บทที่ 4

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สิ่งที่จำเป็นต้องกำหนด คือ ฟังก์ชันการแปรผันรูปร่างของเอลิเมนต์ และฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ พิจารณาตามลำดับ ดังนี้

4.1 ฟังก์ชันการแปรผัน

ในสมการที่ (2.16) ได้แสดงฟังก์ชันของพลังงานศักย์รวม แต่ในการพิจารณาการแก้ปัญหาที่มีผลลัพธ์แสดงอยู่ในรูปของค่าไร้มิติ ทำให้จำเป็นต้องแปลงฟังก์ชันพลังงานศักย์รวมเบื้องต้น ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไร้มิติด้วย ดังนั้นฟังก์ชั่นพลังงานศักย์รวมที่เขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าเคลื่อนตัว มิติของเอลิเมนต์เปลือก และคุณสมบัติของวัสดุ คือ

$$
\begin{aligned}
\left(1-\nu^2\right)\frac{J}{Eh} = \int_0^A\int_0^B \Bigg\{ & \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{1}{2} + \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\frac{1}{2} \\
& + \left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{y} + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{f}{AB}(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial x}w - \frac{f}{AB}(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial y}w \\
& + \frac{h^2}{24}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right) \\
& + \left(\frac{f}{AB}\right)^2(1-\nu)w^2 - \frac{P_3 w}{Eh}\left(1-\nu^2\right)\Bigg\}\, dxdy \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

ในการแปลงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไร้มิติ ตัวแปรต่างๆ ต้องอยู่ในรูปไร้มิติด้วย คือ ค่าเคลื่อนตัว u v w และตัวแปร x y เขียนให้อยู่ในรูปได้ดังนี้

u เขียนอยู่ในรูปไร้มิติ คือ $\hat{u} = \frac{u}{A}$

v เขียนอยู่ในรูปไร้มิติ คือ $\hat{v} = \frac{v}{B}$

w เขียนอยู่ในรูปไร้มิติ คือ $\hat{w} = \frac{hw}{AB}$

x เขียนอยู่ในรูปไร้มิติ คือ $\hat{x}=\dfrac{x}{A}$

y เขียนอยู่ในรูปไร้มิติ คือ $\hat{y}=\dfrac{y}{B}$

แทนค่าตัวแปรต่าง ๆนี้ลงในสมการที่ (4.1) จะได้สมการอยู่ในรูปไร้มิติ ดังนี้

$$\frac{(1-\nu^2)}{AB}\frac{J}{Eh}=\int_0^1\!\!\int_0^1\left\{\left(\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}\right)^2+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\right)^2\right)\frac{1}{2}+\left(\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}\right)^2+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\right)^2\left(\frac{B}{A}\right)^2\right)\frac{1}{2}\right.$$

$$+\left(\nu\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\right)-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\hat{w}\left(\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\hat{w}\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$+\left(\frac{f}{h}\right)^2(1-\nu)\hat{w}^2-\frac{P_3(AB)}{Eh^2}(1-\nu^2)\hat{w} \qquad (4.2)$$

$$\left.+\frac{1}{24}\left(\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}\right)^2\left(\frac{B}{A}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)^2\left(\frac{A}{B}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right)^2\right)\right\}d\hat{x}d\hat{y}$$

ดังนั้นจะเห็นว่ามีค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญที่กำหนดลักษณะของฟังก์ชันนี้ คือ

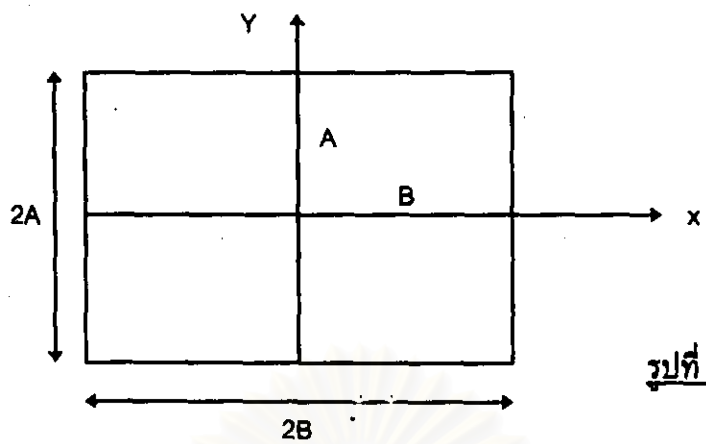
1.ค่า $\dfrac{f}{h}$

2.ค่า $\dfrac{A}{B}$

3.ค่า $\dfrac{P_3AB}{Eh^2}$

จะสังเกตได้ว่า ปัญหาอยู่ในระหว่าง ค่า $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ มีค่า 0 ถึง 1 ซึ่งหมายความว่าเปลือกที่เราพิจารณานั้นมีความยาวในแนวแกน x และความยาวในแนวแกน y เท่ากับค่า A และ B แต่ในความเป็นจริง ความยาวในแนวแกน x และความยาวในแนวแกน y จะเป็นสัดส่วนกับ ค่า A และ B เช่นเป็น 2 เท่า เป็นต้น จึงทำให้เกิดพารามิเตอร์ขึ้นอีกตัวเพื่อกำหนดรูปร่างของปัญหาได้อย่างแน่นอนเป็นค่าที่ 4 คือ

4.อัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวแกน x กับ ค่า A หรืออัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวแกน y กับ ค่า B ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากัน ดังแสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 8

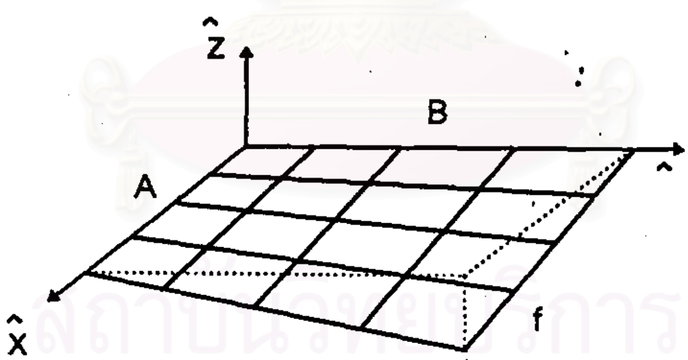


รูปที่ 8

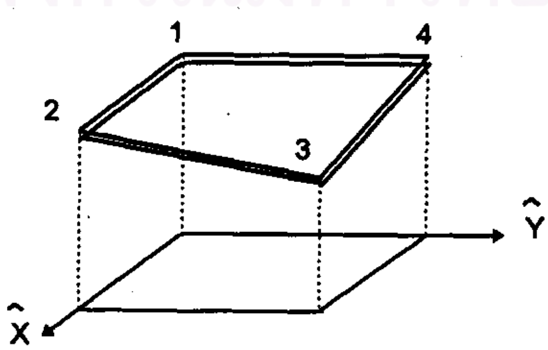
จากรูปตัวอย่างจะเห็นว่าค่าความกว้างและ ความยาวของเปลือกบางมีค่าเท่ากับ 2 เท่าของค่า A และ B ตามลำดับ ดังนั้นอัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวแกน x กับค่า A และอัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวแกน y กับ ค่า B ของรูปนี้มีค่าเท่ากับ 2

4.2 รูปร่างของเอลิเมนต์

รูปร่างของเอลิเมนต์ที่ใช้พิจารณาคือ รูปเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ ซึ่งเป็นรูปร่างย่อยของปัญหาที่พิจารณา เนื่องจากฟังก์ชันแปรผันที่ใช้พิจารณามาจากเอลิเมนต์ที่มีรูปเป็นเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ ทำให้สามารถแทนรูปร่างของปัญหาได้เป็นอย่างดี ดังรูป



รูปที่ 9 เปลือกบางรูปไฮปาร์แบบตื้นที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อย



รูปที่ 10 รูปร่างของเอลิเมนต์ย่อย

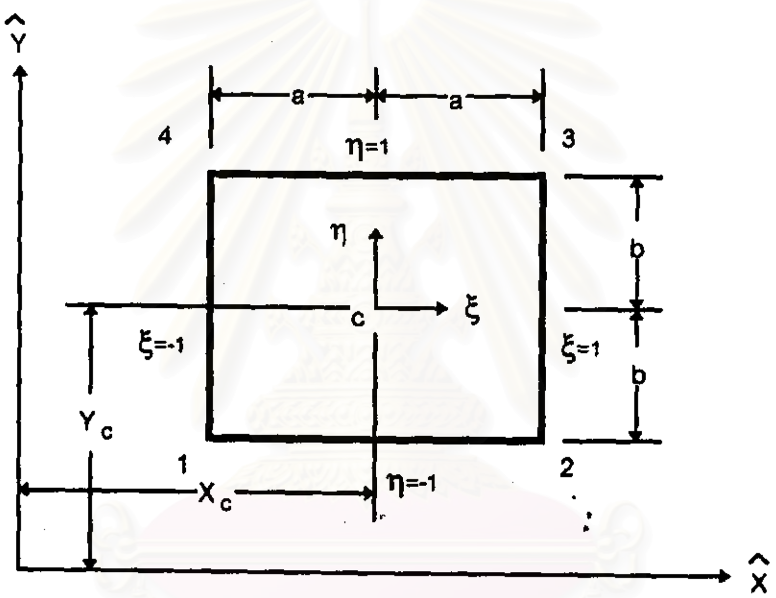
4.3 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่ใช้แทนค่าเคลื่อนตัวมี 2 แบบ ใช้กับค่าเคลื่อนตัวที่แบ่งเป็น 2 กลุ่มคือ

1.ค่าเคลื่อนตัว u และ v

2.ค่าเคลื่อนตัว w

4.3.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าเคลื่อนตัว u และ v



รูปที่ 11 พิกัดธรรมชาติ ξ-η

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าเคลื่อนตัว u และ v ถูกกำหนดให้เขียนอยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ξ-η เนื่องจากจะทำให้ง่ายในการอินทิเกรตและการเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณหาการอินทิเกรตนี้บนพื้นที่เอลิเมนต์ เขียน u และ v อยู่ในรูปของเมตริกซ์คูณเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$u = \lfloor N_i \rfloor \{u_i\} \qquad \text{โดย } i = 1,2,3,4 \tag{4.3}$$

$$v = \lfloor N_i \rfloor \{v_i\} \qquad \text{โดย } i = 1,2,3,4 \tag{4.4}$$

โดย

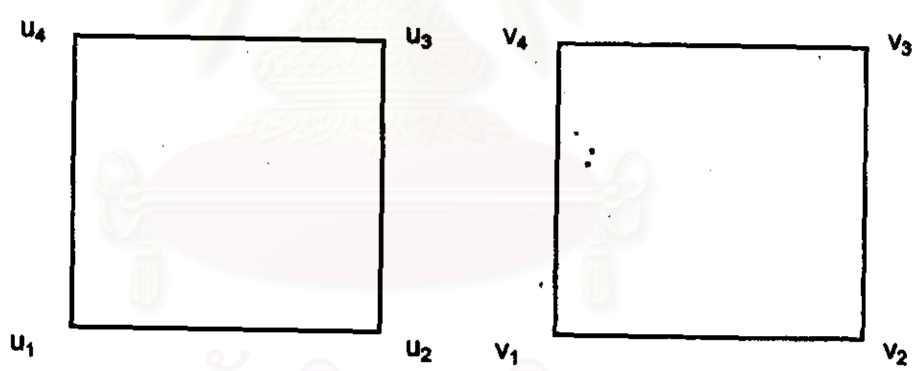
$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0) \qquad i = 1,2,3,4$$

$$\xi_0 = \xi\xi_i \qquad \eta_0 = \eta\eta_i$$

$$\xi = \frac{(\hat{x} - \hat{x}_c)}{a} \qquad \eta = \frac{(\hat{y} - \hat{y}_c)}{b}$$

โดยที่ subscript "c" แทนจุด ณ จุดศูนย์ถ่วง c ของเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ของ u และ v จะมีจุดต่ออยู่ที่มุมทั้ง 4 ของเอลิเมนต์ และเรียงลำดับ 1 2 3 4 ทวนเข็มนาฬิกา มีระดับขั้นความเสรีทั้งหมดเท่ากับ 4 (4 DOF) แต่ละจุดต่อจะมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 1 คือมีตัวไม่รู้ค่า 1 ตัวต่อ 1 จุดต่อซึ่งก็คือค่า u หรือ v นั่นเอง แสดงได้ดังรูปที่ 12



<u>รูปที่ 12</u> ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อทั้ง 4 จุดของค่าเคลื่อนตัว u และ v ของเอลิเมนต์

จะเห็นได้ว่า u และ v มีลักษณะการกระจายโดยประมาณบนเอลิเมนต์อยู่ในเชิงเส้น 2 ทิศทาง (bilinear) และจะสังเกตเห็นว่า ถ้าเอลิเมนต์ย่อย 2 เอลิเมนต์ที่ตำแหน่งใดๆก็ตามมีค่า a และ b เดียวกันแล้ว จะทำให้มีฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมือนกันโดยไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเอลิเมนต์นั้นๆ ดังนั้นถ้าเราแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ที่มีขนาดเท่ากันแล้ว เอลิเมนต์ทุกตำแหน่งจะมีฟังก์ชันการประมาณภายในเหมือนกัน ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการคำนวณและเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์

4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าเคลื่อนตัว w

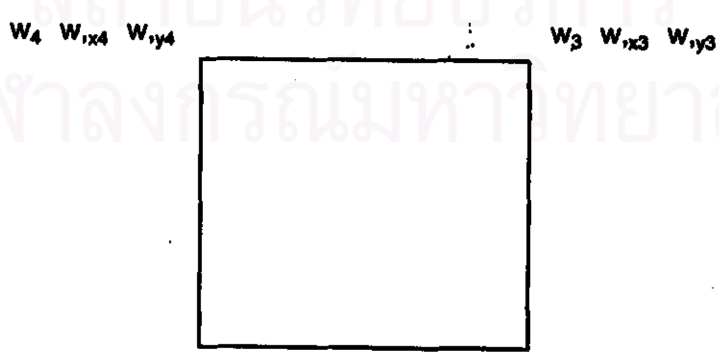
ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าเคลื่อนตัว w ถูกเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ξ-η เช่นเดียวกับค่าเคลื่อนตัว u และ v โดยเหตุผลเดียวกัน เขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์คูณเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$w = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad , \quad \phi_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ w,_{xi} \\ w,_{yi} \end{Bmatrix} \quad i = 1,2,3,4$$

โดย (4.5)

$$N_i = \frac{1}{8}\{(\xi_0+1)(\eta_0+1)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2), \quad a\xi_i(\xi_0+1)^2(\xi_0-1)(\eta_0+1), \quad b\eta_i(\xi_0+1)(\eta_0+1)^2(\eta_0-1)\}$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าเคลื่อนตัว w จะเป็นแบบไม่สอดคล้องดังได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 1 มีจุดต่ออยู่ที่มุมทั้ง 4 ของเอลิเมนต์ และเรียงลำดับ 1 2 3 4 ทวนเข็มนาฬิกา มีระดับขั้นความเสรีทั้งหมดเท่ากับ 12 (12 DOF) แต่ละจุดต่อจะมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 3 คือ w $w,_x$ และ $w,_y$ ซึ่งก็คือตัวไม่รู้ค่าที่แต่จุดต่อนั้นเอง แสดงได้ดังรูปที่ 13



<u>รูปที่ 13</u> ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อทั้ง 4 จุดของค่าเคลื่อนตัว w ของเอลิเมนต์

4.4 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เมื่อรู้ฟังก์ชันพลังงานศักย์รวม รูปร่างของเอลิเมนต์ และฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์แล้ว จึงเริ่มทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นมา โดยเริ่มจากการแทนค่าเคลื่อนตัว u v และ w ซึ่งเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์คูณเมตริกซ์ตามสมการที่ (4.3) (4.4) และ (4.5) ลงในฟังก์ชันพลังงานศักย์รวมคือสมการที่ (4.2) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการที่มีความยาวและซับซ้อนยิ่งขึ้น ดังนั้นจึงทำการแยกเขียนแต่ละเทอมเพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ และง่ายในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันโดยหาค่าต่ำสุดของแต่ละเทอมแทนแล้วนำมารวมกัน ซึ่งแต่ละเทอมจะเขียนตามลำดับได้ดังนี้ คือ

$$\iint\left(\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}\right)^2+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\right)^2\right)\frac{1}{2}d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{u}\}+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\right)\frac{1}{2}d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}\right)^2+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\right)^2\left(\frac{B}{A}\right)^2\right)\frac{1}{2}d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{v}\}\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{v}\}+\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^2\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{v}\}\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{v}\}\right)\frac{1}{2}d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(\nu\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\right)d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(\nu\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{v}\}+\frac{(1-\nu)}{2}\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{v}\}\right)d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\hat{w}\left(\frac{B}{A}\right)\right)d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\left(\frac{B}{A}\right)\left\lfloor\frac{\partial N_v}{\partial\hat{x}}\right\rfloor\{\hat{v}\}\lfloor N_w\rfloor\{\hat{w}\}\right)d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\hat{w}\left(\frac{A}{B}\right)\right)d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(-\left(\frac{f}{h}\right)(1-\nu)\left(\frac{A}{B}\right)\left\lfloor\frac{\partial N_u}{\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{u}\}\lfloor N_w\rfloor\{\hat{w}\}\right)d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(\left(\frac{f}{h}\right)^2(1-\nu)\hat{w}^2\right)d\hat{x}d\hat{y}=\iint\left(\left(\frac{f}{h}\right)^2(1-\nu)\lfloor N_w\rfloor\{\hat{w}\}\lfloor N_w\rfloor\{\hat{w}\}\right)d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(-\frac{P_3(AB)}{Eh^2}(1-\nu^2)\hat{w}\right)d\hat{x}d\hat{y} = \iint\left(-\frac{P_3(AB)}{Eh^2}(1-\nu^2)\lfloor N_w \rfloor\{\hat{w}\}\right)d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}\right)^2\left(\frac{B}{A}\right)^2\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y} = \iint\left(\left(\frac{B}{A}\right)^2\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{x}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{x}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)^2\left(\frac{A}{B}\right)^2\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y} = \iint\left(\left(\frac{A}{B}\right)^2\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{y}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{y}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(2\nu\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y} = \iint\left(2\nu\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{x}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{y}^2}\right\rfloor\{\hat{w}\}\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y}$$

$$\iint\left(2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right)^2\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y} = \iint\left(2(1-\nu)\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{w}\}\left\lfloor\frac{\partial^2 N_w}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right\rfloor\{\hat{w}\}\right)\frac{1}{24}d\hat{x}d\hat{y}$$

จากนั้นจึงทำการหาค่าอินทิเกรตของแต่ละเทอมซึ่งจะเห็นว่า ฟังก์ชันในแต่ละเทอมนั้นมีความซับซ้อน ทำให้ไม่สะดวกและเสียเวลามากในการที่จะหาค่าอินทิเกรตด้วยมือ และยังก่อให้เกิดความผิดพลาดได้ง่ายอีกด้วย ดังนั้นจึงได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปแมทแคด 6.0 (Mathcad 6.0) ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สามารถหาค่าอินทิเกรตและค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ถูกต้องและรวดเร็ว เพื่อช่วยในการหาค่าอินทิเกรตและค่าต่ำสุดของเทอมฟังก์ชันแต่ละเทอม

เมื่อได้ผลลัพธ์จากการอินทิเกรตของแต่ละเทอมแล้ว นำผลลัพธ์ที่ได้ไปหาค่าต่ำสุดตามสมการ (2.18) โดยใช้อนุพันธ์เทียบกับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้นๆ นั่นคือ

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_1} = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \phi_2} = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \phi_3} = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \phi_4} = 0$$

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ w_{,xi} \\ w_{,yi} \end{Bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4$$

โดยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์มีทั้งหมด 20 ตัว ซึ่งจะทำการหาค่าต่ำสุดเทียบกับตัวไม่รู้ค่าตามลำดับดังนี้คือ

$u_1 \; v_1 \; w_1 \; w_{,x1} \; w_{,y1} \; u_2 \; v_2 \; w_2 \; w_{,x2} \; w_{,y2} \; u_3 \; v_3 \; w_3 \; w_{,x3} \; w_{,y3} \; u_4 \; v_4 \; w_4 \; w_{,x4} \; w_{,y4}$

จะทำให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ทั้งหมด 20 สมการ เขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{(20\text{x}20)}{[K]_e}\underset{(20\text{x}1)}{\{\varphi\}_e} = \underset{(20\text{x}1)}{\{F\}_e}$$

โดย

$[K]_e$ คือ เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง

$\{\phi\}_e$ คือ เมตริกซ์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (Vector of Nodal Unknows)

$\{F\}_e$ คือ เมตริกซ์ของแรงกระทำ (Load Vector)

ฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งและของเมตริกซ์ของแรงกระทำมีรายละเอียดอยู่ในภาคผนวก