เมทริกซ์ริงซึ่งมีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล

นายไอศุริย สุดประเสริฐ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2540

ISBN 974-638-298-5

MATRIX RINGS HAVING THE INTESECTION PROPERTY
OF QUASI - IDEALS

Mr. Isuriya Sudprasert

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics

Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University

Academic Year 1997
ISBN 974-638-298-5

Thesis Title	Matrix Rings Having the Intersection Property of Quasi-ideals
By	Mr. Isuriya Sudprasert
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

....Dean of Graduate School
(Professor Supawat Chutivongse M.D.)

Thesis Committee

....Chairman
(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

....Thesis Advisor
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

....Member
(Dr. Pornchai Satravaha Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

ไอศุริย สุดประเสริฐ : เมทริกซ์ริงซึ่งมีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล
(MATRIX RING HAVING THE INTERSECTION PROPERTY OF QUASI-IDEALS)
อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์, 38 หน้า. ISBN 974-638-298-5

ให้ R เป็นริง สำหรับสับเซต A และ B ของ R ให้ AB แทนเซตของผลบวกจำกัดทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ โดยที่ $a_i \in A$ และ $b_i \in B$ เรียกสับกรุปภายใต้การบวก Q ของ R ว่า*ควอซี-ไอดีล*ของ R ถ้า $RQ \cap QR \subseteq Q$ เรากล่าวว่าควอซี-ไอดีล Q ของ R *มีสมบัติส่วนร่วม* ถ้ามีไอดีลทางซ้าย H และไอดีลทางขวา K ของ R ซึ่งทำให้ $Q = H \cap K$ ถ้าแต่ละควอซี-ไอดีลของ R มีสมบัติส่วนร่วม เรากล่าวว่า R *มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล*

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ให้ $M_n(R)$ และ $SU_n(R)$ แทนเมทริกซ์ริงเต็มขนาด $n \times n$ บน R และริงของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่เป็นสามเหลี่ยมบนโดยแท้บน R ทั้งหมด ตามลำดับ

สำหรับจำนวนเต็มบวก m ให้ $\mathbb{Z}_m$ แทนริงของจำนวนเต็มมอดูโล m ทั้งหมด

ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ R เป็นริงซึ่งมีเอกลักษณ์, $|R| > 1$ และแคแรกเทอริสติกของ R ไม่เท่ากับ 2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งทำให้ $SU_n(R)$ มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล แล้ว $n \leq 3$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า R เป็นริงการหาร แล้วทุกควอซี-ไอดีลของ $SU_3(R)$ เป็นไอดีลทางซ้ายหรือไอดีลทางขวา ดังนั้นสำหรับทุกริงการหาร R $SU_3(R)$ มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล

ทฤษฎีบท 3 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าทุกควอซี-ไอดีลของ $SU_3(\mathbb{Z}_{p^k})$ เป็นไอดีลทางซ้ายหรือไอดีลทางขวา ดังนั้น $SU_3(\mathbb{Z}_{p^k})$ มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล

ทฤษฎีบท 4 ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $p > 2$ แล้ว $M_n(k\mathbb{Z}_{2p})$ มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล

(2) ถ้า $p > 3$ แล้ว $M_n(k\mathbb{Z}_{3p})$ มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดีล

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ไอศุริย สุดประเสริฐ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

C825063 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: MATRIX RING / QUASI-IDEAL
ISURIYA SUDPRASERT : MATRIX RING HAVING THE INTERSECTION PROPERTY OF QUASI-IDEALS. THESIS ADVISOR : ASSO.PROF.YUPAPORN KEMPRASIT, Ph.D. 38 pp. ISBN 974-638-298-5

Let R be a ring. For subsets A and B of R, let AB denote the set of all finite sums of the form $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ where $a_i \in A$ and $b_i \in B$. An additive subgroup Q of R is said to be a *quasi-ideal* of R if $RQ \cap QR \subseteq Q$. A quasi-ideal Q of R is said to *have the intersection property* if there exist a left ideal H and a right ideal K of R such that $Q = H \cap K$. If each quasi-ideal of R has the intersection property, we say that R *has the intersection property of quasi-ideals.*

For a positive integer n, let $M_n(R)$ and $SU_n(R)$ denote the full $n \times n$ matrix ring over R and the ring of all strictly upper triangular $n \times n$ matrices over R, respectively.

For a positive integer m, let $\mathbb{Z}_m$ denote the ring of integers modulo m.

The main results of this research are as follows.

Theorem 1. Let R be a ring with identity, $|R| > 1$ and $\mathrm{char}(R) \neq 2$. If n is a positive integer such that $SU_n(R)$ has the intersection property of quasi-ideals, then $n \leq 3$.

Theorem 2. If R is a division ring, then every quasi-ideal of $SU_3(R)$ is a left ideal or a right ideal. Hence for every division ring R, $SU_3(R)$ has the intersection property of quasi-ideals.

Theorem 3. Let k be a positive integer and p a prime. Then every quasi-ideal of $SU_3(\mathbb{Z}_{p^k})$ is a left ideal or a right ideal. Hence $SU_3(\mathbb{Z}_{p^k})$ has the intersection property of quasi-ideals.

Theorem 4. Let n and k be positive integers and p a prime. Then the following statements hold.

(1) If $p > 2$, then $M_n(k\mathbb{Z}_{2p})$ has the intersection property of quasi-ideals.

(2) If $p > 3$, then $M_n(k\mathbb{Z}_{3p})$ has the intersection property of quasi-ideals.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต อิศริยา สุดประเสริฐ
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์
ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis advisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying. Furthermore, I thank Miss Chariya Uiyyasathain for sending me a text book in quasi-ideals of rings and semigroups.

In particular, I would like to express my gratitude to my family, teachers, and friends for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

INTRODUCTION

Quasi-ideals of rings were first introduced by O. Steinfeld in [3]. They are generalizations of left ideals and right ideals. Many researches on quasi-ideals of rings have been published. An intersection of a left ideal and a right ideal of a ring R is a quasi-ideal of R. It is well-known that not every quasi-ideal of an arbitrary ring can be obtained in this way ([2]). A quasi-ideal of R is said to *have the intersection property* if it is the intersection of a left and a right ideal of R. Necessary and sufficient conditions for a quasi-ideal of a ring to have the intersection property were given in [5]. A ring in which every quasi-ideal has the intersection property is said to *have the intersection property of quasi-ideals*. It is known from [4] that a ring with a left or a right identity has the intersection property of quasi-ideals and every regular ring has the intersection property of quasi-ideals. Z. Moucheng, C. Yuqun and L. Yonghau gave necessary and sufficient conditions for a ring to have the intersection property of quasi-ideals in [2].

In ring theory, matrix rings are considered to be important. Matrix rings having the intersection property of quasi-ideals are studied in this research.

Preliminaries for this thesis is given in Chapter I. Many remarks of matrix rings and their quasi-ideals are introduced in this chapter. In Chapter II, the intersection property of quasi-ideals of rings of all strictly upper triangular $n \times n$ matrices over rings is studied. Rings that we emphasize on are rings with identity of characteristic $\neq 2$, division rings and rings of all integers modulo prime powers. We give in Chapter III many sufficient conditions for positive integers k and m such that the full $n \times n$ matrix rings over the ring $k\mathbf{Z}_m$ have the intersection property of quasi-ideals where $\mathbf{Z}_m$ is the ring of integers modulo m.