บทที่ 2
ทฤษฎี

2.1 การพัฒนาของการไหลภายในท่อ

พิจารณาการไหลภายในท่อตรงซึ่งมีหน้าตัดคงที่ดังรูปที่ 2.1 สภาวะเริ่มต้นของของไหลที่ตำแหน่งทางเข้าของท่อจะมีรูปร่างความเร็วเป็นแบบสม่ำเสมอ ภายหลังจากที่ของไหลเข้าสู่ท่อพบว่าจะมี boundary layer เกิดขึ้นที่ผนังท่อ ซึ่งมีสาเหตุมาจากอิทธิพลของความเสียดทานจากผนังท่อ ทำให้ของไหลที่อยู่ภายใน boundary layer มีความเร็วลดลงจากสภาวะเริ่มต้น จนกระทั่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ผนังท่อ สำหรับ boundary layer ที่เกิดขึ้นในบริเวณใกล้กับทางเข้าในช่วงแรกนี้ จะมีขนาดบางมากเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของท่อ ดังนั้นการพัฒนาของ boundary layer ในบริเวณนี้จึงสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกับการพัฒนาที่เกิดขึ้นจากการไหลของ free stream บน flat plate

ขณะที่ดำเนินการไหลต่อไป boundary layer ก็จะโตขึ้นตามลำดับ ทำให้มีส่วนที่มีความเร็วลดต่ำลงจากความเร็วสม่ำเสมอเพิ่มมากขึ้น ดังนั้นถ้าพิจารณาตามกฎทรงมวลจะได้ว่า ความเร็วของของไหลที่อยู่นอก boundary layer ซึ่งเรียกว่า inviscid core จะต้องมีความเร็วเพิ่มขึ้น และเนื่องจากค่าความดันรวมใน inviscid core และความดันรวมที่หน้าตัดเริ่มต้นซึ่งมีรูปร่างความเร็วแบบสม่ำเสมอจะต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้นการที่ความเร็วใน inviscid core มีค่าเพิ่มขึ้นจึงทำให้ความดันสถิตของการไหลลดลง การไหลในบริเวณดังกล่าวนี้จึงเป็นบริเวณที่ inviscid core มีผลต่อ boundary layer ทำให้การพัฒนาของ boundary layer แตกต่างจากการพัฒนาของการไหลบน flat plate ดังนั้นการคำนวณเกี่ยวกับการไหลในบริเวณนี้จึงต้องพิจารณาถึงอิทธิพลของ core flow และ boundary layer ควบคู่กันไป และที่ระยะการไหลไกลออกไป boundary layer จะโตมาบรรจบกันที่บริเวณกึ่งกลางท่อ inviscid core ก็จะหายไป ทำให้เกิดการกระทำต่อกันของ boundary layer ซึ่งเกิดขึ้นมาจากผนังด้านอื่น การพัฒนาของการไหลก็จะยังดำเนินต่อไปจนกระทั่งในที่สุดการไหลก็จะเข้าสู่สภาวะพัฒนาเต็มที่ ซึ่งมีรูปร่างความเร็วและความดันลดที่เกิดขึ้นตามความยาวท่อคงที่ ส่วนในการไหลแบบปั่นป่วนนั้น สภาวะพัฒนาเต็มที่นอกจากจะมีรูปร่างความเร็วเฉลี่ยคงที่แล้ว ปริมาณทาง turbulence ที่เกิดขึ้นก็ต้องมีลักษณะที่คงเดิมเช่นกัน

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2 การไหลแบบราบเรียบภายในท่อ (Laminar Flow in a Pipe)

2.2.1 ท่อกลม

มีนักวิจัยหลายกลุ่มได้คำนวณความยาวในการพัฒนาเข้าสภาวะพัฒนาเต็มที่ (นับเริ่มตั้งแต่ทางเข้าของท่อ) ของการไหลแบบราบเรียบภายในท่อกลม ซึ่งเรียกว่า ความยาวทางเข้า (entry length, x_L)โดยการคำนวณสามารถแบ่งได้คร่าว ๆ เป็น 2 ประเภท คือ ประเภทแรกใช้การคำนวณโดยยึดสมการ Navier-Stokes เต็มรูปแบบเป็นหลัก และประเภทที่สอง ใช้การคำนวณโดยยึดสมการ boundary layer เป็นหลัก โดยทั้งสองประเภทนี้ยึดเอารูปร่างความเร็วแบบสม่ำเสมอเป็นรูปร่างความเร็วเริ่มต้นที่ทางเข้า

สำหรับการคำนวณประเภทแรกนั้น มีผลงานของ Chen (1973) ซึ่งอาศัยการคำนวณค่าตัวแปรไร้มิติของความดันลดส่วนเกินในบริเวณทางเข้า $K(x)$ (dimensionless excess pressure drop in the entrance region) ซึ่งนิยามโดย

$$\begin{aligned}\frac{P_0 - P_x}{\frac{1}{2}\rho U^2} &= 2C_{f_{app}}\frac{x}{D} \\ &= 2C_{f_P}\frac{x}{D} + K(x)\end{aligned} \tag{2.1}$$

เมื่อ P_0 คือความดันเริ่มต้นตรงทางเข้า, P_x คือความดันที่หน้าตัด x ใด ๆ จากทางเข้า, $C_{f_{app}}$ คือค่า apparent friction coefficient, C_{f_P} คือค่า friction coefficient ของการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (Poiseuille friction coefficient) และ D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ ผลการคำนวณพบว่าความยาวทางเข้า x_L สามารถแสดงได้ในรูปของ

$$\frac{x_L}{D} = 0.056\,\mathrm{Re}_D + \frac{0.60}{1 + 0.035\,\mathrm{Re}_D}$$

และ

$$K(\infty) = 1.20 + \frac{38}{\mathrm{Re}_D} \tag{2.2}$$

Schmidt and Zeldin (1969) ได้นิยามค่าของ $K(x)$ คล้ายคลึงกับของ Chen แต่แตกต่างกันเล็กน้อย คือ

$$\frac{P_0 - P_x}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 4C_{f_{app}} \frac{x}{D}$$

$$= 4C_{f_P} \frac{x}{D} + K(x) \qquad (2.3)$$

โดยใช้การคำนวณด้วยวิธี finite difference กับสมการ Navier-Stokes เต็มรูปแบบ พบว่า ค่า $K(x)$ ในบริเวณทางเข้าของท่อกลม สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2

ดังนั้น จากรูปที่ 2.2 ระยะความยาวทางเข้าอาจประมาณได้จาก White (1974)

$$\frac{x_L}{D} \approx 0.08\,\mathrm{Re}_D + 0.7 \qquad (2.4)$$

โดยตัวเลข 0.7 ในสมการ (2.4) นั้น ได้จากการคำนวณของ Lew and Fung (1970) เพื่อทำให้สมการประมาณนี้ถูกต้องสำหรับการไหลแบบ creeping motion ด้วย

ในการคำนวณประเภทที่สอง ซึ่งยึดเอาสมการ boundary layer เป็นหลักก็มีผลการคำนวณของ Hornbeck (1964) ซึ่งพบว่า ระยะความยาวทางเข้าสามารถแสดงได้โดย

$$\begin{aligned} \frac{x_L}{D} &= 0.0565\,\mathrm{Re}_D \\ K(\infty) &= 1.28 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

เมื่อค่า $K(\infty)$ นิยามตามสมการ (2.1)

นอกจากนั้น ยังมีผลงานของ Langhaar (1942) ซึ่งคำนวณค่า local friction coefficient (C_f) ในบริเวณทางเข้าโดยอาศัยสมการ linearized momentum ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จากผลการคำนวณนี้ จึงสามารถประมาณได้ว่า (Kays and Crawford, 1980)

$$\frac{x_L}{D} = \frac{\mathrm{Re}}{20} \qquad (2.6)$$

จะเห็นได้ว่าที่ Re = 2300 ซึ่งเป็นค่าประมาณของ ค่า Re_{crit} ซึ่งการไหลจะเปลี่ยนจากการไหลแบบราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วน จะได้ $x_L/D = 115$ ซึ่งอาจจะประมาณได้ว่าการเกิดสภาวะความเร็วแบบพัฒนาเต็มที่ในกรณีการไหลแบบราบเรียบจะต้องใช้ระยะทางมากกว่า 100 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

ในทางตรงกันข้าม เมื่อเปรียบเทียบกับการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งมีการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างชั้นของของไหลโดยอาศัยการแปรปรวนของความเร็ว (velocity fluctuation) เป็นเหตุทำให้ boundary layer โตขึ้นอย่างรวดเร็ว จะพบว่า โดยทั่วไปรูปร่างความเร็วเฉลี่ยจะเข้าสู่สภาวะพัฒนา

เต็มที่โดยใช้ความยาวทางเข้าน้อยกว่าในกรณีของการไหลแบบราบเรียบ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่ารูปร่างความเร็วเฉลี่ยจะเข้าสู่สภาวะพัฒนาเต็มที่แล้วก็ตาม แต่รูปแบบความปั่นป่วน (turbulent structure) จะยังไม่เข้าสู่สภาวะพัฒนาเต็มที่ แต่จะต้องอาศัยระยะทางตามความยาวท่ออีกระยะหนึ่งจึงจะเข้าสู่สภาวะพัฒนาเต็มที่ หรืออีกนัยหนึ่ง ในการไหลเดียวกัน ความยาวทางเข้าของรูปแบบความปั่นป่วนจะมีค่ามากกว่าความยาวทางเข้าของรูปร่างความเร็วเฉลี่ย ซึ่งจุดนี้จะมีผลต่อการพิจารณาระยะทางการผสม (เช่น การผสมของมวล เป็นต้น) เพื่อให้สารที่มาผสมกันเข้ากันได้อย่าง Homogeneous

2.2.2 <u>ท่อสี่เหลี่ยมมุมฉาก</u>

จากการศึกษาของ Wiginton and Dalton (1970) พบว่า ความยาวทางเข้าของการไหลแบบราบเรียบภายในท่อสี่เหลี่ยมมุมฉาก สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\frac{x}{D_h} = C\mathrm{Re} \qquad (2.7)$$

เมื่อ D_h คือ ค่าเส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิก ซึ่งนิยามโดย D_h = 4 x พื้นที่หน้าตัด / ความยาวกรอบ

ดังนั้น สำหรับท่อสี่เหลี่ยมที่มีด้านยาวและด้านกว้าง $2a$ และ $2b$ ซึ่งมีอัตราส่วนของความยาวด้านคือ $\beta = 2b/2a$ โดยที่ $0 < \beta < 1$

จะได้ว่า
$$D_h = \frac{4ab}{a+b} = \frac{4b}{1+\beta} \qquad (2.8)$$

ค่าคงที่ C ในสมการ (2.7) มีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปร β ดังแสดงในตารางที่ 2.1

Miller and Han (1971) ได้ทำการคำนวณวิเคราะห์ (analytical method) หาค่า $K(\infty)$ ซึ่งนิยามตามสมการที่ (2.1) ได้ผลลัพธ์ตามตารางที่ 2.2

สำหรับรูปร่างความเร็วของการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ภายในท่อสี่เหลี่ยมมุมฉาก สามารถหาค่าได้จาก exact solution (Marco and Han, 1955) ดังนี้

$$-a \le z \le a, \; -b \le y \le b$$

$$u(y,z) = -\frac{16}{\pi^3}\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{a^2}{\mu} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}}{n^3}\left(1-\frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)}\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{2a}\right) x \frac{1}{n^3} \qquad (2.9)$$

2.3 การไหลแบบปั่นป่วนภายในท่อ

2.3.1 ท่อกลม

โดยปกติแล้วการไหลภายในท่อจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (ยกเว้นกรณีการไหลภายในท่อขนาดเล็กซึ่งของไหลมีความหนืดมาก ๆ) ซึ่งสำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนโดยใช้สมการ Navier-Stokes โดยตรงเพื่อหาค่าความเร็วที่ตำแหน่งใด ๆ ยังเป็นเรื่องที่ทำได้ยากมาก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องอาศัยการประมาณโดยวิธีอินทิกรัล (integral method) หรืออาศัยข้อมูลจากการทดลองนำมาหาความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็น empirical formula

สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนภายในท่อกลมในช่วงความยาวทางเข้า สิ่งที่มีอิทธิพลต่อการโตของ boundary layer ในช่วงนี้เป็นอย่างมากคือ ลักษณะของปากทางเข้าของการไหลก่อนไหลเข้าท่อ กล่าวคือ ถ้าปากทางเข้าเป็นแบบ smoothly converging nozzle จะทำให้ boundary layer ที่เกิดขึ้นในช่วงแรกจะเริ่มจากแบบราบเรียบ แล้วจึงจะพัฒนาเปลี่ยนแปลงเป็น boundary layer แบบปั่นป่วนในช่วงความยาวถัดไป และค่า Re_{crit} ที่เกิดขึ้นจะพบว่ามีค่ามากกว่า 2300 แต่ถ้าลักษณะของปากทางเข้าเป็นแบบ sharp-edged contraction ก็จะทำให้ boundary layer ที่เกิดขึ้นเป็นแบบปั่นป่วนในทันที ส่งผลทำให้ค่าความยาวทางเข้าที่เกิดขึ้นสำหรับในกรณีนี้มีค่าน้อยกว่าในกรณีแรก (Kays and Crawford, 1980)

ได้มีนักวิจัยหลายกลุ่มศึกษาระยะความยาวทางเข้าของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อกลมโดยการวิเคราะห์ด้วยวิธีอินทิกรัล (integral method) ผลการศึกษาได้สรุปไว้ในตารางที่ 2.3

ผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 2.3 นี้ ใช้นิยามของระยะความยาวทางเข้าว่าเป็นระยะจากทางเข้าท่อจนถึงจุดที่ boundary layer จากผิวท่อโตเข้ามาบรรจบที่กึ่งกลางท่อพอดี โดยให้ว่ารูปร่างความเร็วที่ทางเข้าเป็นแบบสม่ำเสมอ Latzko (1944) และ Zhi-qing (1982) ได้ทำการคำนวณทาง analytical โดยสมมุติให้รูปร่างความเร็วใน boundary layer เป็นแบบ power-law ในขณะที่ Bowlus and Brighton (1968) และ Na and Lu (1973) ได้ใช้การคำนวณเชิงตัวเลข (numerical method) โดยสมมุติใช้รูปร่างความเร็วใน boundary layer เป็นแบบ power-law เช่นเดียวกัน ส่วน Holdhusen (1952) และ Filippov (1958) ใช้รูปร่างความเร็วแบบ logarithm

2.3.2 <u>ท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัส</u>

จากการศึกษาของ Prandtl (1927) พบว่า ลักษณะของความเร็วเฉลี่ยในการไหลแบบปั่นป่วนในท่อเหลี่ยมจะมี 2 รูปแบบคือ การไหลปฐมภูมิ (primary flow) ซึ่งเป็นการไหลไปตามแนวแกนการไหล และการไหลทุติยภูมิ (secondary flow) ซึ่งจะมีทิศตั้งฉากกับแนวแกนการไหล การไหลแบบพัฒนาเต็มที่ของการไหลทั้งสองส่วนคือ ปฐมภูมิ และทุติยภูมินั้น จะขึ้นอยู่กับความยาวและตำแหน่งภายในพื้นที่หน้าตัดของท่อ และถึงแม้ความเร็วเฉลี่ยของการไหลทุติยภูมิจะมีขนาดเล็กมาก (ประมาณ 1% ของขนาดของความเร็วเฉลี่ยของการไหลปฐมภูมิ) แต่ก็จะมีอิทธิพลต่อการบิดรูปของรูปร่างความเร็วในแนวแกนการไหล (axial velocity profile) นอกจากนี้จะยังทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานภายในท่อ มีค่าเพิ่มขึ้นอีกประมาณ 10 % อีกด้วย สำหรับความเร็วทั้งสองส่วนดังกล่าวอาจแสดงได้ดังรูปที่ 2.4 (Nikuradse, 1926)

Harnett et al.(1962) ได้วิเคราะห์คำนวณความยาวทางเข้าของท่อสี่เหลี่ยมพบว่า ถ้าการไหลมีทางเข้าเป็นแบบ smooth entrance ความยาวทางเข้าจะยาวกว่าในกรณีของการไหลที่มีทางเข้าเป็นแบบ abrupt entrance ทั้งนี้ ค่าความยาวทางเข้าของท่อสี่เหลี่ยมที่มีค่า aspect ratio, β = 0.1, 0.2 และ 1 และมีลักษณะของทางเข้าเป็นแบบ abrupt entrance จะสามารถประมาณได้จาก

$$\frac{x}{D_h} \begin{cases} \approx \ 40 & : \ \mathrm{Re} = 3000 \\ < \ 20 & : \ \mathrm{Re} > 4000 \end{cases} \tag{2.10}$$

อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์ของ Harnett et al.(1962) นี้ มิได้คำนึงถึงผลของการไหลทุติยภูมิแต่อย่างใด

2.4 ความดันสูญเสีย (Head loss)

ความดันสูญเสียที่เกิดขึ้นจากการไหลภายในท่อมีสาเหตุจากสิ่งสำคัญ 2 ประการคือ ความดันสูญเสียที่เกิดจากผลของแรงเสียดทานที่เกิดจากลักษณะของพื้นผิวท่อ ซึ่งเกิดขึ้นจากการไหลที่เป็นสภาวะพัฒนาเต็มที่ในท่อที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดคงที่ โดยค่าความดันสูญเสียที่เกิดจากสาเหตุนี้จะเรียกว่า ความดันสูญเสียหลัก (major loss, h_l) และสำหรับความดันสูญเสียที่เกิดขึ้นจากลักษณะของทางเข้าข้องอ ข้อต่อ การเปลี่ยนแปลงขนาดพื้นที่การไหล การไหลผ่านแดมเปอร์ และอื่น ๆ เรียกว่าความดันสูญเสียรอง (minor loss, h_{l_m}) ดังนั้นผลรวมของค่าความดันสูญเสียอันมีสาเหตุมาจากปัจจัยทั้ง 2 ประการข้างต้น จึงเรียกว่า ความดันสูญเสียรวม (total head loss, h_{l_T}) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} \tag{2.11}$$

สำหรับความดันรวมสูญเสียอันเกิดจากการไหลของอากาศผ่านแดมเปอร์ จะพิจารณาได้จาก ความแตกต่างระหว่างค่าความดันรวมที่เกิดขึ้นบริเวณด้านหน้าและความดันรวมที่บริเวณด้านหลังของแผ่นแดมเปอร์ ซึ่งจะเป็นตำแหน่งที่การไหลเกิดการฟื้นตัว (Recovery) ของความดันจนกระทั่งมีค่าความดันสถิตสูงที่สุด ดังแสดงรายละเอียดในภาคผนวก ก ซึ่งค่าความดันรวมสูญเสียที่เกิดขึ้นจะแสดงอยู่ในรูปของค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสีย ดังสมการต่อไปนี้

$$K = \frac{\left(\hat{P}_{o2} - \hat{P}_{o1}\right)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{2.12}$$

โดยที่ $\hat{P}_o$ คือ ค่าเฉลี่ยของความดันรวมภายในหน้าตัด โดยวิธี area average

U คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหลก่อนเข้าแดมเปอร์

1 คือ หน้าตัดก่อนเข้าแดมเปอร์

2 คือ หน้าตัดซึ่งเกิดการฟื้นตัวของความดันจนกระทั่งมีค่าสูงที่สุด

สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนที่สภาวะพัฒนาเต็มที่นั้น ความดันสูญเสียหลักจะสามารถคำนวณได้จาก

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2} \tag{2.13}$$

โดยที่ f คือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน

L คือ ความยาวท่อ

D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางท่อ

U คือ ความเร็วเฉลี่ย

สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน ($\mathrm{Re} \le 10^5$) ภายในท่อผิวเรียบ สามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานได้จาก Blasius correlation ดังนี้

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \tag{2.14}$$

จากสมการ (2.13) พบว่าเมื่อการไหลเข้าสู่สภาวะพัฒนาเต็มที่แล้ว ความดันสถิตจะลดลงอย่างเป็นเชิงเส้นตามความยาวท่อที่ของไหลไหลผ่าน และสำหรับความดันสูญเสียรอง ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการแยกตัวของการไหล (separation) เมื่อของไหลไหลผ่านข้องอ ข้อต่อ แดมเปอร์หรือแม้กระทั่งการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ในการไหลอย่างรวดเร็ว จะสามารถคำนวณได้จาก

$$h_{l_m} = K\frac{U^2}{2} \tag{2.15}$$

โดยที่ K คือ สัมประสิทธิ์การสูญเสีย ซึ่งสำหรับในกรณีของการไหลผ่านแดมเปอร์ สามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (2.12) ดังแสดงข้างต้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย