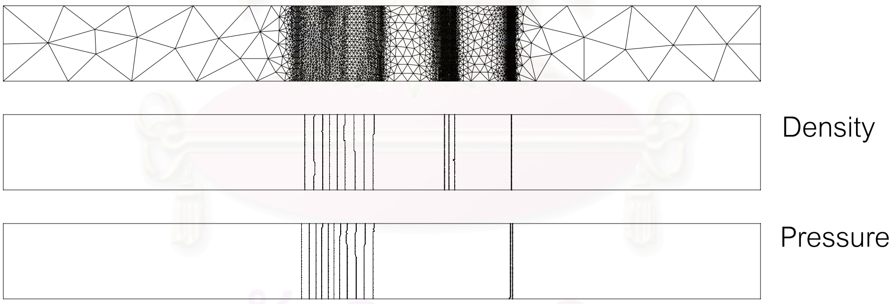
เวลา 0.001 วินาที



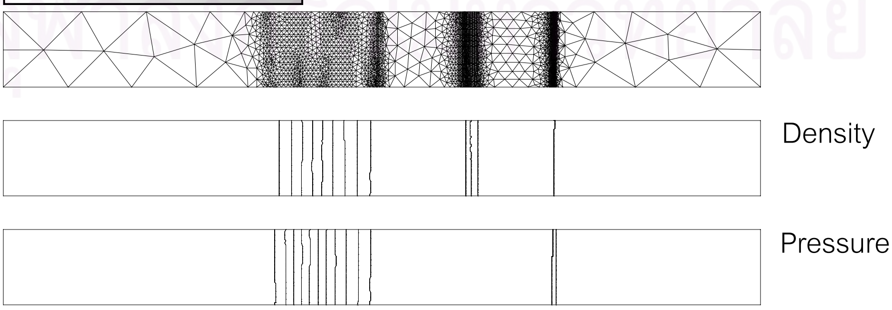
เวลา 0.002 วินาที



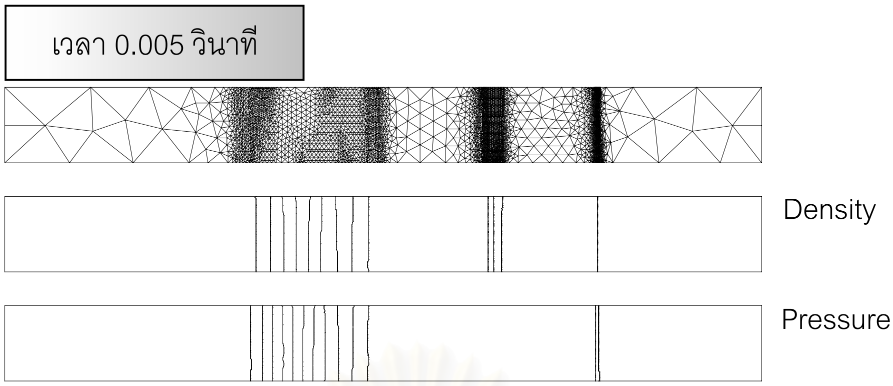
เวลา 0.003 วินาที

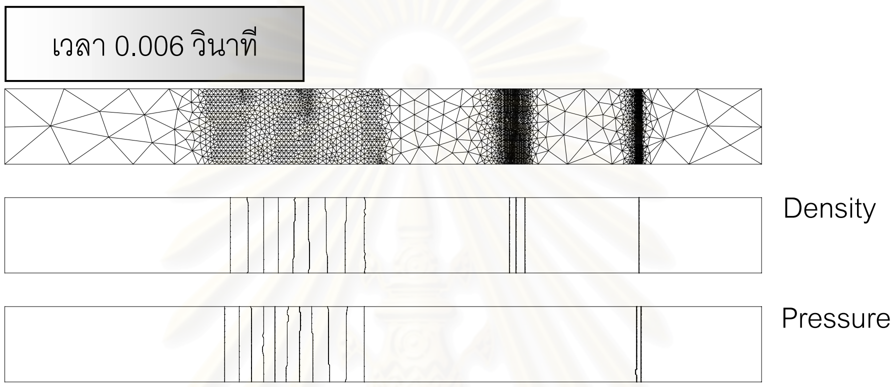


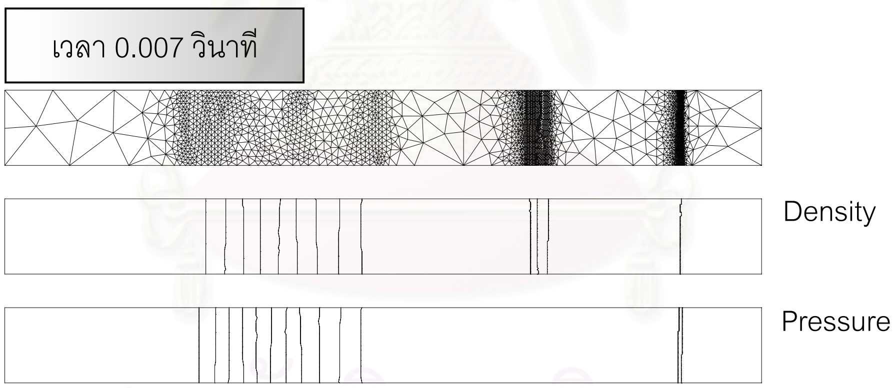
เวลา 0.004 วินาที

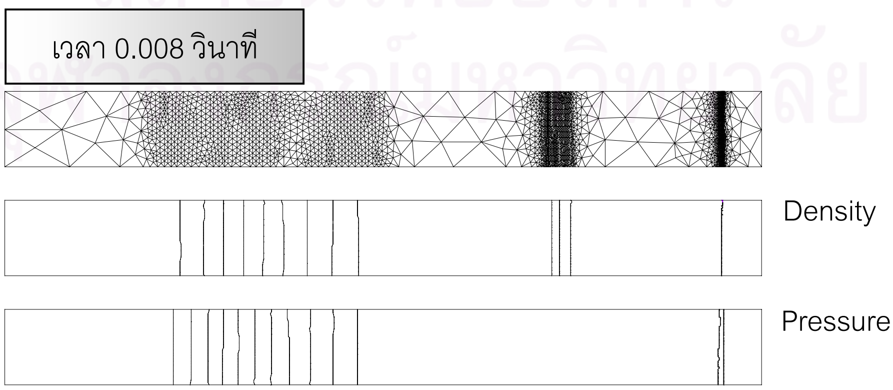


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

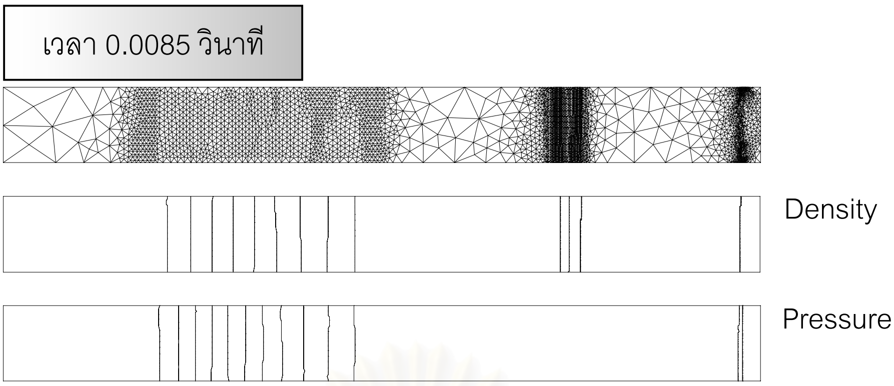








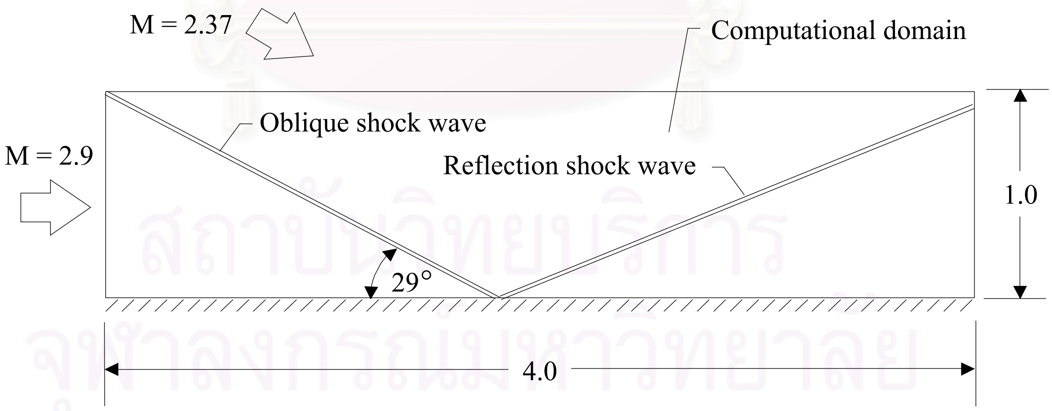
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 7.8 เส้นชั้นของค่าความดันและค่าความดัน ณ ช่วงเวลาต่าง ๆ สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

7.2 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ เป็นอีกหนึ่งปัญหาพื้นฐานที่ถูกนำมาใช้ในการศึกษาในงานวิจัย โดยรูปที่ 7.9 แสดงรูปแบบของปัญหาการไหลที่มีค่ามัคนัมเบอร์ต่างกันตกกระทบกัน ซึ่งทำให้เกิดคลื่นช็อกเอียง (oblique shock) ทำมุมตกกระทบ 29° และสะท้อนไปทางด้านมุมขวาบนของภาพ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าตลอดขอบด้านซ้ายคือ $\rho = 1.0$ $u = 2.9$ $v = 0$ และ $\varepsilon = 5.991$ และตลอดขอบบนคือ $\rho = 1.7$ $u = 2.6185$ $v = -0.5063$ และ $\varepsilon = 5.806$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$

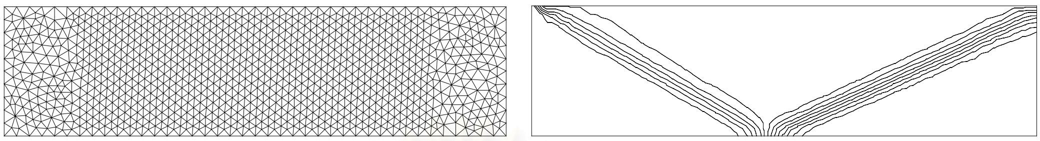


รูปที่ 7.9 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว [1,2,7] ดังในรูปที่ 7.10 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน โดยผลลัพธ์ที่ได้ยังคงมีความถูกต้องค่อนข้างน้อย เนื่องจาก

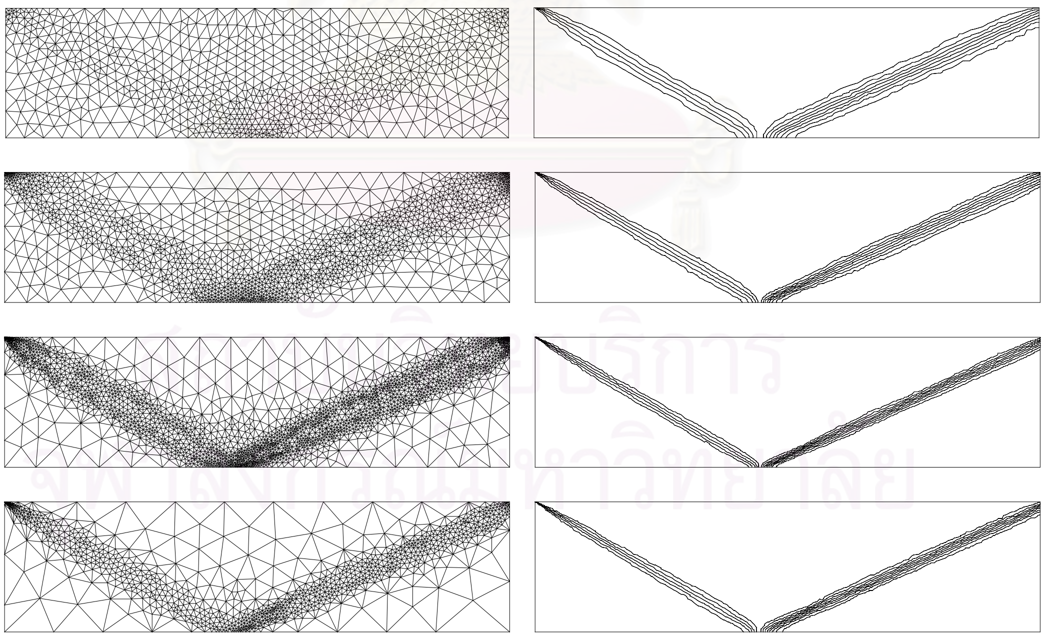
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ลักษณะของคลื่นช็อกทั้งก่อนตกกระทบและหลังสะท้อนจากพื้นราบยังคงเป็นเส้นที่มีความหนามาก ทั้งนี้เพราะเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ใช้ในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกมีขนาดใหญ่เกินไป ดังนั้นจึงควรที่จะประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลลัพธ์ให้มากยิ่งขึ้น



รูปที่ 7.10 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเริ่มต้นและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะคงตัว

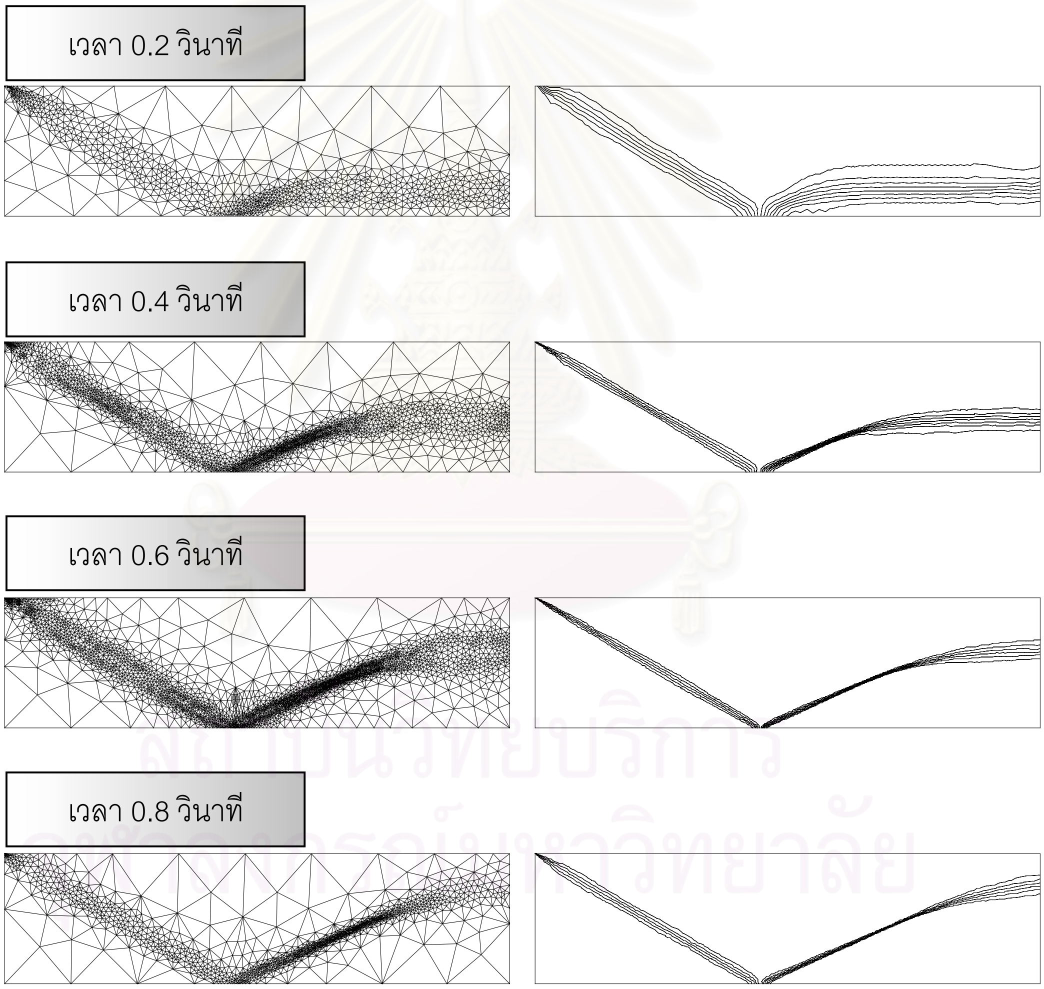
เมื่อทำการระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอนดังในรูปที่ 7.11 ก็จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น โดยสังเกตได้จากความหนาของคลื่นช็อกทั้งก่อนตกกระทบและหลังสะท้อนจากพื้นราบจะมีความหนาลดลงอย่างมาก และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนอกบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก ก็จะมีขนาดโตขึ้นซึ่งจะช่วยประหยัดหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล



รูปที่ 7.11 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะคงตัว

ตารางที่ 7.1 ค่า h_{min} และ h_{max} สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะคงตัว

Mesh	h_{min}	h_{max}	Elements	Nodes
Nonadaptive	-	-	1,974	1,038
1^{st} adaptive	0.030000	0.150	1,647	874
2^{nd} adaptive	0.007500	0.175	3,117	1,634
3^{rd} adaptive	0.001000	0.250	5,382	2,778
4^{th} adaptive	0.000325	0.390	2,301	1,192

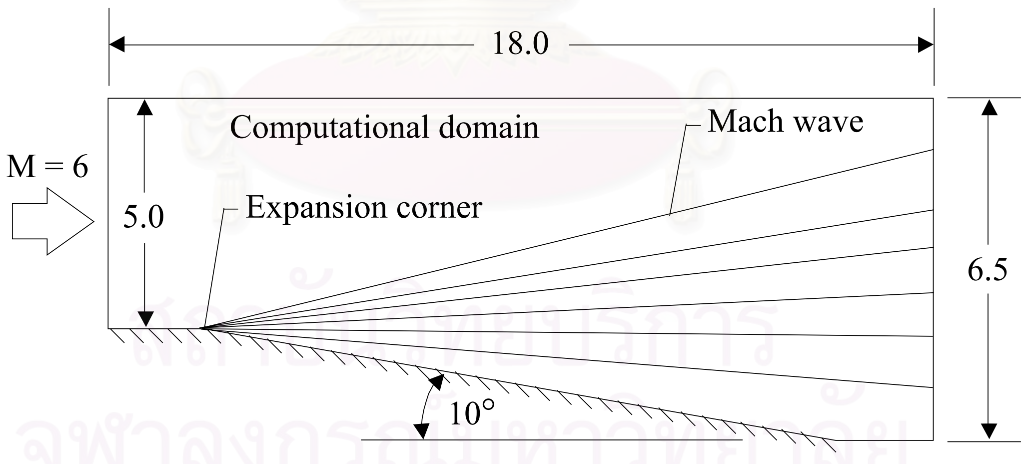


รูปที่ 7.12 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะไม่คงตัว

ตารางที่ 7.1 ข้างต้นแสดงตัวอย่างการกำหนดค่า h_{min} และ h_{max} สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ของปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว ดังในรูปที่ 7.12 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนเช่นเดียวกับข้างต้น และทำการประยุกต์เมื่อทำการระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาในทุก ๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ ซึ่งจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้นในทุก ๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ

7.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

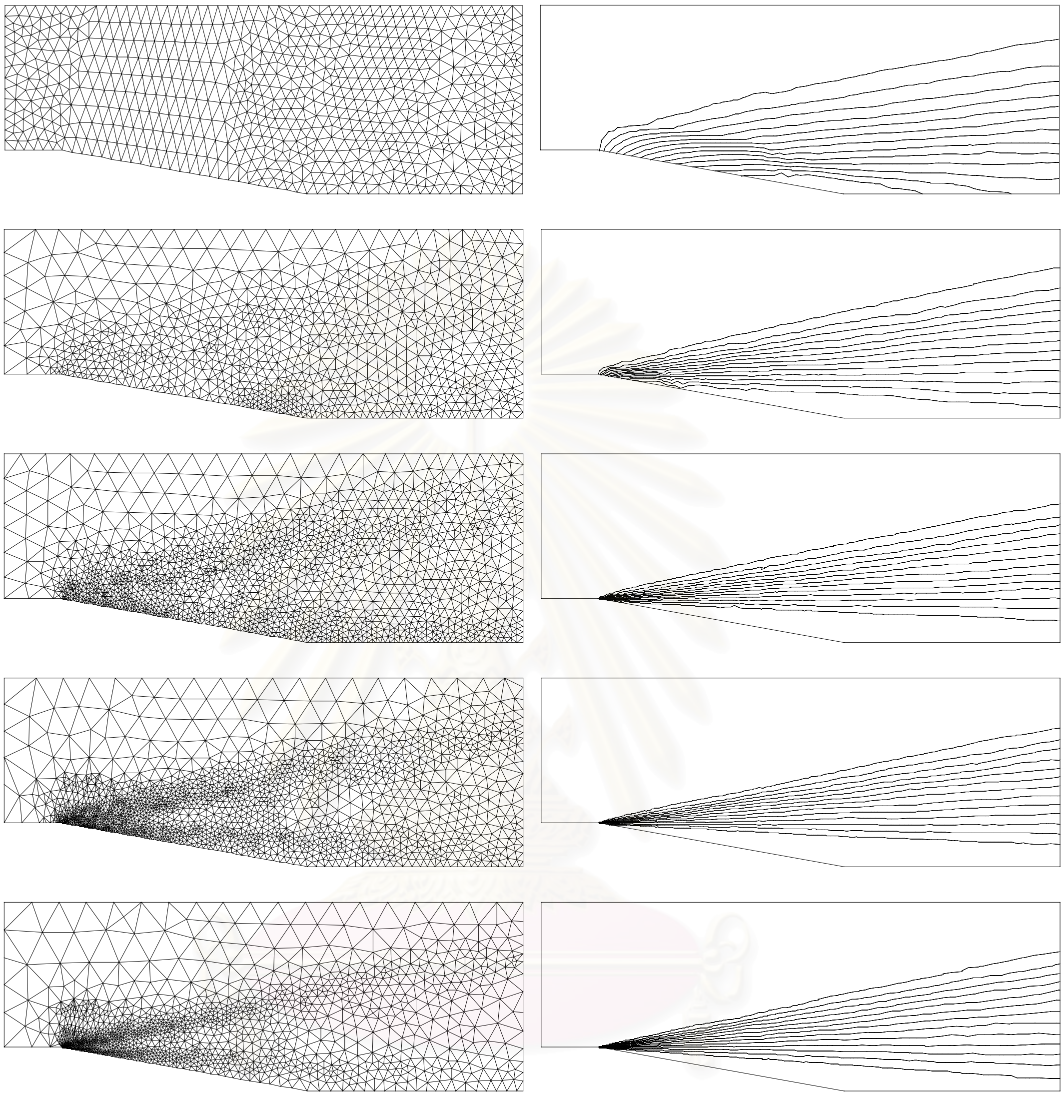
ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย ดังในรูปที่ 7.13 จะมีของไหลที่ความเร็วมากกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านเข้ามาจากทางซ้ายมือ และไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยายกว้างขึ้นโดยทำมุม 10° กับพื้นราบ ซึ่งส่งผลให้คุณสมบัติของของไหล คือ ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และอุณหภูมิลดลง อันเนื่องมาจากการขยายตัวของพื้นที่การไหล และจะเริ่มเกิดคลื่นช็อกตรงจุดหักมุม (expansion corner) เพราะเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดพื้นที่หน้าตัดอย่างฉับพลัน สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหล มีดังนี้ $\rho = 1.173$ $u = 2{,}045.5$ $v = 0$ และ $\varepsilon = 2{,}307{,}285.125$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$



รูปที่ 7.13 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว [1,2] ดังในรูปที่ 7.14 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน โดยผลลัพธ์ที่ได้ยังคงมีความถูกต้องค่อนข้างน้อย เนื่องจากลักษณะของคลื่นช็อกตรงบริเวณตรงจุดหักมุมไม่ได้รวมเป็นจุดเดียวกัน แต่เมื่อทำการระเบียบวิธี

ปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก็จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น



รูปที่ 7.14 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในโดเมนและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าในสภาวะคงตัว

ถ้าหากสังเกตลักษณะของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น จากระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะเห็นว่ามีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากวางตัวตรงจุดหักมุม และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดที่ใหญ่กว่าจะวางตัวในแนวของเส้นช็อก แต่เนื่องจากคลื่นช็อกที่เกิดสำหรับปัญหานี้เป็นช็อกแบบขยายตัว [7] ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากในบริเวณดังกล่าว เพราะลักษณะของการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกแบบขยายตัวหลังจากผ่านจุดหักมุม จะเป็นแบบค่อยเป็นค่อยไป ซึ่งแตก

ต่างจากการเกิดคลื่นช็อกของปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ และถึงแม้ว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกแบบขยายตัว จะมีขนาดใหญ่และมีจำนวนไม่มาก แต่ผลลัพธ์ที่ได้ก็ยังคงมีความถูกต้อง เพราะคลื่นช็อกแบบขยายตัวมีลักษณะเป็นเส้นตรงตลอดแนว

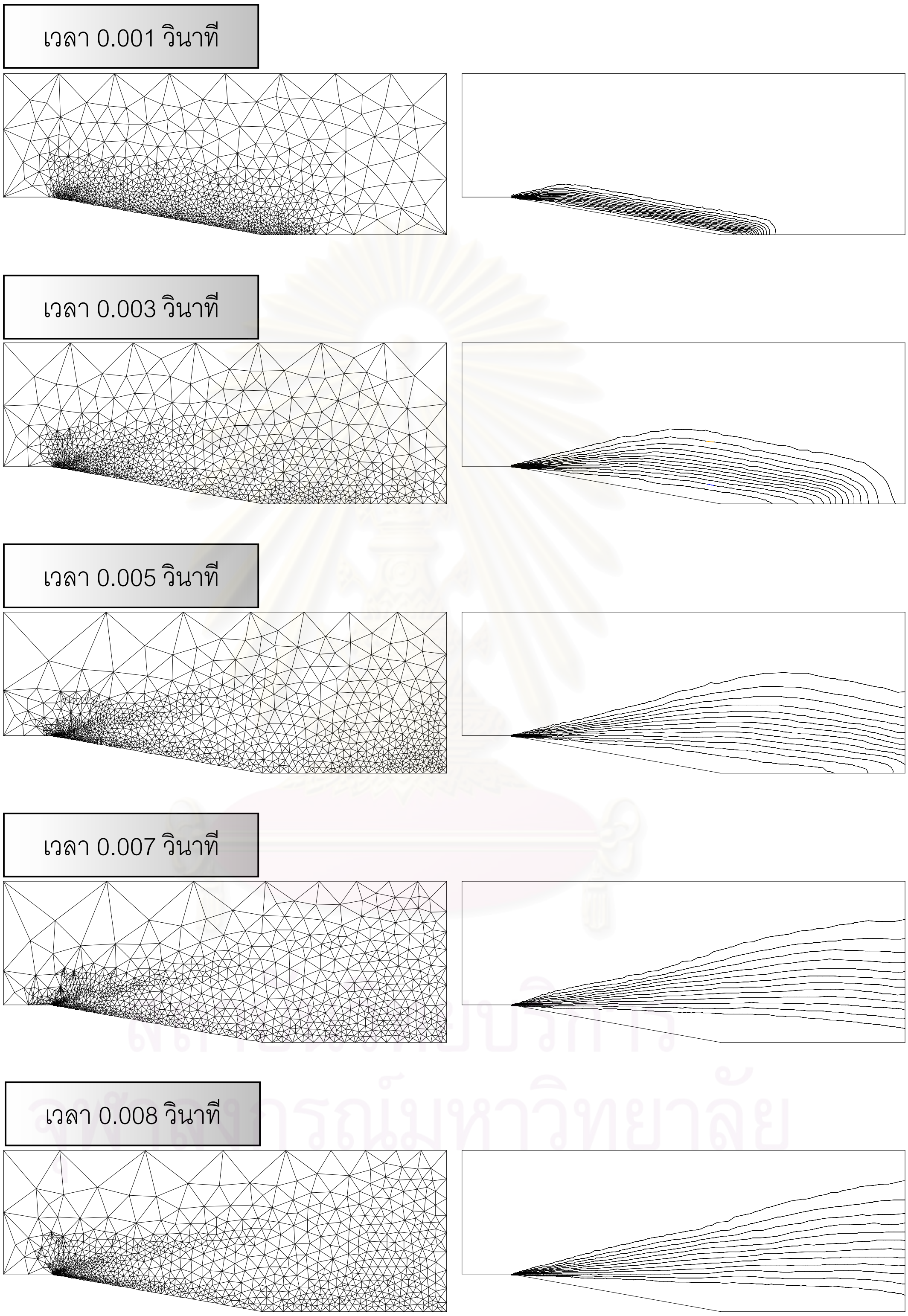
ตารางที่ 7.2 ค่า h_{min} และ h_{max} สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติของปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยายในสภาวะคงตัว

Mesh	h_{min}	h_{max}	Elements	Nodes
Nonadaptive	-	-	1,360	749
1st adaptive	0.11000	0.8000	1,686	914
2nd adaptive	0.03000	0.8500	3,103	1,651
3rd adaptive	0.00975	0.9125	3,946	2,079
4th adaptive	0.00600	0.9500	3,236	1,704

ตารางที่ 7.2 ข้างต้นแสดงตัวอย่างการกำหนดค่า h_{min} และ h_{max} สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ของปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวดังในรูปที่ 7.15 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนเช่นเดียวกับข้างต้น เนื่องจากในช่วงเริ่มต้นเราไม่สามารถที่จะพยากรณ์ปรากฏการณ์ของคลื่นช็อกได้ จากนั้นจึงทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาในทุก ๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ ซึ่งจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้นในทุก ๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ เนื่องจากระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสามารถที่จะตรวจจับลักษณะของคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นภายในโดเมนของการไหล จึงสามารถที่จะวางเอลิเมนต์ขนาดเล็ก ๆ ตามแนวของคลื่นช็อกได้อย่างถูกต้อง

จากรูปที่ 7.15 จะเห็นว่าคลื่นช็อกค่อย ๆ สร้างตัวจากแนวระนาบเอียงขึ้นมาทางด้านบน โดยมีจุดเริ่มต้นของคลื่นช็อกตรงจุดหักมุม และหลังจากเวลาผ่านไปประมาณ 0.008 วินาที ลักษณะของคลื่นช็อกจะใกล้เคียงกับที่เกิดขึ้นในสภาวะคงตัว (รูปที่ 7.14) ข้างต้น และเมื่อทำการที่ตำแหน่งคำนวณช่วงเวลาถัดไป พบว่าทั้งรูปร่างของคลื่นช็อกที่เกิดขึ้น และค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างน้อย และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณใน

สภาวะคงตัวก็มีค่าที่แตกต่างกันค่อนข้างน้อยเช่นกัน ซึ่งเป็นสภาวะของการไหลที่เข้าใกล้สภาวะของการไหลแบบคงตัว

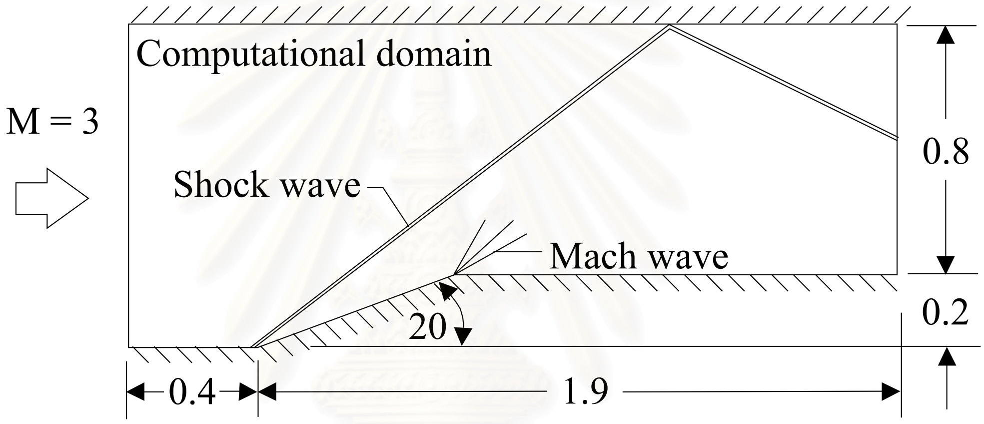


รูปที่ 7.15 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยายในสภาวะไม่คงตัว

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7.4 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ

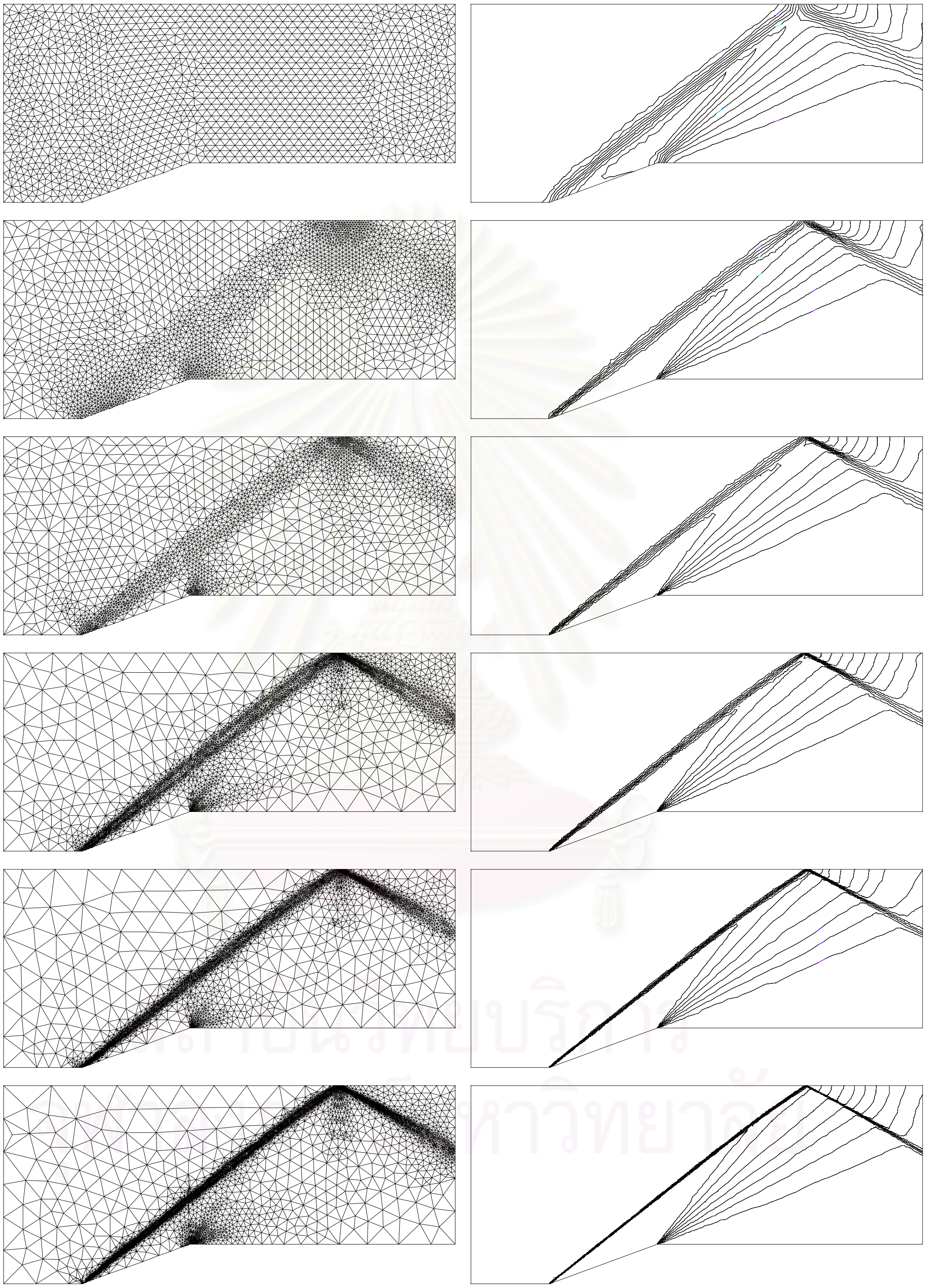
ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ ดังในรูปที่ 7.16 เป็นปัญหาของการไหลที่ความเร็วมากกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านเข้ามาจากทางซ้ายมือ และไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดลดขนาดทำมุม 20° กับพื้นราบ การหักมุมอย่างฉับพลันตรงตำแหน่งดังกล่าวได้ก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงทำมุมกับระนาบขึ้นไปกระทบกับผนังด้านบน และเช่นเดียวกันเมื่อคลื่นช็อกตกกระทบก็จะเกิดการสะท้อนลงมาข้างล่าง และในขณะเดียวกันตรงจุดหักมุมที่สองของช่องแคบได้ก่อให้เกิดการขยายตัว และเกิดการกระจายของคลื่นช็อกคล้ายกับที่เกิดขึ้นในปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลมีดังนี้ $\rho = 1.173$ $u = 1{,}022.7$ $v = 0$ และ $\varepsilon = 2{,}307{,}285.125$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$



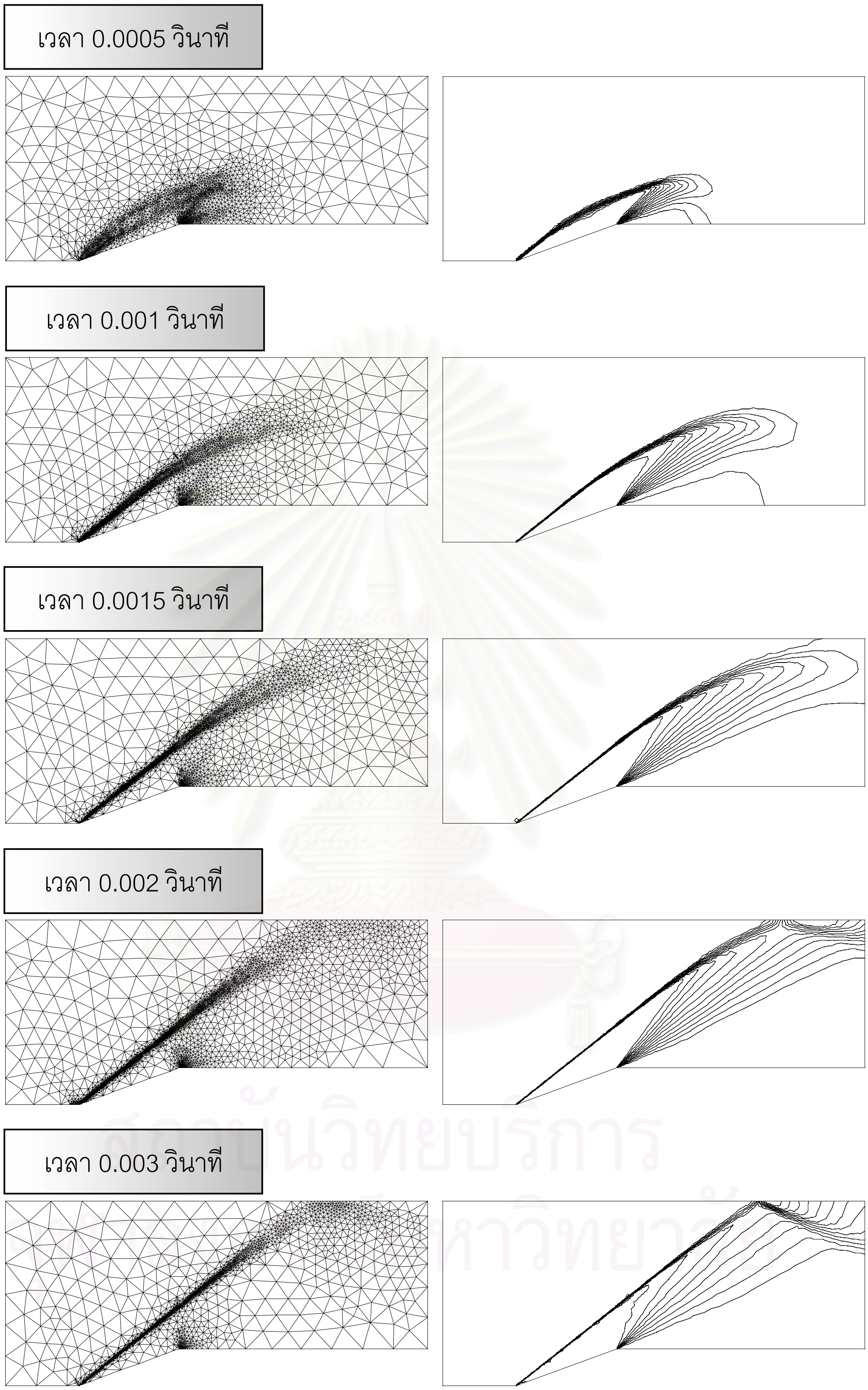
รูปที่ 7.16 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว [1,2] ดังในรูปที่ 7.17 และสภาวะไม่คงตัวดังในรูปที่ 7.18 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน แล้วทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น โดยสังเกตได้จากความหนาของคลื่นช็อกทั้งก่อนและหลังตกกระทบผนังลดลง และในขณะเดียวกันคลื่นช็อกแบบขยายตัว (expansion shock wave) ที่เกิดขึ้นตรงจุดหักมุมที่สองของช่องแคบก็มีลักษณะเป็นเส้นตรงตลอดแนว ดังนั้นผลที่ได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็คือ จะมีการวางเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากตามแนวของคลื่นช็อกทั้งก่อนและหลังตกกระทบผนัง ส่วนในบริเวณของคลื่นช็อกแบบขยายตัวก็จะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กวางตัวตามแนวของคลื่นช็อกเช่นกัน แต่บริเวณปลายช็อกจะใช้เอลิเมนต์

สามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่กว่า เพราะลักษณะของการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกแบบขยายตัวหลังจากผ่านจุดหักมุมจะเป็นแบบค่อยเป็นค่อยไป



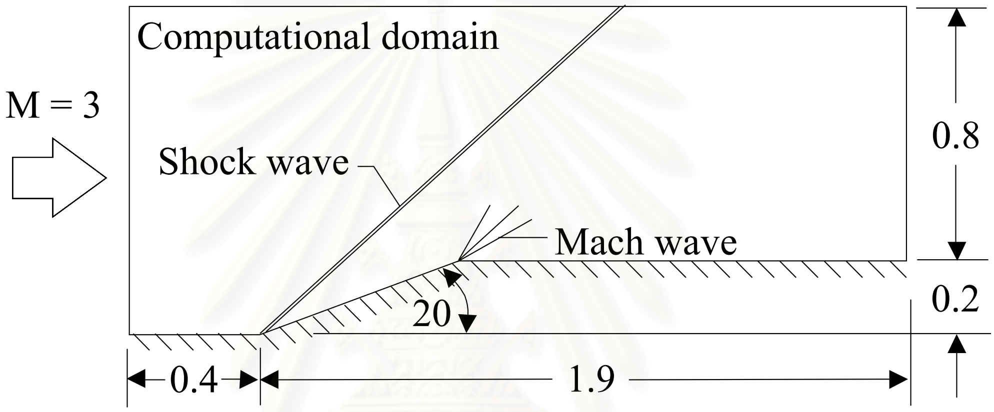
รูปที่ 7.17 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าในสภาวะคงตัว



รูปที่ 7.18 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าในสภาวะไม่คงตัว

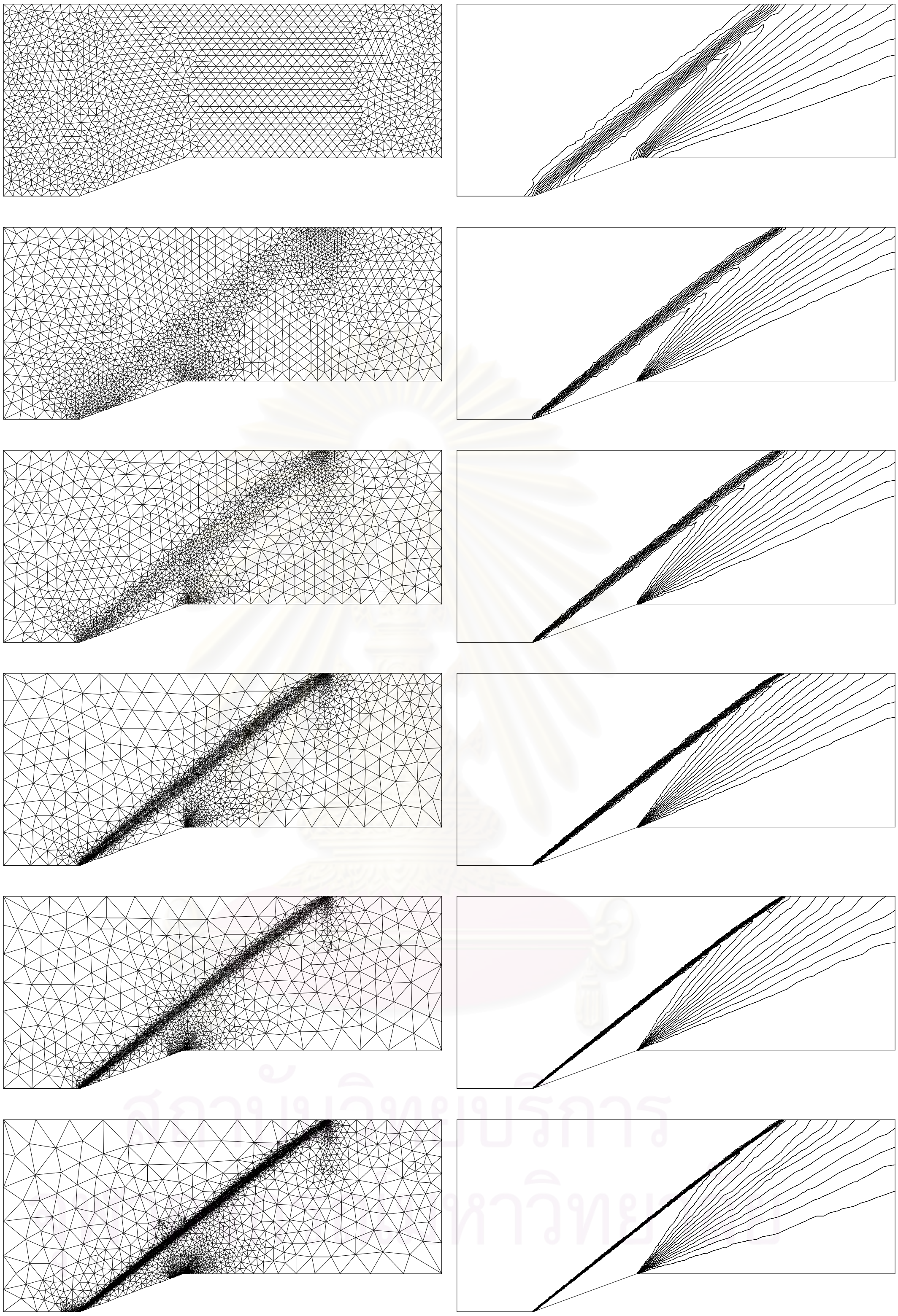
7.5 ปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับ

ปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับดังในรูปที่ 7.19 เป็นปัญหาของการไหลที่ความเร็วมากกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านเข้ามาจากทางซ้ายมือ และไหลผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° กับแนวราบ การหักมุมอย่างฉับพลันตรงตำแหน่งดังกล่าวได้ก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงทำมุมกับระนาบขึ้นไปทางด้านบน และในขณะเดียวกันตรงจุดหักมุมที่สองของพื้นราบชั้นบนได้ก่อให้เกิดการขยายตัว และเกิดการกระจายของคลื่นช็อกคล้ายกับที่เกิดขึ้นในปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหล มีดังนี้ $\rho = 1.173$ $u = 1,022.7$ $v = 0$ และ $\varepsilon = 738,207.645$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$

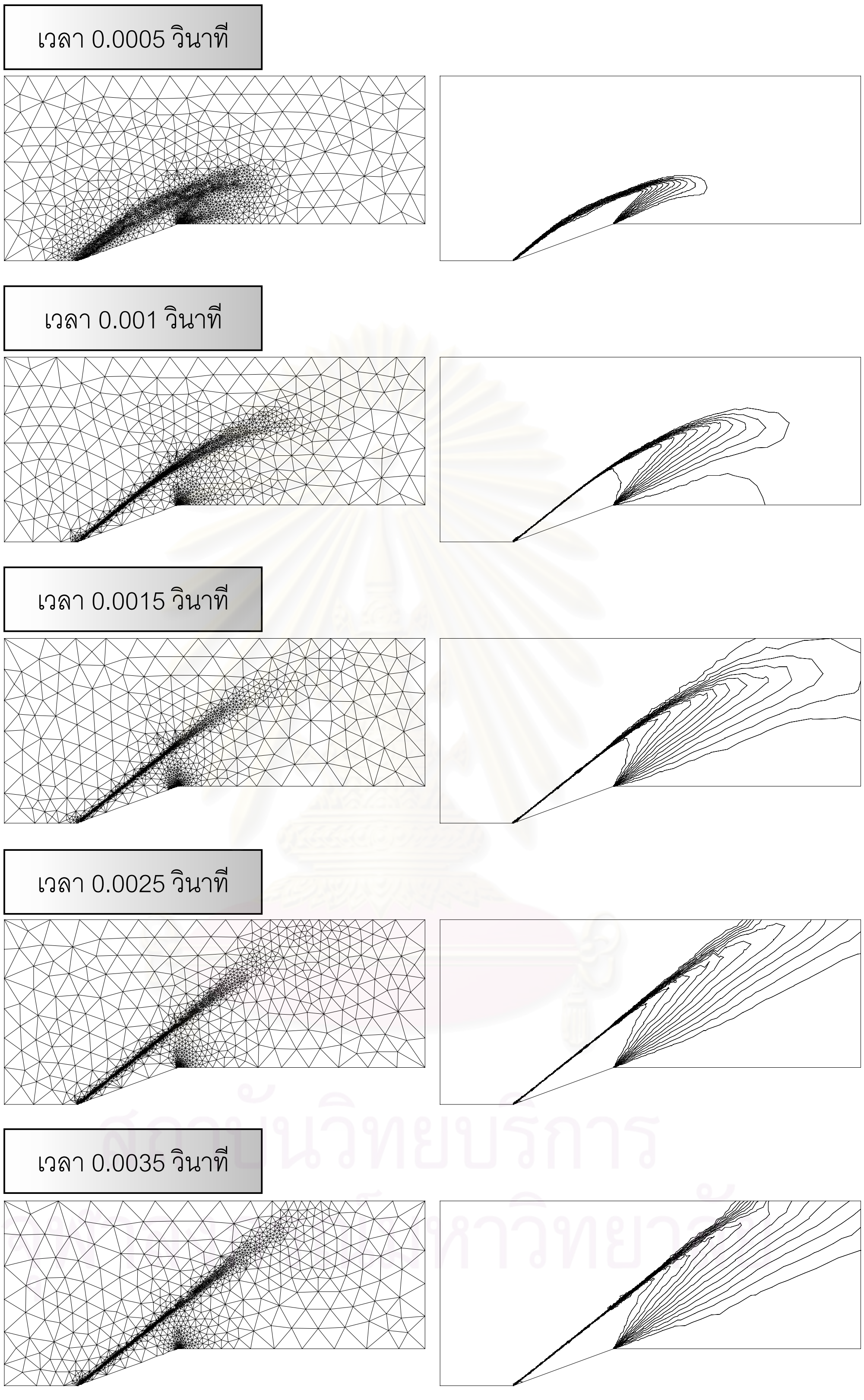


รูปที่ 7.19 ปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวดังในรูปที่ 7.20 และสภาวะไม่คงตัวดังในรูปที่ 7.21 เริ่มต้นโดยสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน จากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก็จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น โดยสังเกตได้จากความหนาของคลื่นช็อกลดลง และในขณะเดียวกันคลื่นช็อกแบบขยายตัว (expansion shock wave) ที่เกิดขึ้นตรงจุดหักมุมที่สองของช่องแคบก็มีลักษณะเป็นเส้นตรงตลอดแนว ดังนั้นผลที่ได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็คือ จะมีการวางเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากตามแนวของคลื่นช็อกทั้งก่อนและหลังตกกระทบผนัง ส่วนในบริเวณของคลื่นช็อกแบบขยายตัวก็จะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กวางตัวตามแนวของคลื่นช็อกเช่นกัน จะเห็นว่าลักษณะของคลื่นช็อกจะคล้ายกัน แต่คลื่นช็อกของปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับจะไม่มีการสะท้อนกลับลงมา เนื่องจากไม่มีผนังด้านบนของโดเมน



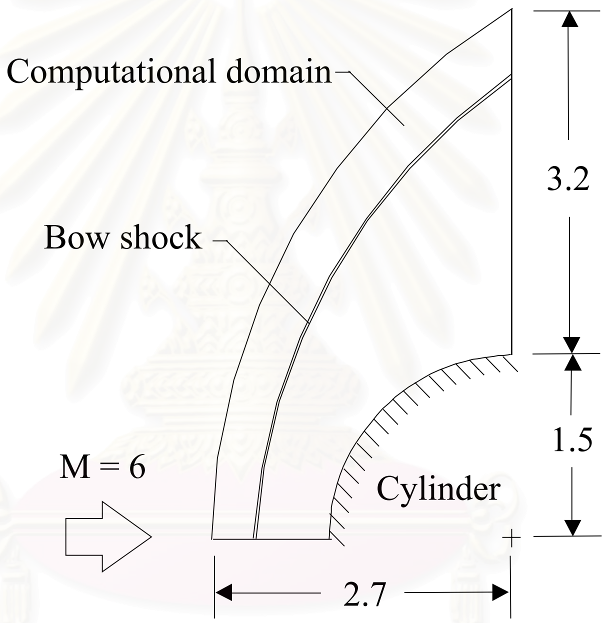
รูปที่ 7.20 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าในสภาวะคงตัว



รูปที่ 7.21 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าในสภาวะไม่คงตัว

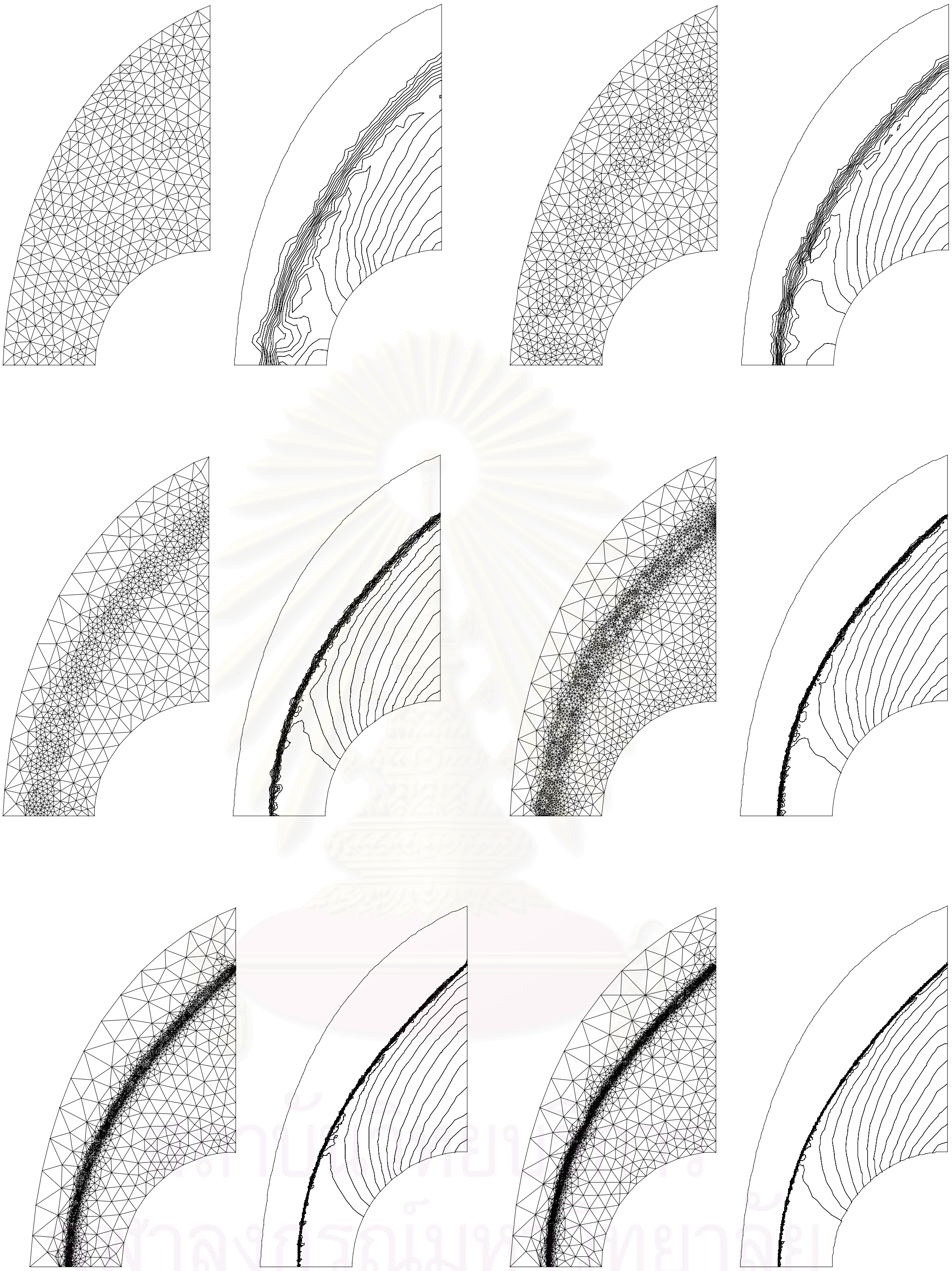
7.6 ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอก

ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอกดังในรูปที่ 7.22 เป็นปัญหาของการไหลที่ความเร็วมากกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านเข้ามาจากทางซ้ายมือปะทะกับส่วนโค้งของทรงกระบอก เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความสมมาตร จึงทำการวิเคราะห์เพียงครึ่งด้านบนของโดเมน โดยคลื่นช็อกที่เกิดจะลักษณะของเส้นโค้ง (bow shock) ตามลักษณะของทรงกระบอก นอกจากนี้ยังเป็นปัญหาที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่แตกต่างจากปัญหาที่ผ่านมา คือคุณสมบัติของของไหลบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกจะมีค่าไม่คงที่ สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหล มีดังนี้ ρ = 1.173 u = 2,045.5 v = 0 และ ε = 2,307,285.125 โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ γ = 1.38



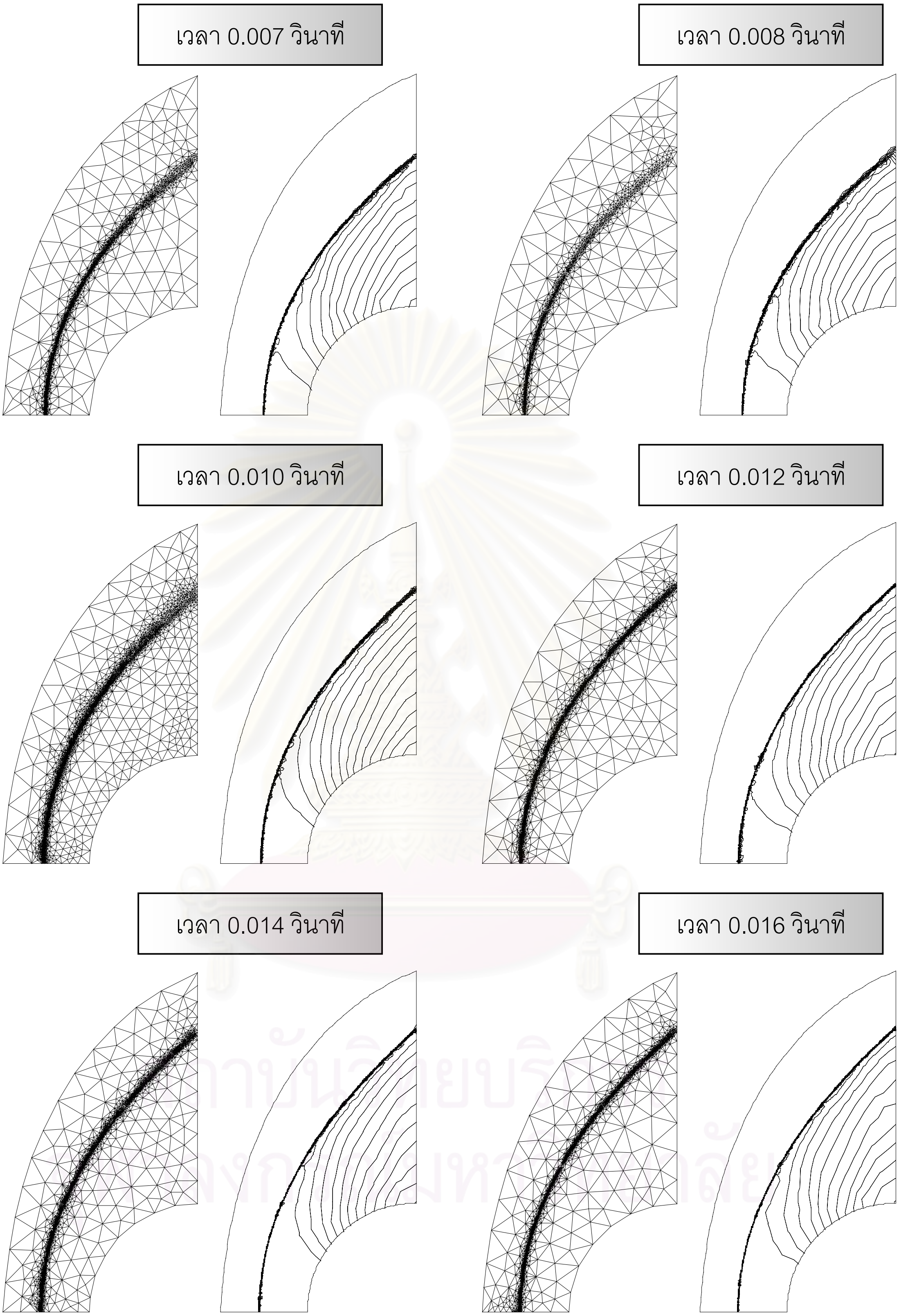
รูปที่ 7.22 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านท่อนทรงกระบอก

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัว [1] ดังในรูปที่ 7.23 และสภาวะไม่คงตัวดังในรูปที่ 7.24 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน จากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก็จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น โดยสังเกตได้จากความหนาของคลื่นช็อกลดลง ส่วนคุณสมบัติของของไหลบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกจะมีการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้นผลที่ได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็คือ จะมีการวางเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากตามแนวโค้งของคลื่นช็อก



รูปที่ 7.23 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอก ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าในสภาวะคงตัว


เวลา 0.001 วินาที
เวลา 0.002 วินาที
เวลา 0.003 วินาที
เวลา 0.004 วินาที
เวลา 0.005 วินาที
เวลา 0.006 วินาที



รูปที่ 7.24 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอก ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าในสภาวะไม่คงตัว

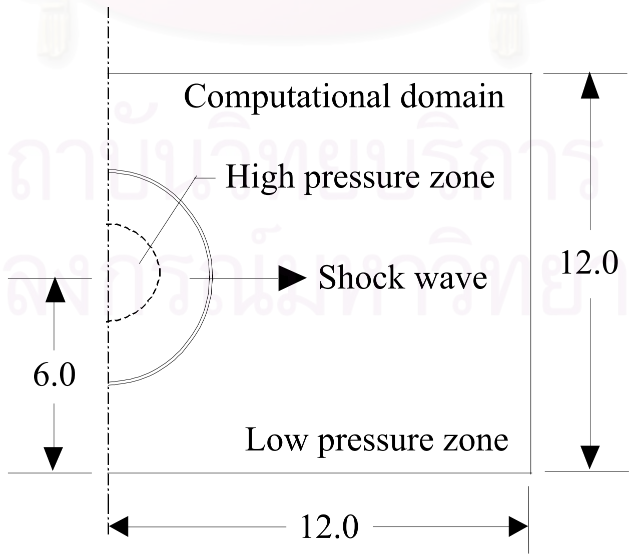
7.7 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ

ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ [12] ดังในรูปที่ 7.25 เป็นปัญหาของการระเบิดในอากาศ โดยสมมติให้การระเบิดเป็นกระบวนการที่เอนโทรปีมีค่าคงที่ (isentropic process) ดังนั้น ภายใต้สมมติฐานของอากาศในอุดมคติ ค่าความหนาแน่น (ρ) และค่าความดัน (p) จะมีความสัมพันธ์กัน ดังในสมการ (7.1) และ (7.2)

$$p\,v^{\gamma} = \frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{constant} \tag{7.1}$$

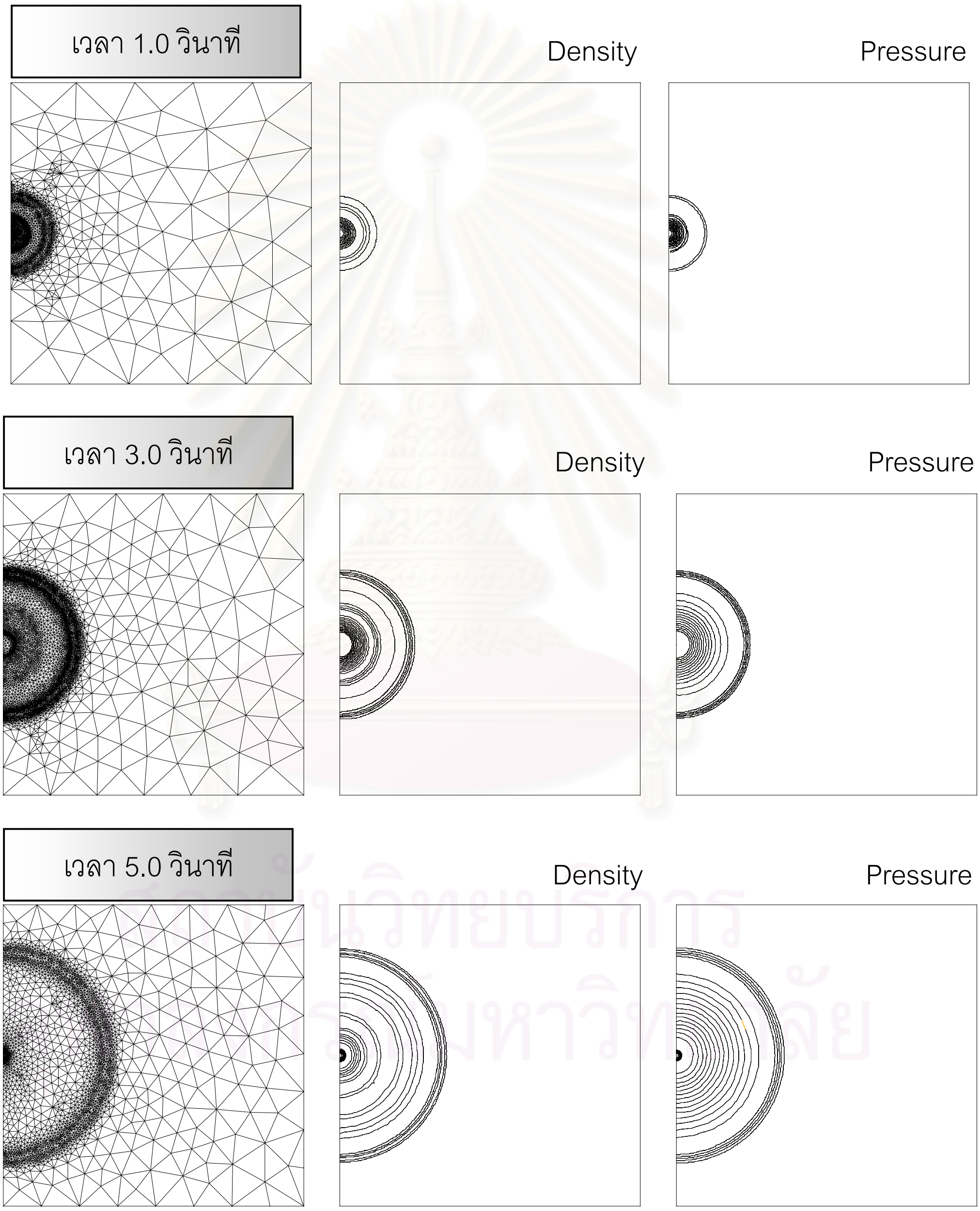
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} \tag{7.2}$$

เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหล จะต้องกำหนดค่าตัวแปรของค่าความหนาแน่น ดังนั้นในกรณีที่ทราบค่าความดันเริ่มต้น ก็ต้องใช้สมการข้างต้นในการแปลงให้อยู่ในรูปของค่าความหนาแน่น โดยในตัวอย่างนี้กำหนดให้ค่าความดันเริ่มต้นของการระเบิดประมาณ 9.22 เท่าของความดันบรรยากาศ ซึ่งจะทำให้เกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในรูปแบบของวงกลมออกจากศูนย์กลางการระเบิด (พิจารณาในสองมิติ) ส่วนของไหลบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ซึ่งการเกิดคลื่นช็อกเช่นนี้ได้ถูกเรียกชื่อพิเศษว่า blast wave สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหล มีดังนี้ ภายนอกพื้นที่ระเบิด $\rho_1 = 1$, $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ และ $\varepsilon_1 = 0.5$ และภายในพื้นที่ระเบิด $\rho_2 = 5$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ และ $\varepsilon_2 = 0.5$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$



รูปที่ 7.25 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศที่ค่าความดันเริ่มต้น 9.22 เท่าของความดันบรรยากาศ

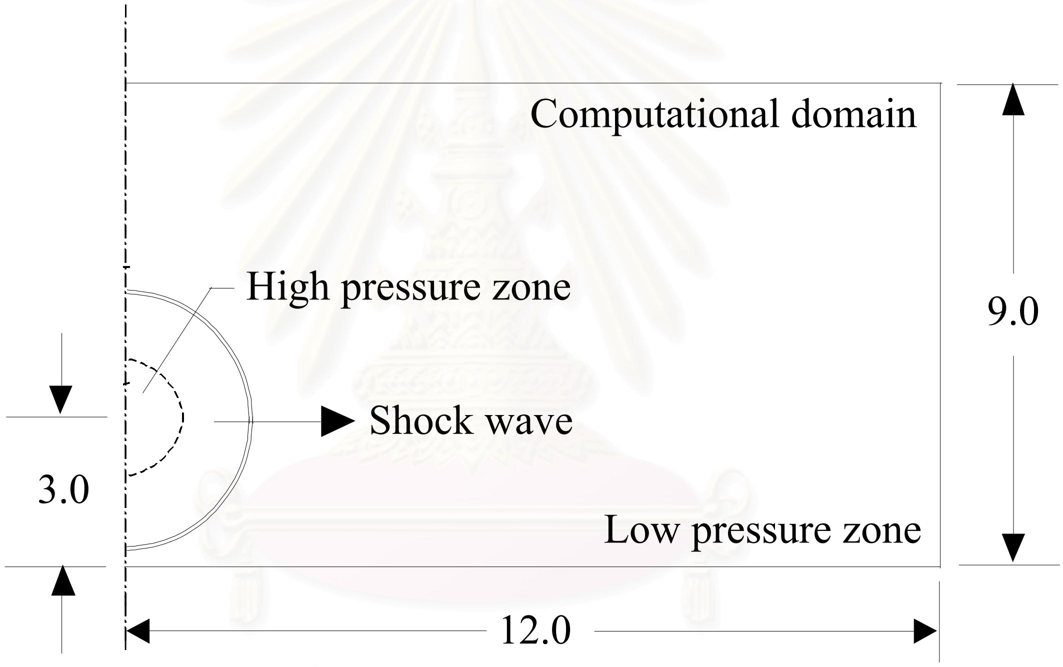
สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว [12] ดังในรูปที่ 7.26 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน และประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา จะเห็นว่าคลื่นช็อกเคลื่อนตัวออกจากศูนย์กลางการระเบิด สำหรับปัญหานี้ใช้ค่าความดันในการคำนวณตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด เพราะจากการทดลองพบว่า ลักษณะการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกมีความสัมพันธ์กับค่าความดันมากกว่าค่าความหนาแน่น



รูปที่ 7.26 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาด เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและค่าความดันสำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ ในกรณีการไหลแบบไร้หนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว

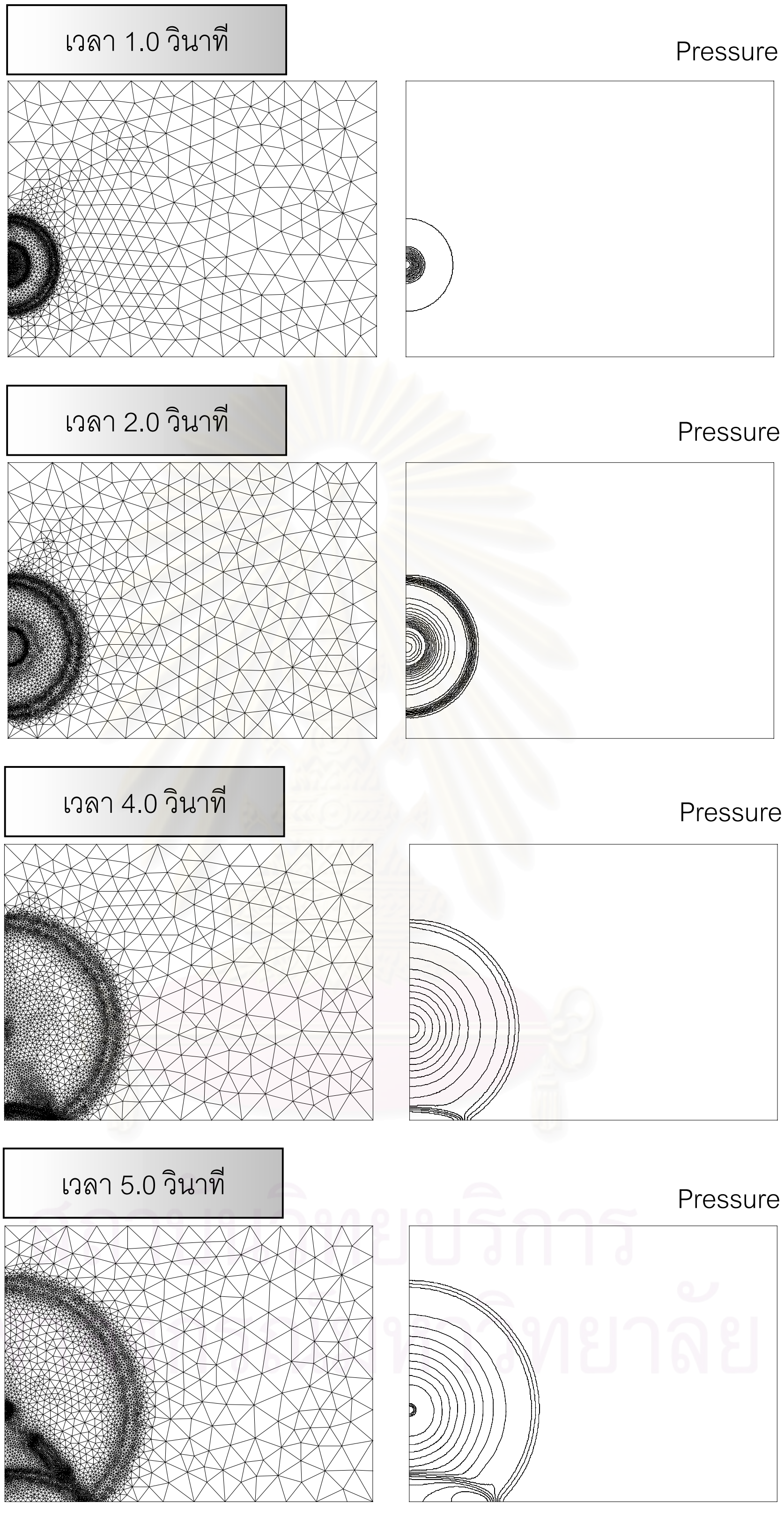
7.8 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ

ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ [12] ดังในรูปที่ 7.27 จะมีลักษณะคล้ายกับปัญหาที่ผ่านมาแต่จะกำหนดให้พื้นด้านล่างเป็นผนัง เพื่อศึกษาปรากฏการณ์การตกกระทบของคลื่นช็อก โดยสมมติให้การระเบิดเป็นกระบวนการที่เอนโทรปีมีค่าคงที่ (isentropic process) ดังนั้น ภายใต้สมมติฐานของอากาศในอุดมคติ ค่าความหนาแน่น (ρ) และค่าความดัน (p) จะมีความสัมพันธ์กัน ดังในสมการ (7.1) และ (7.2) เช่นกัน สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลก็จะเหมือนกับปัญหาที่ผ่านมา ดังนี้ ภายนอกพื้นที่ระเบิด $\rho_1 = 1$, $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ และ $\varepsilon_1 = 0.5$ และภายในพื้นที่ระเบิด $\rho_2 = 5$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ และ $\varepsilon_2 = 0.5$ โดยค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะเท่ากับ $\gamma = 1.38$



รูปที่ 7.27 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ ที่ค่าความดันเริ่มต้น 9.22 เท่าของความดันบรรยากาศ

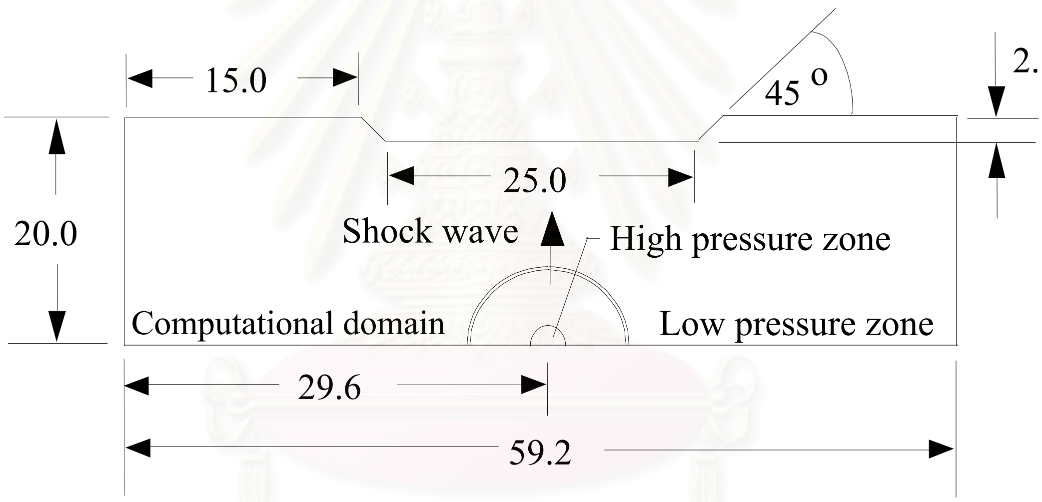
สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว [12] ดังในรูปที่ 7.28 จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน และประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหา จะเห็นว่าคลื่นช็อกเคลื่อนตัวออกจากศูนย์กลางการระเบิด และเมื่อตกกระทบกับพื้นราบ ก็จะเกิดการกระทำของคลื่นช็อกซึ่งกันและกัน ซึ่งปรากฏให้เห็นในลักษณะของเส้นโค้งของคลื่นช็อกที่ตกกระทบจะเคลื่อนไปทางขวา และปลายของคลื่นช็อกจะเคลื่อนสู่ศูนย์กลางการระเบิด สำหรับปัญหานี้ใช้ค่าความดันในการคำนวณตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดเช่นกัน



รูปที่ 7.28 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความดัน สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว

7.9 ปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเล

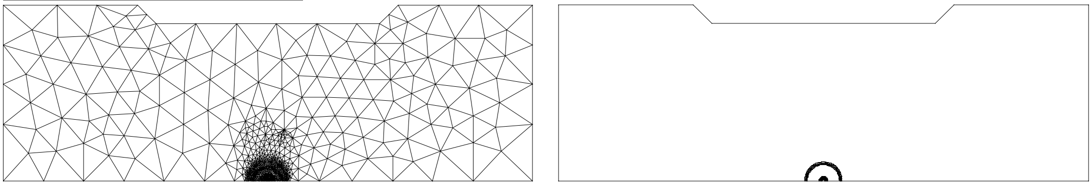
ปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเลดังในรูปที่ 7.29 เป็นการศึกษาถึงขนาดของแรงตกกระทบใต้ท้องเรือของคลื่นช็อกที่เกิดจากการระเบิดใต้ท้องน้ำทะเลด้วยความดันสูง ซึ่งการเกิดความดันสูงอย่างฉับพลันจะทำให้เกิดการอัดตัวของน้ำทะเล ซึ่งส่งผลให้เกิดการเคลื่อนตัวของน้ำทะเลในส่วนที่ถูกอัดตัวในลักษณะของคลื่นช็อกพุ่งสู่ผิวน้ำทะเล สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลสมมติให้ค่าความดันเริ่มต้นเท่ากับ 200,000 บาร์ (2.0×10^{10} Pa) และโดยอาศัยสมการ (4.47) ก็จะสามารถคำนวณค่าความหนาแน่นเริ่มต้นได้ดังนี้ บริเวณพื้นที่ของการระเบิดภายในระยะรัศมี 1 หน่วย $\rho = 1{,}804$ Kg/m^3, u = 0 m/s และ v = 0 m/s และในส่วนบริเวณอื่นของโดเมนจะใช้ค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลที่อุณหภูมิ 20 ^{o}C และค่าความเค็ม (salinity) 30 g/Kg สามารถคำนวณค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลด้วยสมการในภาคผนวก ข ดังนี้ $\rho = 1{,}021$ Kg/m^3, u = 0 m/s และ v = 0 m/s



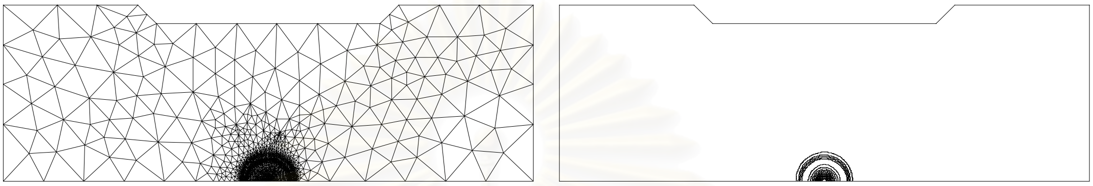
รูปที่ 7.29 ปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเลที่ค่าความดันเริ่มต้น 200,000 บาร์

สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีของการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวดังในรูปที่ 7.30 จะเห็นว่าลักษณะของคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นจะเหมือนกับปัญหาที่ผ่านมา และเนื่องจากค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลมีค่ามาก ดังนั้นจึงทำให้ค่าความดันสูงสุดของคลื่นช็อกลดลงอย่างรวดเร็วภายในระยะเวลา 0.001 วินาที จากค่าความดันสูงเมื่อเวลา 0.0005 วินาที 1.2276 GPa เหลือเพียง 407.38 MPa เมื่อเวลา 0.001 วินาที เพราะต้องสูญเสียภาระส่วนหนึ่งในการทำให้เกิดการอัดตัว และการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกที่มวลมีค่าความหนาแน่นสูง และโดยการคำนวณเชิงตัวเลขพบว่าพื้นที่ตกกระทบใต้ท้องเรือจะต้องรับค่าความดันสูงสุดประมาณ 90 MPa ตรงบริเวณกลางลำเรือ เมื่อเวลาตกกระทบ 0.011 วินาที

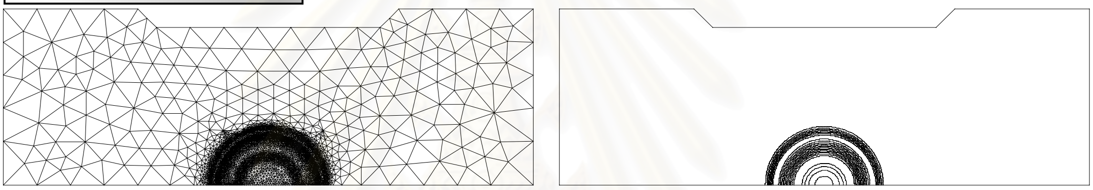
เวลา 0.0005 วินาที



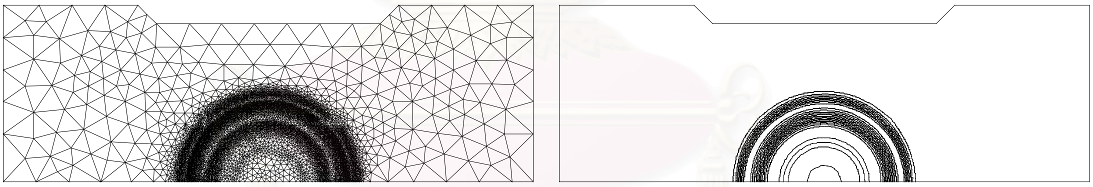
เวลา 0.001 วินาที



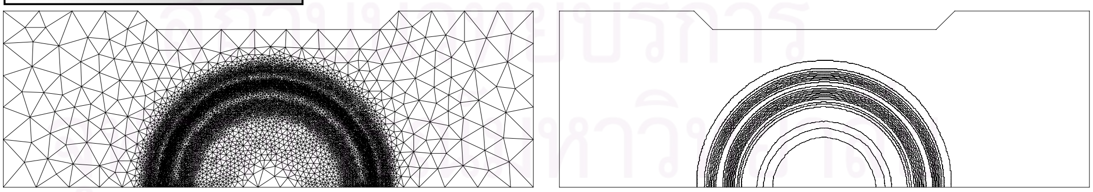
เวลา 0.003 วินาที



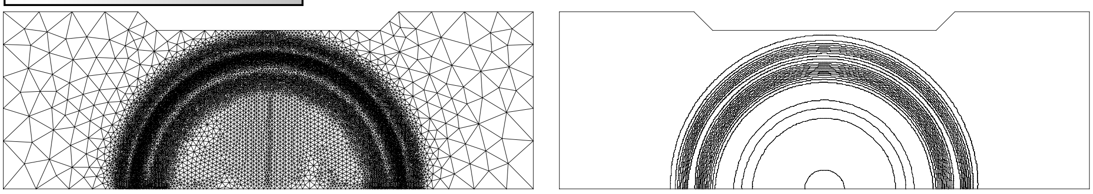
เวลา 0.005 วินาที

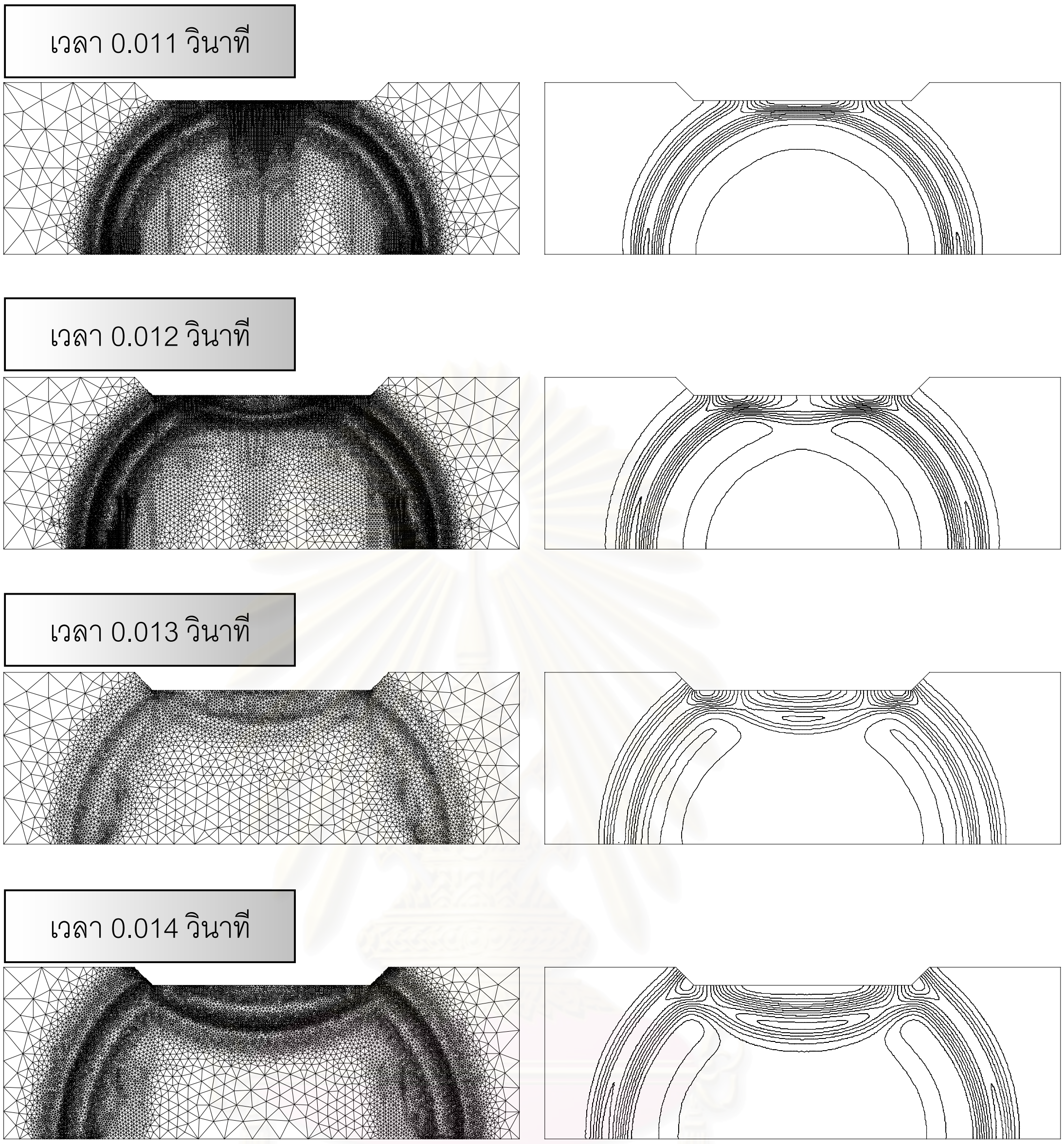


เวลา 0.007 วินาที



เวลา 0.009 วินาที





รูปที่ 7.30 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหลังการปรับขนาดและเส้นชั้นของค่าความดัน สำหรับปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเลที่ค่าความดันเริ่มต้นเท่ากับ 200,000 บาร์ ในกรณีการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว

จากตัวอย่างทั้งหมดที่แสดงข้างต้น จะเห็นว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ สามารถที่จะประยุกต์เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัว และไม่คงตัว ไม่ว่าของไหลจะเป็นก๊าซหรือน้ำทะเล และเมื่อทำการประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เข้ากับเทคนิคดังกล่าวก็จะช่วยให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

บทที่ 8
บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว สำหรับของไหลที่เป็นก๊าซและน้ำทะเล ซึ่งถูกควบคุมโดยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซน-เตอร์ พร้อมทั้งยังได้ทำการศึกษาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมภายในโดเมนด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และคิดค้นเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ โดยการปรับปรุงวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ข้างต้นเข้ากับแนวคิดพื้นฐานของตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ซึ่งได้ก่อให้เกิดองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมา ในท้ายที่สุดองค์ความรู้ทั้งหมดข้างต้นได้ถูกรวบรวมและนำมาสร้างเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ FEMESH ซึ่งเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเองทั้งหมด ที่ทำงานในลักษณะของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กราฟิก และสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์งานได้จริง

บทที่ 3 ได้อธิบายถึงทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ และวิธีการประดิษฐ์เมตริกซ์ที่สำคัญและถูกนำมาใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับทั้งในกรณีที่ของไหลเป็นก๊าซและน้ำทะเล ส่วนบทที่ 4 ได้อธิบายในส่วนที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และอัลกอริทึมของวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่พร้อมทั้งการสร้างจุดต่อภายในโดเมน ส่วนสุดท้ายของบทดังกล่าว ได้อธิบายถึงระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่และสำหรับบทที่ 5 ได้อธิบายวิธีการใช้งานโปรแกรม FEMESH สำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว

โปรแกรม FEMESH ได้ถูกนำมาทดสอบความถูกต้อง โดยการนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อเป็นปัญหาพื้นฐานในหนึ่งมิติที่มีผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็มีความสอดคล้องกันและมีความผิดพลาดต่ำมาก ซึ่งแสดงให้เห็นว่าโปรแกรม FEMESH สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง จากนั้นได้นำไปใช้ในการแก้ปัญหาพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาพื้นฐานของปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว ดังนี้ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ปัญหาการไหลความเร็ว

สูงผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ ปัญหาการไหลผ่านแนวระนาบยกระดับ ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านท่อนทรงกระบอก ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ และปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ ซึ่งปัญหาเหล่านี้เป็นการศึกษาปรากฏการณ์การเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในอากาศ ส่วนการศึกษาเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในน้ำทะเล ก็ได้ทำการประยุกต์โปรแกรมเพื่อแก้ปัญหาการระเบิดใต้น้ำทะเล ซึ่งจะทำให้ทราบถึงลักษณะของการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในน้ำทะเล และค่าความดันสูงสุดตกกระทบโครงสร้างของใต้ท้องเรือ

8.2 ปัญหาที่พบ

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการศึกษาในขอบเขตที่ค่อนข้างกว้าง ครอบคลุมเนื้อหาในหลายสาขาวิชา และต้องการนำไปประยุกต์เข้ากับปัญหาจริง จึงก่อให้เกิดปัญหาในขณะทำการวิจัยหลายประการ เช่น การศึกษาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จะเป็นไปด้วยความลำบาก เพราะวารสารที่เกี่ยวข้องกับงานดังกล่าวหาได้ค่อนข้างยากภายในประเทศจึงทำให้เสียเวลาในการค้นหาข้อมูลจากแหล่งอื่น ๆ มากทีเดียว สำหรับในส่วนของโปรแกรม FEMESH เนื่องจากงานชิ้นนี้เป็นงานเริ่มต้นที่ทำการศึกษาในลักษณะของการรวมองค์ความรู้ในหลายสาขาวิชาเข้าด้วยกัน จึงทำให้เกิดความสับสนในช่วงแรก ๆ ของการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และด้วยข้อจำกัดในด้านความรู้ในส่วนของการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในเชิงลึก จึงอาจจะทำให้โปรแกรม FEMESH ที่ได้อาจจะยังมีความสมบูรณ์ไม่เพียงพอ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาเพิ่มเติมในอนาคต

สุดท้ายสำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ เนื่องจากเป็นแนวคิดใหม่ที่ได้จากการพัฒนาเพิ่มเติมจากวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จึงยังไม่มีความสมบูรณ์ในตัวเอง เพราะจากการทดลองพบว่าการใช้งานจริงยังคงเป็นไปด้วยความยาก เพราะการกำหนดค่า h_{min} และ h_{max} สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติยังคงไม่มีข้อสรุปตายตัวว่าควรจะใช้ค่าเท่าไหร่ ในแต่ละขั้นตอนของการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังนั้นการเลือกค่าดังกล่าว ก็ต้องอยู่ในดุลพินิจและประสบการณ์ของผู้ใช้ โดยถ้าหากเลือกค่าที่ไม่เหมาะสมก็จะทำให้ไม่สามารถปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และจะทำให้เสียเวลาในการเลือกค่าที่เหมาะสมและคำนวณตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดใหม่อีกครั้ง และนอกจากนี้ถึงแม้ว่าปัญหาที่ทำการวิเคราะห์จะเป็นปัญหาชนิดเดียวกัน ถ้าหากโดเมนมีการเปลี่ยนขนาด (ไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่าง) ก็จะทำให้จำเป็นต้องใช้ค่า h_{min} และ h_{max} ที่แตกต่างกันเช่นกัน ดังนั้นจึงพบสรุปได้ว่าค่า h_{min}

และ h_{max} นอกจากจะขึ้นกับลักษณะของการไหล และการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกแล้ว ยังขึ้นกับลักษณะของโดเมนที่ใช้ในการวิเคราะห์

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

สำหรับข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคตที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน ดังนี้ ส่วนแรกควรที่จะทำการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ ให้สามารถประยุกต์เข้ากับปัญหาการไหลแบบมีความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะไม่คงตัวและคงตัว เพื่อให้สามารถแสดงปรากฏการณ์การไหลที่แท้จริงซึ่งจะมีค่าความหนืดเข้ามาเกี่ยวข้องได้มากยิ่งขึ้น และควรมีการขยายผลสู่สามมิติเพื่อให้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่แท้จริงที่ไม่สามารถจำลองอย่างสมมาตรในสองมิติ และส่วนที่สองที่เกี่ยวข้องกับการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็ควรที่จะศึกษาในเชิงลึกในส่วนที่เกี่ยวข้องกับการเลือกค่า h_{min} และ h_{max} ที่เหมาะสมให้มากยิ่งขึ้น เพราะถ้าหากสามารถสรุปเป็นหลักเกณฑ์ที่ชัดเจนได้มากเท่าไหร่ ก็จะทำให้ช่วยลดเวลาในการวิเคราะห์ปัญหาได้มากขึ้นตามลำดับ เพราะจากการทดลองที่ผ่านมา พบว่าบางปัญหาต้องเสียเวลาในการเลือกค่า h_{min} และ h_{max} ที่เหมาะสมค่อนข้างมากทีเดียว เพื่อให้ได้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เหมาะสมกับลักษณะของคลื่นช็อก

รายการอ้างอิง

1. ปัญญา จันทร์ไพแสง. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
2. Dechaumphai, P. and Limtrakarn W. Adaptive Cell-Centered Finite Element Technique for Compressible Flows. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer 21 (1999) : 57-65.
3. Gnoffo, P. A. Application of Program LAURA to Three-Dimensional AOTV Flowfields. AIAA paper 86-0565 (January 1986) : 1-12.
4. Weatherill, N. P. and Hassan, O. Efficient Three-Dimension Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37 (1994) : 2005-2039.
5. Karamete, B. K., Tokdemir, T. and Ger, M. Unstructured Grid Generation and A Simple Triangulation Algorithm for Arbitrary 2-D Geometries Using Object Oriented Programming. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40 (1997) : 251-268.
6. Shewchuk, J. R. Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. Pittsburgh : Carnegie Mellon University, 1996.
7. Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C. Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. Journal of Computational Physics 72 (1987) : 449-466.
8. Roe, P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. Journal of Computational Physics 43 (1981) : 357-372.
9. Huang, H. Numerical Analysis of The Linear Interaction of Pressure Pulses with Submerged Structures. Advances in Marine Structures Edited by Smith C. S. and Clarke J. D. London : Elsevier Applied Science, 1986.
10. Probert, J., Hassan, O., Peraire, J. and Morgan, K. An Adaptive Finite Element Method for Transient Compressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991) : 1145-1159.

11. Bibb, K. L., Peraire, J. and Riley, C. J. Hypersonic Flow Computations on Unstructured Meshes. AIAA paper 97-0625 (1997) : 1-12.

12. Liang, S. M. Computations and Application of Blast-wave Propagation and Reflection in air and water. presented in Workshop on Experimental and Computational Techniques of Shock Wave Research. Taiwan : National Cheng Kung University, 2001.

13. Bowyer, A. Computing Dirichlet Tessellations. The Computer Journal 24 (1981) : 162-166.

14. Ruppert, J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. California : NASA Ames Research Center, 1994.

15. Devillers, O. On Deletion in Delaunay Triangulation. France : Inria, 1998.

16. Pirzadeh, S. Z. An Adaptive Unstructured Grid Method by Subdivision, Local Remeshing, and Grid Movement. AIAA paper 99-3255 (June 1999) : 1-11.

17. Anderson, J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. New York : McGraw-Hill, 1995.

18. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

19. Hirsch, C. Numerical Computational of Internal and External Flows. New York : John Wiley & Sons, 1990.

20. Owen, S. J. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology. Pittsburgh : Carnegie Mellon University, 1998.

21. Yerry, M. A. and Shephard, M. S. Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering 20 (1984) : 1965-1990.

22. Shephard, M. S. and Georges, M. K. Three-Dimensional Mesh Generation by Finite Octree Technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991) : 709-749.

23. Lohner, R., Parikh, P. and Gumbert, C. Interactive Generation of Unstructured Grid for Three Dimensional Problems. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics '88, 1988.

24. Lohner, R. Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique. Engineering with Computers 12 (1996) : 186-210.
25. Lo, S. H. Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces. Computers and Structures 39 (1991) : 493-500.
26. Lo, S. H. Volume Discretization into Tetrahedra - II. 3D Triangulation by Advancing Front Approach. Computers and Structures 39 (1991) : 501-511.
27. Lawson, C. L. Software for C^1 Surface Interpolation. Mathematical Software III, Edited by J. R. Rice. New York : Academic Press,1977.
28. Watson, D. F. Computing the n-dimensional Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes. The Computer Journal 24 (1981) : 167-172.
29. Baker, T. J. Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation. Engineering with Computers 5 (1989) : 161-175.
30. George, P. L., Hecht, F. and Saltel, E. Automatic Mesh Generator with Specified Boundary. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 92 (1991) : 269-288.
31. Chew, L. P. Guaranteed-Quality Triangular Meshes New York : Cornell University, 1989.
32. Cavendish, J. C. Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 8 (1974) : 679-696.
33. Frey, W. H. Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes. International Journal for Numerical Methods in Engineering 24 (1987) : 2183-2200.
34. Sezer, L. and Zeid, I. Automatic Quadrilateral/Triangular Free-Form Mesh Generation for Planar Regions. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991) : 1441-1483.
35. Shapiro, A. H. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. New York : The Ronald Press Company, 1954.
36. Anderson, J. D. Modern Compressible Flow: With Historical Perspective. New York : McGraw-Hill, 1990.

37. Schetz, J. A. and Fuhs, A. E. Handbook of fluid dynamics and fluid machinery : Fundamentals of fluid dynamics. New York : John Wiley & Sons, 1996.
38. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
39. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Unstructured Mesh Generation with Delaunay Triangulation and Mesh Refinement with Local Spacing Control. Thailand : Proceeding of the 15th ME-NETT Conference, 2001.
40. Guibas, L. and Stolfi, J. Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computational of Voronoi Diagrams. ACM Transaction on Graphics 4 (1985) : 74-123.
41. Chew, L. P. Constrained Delaunay Triangulations. Algorithmica 4 (1989) : 97-108.
42. Lo, S. H. Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering 28 (1989) : 2695-2707.
43. Jin, H. and Wiberg, N. E. Two-Dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement. International Journal for Numerical Methods in Engineering 29 (1990) :1501-1526.
44. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. Adaptivity and Mesh Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991) : 783-810.
45. Sloan S. W. A Fast Algorithm for Generating Constrained Delaunay Triangulation. Computer & Structures 47 (1993) : 441-450.
46. Dechaumphai, P. Improvement of Plane Stress Solutions Using Adaptive Finite Elements. Journal of the Chinese Institute of Engineers 19 (1996) : 375-380.
47. Borouchaki, H. and George, P. L. Aspects of 2-D Delaunay Mesh Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40 (1997) : 1957-1975.
48. Preparata, F. P. and Shamos, M. I. Computational Geometry: An Introduction. New York : Springer-Verlag, 1985.
49. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. การใช้งาน Visual Basic 5.0 Professional : การใช้คำสั่งและคอนโทรล ActiveX พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2541.
50. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. การเขียนโปรแกรมด้วย Visual Basic 6.0 ระดับสูง : การใช้งานฟังก์ชันวินโดวส์ API-32 บิต. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : ไพรเมด, 2542.

51. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. การโปรแกรมแบบ Object-Oriented Programming ด้วย VB/Win 4.0. วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 146 (2540) : 176-184.

52. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 1). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 159 (2541) : 126-134.

53. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 2). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 162 (2542) : 128-134.

54. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 3). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 170 (2542) : 155-161.

55. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 4). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 171 (2542) : 179-186.

56. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 5). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 172 (2542) : 184-190.

57. สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. Graphic Transformation สำหรับออบเจ็กต์ 2 มิติ (ตอนที่ 6). วารสารไมโครคอมพิวเตอร์ 174 (2543) : 145-155.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การประมาณสมการสถานะของ Tait แบบเชิงเส้นตรง

สมการสถานะของ Tait สามารถที่จะแปลงให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นตรง (linear form) ได้โดยการประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) เข้ากับสมการ (4.47) ดังนี้

$$\frac{p-p_o}{\rho_o c_o^2} = \frac{\rho-\rho_o}{\rho_o} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho_o}\right)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho_o}\right)^3 + \dots \qquad (ก.1)$$

การประมาณแบบเชิงเส้นตรง ก็จะเฉพาะพจน์ลำดับที่หนึ่งของสมการ (ก.1) ซึ่งเป็นพจน์กำลังหนึ่ง ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนาแน่นและความดัน ดังนี้

$$\frac{p-p_o}{\rho_o c_o^2} = \frac{\rho-\rho_o}{\rho_o} \qquad (ก.2)$$

$$p = c_o^2(\rho-\rho_o) + p_o \qquad (ก.3)$$

โดยดำเนินการตามขั้นตอนดังที่ได้อธิบายรายละเอียดในบทที่ 4 ก็จะได้เมตริกซ์สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ ดังต่อไปนี้

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-n_y}{2} & \frac{u}{2}+\frac{c_o n_x}{2\sqrt{2}} & \frac{u}{2}-\frac{c_o n_x}{2\sqrt{2}} \\ \frac{n_x}{2} & \frac{v}{2}+\frac{c_o n_y}{2\sqrt{2}} & \frac{v}{2}-\frac{c_o n_y}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (ก.4)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} |U_n| & 0 & 0 \\ 0 & |U_n+\sqrt{2}c_o| & 0 \\ 0 & 0 & |U_n-\sqrt{2}c_o| \end{bmatrix} \qquad (ก.5)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -V_t & -n_y & n_x \\ 1-\dfrac{U_n}{\sqrt{2}c_o} & \dfrac{n_x}{\sqrt{2}c_o} & \dfrac{n_y}{\sqrt{2}c_o} \\ 1+\dfrac{U_n}{\sqrt{2}c_o} & \dfrac{-n_x}{\sqrt{2}c_o} & \dfrac{-n_y}{\sqrt{2}c_o} \end{bmatrix} \qquad (ก.6)$$

ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ก็ให้แทนที่สมการ (4.48) ถึง (4.50) ด้วยสมการ (ก.4) ถึง (ก.6) โดยคงส่วนอื่น ๆ ของโปรแกรมไว้เช่นเดิม

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข
การคำนวณค่าความหนาแน่นของน้ำทะเล

การคำนวณค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลที่ระดับอ้างอิง (ρ_o) ตามที่ปรากฏในสมการ (4.47) จะหมายถึงค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลที่ระดับความดัน 1 บรรยากาศ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกำหนดให้ใช้ค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลที่ระดับความดัน 1 บรรยากาศ ค่าความเค็มเท่ากับ 30 g/KG และอุณหภูมิ 20 ^{o}C ซึ่งเป็นค่าความหนาแน่นของน้ำทะเลที่ระดับอ้างอิง โดยคำนวณจากสมการ International Equation of State of Seawater, 1980 [37] ดังนี้

$$\begin{aligned}\rho(S,T,0) = \rho_W &+ (8.24493x10^{-1} - 4.0899x10^{-3}T \\ &+ 7.6438x10^{-5}T^2 - 8.2467x10^{-7}T^3 \\ &+ 5.3875x10^{-9}T^4)S + (-5.72466x10^{-3} \\ &+ 1.0227x10^{-4}T - 1.6546x10^{-6}T^2)S^{1.5} \\ &+ 4.8314x10^{-4}S^2\end{aligned} \tag{ข.1}$$

โดยที่ S หมายถึง ค่าความเค็มในหน่วย g/Kg, T หมายถึง อุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส และ ρ_w หมายถึง ค่าความหนาแน่นมาตรฐานกลางของน้ำทะเล (Standard Mean Ocean Water, SMOW) ซึ่งถูกกำหนดโดยสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\rho_W = 999.842594 &+ 6.793952x10^{-2}T \\ &- 9.095290x10^{-3}T^2 + 1.001685x10^{-4}T^3 \\ &- 1.120083x10^{-6}T^4 + 6.536332x10^{-9}T^5\end{aligned} \tag{ข.2}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช เกิดเมื่อวันที่ 5 มิถุนายน พุทธศักราช 2512 จังหวัดกระบี่ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาเครื่องกล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เมื่อปีการศึกษา 2532 และสำเร็จการศึกษาระดับเศรษฐศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2542

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย